

現代水文統計論

—水文頻度解析のモデル、手法とその評価—

Introduction of Contemporary Hydrological Statistics

— Models and methods in frequency analysis and their evaluation —

宝 馨

Kaoru TAKARA

1 はじめに

洪水や渇水などの生起特性を確率論的に解析するようになったのは1910年代米国においてである。その後、1930年代には米・独・仏などで対数正規分布や極値分布の研究が進められた。わが国では、戦後、岩井(1947)がそれらの研究を紹介するとともに、対数正規分布の解法を詳細に吟味し(岩井, 1949a), さらにわが国の主要河川に適用した(岩井, 1949b)。石原・岩井(1949)は、このような水文統計学(水文頻度解析)の考え方を河川計画へ導入することを提案した。こうした経緯ののち、1958(昭和33)年の建設省「河川砂防技術基準(案)」において計画高水流量の決定に際して確率洪水概念を基準とすることが明確化され、今日の河川計画に定着するに至ったのである。

その後、1970年頃までの間に、角屋、高瀬、石黒、長尾らの精緻な研究が続々となされ、わが国における水文統計解析の手法が確立された。特に、角屋(1964)、岩井・石黒(1970)の著書が、これらの手法を体系づけ、実務において広く用いられるところとなった。戦後の治水施設整備の緊急性と高度経済成長とにより、次々と治水関連事業が進展したが、その際にこれらの水文統計の手法が大きな役割を果たしてきた。

さて、その後の時間の経過に伴い、データの蓄積が進み、コンピュータが発達するとともに、新たな統計技法が提案されており、これまで長年にわたって慣用されてきた手法の見直しや再整理が可能となっている。一方では、近年、治水事業の必要性、経済的妥当性が厳しく問われるようになり、事業や計画・設計についての情報公開や説明責任が求められている。すなわち、解析の途中の経過を明らかにし、判断の基準を明確にする必要が出てきている。また、計画立案サイドにおいても、基本高水及び計画高水流量の算定において、従来のような降雨確率評価に基づく方法に加えて、流量そのものの確率評価を行うことが検討され始めている。まさに現在、この分野においても歴史の転換点であり、新しい考え方、新しいパラダイムへの変革の時期にあると言える。

本稿では、水文頻度解析における現代的なモデルと手法のいくつかを講述する。ただし、内容を1変数の頻度解析に限定し、今後の課題や新しい方向性について私見を述べる。なお、ごく最近までの水文統計学分野の包括的なレビューが、Handbook of Hydrology (Stedinger et al. (1993)), 水文・水資源ハンドブック(竹内ら(1997))や星(1998b)によって取りまとめられているので、併せて参照されたい。

2 水文データに関する基礎的考察

水工施設の設計・計画の基本量を定めるには、当該の水文データを収集し、そのデータに水文学的および確率統計学的観点から一定の評価を加えた後、その水文量がどのような頻度で生起するかといった問題を解き、所定の再現期間に対応する規模を求めるという手順を踏む。この手順を水文頻度解析という。

その際、水文学量がある確率法則に従って生起する確率変量であると仮定する。この確率生起性 (randomness) と、独立性・等質性 (対象とするデータ一つ一つが同じ母集団から全く独立に生起する) 及び定常性 (想定する確率分布が時間的に変化しない) が水文頻度解析の前提条件である。ここでは、まず、1 変数の水文頻度解析におけるこれらの前提条件に対する基本的考え方を述べておきたい。

[1] 本当に確率変量? 対象とする水文学量を確率変量と見做して良いかどうか。通常、自然現象の中で観測される量は確率変量 (random variable) であるとする考え方は広く受け入れられている。水文現象も自然現象であるから基本的には同様に正当化される。ただし、地点雨量から面積雨量を算定する際の処理、観測水位から洪水流量を算定する際の処理などにおいて、種々の問題が生じる可能性がある。雨量観測点の数や位置の変化、洪水流が複断面水路において洪水敷を上回るかどうかなどにより、データの性質が変わるおそれも否定できない。貯水池や遊水地における人為的な洪水流の貯留やあるいは破堤・越流などによる氾濫によって洪水流量の低減がある場合には、「貯留戻し」や「氾濫戻し」というような自然流況の復元作業が必要になる。このような作業の精度にも注意が必要である。これらの点については、解析前に十分吟味し、科学的・実用的観点から取り扱うデータの合理性を確認しておく必要がある。

[2] 本当に異常値? 代表的な水文学量として、豪雨データを例にとると、近年、当該地域でそれまでに経験したことのないような極めて大きな豪雨が各地で生起している (たとえば、岸原・武蔵 (1981)、高棹 (1983) など)。年最大降水量の系列を極値 (Gumbel) 確率紙にプロットするとそれまではほぼ一直線上に並んでいたのに、新たに生起した豪雨時のデータはその直線から大きく外れてプロットされることになり、元の直線から再現期間を推定すると、何千年、何万年という値になる。このようなデータは、異常値とみなされ、解析の対象外とされたり、何か特別な処理がなされることが多い。

しかし、本当にそれは異常値なのだろうか? 実は、そのような値の生起は十分あり得ることであり (石原 (1987)), 異常値であるという明確な根拠がない限り、棄却されるべきでない。水文・水資源ハンドブック (竹内ら (1997)) には、世界及び日本で生起した記録的豪雨の一覧表を掲げてある。地点雨量が異常値であるかどうかの判断には、このような豪雨記録が参考になろう。

データがさらに蓄積されると、異常値とみなされていた値の回りに次々と同様の値が観測されるという事態も生じてきている。ある地点ではそれまでに経験したこともない飛び抜けて大きな値が、実は、その周辺地域ではごく頻繁に生じていたりということも多い (岸原・武蔵 (1981))。すなわち、異常値とみなす錯誤が生じる大きな理由の一つは、データの少なさにあると言える。こうしたデータ不足の問題を解決する手段として、地域解析 (regional analysis) や、近代的観測開始以前の歴史的資料や事象生起の痕跡を利用する方法 (paleohydrologic analysis, 古水文学的解析) の適用が最近の水文頻度解析の一つの大きな流れとなっている (たとえば、Singh (1987))。

[3] 本当に同じ母集団? さて、データが十分に蓄積された場合においても、今度は別の問題が持ち上がってくる。それは、データが一直線上に並ばず、ある値を境に大きく屈曲することがあるという問題である。この場合、その値より上側のデータと下側のデータは現象として異なる母集団に属するのではないかという疑問が生じてくる。すなわち、降水の場合であれば、降水の発生過程に立ち帰って、水文気象学的・気象力学的観点からの厳密なデータの吟味が重要となる。こうした発生過程の解析、すなわち、現象の物理性を考慮した確率過程的 (stochastic) な観点からの解析に基づく新たな極値理論の展開が望まれるのである。こうした解析に基づいて、対象とする水文学量に適する分布関数をただ一つ決めることができるならば、観測データに依拠することなく、その分布関数を迷うことなく用いればよいわけである。

データの吟味の結果、二つ以上の異なる母集団の存在が明らかになったときには、それらの母集団の性質とその組み合わせによってどのような取り扱いをするかが異なることになる。たとえば、生起

原因別にデータを取り扱うことが必要になろう。ただし、データを細分化すると、データ数がまた少なくなるというジレンマに陥る。台風性豪雨による洪水であろうが、前線性豪雨による洪水であろうが、同じ堤防によってそれを防がなければならないこともまた確かである。現象解析論と計画論において、データの取り扱いはずと異ならざるを得ないように思われる。

このように、水文統計においては、データの吟味が基本的に最も重要であり、ここで強調しておきたいのは、単なる統計的 (statistical) な解析にとどまらず、確率過程的 (stochastic) な観点に立脚することが益々必要になってきているということである。しかし、データの吟味が stochastic な観点から十分なされたとしても、結局、所与の一群のデータが二つ以上の異なる母集団からのものと言明できない、あるいは、前述したような母集団の発生過程に基づく分布が確定できない、といった状況が当面ほとんどであろう。

[4] 本当に温暖化？ また、近年、地球温暖化などの気候変動問題が注目されているが、この影響を計画論にどのように取り込んでいくかについては、今のところ良いアイデアがない。当面温暖化傾向が続くとしても、将来、当該地域において降水量が増加するのか減少するのか、台風の発生・襲来が増えるのか減るのか、短時間に狭い範囲に降水が集中するのか、前線の停滞が長引いて長雨が続くのかどうか、などといった点が未解明である。CO₂ に代表される大気中の温室効果ガスの影響と太陽黒点の影響のどちらが地球上の気候変動や地域の気象変化に対して支配的かといったことについても定説はない。数年に1度は生起するエルニーニョによる異常気象と気候変動の関係も不明である。このような状況のもとで、気候変動 (あるいは温暖化) の影響を今すぐ計画論に持ち込むのは無理であると言える。周期性や傾向変動 (トレンド) を陽に考慮することは大変難しい。

[5] まとめ 以上を要するに、まず、計画立案者、解析者、受益者の間において確率論的アプローチについて上記のような観点からの基本的合意が必要である。確率論的アプローチは、現象合理性、経済合理性などの観点から今後も引き続き正当化され得るものと思われる。特に、国政レベルの一級河川では、これまでのやり方の継続性と全国的な統一性は今後も要求されるであろう。しかしながら、地方分権が進むとすれば、地域のことは地域で決め、計画や事業に対する責任も地域で持つというのであれば、あらゆる水系において同じやり方をする必要もないわけで、水系によっては既往最大主義、可能最大主義をとってもよい。データの蓄積が少ないような水系では確率論的考え方が必ずしも正当化されない場合もある。さらに言えば、いったん確率論的アプローチをやめたとしても何十年か後にデータが十分蓄積された後、再び確率主義に戻ってもよい。

その時点時点での技術水準・学術水準に応じて最善の方策をとるべきであり、それが時代に応じて変わっていくことは、海外の大河川の歴史を見ても決しておかしなことではない。ただ、方向性が短い期間に目まぐるしく変わるようでは計画論とは言えず、やはり五十年・百年の大計といった意識で計画立案作業に取り組まねばならない。色々と変革の時期にきている現代こそそういった議論を根本から真摯に行って、来たるべき時代に向けた新たな考え方を創出しなければならないであろう。その際、現行の方法がどのような考え方のもとに確立されていたか顧みておく必要がある。当時の担当者の西原 (1979) の記述が参考になる。

以下では、確率論的アプローチが正当化されるという前提のもとで、どのようなモデルや手法を用いていくべきかについて論述する。

3 水文頻度解析の手順

3.1 確率分布とリターンピリオド、T 年確率水量

前述のように、データの独立性・等質性・定常性の条件が満足される (正当化される) 場合、対象とする水文量の生起頻度は以下のような超過確率、非超過確率といった概念で表すことができる。

変量 X の確率密度関数を $f(x; \theta)$ 、累積分布関数（あるいは分布関数）を $F(x; \theta)$ とすると、

$$F(x; \theta) = \int_{-\infty}^x f(t; \theta) dt \quad (1)$$

であり、 x が指定されたとき、 $F(x; \theta)$ を x の非超過確率、 $1 - F(x; \theta)$ を超過確率という。ここに、 θ は、確率密度関数及び分布関数の特性を定める母数（parameter）ベクトルである。対象とする変量が、洪水流量のように大きいほど危険な場合は超過確率が危険度の指標とされ、渇水流量のように小さいほど問題な場合は非超過確率がその指標とされる。

水文量のある値 x_p の非超過確率（場合によっては超過確率）を p ($0 < p < 1$) とするとき、

$$T = \frac{1}{n(1-p)} \quad (2)$$

は、水文量 $X = x_p$ に対応するリターンピリオド（あるいは再現期間）と呼ばれる。ここに、 n は $F(x; \theta)$ の推定に用いた水文量 X の年間平均生起度数で、 $x_p = x_T$ ($T \geq 1$) を「 T 年確率水文量」（一般には、分位値、クオントイル (quantile)、確率点または再現確率統計量）と呼ぶ。 X として年最大水文量を取り扱うときは $n = 1$ であり、また、 $p = F(x_p)$ であるから、 T 年確率水文量 $x_T = x_p$ は $100p$ 「百分位値」 (percentile, パーセンタイル) に相当する。たとえば、50 年確率水文量は 98 百分位値、2 年確率水文量は 50 百分位値（すなわちメジアン）である。

3.2 従来の手順とその問題点

対象とする水文量の所与の値に対するリターンピリオドを求める、あるいは、所与のリターンピリオドに対応する水文量の値（確率水文量）を求める際に用いる確率分布（(1) 式の F 及び f ）を「水文頻度解析モデル」と呼ぶことにしよう。当該水文量の 1 組のデータが与えられたとき、その水文量が従う水文頻度解析モデルを決定するには、大略以下の手順を踏むのが通例である。

Step 1) [データの吟味] データの等質性・独立性などに関して、水文学的あるいは確率統計学的観点から検討する。

Step 2) [候補モデルの列挙] ヒストグラムや分布曲線を描き大体の分布形状を把握したのち、適当と思われる確率分布（頻度解析モデル）をいくつか選ぶ。

Step 3) [母数推定] データにそれらのモデルをあてはめる。この際、何らかの方法で母数を推定する。

Step 4) [モデル評価] モデルの良否を何らかの規準により比較検討し、最も良いと思われるモデルを選ぶ。

これら一連の手順は必ずしも確立されたものではなく、以下のような問題が残されている。

- ある水文資料に対して想定した確率分布すなわち頻度解析モデル（(1) 式の F 及び f ）の母数（ θ ）を推定するとき、どのような母数推定法を用いればよいか。それぞれの頻度解析モデルに対していくつかの母数推定法が提案されている。
- 降水量や流量などの水文資料は一般に観測期間が短く、小標本であることが多い。このとき、母数や確率水文量の推定値が大きく偏ったり、新たに観測されて追加されるデータによって著しく変動することがあるが、こうした場合の対処の仕方が確立されていない。
- 候補となり得る頻度解析モデルそのものが多種多様であり、どれを候補としたらよいかかわらない。すべての分布を試みる必要があるのかどうか。

- 水文資料に対して最適な頻度解析モデルを決定するとき、モデル評価の規準としてデータとモデルの適合度が用いられるが、規準ごとに選択される頻度解析モデルが異なったり、同程度の適合度を示すモデルが複数個ある。このとき、どのように最適分布を決めればよいのかが明らかにされていない。

3.3 確率水文量の変動性を考慮したモデル評価の手順

筆者は、以下のような考え方を導入した水文頻度解析の手順について検討を行った。まず、Step 1 においては、毎年極値水文量を対象として、周期的変動や傾向変動は陽には考慮せず（定常性の仮定）、データの等質性・独立性は満足しているものと仮定する。

Step 2 の候補モデルとして、正規分布（2母数）、対数正規分布（2母数、3母数）、PearsonIII型分布（2母数、3母数）、対数 PearsonIII型分布（3母数）、平方根指数型最大値分布（2母数、江藤ら（1986））、一般化極値（GEV）分布（3母数）、Gumbel 分布（2母数）、対数 Gumbel 分布（2母数、3母数）の 11 種を挙げる。このように多数の分布を取り扱うことの意味は、予め特定の分布を想定しないという立場から、なるべく多数の確率分布モデルを候補とすることにとすぎない。対象とする水文量の発生過程に基づく stochastic な解析からその水文量に適切な何らかの分布が特定できるのであれば、迷うことなくそれを用いればよい。

次に、Step 3 の母数推定については、分布により、また、同じ分布でも標本の大きさ（データ数） N により、良い母数推定値を与える推定法が異なる。しかしながら、最尤法は、どのような分布形に対しても実行でき、データ数が少ない場合を除いて、比較的良好な結果を得る。したがって、ここではすべての分布に対して最尤法を用いることにする。コンピュータの発達した今日、尤度関数の最大化問題は、コンピュータ上で瞬時に解くことができる。

問題は、上記の Step 4 である。従来はデータとモデルの適合度をモデルの評価規準としてきた。たとえば、確率紙上にプロットしたデータが直線上に並んでいるかどうか、あるいは、データのヒストグラムと確率密度関数がどの程度一致しているか、目視による一貫性（visual consistency）で判断する方法や、データと分布との適合度を数値化する方法、 χ^2 検定や Kolmogorov-Smirnov 検定のような適合度検定手法などがある。このように、適合度によりモデルを評価しようとする場合、適合度の優れたモデルがただ一つだけ定まればよい。ところが、当該水文量に対して同程度の適合度を示すモデルが複数個存在し、それらが異なる確率水文量を与えることがある。また、規準ごとに最良とみなされるモデルが異なることがある。こうした場合、どのモデルを最終的に採用すればよいのかについて、明確な提示がなされてこなかった。すなわち、適合度はモデル評価の規準としては不十分であり、何らかの新たな規準が必要である。

そこで、適合度評価に加えて、確率水文量の変動性をモデル評価の規準とすることを提案した。筆者が強調したいのは、データの蓄積が進んでも確率水文量が大きく変動しないような頻度解析モデルを選択するのが実用上望ましいということである。なぜならば、データの蓄積により確率水文量が大きく変動すると、その都度水工計画の大幅な見直しを要請されることになるからである。したがって、「データに対する適合度が良く、かつ、確率水文量の変動が小さいモデルが実用上望ましい」という観点から、以下のようなモデル評価の手順を考えた（宝・高棹（1988）、Takara and Takasao（1988））。

Step 1) [データの吟味] 前述。データの等質性・独立性を仮定する。

Step 2) [候補モデルの列挙] 上の 11 種の確率分布をすべて候補モデルとする。

Step 3) [母数推定] 前述。すべての分布に対して最尤法を用いる。

Step 4) [候補モデルの screening] 客観的な適合度評価指標を用いて、適合度の悪いモデルを候補モデルから除外する。

Step 5) [確率水文量の変動性の検討] Step 4 で残ったモデルについて、リサンプリング手法（後述）を用いて確率水文量の変動性を調べる。

Step 6) [最終モデルの決定] 確率水文量の変動が最も小さいモデルを選択する。

次節 4 では Step 3 と Step 4 について、5 では Step 5 と Step 6 について詳述する。

4 適合度の評価

データにあてはめた頻度解析モデルの適合度を評価する方法は、目視によるものと適合度の数値化によるものがある。以下に、この二つの方法の概略を示す。

4.1 目視による適合度評価

あてはめた頻度解析モデルの適合度を視覚的に評価する方法として、(i) 確率紙を用いる方法、(ii) Q-Q プロットによる方法（後述）、(iii) ヒストグラム（度数分布図）と確率密度関数を比較する方法の三つがよく用いられている。(i)、(ii) は、それぞれデータを確率紙上及び普通紙上にプロットして直線上に並んでいるかどうかを目視で判断して、適合度の良否を見る方法である。(iii) は、ヒストグラムと確率密度関数の形状を目視で判断して、適合度の良否を見る。

大阪の年最大日降水量のデータ（1889 年～1980 年の 92 年間；神田・藤田（1982））に対して、ヒストグラムと最尤法であてはめた頻度解析モデルの確率密度関数を描いたものが図 1 である。ピーク付近で良く適合しているように見える頻度解析モデルは、3 母数対数正規分布、3 母数対数 PearsonIII 型分布、平方根指数型最大値分布（SQRT-ET-max と記した）であるが、目視からだけではこの三つのモデルの優劣を判断するのは難しい。また、水工計画立案上この場合問題となる非超過確率の大きい部分（分布の右裾付近）の適合度についても同じく優劣をつけがたい。

4.2 適合度評価の客観的規準

適合度を定量的に評価してモデルの優劣を客観的に比較するのに、次の 4 種の評価規準が有用である。

a) 標準最小二乗規準（SLSC）これは、筆者らの提案したもので（高棹ら（1986）），

$$SLSC = \frac{\sqrt{\xi_{\min}^2}}{|s_{1-p} - s_p|} \quad (3)$$

ここに、 s_p, s_{1-p} は非超過確率が $p, 1-p$ に対応する標準変量（standardized or reduced variate）であり、通常は $p = 0.01$ とする。 ξ^2 は、 i 番目（ $i = 1, 2, \dots, N$ ）の順序統計量 $x_{(i)}$ に対応するあてはめた分布の標準変量 s_i と、適当に定められる確率 p_i に対応する標準変量 s_i^* との差の二乗平均で

$$\xi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - s_i^*)^2 \quad (4)$$

である。確率 p_i は、プロットイング・ポジション公式で与える。 $\xi_{\min}^2$ は、(4) 式を最小化したときの値、すなわち、最小二乗法を実行したときの分布とデータの差の二乗和であり、適合度の指標となる。分布によって標準変量のとり得る値が異なるので、異なる分布相互の比較のために $\xi_{\min}^2$ を標準化したものが SLSC である。

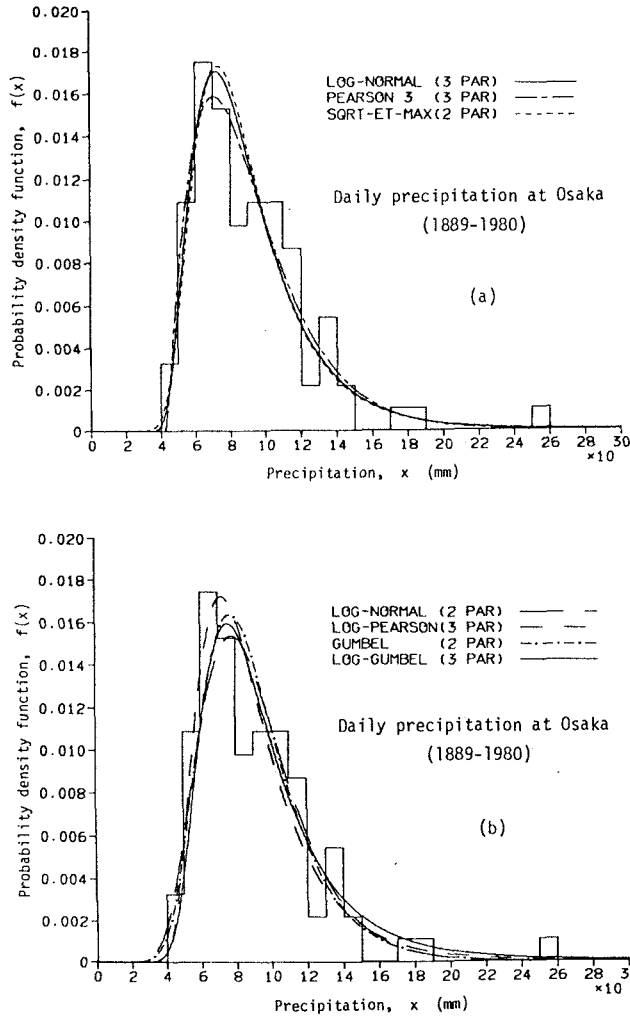


図 1: 大阪の年最大日降水量 (1889-1980) に最尤法であてはめた分布

SLSC の値が小さいほど良く適合していることになる。SLSC は、異なる確率分布の適合度を比較する相対的な規準であるだけでなく、適合度の絶対的な規準でもある。すなわち、 $SLSC \approx 0.02$ であれば良い適合度を示す。 $SLSC > 0.03$ であれば他の分布を試みるべきである。すなわち、確率紙にデータをプロットしたり、ヒストグラムと確率密度関数を描いたりすることなく、その値を計算するだけで適合度の良否の判定ができるという利点をもつ。

最小二乗法以外の方法であてはめを行った場合には、順序統計量 x_i を母数推定値 $\hat{\theta}$ を用いて変換した標準変量 s_i から (4) 式によって ξ^2 を求め、この ξ^2 を (3) 式に代入して SLSC を求める。

b) 相関係数 (COR) 順序統計量 $x_{(i)}$ に対する非超過確率 p_i をプロットイング・ポジション公式で与える。これに対応する標準変量 s_i^* と順序統計量 $x_{(i)}$ との相関係数は適合度を評価する規準となる。

$$COR = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{(i)} - \bar{x})(s_i^* - \bar{s}^*)}{\{[\sum_{i=1}^N (x_{(i)} - \bar{x})^2] \cdot [\sum_{i=1}^N (s_i^* - \bar{s}^*)^2]\}^{1/2}} \quad (5)$$

ここに、 $\bar{x}$, $\bar{s}^*$ はそれぞれ $x_{(i)}$, s_i^* の平均である。COR が 1 に近いほど適合度が良いと言える。こ

表 1: 大阪の年最大日降水量 (1889-1980) に最尤法であてはめた分布の適合度の比較

Prob. distribution		SLSC	MLL	AIC	COR
Normal	(2p)	0.07937	-450.151	904.301	0.93115
Log-normal	(3p)	0.01666①	-432.818①	871.636②	0.99699①
Log-normal	(2p)	0.02996	-434.914	873.828	0.99021
Pearson III	(3p)	0.03765	-432.902②	871.803③	0.98645
Pearson III	(2p)	0.06116	-438.172	880.344	0.96845
Log-Pearson III	(3p)	0.01749②	-432.910③	871.819	0.99668②
SQRT-ET-max	(2p)	0.02423	-433.091	870.182①	0.99322
G.E.V.	(3p)	0.02124	-433.167	872.335	0.99435
Gumbel	(2p)	0.04769	-434.414	872.829	0.98457
Log-Gumbel	(3p)	0.01858③	-433.167	872.335	0.99596③
Log-Gumbel	(2p)	0.03496	-434.531	873.062	0.98953

① denotes the best distribution for each criterion;

② and ③ the second and the third, respectively.

れは, Filliben (1975) によって提案された確率プロット相関係数 (PPCC) にほかならない。また, 普通目盛りで, s_i^* を縦軸に $x_{(i)}$ を横軸にとると, 両者は原点を通り傾き 1 の直線の付近にプロットされる (上田・河村 (1985))。これを「Q-Q プロット」という (例えば, 星ら (1998))。

c) 最大対数尤度 (MLL) 最尤法によって確率分布のあてはめを行った場合には尤度の大きさ自身が適合度の良否を表す指標となる。 N 個の資料 $x_1, x_2, \dots, x_N$ が与えられたとき, 尤度関数 $L(\theta)$ の対数をとった対数尤度 $\ln L(\theta)$ を最大化した最大対数尤度 (maximum log-likelihood, MLL) は次のようになる。

$$MLL = \ln L(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i; \hat{\theta}) \quad (6)$$

ここに, $f(x; \theta)$ は確率密度関数であり, $\hat{\theta}$ は母数ベクトルの最尤推定値である。同じデータに対して, 異なる確率分布をあてはめたとき, MLL の値の大きいモデルが適合度が良いということになる。

d) 情報量規準 (AIC) 一般に, 母数の個数が多い確率分布の方が適合度は良くなることに留意しなければならない。すなわち, 母数の個数が増えると, SLSC は小さくなっていくし, MLL は大きくなっていく。したがって, SLSC や MLL などを評価規準に用いると, 母数の個数の多いモデルが「良いモデル」であると評価されることになる。また, 頻度解析モデルの母数が多くなると, 式形が複雑になるだけでなく, 母数推定値や確率水文学量を求めることが煩雑になる。すなわち, モデル評価においては, モデルの簡潔さも適合度と同じく基本的な要件である。Akaike (1974) は, 適合度だけでなく母数の個数をも併せて評価できる情報量規準 (Akaike's information criterion, AIC) を提案した。

$$AIC = -2MLL + 2K \quad (7)$$

ここに, MLL は最大対数尤度であり, K は母数の個数である。母数が増えると, (7) 式の第 2 項は大きくなるが, 適合度は良くなるので第 1 項は小さくなる。このトレードオフ関係の中で AIC を最小とするようなモデルが最も「良い」モデルである, とするのが赤池の考え方である。MLL も AIC も情報理論を背景に持つ適合度規準であり, その誘導過程や応用例は坂元ら (1983) の成書に詳しい。

表 1 は, 大阪の年最大日降水量の場合について 4 種の評価規準を示したものである。表の中の丸付き数字は評価規準ごとの適合度の良いモデルの順位 (ベスト 3) である。SLSC と COR の第 1, 2, 3 位のモデルが同じであることから両者は似たような評価を与える (評価規準として同等の性能をもつ) ことが推測される。

前記の 11 種の頻度解析モデルを 10 種の極値降水量の資料 および 2 種の極値流量の資料にあてはめて得られた SLSC と COR を比較した結果（宝・高棹（1989）），SLSC と COR はだいたい一意的な関係にあることが知られている。十分な適合度と判断される基準値 $SLSC \approx 0.02$ に対応するのは $COR \approx 0.995$ であり， $SLSC < 0.03$ に対応するのは $COR > 0.990$ であると言える。

4.3 適合度のみによる評価の問題点

大阪のデータについて，これらの評価規準の値を求めた表 1 をいまいし詳しく見てみよう。この表によれば，すべての評価規準で順位が良いものは 3 母数対数正規分布であり，AIC のみが第 2 位，SLSC，MLL，COR は第 1 位である。その他の 3 母数の分布（PearsonIII 型，対数 PearsonIII 型，対数 Gumbel，GEV）はどれかの規準でベスト 4 に入っている。2 母数の分布では，平方根指数型最大値分布は AIC が第 1 位で，MLL は第 4 位，SLSC，COR は第 5 位である。このとき $SLSC = 0.02423$ でまずまずと言える。他の 2 母数のモデルはどれもベスト 5 にも入らず，適合度が相対的に良くない。表 1 や 後述の他のデータに対する同様の適合度の表を見てわかるように良い評価を得るモデルが規準ごとに異なる。

すなわち，モデルの良否を適合度のみによって評価するのは非常に難しいと言える。適合度は，「良いモデル」のための必要条件であり，モデル群を screening する（適合度の悪いモデルをふるい落とす）規準として有用である。図 1 や 表 1 に示したように同程度に良い適合度を示すモデルが二つ以上存在する場合には，適合度以外の別の評価規準が必要となるわけである。

5 確率水文量の変動性を規準としたモデル評価の手順

年最大値などの極値水文量を取り扱う場合，データと分布全体の適合度も重要であるが，分布の裾の部分の形状や適合度がより重視される。というのは，分布の裾，すなわち非超過確率の大きい部分（渇水などの場合のように小さな値を対象とするときは，超過確率の大きい部分）のわずかな形状の違いによって確率水文量の値がかなり異なってくるからであり，実際の種々の水工計画の立案はこの確率水文量の値を基礎としてなされるからである。

したがって，データの蓄積が進んでも（言い換えると，データの組合せが異なっても）確率水文量の推定値が大きく変動しないような頻度解析モデルが実用上望ましい。こうした考え方に立って，確率水文量の変動性をモデル評価の規準としてはどうか，というのが筆者の提案である。

確率水文量の変動性（推定精度）を調べるために，二つのリサンプリング手法 —jackknife 法 と bootstrap 法— を適用する。リサンプリング手法とは，簡単にいうと，現在手元にある 1 組のデータセット（標本）から，部分的にデータを抽出したり，繰返しを許して元の標本と同じデータ個数だけ抽出したりという操作を反復して多数のデータセットを作り出し，元の標本から得られる統計量の偏倚を補正したり，統計量の推定誤差を求めたりする手法である。こうして生成される多数のデータセットの統計処理は，近年コンピュータの発達とともに急速に進展しつつあり，CIS（computer intensive statistics）という統計学の一分野を形成している。

5.1 jackknife 法と bootstrap 法の概説

Quenouille は統計量の偏倚を推定・補正するためのノンパラメトリックな方法を 1949 年に発表した，その後（1958 年），その方法は偏倚だけでなく分散（すなわち統計量に含まれる誤差の程度）をも推定し得ることが Tukey によって指摘され jackknife 法と名づけられた。「jackknife」とは，Efron（1979）によれば，「はば広いいろいろな状況の中で有用な大雑把な道具」といった意味あいにつけら

れたものである。

bootstrap 法は、Efron が 1979 年に発表した方法で、jackknife 法と同様、統計量に含まれる誤差の程度を推定するものである。ただし、jackknife 法よりも多数回の繰返し計算を必要とする。「bootstrap」という名前は、そのアルゴリズムの中で元の標本自身が新たな標本をいくつも作り出して誤差推定を行うという自助的性質 (self-help nature) があるところからつけられた (Efron (1979))。

以下に、これら二つの方法の概略を示す。 N 個のデータ $x_1, x_2, \dots, x_N$ を用いて、その母集団の特性を表わす量を推定する構造 (統計量) を $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と記すことにする。

a) jackknife 法

i) N 個のデータすべてを用いて統計量を求め、それを

$$\hat{\psi} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (8)$$

と記す。

ii) i 番目のデータを除いた $N - 1$ 個のデータを用いて統計量を求めそれを次のように記す。

$$\hat{\psi}_{(i)} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \quad (9)$$

$\hat{\psi}_{(i)}$ は全部で N 個 ($i = 1, 2, \dots, N$) 求められる。

iii) 次式により $\hat{\psi}_{(i)}$ の平均 $\hat{\psi}_{(\bullet)}$ を求める。

$$\hat{\psi}_{(\bullet)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{(i)} \quad (10)$$

iv) Quenouille の偏り推定値は次式で与えられる。

$$\text{Bias} = (N - 1)(\hat{\psi}_{(\bullet)} - \hat{\psi}) \quad (11)$$

結局、偏りを補正した jackknife 推定値 $\tilde{\psi}_J$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_J &= \hat{\psi} - \text{Bias} \\ &= N\hat{\psi}_{(\bullet)} - (N - 1)\hat{\psi} \end{aligned} \quad (12)$$

統計量 ψ の分散の jackknife 推定値 $\hat{s}_J^2$ は、

$$\hat{s}_J^2 = \frac{N - 1}{N} \sum_{i=1}^N N(\hat{\psi}_{(i)} - \hat{\psi})^2 \quad (13)$$

によりそれぞれ求められる。なお、 $\tilde{\psi}_J$ は N^{-2} のオーダーの偏りをもつことが知られている (Efron (1982))。

b) bootstrap 法

i) N 個のデータ $x_1, x_2, \dots, x_N$ から繰返しを許して N 個取り出し、それを $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ と記す。この 1 組の標本を bootstrap 標本という。bootstrap 標本を用いて統計量を求め、それを次のように記す。

$$\psi^* = \psi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \quad (14)$$

ii) i) の操作を独立に多数回 (B 回) 繰り返す。すなわち、全部で B 個の bootstrap 標本それぞれに対して、 ψ^* を求める。第 b 番目の bootstrap 標本に対して得られた統計量を便宜上 ψ^{*b} と記す ($b = 1, 2, \dots, B$)。

iii) 次式により ψ^{*b} の平均 ψ^{**} を求める。

$$\psi^{**} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \psi^{*b} \quad (15)$$

これは統計量 ψ の bootstrap 推定値である。

iv) 統計量 ψ の分散の bootstrap 推定値 $\hat{s}_B^2$ を

$$\hat{s}_B^2 = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\psi^{*b} - \psi^{**})^2 \quad (16)$$

により求める。

5.2 モデル評価へのリサンプリング手法の適用

データに頻度解析モデルをあてはめたとき、 T 年確率水文量 $\hat{x}_T$ の信頼区間（あるいは推定誤差） $\sqrt{\text{Var}\{\hat{x}_T\}}$ が多数の分布について求められている（Kite (1977); Stedinger et al. (1993)）。ただし、この $\sqrt{\text{Var}\{\hat{x}_T\}}$ は、標本サイズ N 、確率分布形、母数推定法、母数推定値誤差の（共）分散に依存する。jackknife 法や bootstrap 法を適用することにより、手持ちのデータに基づいて直接的に $\sqrt{\text{Var}\{\hat{x}_T\}}$ を求めることができる。すなわち、前述の統計量 ψ に確率水文量 $\hat{x}_T$ をとればよい。適合度評価の段階で screening されて残った複数個のモデルそれぞれについて、(8), (9) 式、あるいは (14) 式において最尤法によりあてはめ（母数推定）を行い T 年確率水文量を求めるのである。こうして、想定した分布に対して (13), (16) 式が確率水文量 $\hat{x}_T$ の変動の大きさ $\text{Var}\{\hat{x}_T\}$ を与えることになる。この作業が、3.2 で提案した Step 5 の内容である。

また、頻度解析モデルごとに、(13) または (16) 式で得られた $\hat{s}_J, \hat{s}_B$ の値を比較して、その値が最も小さい頻度解析モデルを選択するのが、3.2 の Step 6 である。

5.3 大阪の年最大日降水量の場合

表1で見たように、大阪の年最大日降水量に多数の頻度解析モデルをあてはめたところ、ある程度良い適合度を示す分布が複数個あった。そこで、SLSC, MLL, AIC, COR のどれかの適合度規準について1度でも上位にランクされたモデルに対してリサンプリング手法を適用する。表1によれば、そのようなモデルは、3母数対数正規分布、3母数 PearsonIII 型分布、対数 PearsonIII 型分布、平方根指数型最大値分布、3母数対数 Gumbel 分布、GEV 分布である。この六つの分布に jackknife 法を適用して、50, 100, 200 年確率水文量の推定値とその推定誤差 $\hat{s}_J$ を求めた。表2はその結果を示したものである。これより、次のようなことが言える。

確率水文量の推定誤差が最も小さい頻度解析モデルは平方根指数型最大値分布であり、ここで提案した筆者の方法によれば、大阪の年最大日降水量データに対してはこの分布が最も良いモデルである。なお、平方根指数型最大値分布を除いた五つのモデルはすべて3母数であった。参考のため、screening で落とされた2母数のモデル（Gumbel 分布、対数正規分布）に jackknife 法を適用した場合どうなるか調べてみた。表2の破線の下にその結果を示す。このとき、これら二つの分布は、小さい推定誤差を示すが、確率水文量の値がそれぞれかなり小さい値となっている。この二つの分布は、表1で見たように、適合度の悪かったものである。

3母数 PearsonIII 型分布の推定誤差も、他の四つの分布に比べてかなり小さい。しかし、確率水文量の推定値は、この分布の場合のみ特に小さく、たとえば200年確率水文量は、平方根指数型最大値分布の100年確率に相当する。他の5分布と比べて危険側に過ぎるようである。

表 2: jackknife 法によって求められた確率水文学の推定値* と推定誤差**

[大阪の年最大日降水量 (1889-1980)]

Prob. distribution		Return period, T (years)		
		50	100	200
SQRT-ET-max	(2p)	180.46(11.25)**	203.56(13.58)	227.85(16.08)
Pearson III	(3p)	172.82(14.67)	189.34(17.34)	205.51(20.36)
Log-normal	(3p)	179.94(17.83)	201.66(23.69)	224.17(30.44)
Log-Pearson III	(3p)	181.99(19.56)	205.69(27.06)	230.87(36.13)
Log-Gumbel	(3p)	182.95(21.07)	207.62(30.35)	233.86(43.03)
G.E.V.	(3p)	183.10(21.19)	207.83(30.42)	234.15(42.13)
Gumbel	(2p)	167.19(9.13)	183.18(10.49)	199.10(11.85)
Log-normal	(2p)	165.63(11.77)	180.71(14.00)	195.70(16.31)

bootstrap 法によっても, jackknife 法と同程度の推定値及び推定誤差が求められる。bootstrap 法を適用する場合, 生成する bootstrap 標本の個数 B をどの程度にするかという問題がある。筆者らの経験によれば, $N < 100$ 程度の大きさのデータセットに対して $B=1000 \sim 1500$ 程度とればよい。

表 3 は, いくつかの毎年最大極値水文データについて, 四つの適合度規準および確率水文学の変動性の観点からそれぞれ最良とみなされた確率分布を整理したものである。SLSC, MLL, COR では 3 母数の確率分布が選ばれる。SLSC, COR では 3 母数対数正規分布が選ばれることが多く, MLL では 3 母数 PearsonIII 型分布が選ばれる傾向がある。AIC では 2 母数の分布 (対数正規, 平方根指数型最大値, PearsonIII 型) が選ばれることが多いが, ときに 3 母数 PearsonIII 型分布が選ばれることがある。

確率水文学の変動性から見ると, 3 母数の分布が選ばれることはまずない。表中, 備考欄には, 適合度が良く, かつ, 確率水文学の変動の最も小さいモデルが各適合度規準で何位にランクされていたかを示している。これを見ると, ここで提示した手順によれば, AIC で上位にランクされているモデルが選ばれる可能性が高い。AIC のモデル評価規準としての有用性が窺われる。

結局, 3.3 で示した手順を多数のデータセットに適用してみた結果, はじめからいくつもの確率分布を対象とするのではなく, 以下のように順次対象を広げていくのが効率的である。

1. 極値理論に基づく Gumbel 分布をまず試み, 良い適合度 ($SLSC < 0.03$) が得られたらそれを採用すればよい。
2. Gumbel 分布の適合度が悪い場合, 他の 2 母数の分布を試み, 良い適合度が得られたらそれを採用すればよい。
3. 2 母数の分布のどれもが適合度が悪い場合, 3 母数の分布を試みる。

ところで, 確率分布をデータに当てはめる際に, どのような手法 (母数推定法) を用いるべきかが問題になる。ここでは, すべての確率分布に対して最尤推定法を用いて母数推定を行った。最尤推定法は, いくつかの確率分布の母数推定において, 不偏推定量, 有効推定量を与えることが理論的に知られているため, それを用いることは一応妥当であると言えるが, 確率水文学の推定精度という観点からは, 実は, 最尤推定法がいつも良い推定値を与えるとは限らない。このことは, 多くの研究者によるモンテカルロ実験によって検証されている (例えば, Takara and Stedinger (1994) を見よ)。分

表 3: 各評価標準で最良の分布

データ	適合度標準				確率水文学 の変動性	備考			
	SLSC	MLL	AIC	COR		S	M	A	C
《年最大 m 日降水量》									
大阪 ($m = 1$)	LN(3)	LN(3)	SQEM(2)	LN(3)	SQEM(2)	5	4	1	5
大津 ($m = 1$)	LN(3)	PIII(3)	PIII(3)	LN(3)	G(2)	4	7	3	4
大津 ($m = 2$)	LN(3)	PIII(3)	PIII(2)	LN(3)	PIII(2)	4	2	1	4
大津 ($m = 3$)	LN(3)	PIII(3)	PIII(2)	LN(3)	PIII(2)	4	2	1	2
彦根 ($m = 1$)	LPIII(3)	PIII(3)	LN(2)	LPIII(3)	G(2)	6	7	2	5
彦根 ($m = 2$)	LN(3)	PIII(3)	LN(2)	LN(3)	G(2)	6	7	2	6
彦根 ($m = 3$)	LN(3)	LN(3), PIII(3)	LN(2)	LN(3)	G(2)	5	6	2	5
琵琶湖 ($m = 1$)	LN(3)	LN(3), PIII(3)	SQEM(2)	LN(3)	G(2)	8	7	2	4
琵琶湖 ($m = 2$)	PIII(3)	PIII(3)	PIII(3)	PIII(3)	G(2)	2	8	4	2
琵琶湖 ($m = 3$)	LN(3)	PIII(3)	LN(2)	LN(3)	G(2)	5	8	4	5
《年最大流量》									
St. Marys 川	LG(3)	PIII(3)	LN(2)	LG(3)	G(2)	8	7	3	7
Ganga 川	LN(3)	PIII(3)	SQEM(2)	LN(3)	SQEM(2)	6	4	1	5

括弧内の数字は母数の個数。備考欄は、確率水文学の変動が最小のモデルの適合度の順位を示す。

LN: 対数正規分布, PIII: PearsonIII 型分布, LPIII: 対数 PearsonIII 型分布,

G: Gumbel 分布, LG: 対数 Gumbel 分布, SQEM: 平方根指数型最大値分布。

布ごとにまた標本サイズ N に応じて適切な母数推定法が異なる。極値理論に基づく Gumbel 分布については最尤法が、GEV 分布については確率重み付き積率 (PWM) 法 (またはそれと等価な手法である「L 積率法」) が、50 ～ 300 年確率水文学の良い推定値を与えるという知見が得られている。筆者らも、3 母数対数正規分布、Gumbel 分布、GEV 分布についてモンテカルロ実験により、これらの知見を追認している (宝・高棹 (1990))。紙数の都合により、ここではそれらの手法については省略する。詳しくは、Stedinger et al. (1993)、竹内ら (1997)、星 (1998ab) を参照されたい。

6 非毎年資料を用いた洪水流量の確率評価

毎年最大流量の頻度解析によって確率洪水を算定するには、極値分布、すなわち、Gumbel 分布及び一般化極値 (GEV) 分布を用いればよい。どちらも適合が悪い場合には、他の分布形を試みる必要がある。

ところで、年によっては、年最大流量が洪水とは見做せないような値である場合が生じる (台風の襲来のない年など)。このような場合に、二通りの考え方ができる。すなわち、

【1】洪水とは見做せないようなデータであっても年最大流量には違いないのであるから、毎年極値データをそのまま用いる。

【2】洪水とは見做せないようなデータを、他の大きな洪水流量データと同じ母集団からのものと見做すのは不合理であるから、非毎年極値流量データを用いる必要がある。

上記【1】の考え方に立つ場合、一般化極値分布 (generalized extreme-value, GEV) 分布:

$$F(x) = \begin{cases} \exp[-\{1 - k(x - x_0)/\alpha\}^{1/k}], & k \neq 0 \\ \exp[-\exp\{-(x - x_0)/\alpha\}], & k = 0 \end{cases} \quad (17)$$

を用いればよい。母数は、 k, α, x_0 の三つである。母数 $k = 0$ のとき、GEV 分布は Gumbel 分布 (最大値に関する第 I 種極値分布) に一致し、また、 $k < 0, k > 0$ の場合、それぞれ第 II 種極値分布 (対数極値分布 A 型)、第 III 種極値分布 (対数極値分布 B 型) である (角屋 (1956, 1964))。

【2】の考え方に立つ場合、もとの時系列からあるしきい値以上の独立なデータを抽出する。こうして作成した系列は、部分期間 (PDS, partial duration series) 系列あるいは POT (peaks-over-

threshold) 系列と呼ばれる。イギリスでは、全国の洪水データに対して POT データベースを作成している (Bayliss and Jones (1993))。寡雨年には、そのしきい値を超えない場合も出てくるので、PDS あるいは POT 系列は非毎年資料となる。長期にわたる洪水流量時系列データから、POT データセットを作成する際には、しきい値の設定方法、データの独立性、洪水事象の発生時間間隔などに関する問題がある。POT データセットから統計年数 N と同じ数だけ、すなわち、上位 N 位までを取り出す場合、このときのしきい値を「非毎年年数最大値 (annual exceedance series)」と呼ぶ (岩井・石黒 (1970))。これより小さなしきい値は、「非毎年特定値以上最大値 (nonannual exceedance series)」と呼ばれ、これを設定する場合には、摘出資料数は記録年数とは無関係 ($> N$) になる。このような PDS データには、一般化パレート (generalized Pareto) 分布：

$$F(x) = 1 - \left[1 - k \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right) \right]^{1/k} \quad (k \neq 0) \quad (18)$$

が有用である。なお、 $k = 0$ のときは指数分布：

$$F(x) = 1 - \exp \left(-\frac{x - x_0}{\alpha} \right) \quad (19)$$

となる。

さて、あるしきい値を超える洪水事象がポアソン過程であるとした場合、PDS が指数分布に従えば年最大流量は Gumbel 分布に従い、PDS が一般化パレート分布に従うと年最大流量は GEV 分布に従うことが知られている。このポアソン-パレートモデルは、多くの物理現象に対して適用可能な物理的に合理的なモデルである。同じ地域において年最大値系列の解析及び PDS 解析で求められる GEV 分布の k はどちらの解析でも互換的に使えるという利点がある (Stedinger et al. (1993))。

これらの関係を図 2、図 3 に例示する。図 2 の左の図は、わが国の M 川における $N = 45$ 年間の毎年最大流量のヒストグラムと L 積率法によって当てはめた Gumbel 分布 (SLSC=0.0184) を示している。一方、右の図は、非毎年年数最大値以上 (すなわち、上位 45 個) の非毎年資料のヒストグラムと当てはめた指数分布 (SLSC=0.0264) である。図 3 は、これらに対数正規確率紙にプロットしたものである。この図が示すように、非毎年値で整理すると、この場合毎年最大値の約 3 割が他の年の第 2 位以下のデータと入れ替わる。図 3 の中には、当てはめた確率分布 (図中の記号では、Gumbel(LM) 及び指数分布 GPEexpPDS) を jackknife 法で補正した場合の分布曲線 (それぞれ、LGumbelJK 及び GPEexpPDSJK) 及び推定誤差曲線も合わせて示してある。

非超過確率 10 年以上のところで、両者は大変良い一致をしており、PDS の解析が有望であることを示唆していると言える。100 年確率洪水流量の Jackknife 推定値は、【1】毎年資料を用いた場合 $3,789 \text{ m}^3/\text{s}$ (推定誤差 $425 \text{ m}^3/\text{s}$)、【2】非毎年資料を用いた場合 $3,833 \text{ m}^3/\text{s}$ (推定誤差 $421 \text{ m}^3/\text{s}$) であった。

星 (1998b) は、44 年間 (1953 年～1996 年) の石狩大橋の実績流量を例題として取り上げ、【1】44 個の毎年最大値に直接 GEV 分布を用いた場合と、【2】1954 年から 1996 年の 43 年の極大流量データを上位 79 個 (しきい値 $X_0 = 1,500 \text{ m}^3/\text{s}$) とって、一般化パレート分布を当てはめた場合との比較を行った。この場合、しきい値以上の値の到着率は年に 1.87 回 ($=79/43$) となっている。分布の適合度は、どちらの場合も良好であり、150 年確率洪水の推定値は、それぞれ 【1】 $14,202 \text{ m}^3/\text{s}$ と 【2】 $14,047 \text{ m}^3/\text{s}$ で、きわめて近い値を得ている。

これらの場合、【1】、【2】のどちらを用いても同じような推定値を得るので、解析者の迷いは少ないと言える。他のデータセットを用いた場合、推定値が両者で大きく異なることも考えられる。そのときには解析者を悩ませることになるかも知れない。長期間の信頼できる PDS データが利用でき、しきい値を超えるピークが年に 1.65 回以上 (指数型の超過モデルとポアソン到着を想定した場合) あれば、年最大値系列を用いるよりも非毎年の PDS を用いた方がより精度の良い確率水文学量が得ら

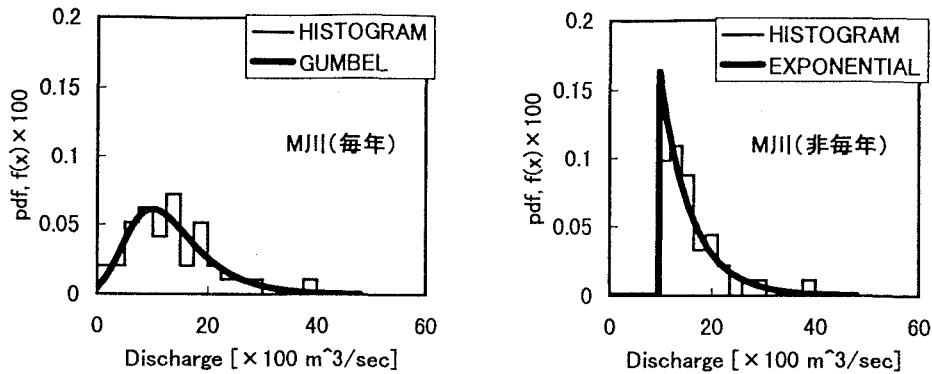


図 2: 毎年最大値資料 (左) と PDS (右) に当てはめた確率分布 (M 川)

れると言われている (Stedinger et al. (1993) の p. 18.38)。わが国では、このような PDS に関する研究は、降雨に関する角屋 (1961), 岩井・石黒 (1970) の pp. 138-147 などが存在するのみで、あまりなされてこなかった。今後、多数の経験を積み重ねる必要がある。

7 両側有界分布の導入とその意義

極値理論などの数学的な極限操作によって導かれた分布関数の定義域は有限でない場合が多い。因みに、現在、水文頻度解析で多用されている確率分布も、変量の定義域が、下限値無限小・上限値無限大 (Gumbel 分布, 正規分布) や下限有限・上限無限大 (3 母数の対数正規分布や Pearson III 型 (ガンマ) 分布など) である。数学的にはそれでよいし、工学的にもそれらの分布の有用性は明らかである。しかし、本来、河川流量や降雨量などの物理量の下限値は負値ではありえない。上限値にしても無限大ではなく何らかの物理的限界があるはずである。「水文」頻度解析と言うからには変量の物理性を考慮すべきであり、下限値母数を単なる位置母数 (データに対する適合度向上のための自由パラメタ) とみなして負の推定値であってもそれを容認したり、上限無限大の確率分布を慣例的に用いたりすることには、科学的合理性の観点から改善の余地が大いにある。

岩井 (1947) は、当初から、日降水の解析における負の下限値推定や、上限値としての絶対最大洪水について言及し、上下限有限分布の有用性・可能性を指摘していた (岩井 (1947) の p. 101; 宝 (1995))。しかし、その後、上下限値の推定の難しさ (数学的にも水文学的にも) から、この問題は放置されてきた。当時は、水文データも少なく (多くの場合小標本であった)、母数推定の計算にも大変な労力を要したという事情がある。欧米においても、この問題には積極的に取り組んでこなかったようである。

しかし、水文データの蓄積が進み、水文・気象観測の方法も格段に進歩した現在、いまだ開発途上とは言え、気象力学的数値モデルによる豪雨解析、分布型流出モデルによる洪水解析などの物理モデルによる数値シミュレーションの精度向上が期待できる。近い将来、物理的な気象・水文モデルによって可能最大降水量 (矢島ら (1996); 辻ら (1997)) や可能最大洪水が精度よく推定できることになる可能性があり、これらの値を用いた頻度解析手法の発展も期待できる。

7.1 上下限値を導入することの意義

ここで、上下限値を物理量として導入することの意義を明らかにしておこう。

科学的合理性: 水文・気象学, 数理統計学のさらなる連携 (融合), すなわち, 学際的研究の促進

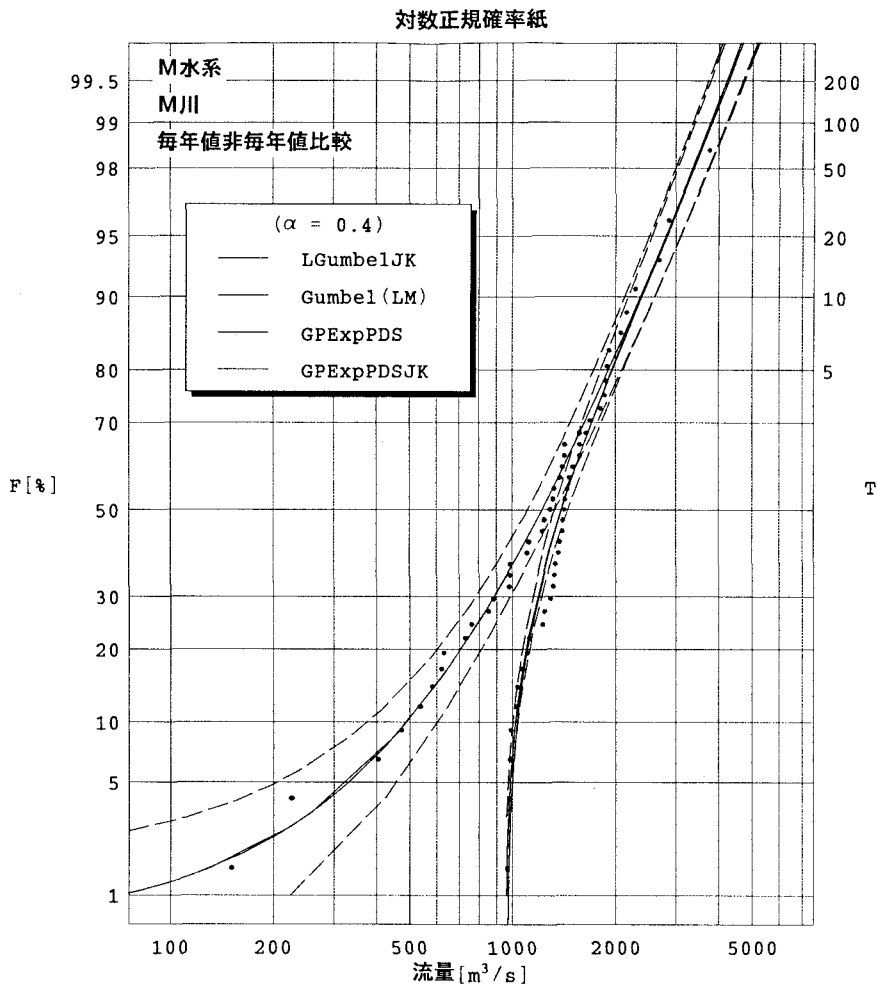


図 3: 対数正規確率紙にプロットした毎年最大値資料と PDS 及び当てはめた確率分布 (M 川, カナンプロット)

〔(財) 国土開発技術研究センターのご厚意により掲載〕

により科学的合理性のある研究成果が期待できる。実用的合理性 (その 1): 外挿部 (分布の両裾部) の不安定性の軽減。すなわち, 確率水量推定精度の向上が期待できる。実用的合理性 (その 2): 小標本に対する確率水量推定の高精度化。従来より, 20 年や 30 年分の資料 (小標本) から 100 年や 200 年確率水量がどうして精度よく見積もれるだろうか, という問題が懸案であった。いわゆる小標本に対する外挿推定の問題である。小標本であっても, 確たる上下限値が与えられれば, 外挿の問題ではなく内挿の問題になるので確率水量の推定値の信頼性は格段に向上するはずである。小標本の場合には, 何らかの確率分布を用いるパラメトリックな手法は適当でない。物理的考察により与えられる上下限値を手がかりとしたノンパラメトリックな手法の開発が今後の課題となる。

気候変動問題への対応: 温暖化などの気候により降水が増加 (減少) すると確率降水量や確率洪水がどう変化するか, といった問題に対して, 上下限無限の確率分布はほとんど無力であろう。形状母数や尺度母数が気候変動によってどう変化するかというよりも, 可能最大 (最小) 降水量が温暖化によってどう変わるか, という気候学 (あるいは気象学) 的観点からの考察の方が実現の可能性が高い

表 4: SLSC による適合度の比較評価

	大津			彦根			今津			中河内			敦賀			岐阜			琵琶湖流域		
	1日	2日	3日	1日	2日	3日	1日	2日	3日	1日	2日	3日	1日	2日	3日	1日	2日	3日	1日	2日	3日
LN-NORMAL	○	○	●	●	○	○	△	●	○	△	×	△	△	○	○	○	○	○	●	○	○
SLADE (World)	○	○	●	●	○	○	△	●	○	△	×	×	△	○	○	○	○	△	○	○	○
SLADE (Japan)	○	○	●	●	○	○	△	●	○	△	×	×	△	○	○	○	○	△	○	○	○
SLADE (Region)	○	○	●	●	○	○	△	○	○	×	×	×	△	△	○	△	△	×	***	***	***
EVLUB (World)	△	×	×	×	×	×	△	×	×	×	×	×	△	×	△	×	△	△	△	△	△
EVLUB (Japan)	△	×	×	×	×	×	△	×	×	×	×	×	△	×	△	×	△	△	△	△	△
EVLUB (Region)	○	×	×	△	△	△	△	△	×	×	×	×	△	×	△	△	△	○	***	***	***

ただし、●: SLSC ≤ 0.02, ○: 0.02 < SLSC ≤ 0.03, △: 0.03 < SLSC ≤ 0.04, ×: SLSC > 0.04

であろう。

7.2 両側有界分布の適用例

両側有界分布として、以下の二つを用いることができる。

a) Slade 型分布 (4 母数対数正規分布) Slade 型変換 $y = \ln\{(x-a)/(g-x)\}$ を用いる両側有界分布は岩井 (1949) によって紹介された。

$$f(x) = \frac{g-a}{(x-a)(g-x)\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln\{(x-a)/(g-x)\} - \mu_y}{\sigma_y}\right\}^2\right] \quad (20)$$

ここに、母数は 4 個存在し、 a, g はそれぞれ下限値、上限値であり、 μ_y, σ_y は、 $y = \ln\{(x-a)/(g-x)\}$ の平均値と標準偏差である。 a, g が何らかの方法で推定されると、 y の標本平均及び不偏標準偏差がそれぞれ μ_y, σ_y の最尤推定値となる。

b) EVLUB 分布 (両側有界極値分布) 神田は、地震動や風速の最大荷重強度を表すための確率分布として上式のような両側有界の極値分布を提案した (Kanda (1981); 壇・神田 (1986, 1998))。ここではこれを EVLUB (Extreme Value with Lower and Upper Bounds) 分布と呼ぶことにする。

$$F(x) = \exp\left[-\left\{\frac{g-x}{\nu(x-a)}\right\}^\kappa\right] \quad (21)$$

$$f(x) = \frac{\kappa(g-x)^{\kappa-1}(g-a)}{\nu^\kappa(x-a)^{\kappa+1}} \exp\left[-\left\{\frac{g-x}{\nu(x-a)}\right\}^\kappa\right] \quad (22)$$

ここに、 $F(x)$ は分布関数、 $f(x)$ は確率密度関数、 a, g はそれぞれ変数の下限母数及び上限母数、 ν は尺度母数、 κ は形状母数である。これら 4 母数のうち上・下限値 g, a を固定し、他の 2 母数 ν, κ は最適化手法を用いた最尤法で推定する。

以下では、水文学の分野においてまだ十分に吟味されていない、この EVLUB 分布を採用し、従来の上限無限大のモデル (3 母数対数正規分布) や、これまでに検討されている Slade 型 4 母数対数正規分布 (宝 (1995, 1997); Takara et al. (1996); Takara and Loebis (1996)) を用いた場合と比較した。さらに、両側有界分布を採用することにより、確率水文量 (100 年確率降水量など) の推定精度がどの程度向上するのかを例示する (宝・土佐 (1998))。

[1] 適合度評価 用いた確率分布モデルの確率密度関数と年最大 m 日降水量のヒストグラムを同一のグラフ上に描き、目視による適合度評価を行う。さらに、適合度を定量的に評価してモデルの優劣を客観的に比較するため、4 種の評価基準 SLSC, COR, MLL, AIC を用いる。

図 7.2 に大津市における 74 年間 (1912-1985) の年最大 1 日降水量、岐阜市における 100 年間 (1893-1992) の年最大 3 日降水量にあてはめた結果を示す。その際、固定する上限値の推定値として日本の豪雨記録に基づく PMP (Probable Maximum Precipitation, 可能最大 1 日雨量 1576mm, 同 3 日雨

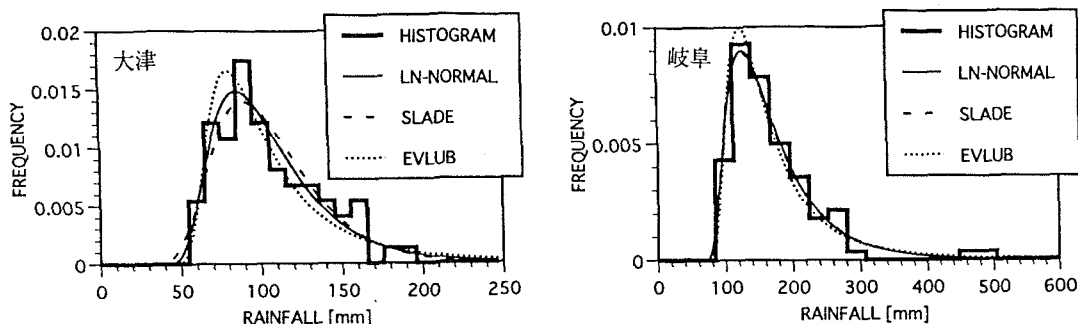


図 4: 大津の年最大 1 日降水量及び岐阜の年最大 3 日降水量の確率密度関数とヒストグラム

表 5: 100 年確率降水量の bootstrap 推定値と bootstrap 誤差, 変動係数 ($B = 1500$ 回)

頻度解析モデル (下限値; 上限値推定条件)	大津 1 日降水量 (1912-1981)			岐阜 3 日降水量 (1893-1992)		
	bootstrap 推定値	(推定誤差)	変動係数	bootstrap 推定値	(推定誤差)	変動係数
Ln-Normal	229.2	(23.8)	0.104	429.7	(62.7)	0.146
Slade (Stedinger; Japan)	208.0	(13.5)	0.065	428.6	(47.7)	0.111
Slade (Stedinger; Region)	203.5	(12.4)	0.061	402.4	(42.7)	0.106
EVLUB (Iwai; Japan)	315.2	(31.9)	0.101	581.4	(67.2)	0.116
EVLUB (Iwai; Region)	287.1	(24.6)	0.086	462.8	(37.5)	0.081

量 2988mm; Takara et al. (1996)) を, 下限値の推定値としてクオントイル法 (宝ら (1994) を見よ) で推定した値 (岩井法と Stedinger の方法で求めた両下限値のうち, 適合度が良い値) を用いる。ただし推定値が負となる場合には下限値を 0 とした。どちらの場合も, EVLUB 分布の適合度が Slade 型には及ばないことがわかる。しかし, 世界, 日本, そして気候区の豪雨記録に基づく 3 種の PMP を上限値として, 客観的適合度評価基準を用いて調べると, 気候区の PMP を用いた場合には SLSC が 0.02 台となり, 良い適合度を示している。

さらに, 各分布を様々な降水量データに適用した場合の, SLSC による適合度評価の結果を表 4 に示す。全体的に EVLUB 分布の適合度は, Slade 型分布には及ばない。また, EVLUB 分布は上限値が小さくなるほど, Slade 型は大きくなるほど適合度が良くなっている。

[2] 確率水文量の変動性による評価 表 5 には, 各場合の 100 年確率降水量の bootstrap 推定値とその推定精度 (bootstrap 誤差及び変動係数) を示した。EVLUB 分布を用いた場合には, 他の分布の場合と比較して, 確率降水量の値が大きくなることがわかる。確率密度関数のグラフが左にひずむ傾向があることを考慮に入れると, EVLUB 分布を用いた場合の確率降水量は, 過大評価される可能性が高い。推定精度について見ると, 岐阜 3 日の場合, 3 母数対数正規分布の場合 62.69mm であったのが, 両側有界の EVLUB 分布を用いると 37.48mm になる。つまり, bootstrap 誤差で見ると推定精度が 40% も向上している。Slade 型と比較しても 12% 向上している。50 年, 200 年, 300 年の場合にも同様の向上が見られる。この EVLUB 分布は極値分布系のモデルであり, 有望視できるが, その特性については十分調べられていないので, 今後さらなる検討を加える必要がある。

8 おわりに

これまで見てきたように, 今までのやり方を再整理することができる。例えば, 極値データの頻度解析を行う際には, 極値理論に基づく Gumbel 分布, GEV 分布を基本的な水文頻度解析モデルとしておくと, 毎年極値, 非毎年極値の両方の場合において有利である。これらのモデルは, 理論的背景を持っている上に, 確率水文量を求める際の変換が簡単であるという利点もある。

母数推定法としては、Gumbel 分布には最尤推定法、GEV 分布には L 積率法 (PWM 法) を用いればよい。データへの適合度は $SLSC < \text{約} 0.03$ (あるいは $COR > 0.990$) というような基準を推奨することができる。SLSC や確率紙、Q-Q プロットなどにおいて、プロットイング・ポジション公式を用いる必要があるが、カナンの式 (Cunnane, 1978) $p_i = (i - 0.4)/(N + 0.2)$ を用いるとよい。

小標本 ($N < \text{約} 30$) の場合は話が異なる。プロットイング・ポジション公式として、ワイブルの式 $i/(N + 1)$ を用いるのが良い。確率分布を当てはめる (パラメトリックな方法) よりもノンパラメトリックな方法が良い。分布関数を予め仮定することなく、何らかの制約条件のもとでエントロピーを最大化する寒川・荒木 (1983) の最大エントロピー分布が小標本の場合に威力を発揮するかも知れない。今後の検討課題である。

小標本の場合、20 個程度以下のデータから、100 年、200 年確率といったリターンピリオドの大きな事象の推定をするという外挿問題を解くことになるので、確率水文学の精度が極めて悪くなる。そこで、物理的な上下限値を導入することにより、外挿問題を内挿問題に変えることができるので、推定精度の向上が図れる。今のところ、可能最大降水量 (PMP) や可能最大洪水 (PMF) の推定精度は不十分であるが、近い将来、水文気象モデルの発達による精度向上が期待できるものと思う。

PMF の推定、あるいは、流出モデルを介した確率洪水の推定、降雨継続時間の短い小流域の確率水文学の推定などにおいて、DAD (depth-area-duration) 解析が必要である。近年のデータ蓄積後、この種の解析があまり活発に行われていないので、今一度この解析を行い、従来の方法や知見の再検討をしておく必要がある。

その他、多変数確率統計及び多変数時系列解析の理論も重要であるが、本稿では紙数の都合で触れられなかった。また、読者にとって有益な練習問題を付けることができなかった。北海道開発局開発土木研究所月報 (星 (1998bc); 星ら (1998)) に適当な例題が用意されているので、興味のある読者は是非参照していただきたい。

最後に、この水文統計解析の問題について筆者と何度も有益な議論の機会を持って戴いた (財) 国土開発技術研究センター研究第 1 部の田中茂信氏、湧川勝己氏に厚く御礼申し上げる次第である。

引用文献

- 石原藤次郎・岩井重久 (1949): 水文統計学上より見た本邦河川計画の合理化について, 土木学会誌, 第 34 巻, 第 4 号, pp. 24-29.
- 石原安雄 (1987): 年最大水文学量の生起確率評価について, 水利科学, No. 178, pp. 1-18.
- 岩井重久 (1947): 水文学における非対称分布に就て, 土木学会論文集, 第 1, 2 号合併号, pp. 93-116.
- 岩井重久 (1949a): Slade 型分布の非対称性の吟味及びその 2, 3 の解法, 土木学会論文集, 第 4 号, pp. 84-104.
- 岩井重久 (1949b): 確率洪水推定法とその本邦河川への適用, 統計数理研究, 第 2 巻, 第 3 号, pp. 21-36.
- 岩井重久・石黒政儀 (1970): 応用水文統計学, 森北出版, 370 pp.
- 上田年比古・河村 明 (1985): 確率分布の適合度の図式判定法について, 土木学会論文集, 第 357 号/II=3, pp. 243-246.
- 江藤剛治・室田 明・米谷恒春・木下武雄 (1986): 大雨の頻度, 土木学会論文集, 第 369 号/II-5, pp. 165-174.
- 角屋 睦 (1956): 極値分布とその一解法, 農業土木研究, 第 23 巻, 第 6 号, pp. 350-357.
- 角屋 睦 (1961): 雨量分布とその年最大値の分布, 京都大学防災研究所年報, 第 4 号, pp. 122-131.
- 角屋 睦 (1962): 対数正規分布の適用範囲, 定数について, 農業土木研究, 別冊第 3 号, pp. 12-16.
- 角屋 睦 (1964): 水文統計論, 水工学シリーズ, 土木学会水理委員会, 64-02, 59 pp.
- 神田 徹・藤田睦博 (1982): 水文学—確率論的手法とその応用—, 技報堂出版, 275 pp.
- 岸原信義・武蔵哲夫 (1981): 異常豪雨は予測できるか (I)—確率雨量に関する諸問題について, 水利科学, No. 141, pp. 1-17.
- 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 (1983): 情報量統計学, 共立出版, pp. 27-64.
- 寒川典昭・荒木正夫 (1983): 水文事象の頻度分析への MEP 導入について, 土木学会論文集, 第 335 号, pp. 89-95.
- 高樺琢馬 (1983): 気象災害に関する極値・集中豪雨, 土木学会誌, 第 68 巻, 第 10 号 (9 月号), pp. 7-11.
- 高樺琢馬・宝 馨・清水 章 (1986): 琵琶湖流域水文データの基礎的分析, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号 B-2, pp. 157-171.
- 宝 馨 (1995): 水文頻度解析における古くて新しいパラダイム, 土木学会第 50 回年次学術講演会, II-1, pp. 2-3.
- 宝 馨 (1997): 両側有界分布を導入した場合の確率水文学量の推定精度について, 水文・水資源学会 1997 年研究発表会要旨集, pp. 113-114.

- 宝 馨・Stedinger, J.R.・山田貴史 (1994): 3 母数対数正規分布の下限值推定について, 水文・水資源学会 1994 年研究発表会要旨集, pp. 250-253.
- 宝 馨・高埜琢馬 (1988): 水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準, 土木学会論文集, 第 393 号/II-9, pp. 151-160.
- 宝 馨・高埜琢馬 (1989): 「水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準」への合田良実の討議に対する回答, 土木学会論文集, 第 405 号/II-11, pp. 267-272.
- 宝 馨・高埜琢馬 (1990): 水文頻度解析モデルの母数推定法の比較評価, 水工学論文集, 土木学会, 第 34 卷, pp. 7-12.
- 宝 馨・土佐香織 (1998): 両側有界極値分布の水文頻度解析への適用, 平成 10 年度関西支部年次学術講演会講演概要, 土木学会関西支部, II-10.
- 竹内邦良・星 清・江藤剛治・寺川 陽・宝 馨 (1997): 水文リスク解析, 水文・水資源ハンドブック, 第 7 章, 水文・水資源学会 (編集), 朝倉書店, pp. 228-255.
- 壇 一男・神田 順 (1986): 上下限値を有する極値分布を用いた地震危険度解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 363 号, pp. 50-56.
- 壇 一男・神田 順 (1998): 地震危険度解析で用いられる上下限値を有する極値分布の理論的背景, 日本建築学会構造系論文集, 第 506 号, pp. 57-65.
- 辻 基宏・大石 哲・中北英一・池淵周一 (1997): 雨滴生成量を考慮した短時間 PMP 推定に関する一考察, 水工学論文集, 土木学会, 第 41 卷, pp. 135-140.
- 西原 巧 (1974): 河川計画における基本量をめぐって—水文学の立場から—, 河川, 昭和 49 年 12 月, pp. 22-27.
- 星 清 (1998a): 洪水ピークの確率評価法について, 開発土木研究所月報, 北海道開発局, No. 539, pp. 34-47.
- 星 清 (1998b): 水文統計解析, 開発土木研究所月報, 北海道開発局, No. 540, pp. 31-63.
- 星 清 (1998c): 現場のための水文統計 (1), 開発土木研究所月報, 北海道開発局, pp. 64-78.
- 星 清・新目竜一・宮原雅幸 (1998): 現場のための水文統計 (2), 開発土木研究所月報, 北海道開発局.
- 矢島 啓・辻 基宏・池淵周一・中北英一 (1996): 積雲対流モデルを用いた短時間可能最大降水量 (Probable Maximum Precipitation) 推定手法の検討, 水文・水資源学会誌, 第 9 巻, 第 2 号, pp.143-142.
- Akaike, H. (1974): A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, AC-19, pp. 716-723.
- Bayliss, A.C. and R.C. Jones (1993): *Peaks-over-threshold flood database—Summary statistics and seasonality*, Report No. 121, Institute of Hydrology, 61 pp.
- Cunnane, C. (1978): Unbiased Plotting Positions—A Review, *Journal of Hydrology*, Vol. 37, pp. 205-222.
- Efron, B. (1979): Computers and the theory of statistics—Thinking the unthinkable, *SIAM Review*, Vol. 21, No. 4, pp. 460-480.
- Efron, B. (1982): *The Jackknife, the bootstrap and Other Resampling Plans*, SIAM Monograph, No. 38, 92pp.
- Filliben, J.J. (1975): The probability plot coefficient test for normality, *Technometrics*, Vol. 17, No. 1, pp. 111-117.
- Kanda, J. (1981): A new extreme distribution with lower and upper limits for earthquake motions and wind speeds, *Proc. of the 31st Japan National Congress for Applied Mechanics*, pp.351-360.
- Kite, G.W. (1977): *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, U.S.A., 224 pp.
- Singh, V.P., ed. (1987): *Regional Flood Frequency Analysis*, Proc. of the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analyses, 14-17 May 1986, Louisiana State University, Baton Rouge, U.S.A., D. REIDEL Pub. Co., 400pp.
- Stedinger, J.R., R.M. Vogel and E. Foufoula-Georgiou (1993): Frequency Analysis of Extreme Events, Chap. 18, *Handbook of Hydrology*, (Ed.) D.J. Maidman, McGraw-Hill, New York, pp. 18.1-18.66.
- Takara, K. and J. Loeblis (1996): Frequency analysis introducing probable maximum hydrologic events — Preliminary studies in Japan and in Indonesia —, *Proc. of Int'l Symposium on Comparative Research on Hydrology and Water Resources in Southeast Asia and the Pacific*, November 18-22, 1996, Yogyakarta, Indonesia, Indonesian National Committee for International Hydrological Programme, pp. 67-76.
- Takara, K.T. and J.R. Stedinger (1994): Recent Japanese contributions to frequency analysis and quantile lower bound estimators, *Stochastic and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering*, Vol. I, (Ed.) K.W. Hipel, Kluwer Academic Publishers, pp. 217-234.
- Takara, K. and T. Takasao (1988): Evaluation Criteria for Probability Distribution Models in Hydrologic Frequency Analysis, Preprints of the Fifth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics, 2-4 Aug. 1988, at the University of Birmingham, Birmingham, U.K., Paper A5, 10pp.
- Takara, K., T. Takasao and K. Tomosugi (1996): Possibility and necessity of paradigm shift in hydrologic frequency analysis, *Proc. of the International Conference on Water Resources and Environment Research: Towards the 21st Century*, October 29-31, 1996, Kyoto, Japan, Organized by Water Resources Research Center, Kyoto University, Vol. I, pp. 435-442.