

短期波浪統計について

Short term wave statistics

木村 晃
Akira Kimura

1. はじめに

海岸工学で取り扱われる”波浪統計”は取り扱う期間の違いにより、長期波浪統計と短期波浪統計に分けられる。一方は数十年以上のオーダーであり、他方は高々1ストーム（数日）である。長期波浪統計については合田（1990）に詳しいが、その目的をごく簡単に説明すれば次のようである。構造物を計画する場合、当然のことながらそれは耐用期間を通じて外力である波浪に対して安全でなければならない。それでは将来どの程度の波が来襲するのか？ということを統計学の枠の中で推定することが長期統計の目的となる。その際推定の対象とされるのは、たとえば有義波高、有義周期等の短時間の不規則波を代表する統計量である。したがってこれら代表波が短時間の不規則波の性質をどのように代表しているかがわかっていなければ、長期統計解析は意味をなさない。逆に1ストーム程度の短時間の波の不規則性だけが明らかであっても、構造物の”設計波”としてどの程度の波を選ぶべきかの情報とはならない。両者は対となって機能する不可分のものである。短期波浪統計の研究の現況及び歴史的な経緯が合田（1992年夏期水工研修会）によりわかりやすく説明されているので、それを参考にしながら以下のいささか式の多い説明を追っていただきたい。

2. Riceの理論

Rice（1944,1945）は不規則に変化する信号 $I(t)$ を

$$I(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) = \sum_{n=1}^N c_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \quad (1)$$

のように表し、不規則波を無数に多くの成分波（規則波）の重なり合ったものとするフーリエモデルを提案した。ここに $\omega_n (= 2\pi f_n)$ は成分波の角周波数、 f_n は成分波の周波数、 $\varepsilon_n (= \tan^{-1}(b_n/a_n))$ は位相角である。 a_n, b_n, c_n は平均値が0で相互に独立な正規分布をする変数であり、

$$\langle a_n^2 \rangle = \langle b_n^2 \rangle = \langle c_n^2 \rangle = w(f_n) df \quad (2)$$

である。 $w(f)$ は $I(t)$ のパワースペクトルであり、 $\langle \cdot \rangle$ は平均を意味する。 a_n, b_n は正規分布をしているから t を固定すれば $a_n \cos \omega_n t$ および $b_n \sin \omega_n t$ もまた正規分布をする。したがって $I(t)$ は $2N$ 個（ c_n の場合は N 個）の独立した正規変量の和となりこれ自身が正規分布をする。Riceは(1)式の $I(t)$ に対して次のように定義した包絡線 $R(t)$ の確率密度関数を導いた。いまスペクトルの平均角周波数を ω_m とする。(1)式より

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{n=1}^N c_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) = \sum_{n=1}^N c_n \cos(\omega_n t - \omega_m t + \varepsilon_n + \omega_m t) \\ &= I_c(t) \cos \omega_m t + I_s(t) \sin \omega_m t \end{aligned} \quad (3)$$

ここに

$$I_c(t) = \sum_{n=1}^N c_n \cos(\omega_n t - \omega_m t + \varepsilon_n), \quad I_s(t) = \sum_{n=1}^N c_n \sin(\omega_n t - \omega_m t + \varepsilon_n) \quad (4)$$

$I(t)$ に対する包絡線を

$$R(t) = \{I_c^2(t) + I_s^2(t)\}^{1/2} \quad (5)$$

と定義する。三角関数は分散有限な確率分布をもち、 N が十分大きければ(3),(4)式および中心極限定理より I_c , I_s はともに正規分布をする確率変数である。両者の積の平均値 $\langle I_c I_s \rangle$ は0であるので、相互に独立である。それぞれの分散は

$$\langle I_c^2(t) \rangle = \langle I_s^2(t) \rangle = \langle I(t)^2 \rangle \quad (6)$$

となり、 I_c, I_s が $I_c \sim I_c + dI_c, I_s \sim I_s + dI_s$ 内に入る確率は

$$\frac{dI_c dI_s}{2\pi\psi_0} \exp \left\{ -\frac{I_c^2 + I_s^2}{2\psi_0} \right\} \quad (7)$$

で与えられる。ここで ψ_0 は(6)の分散である。

$$I_c = R \cos \theta, \quad I_s = R \sin \theta \quad (8)$$

の様に変数変換をすれば(7)式は

$$\frac{d\theta R dR}{2\pi\psi_0} \exp \left\{ -\frac{R^2}{2\psi_0} \right\} \quad (9)$$

となり、式からもわかるように θ は R と独立で、0 から 2π の間で一様に分布するのでこの範囲で積分すると

$$p(R) = \frac{R}{\psi_0} \exp \left\{ -\frac{R^2}{2\psi_0} \right\} \quad (10)$$

なる Rayleigh 分布を得る。図-1 は後で示す Wallops タイプ(46式)のスペクトルで、形状パラメータが10の場合の不規則波の波形とそれに対する包絡線を示したものである。

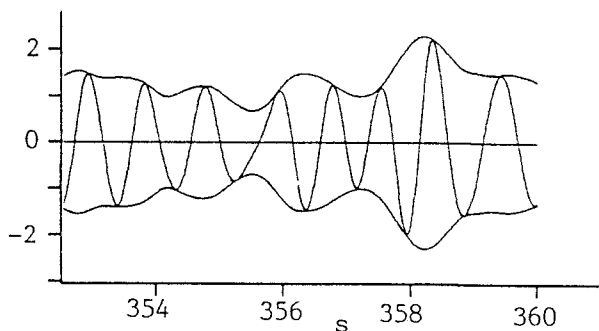


図-1 包絡線と波形の関係

海岸工学ではスペクトル解析法および波別解析法の2つの異なった取り扱い法で不規則な波を固有の波高、周期を持つ波に切り分け、同じ波高・周期を持つ規則波と置き換えて考えることで従来の規則波に対する研究成果を不規則な海の波に適用している。図-1 からわかるように $R(t)$ は $I(t)$ の極大、極小値とほぼ一致しており $I(t)$ の極大値のかわりに同じ時刻の $R(t)$ の値を用いても誤差は小さい。また $R(t)$ の時間変化も非常に緩やかであるので、 $I(t)$ に対してゼロダウクロス法を適用して波高 H を定義すれば同じ時刻の R との間に

$$H = 2R \quad (11)$$

なる関係がほぼ成り立つ。スペクトルが狭帯域であればゼロダウクロス波の極大、極小値の位置もほぼ等間隔で現れるので H の確率分布はほぼ(10)式で与えた Rayleigh 分布となる。このことはスペクトルが狭帯域の場合に Longuet-Higgins(1952)によって示されたことになっているが、Longuet-Higgins 自身は振幅の確率分布としており、波高に対して導かれたものではない。しかしながら1952年の研究以来、多くの研究者が現地波浪、シミュレーション波形等に対してその波高と Rayleigh 分布との比較を行い、スペクトルが狭帯域でない場合もこの分布が良好な適用性を示すことを確認していることから、現在では Rayleigh 分布は波高の確率分布として広く定着している。Riceの研究は電気雑音を対象としたもので、不規則波浪への応用は Longuet-Higgins(1952, 1957)の研究によるところが大きい。これらの研究者の考え方は以後の研究の基礎となっており、この分野では確率密度関数を考える際、常に不規則波のスペクトルとの関係を念頭に置いて研究を進めることが伝統になっている。

3. 波高の確率分布

波別解析法で波を切り分ける際、従来はゼロアップクロス法がよく用いられてきたが、最近ではゼロダウンクロス法が用いられることが多い。特に浅海域での波の力学的な特性を検討する際には後者の定義の方が有効であるが、非線形性が無視できるデータで確率特性を検討する限り両者に差のないことが知られている。不規則波の波高の確率分布はRayleigh分布が良くあうことは2. で説明したが、スペクトルが広帯域の場合であってもRayleigh分布とよくあう明確な理由は現在もまだ明らかでない。Rayleigh分布以後の波高の確率分布に関する研究は大別すると、(1) 水面波形の非線形性の影響、(2) 広帯域スペクトルの影響等に関するものが多い。砕波などによる波高の確率特性の大幅な変化に関する研究も多いがここではふれない。

3.1 水面波形の非線形性による確率特性の変化

不規則波の確率特性がRayleigh分布をすることは現在では広く認識されているが、現地波浪やシミュレーションから求められた波高の分布とRayleigh分布を比較すると、データはピークより小さい部分ではRayleigh分布よりわずかに小さく、ピークより少し大きな部分ではわずかに大きくなる等小さな不適合性があることが従来より指摘されている。我が国ではKimura(1981)、間瀬ら(1986)、関本ら(1990)、安田ら(1992)によりWeibull分布を用いた適合性の改善が試みられ、Weibull分布の形状母数と波の非線形性あるいはFunkeら(1980)が定義したGroupiness factor との関係が検討されている。Forristall(1978)も波高の頻度分布に対してより良好な適合性を持たせるため次のWeibull分布の利用を試みている。

$$P(\xi) = \exp \left\{ -\xi^{2.126} / 1.052 \right\} \quad (12)$$

ここに

$$\xi = a/2m_0^{1/2}$$

である。 a は隣り合うcrestとtroughの高さの差の1/2である。Longuet-Higgins(1980)はForristallの研究に対して(A)波の非線形性、(B)スペクトルのバンド幅の効果等が無視できない場合には振幅の定義を補正して用いるとRayleigh分布は十分な適合性を持つと以下のような説明を行っている。(B)の効果の検討では非線形性は考慮されていないので次の説で説明する。) すなわち m_0 は

$$m_i = \int_0^\infty \omega^i S(\omega) d\omega \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

で($i = 0$)与えられるがKhintchineの定理より

$$m_0 = \bar{\eta}^2 \quad (14)$$

でも与えることが出来る。ここに $\bar{\eta}$ は波形 η のrms値である。スペクトルが狭帯域で、波形の非線形性が無視できれば

$$m_0 = \bar{a}^2/2 \quad (15)$$

となる。ここに $\bar{a}$ は a の値のrms値である。Longuet-Higginsが1952年に与えた式は

$$p(a_0) = \exp \left\{ -a_0^2/\bar{a}^2 \right\} \quad (16)$$

である。ここに a_0 は振幅である。この式は(15)式の関係を使うと

$$p(a_0) = \exp \left\{ -a_0^2/2m_0 \right\} \quad (16)'$$

とも書ける。規則波の振幅を a 、波数を k としてStokes波の3次のオーダーまで考慮し、(14)式で波形のrms値の2乗から m_0 を形式的に計算すると

$$m_0 = \frac{1}{2}a^2 \left\{ 1 - (ak)^2 - \frac{19}{2}(ak)^4 - \frac{3077}{30}(ak)^6 - \dots \right\} \quad (17)$$

となり、不規則波の振幅と波数の比の平均値 (ak) はおおよそ0.158~0.203 (Lake and Yuen, 1978)であることを考えると

$$0.935 < 2m_0/\bar{a}^2 < 0.968 \quad (18)$$

となる。Longuet-HigginsはForristallの用いたデータに対してfitするように平均的な $\bar{a}$ の値を計算して

$$2m_0/\bar{a}^2 = 1.169 \quad (19)$$

を得ている。Forristallのモデルと(19)式の差を $\bar{a}$ の補正で対応させるためには $2m_0/\bar{a}^2$ の値は(19)式のように1より大きくしなければならないが、Longuet-Higginsのモデルでは水面の非線形性は逆に $2m_0/\bar{a}^2$ の値を1より小さくする。(17), (18)式のように1より小さくなれば分布のピークは(19)式に比して a_0 の小さな方にシフトする。

Longuet-Higgins(1963)は(1)式のように非線形性が無視できる場合に正規分布で表される量、たとえば水面変動などについて非線形性がその統計量に及ぼす影響を検討し次式を与えた。これは波高の確率分布ではないが、後に波高の確率分布の研究につながる研究となっている。すなわち、非線形性の効果について、

$$p(\zeta) = (2\pi\kappa_2)^{-1/2} \exp\left\{-f^2/2\right\} \left[1 + \lambda_3 H_3/6 + \left(\lambda_4 H_4/24 + \lambda_3^2 H_6/72\right) + \dots\right] \quad (20)$$

ここに $\kappa_i (i=1, 2, \dots)$ は

$$\phi(it) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta) \exp\{it\zeta\} d\zeta \quad (21)$$

$$K(it) = \ln\{\phi(it)\} \\ = \kappa_1(it)/1! + \kappa_2(it)^2/2! + \kappa_3(it)^3/3! + \dots \quad (22)$$

で定義される積率母関数の自然対数であるキュムラント母関数 $K(it)$ を it のべきに展開したときの各オーダーの係数である。 $i = \sqrt{-1}$ である。

$$f = (\zeta - \kappa_1)/\kappa_2^{1/2} \\ \lambda_n = \kappa_n/\kappa_2^{n/2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (23) \\ H_3 = f^3 - 3f, \quad H_4 = f^4 - 6f^2 + 3 \\ H_5 = f^5 - 10f^3 + 15f, \quad H_6 = f^6 - 15f^4 + 45f^2 - 15$$

である。ここに ζ が対象とする量で λ_3 がskewness, λ_4 がkurtosis, H_n は n 次のHermite多項式である。(20)式の $[\dots]$ より前の部分は正規分布である。非線形性のため λ_3 (skewness)以下の項が無視できなくなるとEdgeworthのA型Gram-Charlier級数に非常に近いものになる。Longuet-Higginsはまた2変数の確率分布についても非線形性が及ぼす影響について検討し、次式を与えている。

$$p(\zeta, \eta) = \left\{2\pi(\kappa_{20}\kappa_{02} - \kappa_{11}^2)^{1/2}\right\}^{-1} \exp\left[-(f^2 - 2\rho ff' + f'^2)/2(1 - \rho^2)\right] \\ \times [1 + (\lambda_{30}H_{30} + 3\lambda_{21}H_{21} + \dots)/6 + \dots] \quad (24)$$

ここに

$$f = \zeta/\kappa_{20}^{1/2}, \quad f' = \eta/\kappa_{02}^{1/2} \\ \lambda_{ij} = \kappa_{ij}/(\kappa_{20}^i \kappa_{02}^j)^{1/2} \\ \rho = \lambda_{11}$$

であり κ_{ij} は2次の半不変係数で

$$\phi(it, is) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta, \eta) \exp\{it\zeta + it\eta\} d\zeta d\eta \\ K(it, is) = \ln\{\phi(it, is)\} = \sum_{(i,j) \neq (0,0)} \frac{\kappa_{ij}}{i!j!} (it)^i (is)^j \quad (25)$$

で定義される。また H_{mn} は

$$(-1)^{m+n} \frac{\partial^m}{\partial f^m} \frac{\partial^n}{\partial f'^n} \exp\left\{-(f^2 + 2\rho ff' + f'^2)/2(1 - \rho^2)\right\} \\ = H_{mn} \exp\left\{-(f^2 + 2\rho ff' + f'^2)/2(1 - \rho^2)\right\} \quad (26)$$

で定義される関数である。

不規則波の波形を $\eta(t)$ とすると

$$\eta(t) = R(t) \exp\{i\phi(t)\} \quad (27)$$

のように表されることもある。 $R(t)$ は(5)式、 $\phi(t)$ は $\tan^{-1}\{I_s(t)/I_c(t)\}$ で与えられる。 Tayfun(1990) は η とその Hilbert 変換 $\hat{\eta}(t)$ を用いて

$$\eta(t) = \left(\eta^2 + \hat{\eta}^2\right)^{1/2} \exp\{i \tan^{-1}(\hat{\eta}/\eta)\} \quad (28)$$

で与え、狭帯域スペクトル $S(\omega)$ に含まれる 1 次成分波相互の 2 次干渉までを考慮し、(24) 式の ζ, η として(28)の $\eta, \hat{\eta}$ を用い、式を変換して R, ϕ の結合分布を求めた後 ϕ について積分して包絡線振幅の確率分布を導いた。

$$p(\zeta) = 2\zeta \exp\left(-\zeta^2\right) \left[1 + \alpha^2(1 - \gamma_0) \left(\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2\right)\right] \quad (29)$$

ここに

$$\begin{aligned} \zeta &= R/R_{rms} \\ \alpha &= \bar{k}(2m_0)^{1/2} \\ \gamma_0 &= \frac{1}{\bar{\omega}m_0^2} \int_0^\infty \int_0^\infty |\omega - \omega'| S_1(\omega) S_1(\omega') d\omega d\omega' \\ \bar{k} &= \bar{\omega}^2/g \\ \bar{\omega} &= m_1/m_0 \end{aligned}$$

g は重力加速度である。 R/R_{rms} は包絡線の振幅の値をその rms 値で正規化したものである。 $S_1(\omega)$ は不規則波に含まれる成分波のうち 1 次成分波だけのスペクトルで、 m_0, m_1 は $S_1(\omega)$ の 0 および 1 次のモーメント ((13) 式) である。 α が波の非線形性を与えるパラメータであり、 α が増加すると (非線形性が増すと) (29) 式は Rayleigh 分布に比してピークがわずかに振幅の小さい側にシフトする。これは 1980 年の Longuet-Higgins が示したものと同一傾向である。

安田ら (1995) は (24) 式の ζ, η として (4) 式で定義される I_c, I_s を選んで、変数変換を行い、水面変動に非線形性がある場合の波高の確率分布として次式を導いた。

$$P(H) = \exp\left\{-H^2/8\right\} \left\{1 + \beta_{41}E_{41}(H) + \beta_{42}E_{42}(H) + \beta_{61}E_{61}(H) + \beta_{62}E_{62}(H) + \beta_{63}E_{63}(H)\right\} \quad (30)$$

ここに

$$\begin{aligned} \beta_{41} &= (\mu_4 - 3)/512, \quad \beta_{42} = (\mu_4 - 3^2)/6291456 \\ \beta_{61} &= 5\mu_3^2/36864, \quad \beta_{62} = \mu_3^2(\mu_4 - 3)/754974720, \quad \beta_{63} = \mu_3^4/21743271936 \\ E_{41}(H) &= H^2(H^2 - 16), \quad E_{42}(H) = H^2(H^6 - 96H^4 + 2304H^2 - 12288) \\ E_{61}(H) &= H^2(H^4 - 48H^2 + 384) \\ E_{62}(H) &= H^2(H^8 - 160H^6 + 7680H^4 - 1228800H^2 + 4915200) \\ E_{63}(H) &= H^2(H^{10} - 240H^8 + 19200H^6 - 614400H^4 + 7372800H^2 + 23592960) \\ \mu_n &= \left\{\frac{1}{T} \int_0^T y^n(t) dt\right\} \left\{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt\right\}^{-n/2} \end{aligned} \quad (31)$$

$y(t)$ は水面変動の時間記録、 T は記録の観測長、 H は y の rms 値で基準化した波高である。また (30) 式は 5 次以上の半不変係数が無視出来るものとしている。

3.2 スペクトルのバンド幅等による確率特性の変化

ゼロクロス法は便宜的な波の定義方法であるため数学的な取り扱いが難しい。このため波高あるいは振幅のかわりに波形に対して定義した包絡線の振幅が使われることが多い。包絡線の振幅 $R(t)$ が同じ時刻の波高の半分あるいは振幅に等しくなるためには $R(t)$ がきわめて緩やかに変化する関数であることが必要となり、通常スペクトルが狭帯域であることが必要となる。スペクトル幅に関するパラメータとしては Cartwright と Longuet-Higgins(1956) による

$$\varepsilon = \left\{1 - m_2^2/m_0m_4\right\} \quad : \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (32)$$

が用いられる。 $m_i (i = 0, 2, 4)$ は (13) 式で与えられる。彼らによる水位の極大値の確率特性に関する研究では ε が 0 となる極限で極大値 (振幅) の確率分布が Rayleigh 分布となる。しかし $\varepsilon = 0$ すなわちスペクトル幅

が0となるのはもはや不規則波ではなく規則波となる。このため狭帯域スペクトルの仮定の下で振幅（波高）の理論確率分布がRayleigh分布をするのは ε が限りなく0に近い狭帯域スペクトルの場合であると考えられている。Longuet-Higgins(1963)はスペクトル幅が有限な幅を持つ場合について振幅の確率特性を検討している。いま非常に緩やかに変化する振幅 b と位相角 ϕ をもつ波と小さな擾乱が重なった場合を考える。

$$y = b \cos(\omega_m t + \phi) + \sum_n a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (33)$$

第2項が擾乱の項で、 $a_n \ll b$ とする。スペクトルの定義に従って

$$\sum_{d\omega} \frac{1}{2} a_n^2 = S'(\omega) d\omega$$

とすれば y の振幅の2乗平均は

$$\langle a^2 \rangle = b^2 + \int_0^\infty \left\{ \sin^2(\pi\omega/2\omega_m) + (\omega/\omega_m)^2 \right\} S'(\omega) d\omega \quad (34)$$

で与えられる。スペクトルの0次のモーメントは(13)式と同様に

$$m_0 = \int_0^\infty \{S(\omega) + S'(\omega)\} d\omega = \bar{b}^2/2 + \int_0^\infty S'(\omega) d\omega \quad (35)$$

で定義する。 $\bar{b}$ は b のrms値である。(35)式を(34)の關係に代入すると、

$$\bar{a}^2 = \langle a^2 \rangle = 2m_0 + \int_0^\infty \left\{ (\omega^2/\omega_m^2 - 1) - \cos^2(\pi\omega/2\omega_m) \right\} S'(\omega) d\omega \quad (36)$$

ここで

$$\begin{aligned} (\omega^2/\omega_m^2 - 1) &= 2(\omega/\omega_m - 1) + (\omega/\omega_m - 1)^2 \\ \cos^2(\pi\omega/2\omega_m) &= \{1 - \cos\pi(\omega/\omega_m - 1)\}/2 = \pi^2(\omega/\omega_m - 1)^2/4 + \dots \\ \mu_i &= \int_0^\infty (\omega - \omega_m)^i S'(\omega) d\omega \end{aligned}$$

なる關係を用いると

$$\bar{a}^2/2m_0 = 1 + \mu_1/m_0\omega_m - \left(\pi^2/8 - 1/2\right) \mu_2/m_0\omega_m^2 \quad (37)$$

を得る。いま

$$\nu^2 = \mu_2/m_0\omega_m^2 = (m_0m_2 - m_1^2)/m_1^2 \quad (38)$$

なるパラメータを導入する。このパラメータも(32)式の ε とは別のスペクトル幅に関するパラメータである。もしスペクトルが ω_m を中心として対称であれば μ_1 は0となり

$$\bar{a}^2/2m_0 = 1 - \left(\pi^2/8 - 1/2\right) \nu^2 = 1 - 0.734\nu^2 \quad (39)$$

となる。(33)の $a_n \ll b$ なる条件は満たさないが、仮にPierson-Moskowitzスペクトルを用いると、 $\nu_2 = 0.1803$, $2m_0/\bar{a}^2 = 1.154$ となりForritallのデータから計算した(19)式と近い値が得られる。

一方、Tayfun(1983)は次のように考えてスペクトルが広帯域の場合の影響を考慮した。すなわちゼロクロス法の定義を厳密に適用すると波高は

$$H = 2Rm_i \quad (40)$$

ではなくて

$$H = Rm_i + Rm_{i+1} \quad (41)$$

である。ここに Rm_i , ($i = 1, 2, 3, \dots$)はゼロクロス波の1周期内の波形の最大値と最小値の位置における包絡線の振幅である。いま Rm を

$$\xi_i = Rm_i/2Rm_{rms}$$

のようにそのrms値で正規化する。RはRayleigh分布をするので ξ_i 、 ξ_{i+1} の結合分布は次の2次元Rayleigh分布 (Kimura, 1980)をする。煩雑であるので ξ_i 、 ξ_{i+1} を ξ_1 、 ξ_2 と表すと、

$$p(\xi_1, \xi_2) = \frac{4\xi_1\xi_2}{1-\kappa^2} \exp\left[-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1-\kappa^2}\right] I_0\left[\frac{2r\xi_1\xi_2}{1-\kappa^2}\right] \quad (42)$$

となる。ここに $I_0[\cdot]$ は0次変形ベッセル関数であり、そのほか

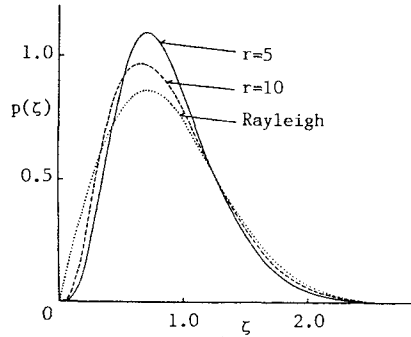
$$\begin{aligned} \kappa &= (\rho^2 + \lambda^2)^{1/2} / m_0 \\ \rho &= \int_0^\infty S(f) \cos 2\pi (f - f_m) \bar{\tau} / 2df \\ \lambda &= \int_0^\infty S(f) \sin 2\pi (f - f_m) \bar{\tau} / 2df \\ \bar{\tau} &= f_m = m_1 / m_0 \end{aligned} \quad (43)$$

および $S(f)$ は不規則波のスペクトルである。(41)式の H についても $2Rm_{rms}$ で割って正規化し

$$\zeta = (\xi_1 + \xi_2) / 2 \quad (44)$$

とし、 $\xi_2 = 2\zeta - \xi_1$ を(42)式に代入して ξ_1 について積分すると ζ の確率分布が得られる。

$$p(\zeta) = \int_0^{2\zeta} p(\xi_1, 2\zeta - \xi_1) d\xi_1 \quad (45)$$



図－2 Rayleigh分布とTayfunの結果の比較

この定義に基づく波高の確率分布を示したものが図－2である。図中の r の値は次に示すWallops型のスペクトルの形状パラメータである。

$$S(f) = (f/f_p)^{-r} \exp\left[r/4 \left\{1 - (f/f_p)^{-4}\right\}\right] \quad (46)$$

ちなみに十分発達した風波のスペクトルとしてよく用いられるPierson型のスペクトルは $r=5$ の場合である。Tayfunの定義は波高のかわりに包絡線の振幅の2倍の値を用いて確率特性を議論する従来の方法と異なってゼロクロス法本来の定義に比較的忠実である。しかし、得られた結果は図からわかるようにRayleigh分布から大きくはずれたものである。木村ら(1993)はTayfunのモデルの問題点を次のように指摘した。すなわち(1)広帯域スペクトルの場合、ゼロクロス波の波形の極大点あるいは極小点の位置の包絡線振幅はRayleigh分布する訳ではないこと、(2)波形の最大(最小)値と同じ時刻の包絡線の振幅は一致しないこと、等である。図－3は波形(実線)とそれに対する包絡線(点線)の位置関係を模式的に示したものである。 $\eta(t_1)$ 、 $\eta(t_2)$ はゼロクロス波の1周期間の波形の最小点と最大点の振幅、 Rm_1 と Rm_2 はそれぞれの点での包絡線の振幅である。いま

$$\delta_i = Rm_i - \eta(t_i) \quad (i = 1, 2) \quad (47)$$

のように両者の差 δ_i を定義し、 Rm と δ に対して次式のWeibull分布を適用した。

$$p(x) = m / (2\gamma) x^{m-1} \exp\{-x^m / 2\gamma\} \quad (48)$$

ここに x は Rm あるいは δ をそれぞれの平均値で割った値を用いる。また、

$$\gamma = 1/2 [\Gamma \{(1+m)/m\}]^{-m} \tag{49}$$

$\Gamma[\cdot]$ はガンマ関数である。(46)式のスペクトルの r の値を変えてシミュレーションを行った結果を示したものが表-1である。 ν は(38)式で定義されるスペクトルの幅に関するパラメータ、 m_1, m_2 はそれぞれ δ, Rm に対するWeibull分布の形状母数、 $\bar{\delta}, \bar{Rm}$ はそれぞれの平均値である。表から、 m_2 の値は r の値が減少するにつれて(スペクトルが広帯域になるにつれて)Rayleigh分布に対する値である2から次第に小さくなること、 m_1 も同様に減少するがほぼ0.65程度の値を持つことなどがわかる。 Rm_1 と Rm_2 には無視できない相関があるが、 δ_1 と δ_2 あるいは Rm と δ の相互の相関は r に関わりなく無視できるほど小さい。木村らは波高を $H = (Rm_1 + Rm_2 + \delta_1 + \delta_2)$ と定義し、4次元のWeibull分布を積分して波高の確率分布を導いた。図-4は計算結果(実線)とデータの比較を示したもので $r = 5, 10$ の場合についてRayleigh分布(点線)とあわせて示した。図からわかるようにTayfunの結果はかなり良く修正できている。北野ら(1995)は δ の確率特性を検討し、振幅 R なる条件下では $\sqrt{\delta}$ の確率分布が平均値0、分散値 $\nu^2 m_0/2R$ なる正領域Gauss分布となり、木村らのデータと良い対応を示すが、 δ もわずかにスペクトル形の影響を受けることを示している。

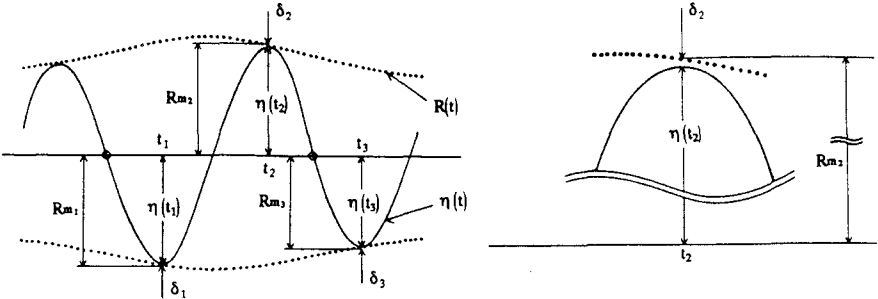


図-3 波高を定義する諸量

表-1 Weibull分布の母数の推定値

r	ν	m_1	m_2	γ_1	γ_2	$\bar{\delta}_j$	$\bar{Rm}_j$
4	0.5571	0.6396	1.8482	0.0851	0.8165	0.0844	1.1583
5	0.4041	0.6491	1.8694	0.0626	0.7002	0.0541	1.0631
6	0.3747	0.6590	1.9045	0.0484	0.6245	0.0378	0.9972
8	0.2444	0.6686	1.9760	0.0341	0.5208	0.0234	0.9050
10	0.2018	0.6889	1.9594	0.0257	0.4505	0.0170	0.8407
20	0.1256	0.8185	1.9907	0.0086	0.2992	0.0078	0.6848

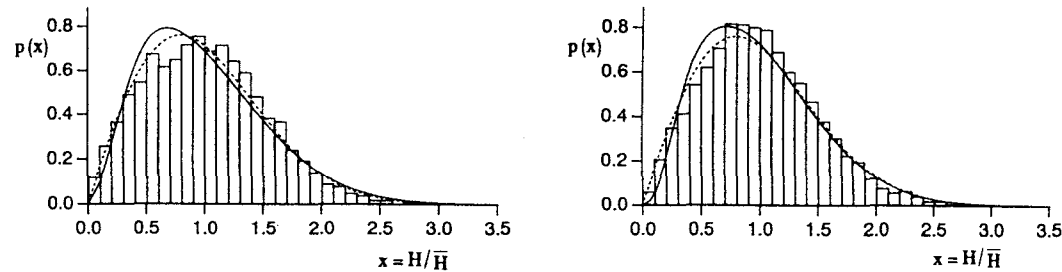


図-4 波高の確率分布

3.3 最高波の波高の確率特性

ここでは最高波の確率特性について説明する。ここまで示した波高の確率分布はいずれも(確率は小さいものの)無限に大きな波高の存在を許している。しかし、たとえば1つのストームを考えるとその間に来襲す

る波の数は多いとはいえ有限な数である。したがってこの間に来襲する波の高さも砕波などの影響を考えなくとも有限となる。しかし、最高波は平均量ではなく、波高の母集団からの有限なサンプルに含まれる最大値であり、母集団が同じ場合でもサンプル毎に変化する統計量である。ここではLonguet-Higgins(1952)の研究に従ってその確率分布を説明する。ただしLonguet-Higginsは波高ではなく振幅について検討している。いま波高の確率を $p(H)$ とすると、その分布に従う H の集合においてある任意の H がある特定の波高 H_0 を超えない確率は

$$\int_0^{H_0} p(H) dH = 1 - \psi(H_0) \quad (50)$$

で与えられる。ここに

$$\psi(H_0) = \int_{H_0}^{\infty} p(H) dH \quad (51)$$

である。波高 H のデータ個数(サンプルサイズ)を N とする。これに含まれるすべての H が H_0 を超えない確率はすべてのデータに相関がないと仮定すれば $\{1 - \psi(H_0)\}^N$ となる。したがって少なくとも一つ以上の H が H_0 を超える事象は上の余事象であることからその確率は $1 - \{1 - \psi(H_0)\}^N$ となる。したがって N 個のデータのうち最大の H が H_0 と $H_0 + dH$ の間に存在する確率は、少なくとも一つのデータが H_0 を超える確率から少なくとも一つのデータが $H_0 + dH$ を超える確率を差し引けばよい。いまこれらの確率は

$$f(H_0) = 1 - \{1 - \psi(H_0)\}^N \quad (52)$$

$$f(H_0 + dH) = 1 - \{1 - \psi(H_0 + dH)\}^N \quad (52)'$$

とし、(52)'式をTaylor展開して第2項までとれば

$$\begin{aligned} f(H_0) - f(H_0 + dH) &= -dH f'(H_0) \\ &= -d \left[1 - \{1 - \psi(H_0)\}^N \right] = -N \{1 - \psi(H_0)\}^{N-1} \frac{d\psi(H_0)}{dH} dH \end{aligned} \quad (53)$$

のようになり最終的に最高波の波高 H_{max} の確率密度関数は

$$p(H_{max}) = 2N \left[1 - \exp \left\{ - (H_{max}/H_{rms})^2 \right\} \right]^{N-1} H_{max}/H_{rms} \exp \left(-H_{max}^2/H_{rms}^2 \right) \quad (54)$$

となる。(54)式より H_{max} の期待値は若干の近似の後

$$E\{H_{max}\}/H_{rms} = (\ln N)^{1/2} + \gamma (\ln N)^{-1/2} / 2 + O(\ln N)^{-3/2} \quad (55)$$

となる。ここに $\gamma = 0.5772 \dots$ (オイラー定数)である。(55)式の第1項だけを用いると、 H_{max} は $(\ln N)^{1/2}$ に比例して大きくなる。Forristall(1978)は波高の確率分布として(12)式を用い、同様の手順で

$$E\left(H_{max}/m_0^{1/2}\right) = (8.42 \ln N)^{0.47} (1 + 0.47\gamma/\ln N) \quad (56)$$

を得ている。

4. ゼロクロス点の間隔の確率特性

ゼロアップクロス波の周期の確率分布を決定する問題は非常に難しい問題である。ゼロアップクロス波の周期について明らかにする前に、信号 $I(t)$ がゼロ線を正の方向に横切り、最大点に達したのちに負の方向にゼロ線を横切る間での間隔(これはゼロクロス波の半周期に近い値であるが)を明らかにしておく必要がある。この確率特性もまだ十分明かでないが、解くべき式だけはRiceによって次のように与えられている。

$$\begin{aligned} p(\tau) &= p_0(\tau) - \frac{1}{1!} \int_0^\tau p_1(r, \tau) dr + \frac{1}{2!} \int_0^\tau \int_0^\tau p_2(r, s, \tau) dr ds \\ &\quad - \frac{1}{3!} \int_0^\tau \int_0^\tau \int_0^\tau p_3(r, s, u, \tau) dr ds du + \dots \end{aligned} \quad (57)$$

ここに $p_0(\tau)$ は $t = 0$ および τ と $\tau + d\tau$ の間で $I(t) = 0$ となる確率、 $p_1(r, \tau)$ は $t = 0$ および τ と $\tau + d\tau$ の間、 r と $r + dr$ の間で $I(t) = 0$ となる確率、 $p_2(r, s, \tau)$ は $t = 0$ および τ と $\tau + d\tau$ の間、 s と $s + ds$ および r と $r + dr$ の間で $I(t) = 0$ となる確率であり、以下同様である。つまりこの式は0から τ 間での間で $I(t) = 0$

となる確率を順次差し引いて、最後に $t = 0$ で信号がゼロ線を上方に横切り、 τ と $\tau + d\tau$ の間で初めてゼロ線を下方に横切る確率を与える式である。この無限級数は実行困難であるため Rice は第 1 項のみを用いた次の近似解を求めている。

$$p(\tau) = \frac{d\tau}{2\pi} \left\{ \frac{\psi_0}{-\psi_0''} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{M_{23}}{H} \right\} (\psi_0^2 - \psi_\tau^2)^{-3/2} \{1 - H \cot^{-1}(-H)\} \quad (58)$$

ここに

$$H = M_{23} \{M_{22}^2 - M_{23}^2\}^{-1/2}$$

であり、 M_{22} および M_{23} はマトリクス

$$M = (\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} \psi_0 & 0 & \psi_\tau' & \psi_\tau \\ 0 & -\psi_0'' & -\psi_\tau'' & -\psi_\tau' \\ -\psi_\tau' & -\psi_\tau'' & -\psi_0'' & 0 \\ \psi_\tau & -\psi_\tau' & 0 & \psi_0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

の要素 $\mu_{22} = -\psi_0''$ および $\mu_{23} = -\psi_\tau''$ の余因子である。 M の要素は

$$\begin{aligned} \psi_\tau &= \int_0^\infty S(f) \cos 2\pi f \tau df \\ \psi_\tau' &= -2\pi \int_0^\infty f S(f) \sin 2\pi f \tau df \\ \psi_\tau'' &= -4\pi^2 \int_0^\infty f^2 S(f) \cos 2\pi f \tau df \\ \psi_0 &= \psi_\tau|_{\tau=0}, \quad \psi_0'' = \psi_\tau''|_{\tau=0} \end{aligned} \quad (60)$$

で与えられる。(58) 式は τ の平均値付近でピークを持つが、 τ の値が大きくなると第 2、第 3 のピークが現れる。これは (57) 式の第 2 項以下を無視したことによるものである。その後、Longuet-Higgins(1958) による近似精度の向上、竹内ら(1972) による Rice の解の補正など広帯域スペクトルの場合に対する解析解を求める努力が続けられている (zero-crossing problem)。Longuet-Higgins(1957) は不規則波形を (61) 式のように位相角を用いて周期の確率分布を導く手順を示した。この研究では不規則波の時間波形ではなく一方向不規則波の $t = 0$ における空間波形を対象としており、波形が 0 レベルを切る点間の距離の確率特性が求められている。いま 1 方向不規則波を対象とし、波の進行方向に x 軸をとるとその波形は

$$\zeta = R \cos \{\chi\} \quad (61)$$

$$\chi = \bar{u}x + \phi, \quad \chi_x = \bar{u} + \phi_x \quad (62)$$

と与えられる。ここに R は包絡線の振幅、 χ は位相角、 $\bar{u}$ は波の進行方向の波数の平均値であり、添え字 x は x に関する微分を意味する。Longuet-Higgins(1957) の解説には正規分布をする変数の結合確率分布およびそれを変数変換して求められる確率分布について一般的な説明がなされている。この結果を用いると (62) 式の χ と χ_x の結合分布は ϕ と ϕ_x の結合分布 $p(\phi, \phi_x)$ を変数変換して

$$p(\chi, \chi_x) = \frac{(m_0/\mu_2)^{1/2}}{4\pi \{1 + (\chi_x - \bar{u})^2 m_0/\mu_2\}^{3/2}} \quad (63)$$

と与えられる。ここに

$$m_n = \int_0^\infty E(u) u^n du \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (64)$$

$$\mu_2 = \int_0^\infty E(u) (u - \bar{u})^2 du \quad (65)$$

$$\bar{u} = m_1/m_0 \quad (66)$$

および $E(u)$ は不規則波の波数スペクトルである。 ζ が x と $x + dx$ の間で 0 レベルを横切る確率は x と $x + dx$ の間で χ が $(2r - 1/2)\pi$ となるか $(2r + 1/2)\pi$ の場合である (r は整数)。Longuet-Higgins によれば x と $x + dx$ の間で χ が $(2r - 1/2)\pi$ となる確率は

$$H(\chi) dx = \int_{-\infty}^\infty p(\chi, \chi_x)_{\chi=2r\pi-\pi/2} |\chi_x| dx d\chi_x = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} dx \quad (67)$$

で与えられる。同様に x と $x + dx$ の間で χ が $(2r + 1/2) \pi$ となる確率は (68) と同じ式で与えられるのでこれらをあわせて x と $x + dx$ の間で χ が 0 レベルを横切る確率は (67) の結果の 2 倍となり、

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} dx \quad (68)$$

で与えられる。いまゼロクロス点の間隔を ℓ とするとその平均値 $\bar{\ell}$ は (68) の逆数

$$\bar{\ell} = \pi \left(\frac{m_0}{m_2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\bar{u}} (1 + \nu^2)^{1/2} \quad (69)$$

ここに

$$\nu = \left(\mu_2 / \bar{u}^2 \mu_0 \right)^{1/2} \quad (70)$$

で与えられる。 ν が十分小さければ

$$\bar{\ell} = \pi / \bar{u} \quad (71)$$

となる。 χ がゼロ線を上方に横切るのは χ が増加しながら $(2r - 1/2) \pi$ となるとき、および減少しながら $(2r + 1/2) \pi$ となるときである。後者となる確率は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\chi, \chi_x)_{\chi=2r\pi+\pi/2} |\chi_x| dx d\chi_x = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} \left[1 - (1 + \nu^2)^{-1/2} \right] dx \quad (72)$$

となるが、この確率は ν が小さい場合には無視しうる。したがって隣り合うゼロクロス点の位置を順に x_1, x_2 とすれば

$$\pi = \chi(x_2) - \chi(x_1) = \left\{ \ell \chi_x + \ell^2 \chi_{xx} / 2! + \dots \right\} \quad (73)$$

となる。(73) 式の右辺は $\chi(x_2)$ を $x = x_1$ 点周りに Taylor 展開して計算したものである。 χ_{xx} は ν^2 のオーダーで十分小さいのでこれを無視すると、

$$\ell = \pi / \chi_x \quad (74)$$

となる。Rice が不規則関数の単位時間当たりのゼロクロッシング数の期待値を求める際に用いたものと同じ手順を用いると χ が $x \sim x + dx$ の間に指定された値をとる確率は $|\chi_x| / H(\chi)$ で与えられるので χ_x の条件付き確率は

$$\begin{aligned} p(\chi_x) |_{\chi} &= \frac{p(\chi, \chi_x) |\chi_x|}{H(\chi)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{m_2} \right)^{1/2} \frac{|\chi_x| (m_0 / \mu_2)^{1/2}}{\left(1 + (\chi_x - u)^2 m_0 / \mu_2 \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (75)$$

となる。(75) 式は χ を含まないのでこの式はそのまま χ_x の確率分布となる。(71), (74) 式の関係代入すると

$$p(\ell) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{m_2} \right)^{1/2} \frac{(\bar{u}^2 / \nu)}{\left(\ell^2 / \bar{\ell}^2 + (\ell / \bar{\ell} - 1)^2 / \nu^2 \right)^{3/2}} \quad (76)$$

となる。さらに $\xi = (\ell - \bar{\ell}) / \bar{\ell}$ とおけば

$$p(\xi) = \frac{1}{2\nu (1 + \xi^2 / \nu^2)^{3/2}} \quad (77)$$

が得られる。ここではゼロクロス点間の距離の確率分布が得られたがスペクトルとして周波数スペクトルを用いるとほぼ同じ議論でゼロクロス点間の時間間隔の確率分布が得られる。ここでは説明を省略したが Longuet-Higgins の手順を用いると途中で振幅とゼロクロス点間の結合確率分布が得られる。これは一般には波高と周期の結合確率分布として利用されることが多いので 5. で説明する。

5. 波高と周期の結合確率密度関数

4. で説明したように Longuet-Higgins(1957) の用いた方法で波数スペクトルのかわりに周波数スペクトルを用いると包絡線の振幅とゼロクロス点の時間間隔の確率分布が求められる。Longuet-Higgins は 1983 年に波の振幅と周期の結合確率分布として 1957 年のものを修正して発表している。これより少し前に Cavanié ら (1976) も同様の研究を発表しているがここでは Longuet-Higgins(1983) に従って説明する。いま不規則波形を

$$\zeta = \text{Re}\{A \exp(i\sigma t)\} \quad (78)$$

の様に与える。ここに Re は実部をとることを意味する。 A は

$$A = \rho \exp(i\phi) \quad (79)$$

であり、 ρ は包絡線の振幅、 ϕ は A の位相角、 σ は ζ の平均角周波数で一般に次式で定義される。

$$\sigma = m_1/m_0 \quad (80)$$

m_0, m_1 は後の (84) 式で与える。 ζ の位相角は (78), (79) 式をあわせて $\chi = \sigma t + \phi$ となり、これを時間 t に関して微分すると

$$\chi_t = \phi_t + \bar{\sigma} \quad (81)$$

となる。狭帯域スペクトルを仮定しているので、包絡線は非常に緩やかに変化する。したがって ϕ_t は σ に比べて非常に小さく、波の周期は

$$\tau = 2\pi/\chi_t = 2\pi/(\bar{\sigma} + \phi_t) \quad (82)$$

と近似できる。Longuet-Higgins は 1957 年の解説の中で種々の確率密度関数を導いているが、その中に ρ と ϕ' (ϕ の 1 次導関数) の結合確率分布が現れている (式は波数スペクトルに対して定義されたもので、式の中にはもう一つ変数が含まれているが簡単な計算で両者の結合分布となる)。すなわち

$$p(\rho, \phi_t) = \left\{ \rho^2 / (2\pi\mu_0^2\mu_2) \right\}^{1/2} \exp \left\{ -\rho^2 (1/\mu_0 + \phi_t^2/\mu_2) / 2 \right\} \quad (83)$$

である。4. では μ (m もまた) は波数スペクトルに対して定義されているが、基本的には同じスペクトルのモーメントで、スペクトルを $E(\sigma)$ とすると

$$m_n = \int_0^\infty \sigma^n E(\sigma) d\sigma \quad (84)$$

$$\mu_n = \int_0^\infty (\sigma - \bar{\sigma})^n E(\sigma) d\sigma \quad (85)$$

と定義される。 σ は角周波数であるが周波数 ($f = \sigma/2\pi$) が用いられることも多いので注意されたい。この研究でもスペクトル幅パラメータ ν は

$$\nu = m_0 m_2 / m_1^2 - 1 \quad (86)$$

と定義される。ここで

$$R = \rho / (2m_0)^{1/2}, \quad T = \tau / \bar{\tau} \quad (87)$$

とおき、(83) 式を変数変換すると、

$$\begin{aligned} p(R, T) &= p(\rho, \phi_t) |\partial(\rho, \phi_t) / \partial(R, T)| \\ &= \frac{2R^2 L}{\pi^{1/2} \nu T^2} \exp \left\{ -R^2 \left[1 + (1 - 1/T)^2 / \nu^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

となる。(88) 式の L は $p(R, T)$ が $T < 0$ の領域にも値を持つのでこの範囲の値を無視するための補正係数で次式で与えられる。

$$L = 2 / \left\{ 1 + (1 + \nu^2)^{-1/2} \right\}$$

図-5 は (88) 式の概形を示すもので図は $p/p_{\max} = 0.99, 0.90, 0.70, 0.50, 0.30, 0.1$ の等値線を示すものである。(88) 式から周辺分布として R, T のそれぞれの確率分布が計算できる。すなわち

$$p(R) = \frac{2L}{\pi^{1/2}} \text{Re} \exp(-R^2) \int_{-\infty}^{R/\nu} \exp(-\beta^2) d\beta \quad (89)$$

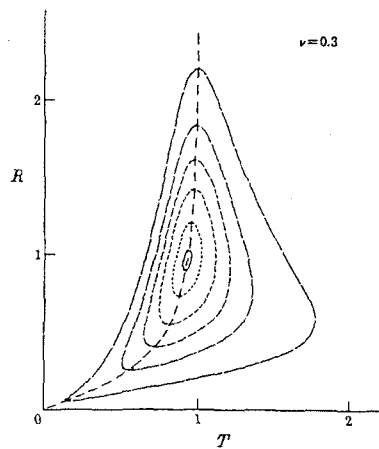


図-5 RとTの結合分布

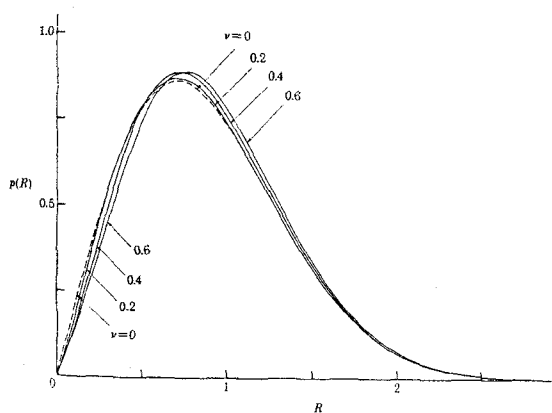


図-6 Rの確率分布

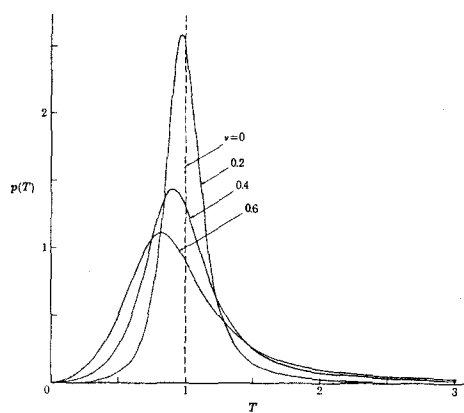


図-7 Tの確率分布

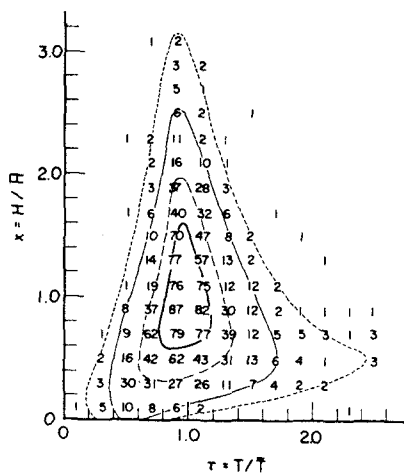


図-8 R,Tの結合分布とH,Tの頻度分布の比較

および

$$p(T) = \frac{L}{2\nu T^2} \left\{ 1 + (1 - 1/T)^2 / \nu^2 \right\}^{-3/2} \quad (90)$$

である。(89),(90)式を示したものがそれぞれ図-6、図-7である。 $p(R)$ は式中にRayleigh分布式を含むがスペクトル幅パラメータの増加に伴いピークが R の大きい側にシフトし、3.2のLonguet-Higginsの結果と対応している。この特徴は非線形性を考慮した場合のTayfunらの結果と逆であるが、数値シミュレーションなどで見られるデータの特性が一部説明できており興味深い。図-8は合田(1977)による(88)式とデータの比較を示したもので図中の数字は $\Delta H = 0.2H_m$, $\Delta T = 0.2T_m$ (H_m, T_m は波高、周期の平均値)の格子の中に入るデータの個数である。波高と周期の相関が-0.25から0.19の範囲のデータがまとめてプロットしており、理論式は $\nu = 0.26$ のものが示してある。その他のデータの比較の結果より、相関が小さい場合には理論式とデータとの対応は良好であるが、相関の増大に伴い適合性は低下する。Cavaniéらは波形の極大点を対象として波高・周期の確率分布を導いたが式中にスペクトルの4次モーメント m_4 が現れる。スペクトルのモーメントは次数が増加するにつれてスペクトルの高周波側の特徴が強調されるため、波高と周期の相関がきつすぎる結合確率分布が得られる。しかしLonguet-Higginsの研究も狭帯域スペクトルを対象としており結果の適用範囲は限られている。狭帯域の仮定が緩やかな場合が今後の研究課題と考える。

6. 多方向不規則波の確率特性

6.1 波向き確率特性

波の基本要素で、海中構造物の設計に必要な情報として波高・周期の他に波の峰の長さ、波向きなどがあげられる。波高、周期等が1点で観測した記録から得られる特性量であるのに対して、これらは2次元的な波の形状をもとに定義される特性量である。このため波高などに比して簡単で一般的な定義が困難であることも相まって研究例は少ない。この方面の研究は1987年から1989年にかけて4つの研究が我が国で発表された(磯部, 1987; 赤井ら, 1988; 権ら, 1988; 水口ら, 1989)。それぞれは目的が少しずつ異なるものの、1点で観測される水平水粒子速度の方向が波向きとして用いられ、互いに似た結論が得られている。これらの研究は共通して波向きの確率分布だけでなく、波高・周期および波向きの結合分布を求めている。ここでは赤井ら(1988)のものを紹介する。

多方向不規則波の水面変動 $\eta(t)$ 、水平方向の水粒子速度 $u(t), v(t)$ および η の時間微分 $\eta'(t)$ が無数の成分波の重なったものとして表現できるものとしてそれぞれ次のように表す。

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \eta_c \cos 2\pi f_m t + \eta_s \sin 2\pi f_m t \\ u(t) &= u_c \cos 2\pi f_m t + u_s \sin 2\pi f_m t \\ v(t) &= v_c \cos 2\pi f_m t + v_s \sin 2\pi f_m t \\ \eta'(t) &= (\eta'_c + 2\pi f_m \eta_s) \cos 2\pi f_m t + (\eta'_s - 2\pi f_m \eta_c) \sin 2\pi f_m t \end{aligned} \quad (91)$$

η, u, v および η' を x で代表させて表すと η_c, η_s 等は

$$x_c(t) = \sum_{n=1}^N X_n \cos(2\pi f_n t - 2\pi f_m t + \varepsilon_n), \quad x_s(t) = \sum_{n=1}^N X_n \sin(2\pi f_n t - 2\pi f_m t + \varepsilon_n) \quad (92)$$

と与えられる。ここに $X_n^2 = 2X(f_n)df$, $X(f)$ は x のスペクトルであり、 f_m はスペクトルの平均周波数、 ε_n は初期位相角である。中心極限定理より x_c および x_s はすべて平均値が0の正規分布をする。したがってこれら8変数の結合確率密度関数は

$$\begin{aligned} p(\eta_c, u_c, v_c, \eta'_c, \eta_s, u_s, v_s, \eta'_s) &= \frac{1}{(2\pi)^4 m_{00} m_{20} m_{02} m_{00}^* \Delta} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2\Delta} \left\{ a(\eta_c^2 + \eta_s^2) + d(u_c^2 + u_s^2) + h(v_c^2 + v_s^2) + l(\eta_c'^2 + \eta_s'^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2b(\eta_c u_c + \eta_s u_s) + 2c(\eta_c v_c + \eta_s v_s) - 2e(u_c v_c + u_s v_s) \right\} \right] \end{aligned} \quad (93)$$

となる。ここに

$$m_{00} = \langle \eta_c^2 \rangle = \langle \eta_s^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
m_{20} &= \langle u_c^2 \rangle = \langle u_s^2 \rangle \\
m_{02} &= \langle v_c^2 \rangle = \langle v_s^2 \rangle \\
m_{00}^* &= \langle \eta_c^2 \rangle = \langle \eta_s^2 \rangle \\
m_{10} &= \langle \eta_c u_c \rangle = \langle \eta_s u_s \rangle \\
m_{01} &= \langle \eta_c v_c \rangle = \langle \eta_s v_s \rangle
\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
a &= 1/m_{00}, \quad b = r_{10}/(m_{00}m_{20})^{1/2}, \quad c = -r_{01}/(m_{00}m_{02})^{1/2}, \quad d = (1 - r_{01}^2)/m_{20} \\
e &= -r_{10}r_{01}/(m_{02}m_{20})^{1/2}, \quad h = (1 - r_{10}^2)/m_{02}, \quad l = \Delta/m_{00}^*
\end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
r_{01} &= m_{01}/(m_{00}m_{02})^{1/2} \\
r_{10} &= m_{10}/(m_{00}m_{20})^{1/2} \\
\Delta &= 1 - r_{01}^2 - r_{10}^2
\end{aligned} \tag{96}$$

である。いま

$$\begin{aligned}
\eta_c &= \eta_p \cos \chi, \quad \eta_s = \eta_p \sin \chi, \quad u_c = u_p \cos \chi - u_q \sin \chi, \quad u_s = u_p \sin \chi + u_q \cos \chi \\
v_c &= v_p \cos \chi - v_q \sin \chi, \quad v_s = v_p \sin \chi + v_q \cos \chi \\
\eta'_c &= \eta'_p \cos \chi - \chi' \eta_p \sin \chi, \quad \eta'_s = \eta'_p \sin \chi + \chi' \eta_p \cos \chi
\end{aligned}$$

さらに

$$u_p = \sqrt{m_{20}} W \cos \alpha, \quad v_p = \sqrt{m_{20}} W \sin \alpha \tag{97}$$

とにおいて(93)式を変数変換する。この際 η_p , α および χ' 以外の変数は不要であるので積分して消去すると最終的に

$$\begin{aligned}
p(\eta_p, \alpha, \chi') &= \frac{C_0 \sqrt{m_{20}} \eta_p^2}{(2\pi)^{3/2} m_{00} (m_{02} m_{00}^*)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta} l \chi'^2 \eta_p^2 \right\} \\
&\times \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{A} \exp \left(-\frac{1}{2\Delta} a \eta_p^2 \right) + \frac{B}{A^{3/2}} \eta_p \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{B \eta_p}{(\Delta A)^{1/2}} \right) \right\} \exp \left(-\frac{C}{2A} \eta_p^2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{98}$$

を得る。ここに $\operatorname{erf}[\cdot]$ は誤差関数であり、

$$\begin{aligned}
A &= d m_{20} \cos^2 \alpha + h m_{20} \sin^2 \alpha - 2 e m_{20} \sin \alpha \cos \alpha \\
B &= b \sqrt{m_{20}} \cos \alpha - c \sqrt{m_{20}} \sin \alpha \\
C &= \cos^2 \alpha / m_{00} + \sin^2 \alpha m_{20} / (m_{00} m_{20})
\end{aligned} \tag{99}$$

である。 C_0 は(88)式の L と同じく χ' が負をとらないようにするための補正係数である。 χ' について積分すると磯部(1987)の結果と同じになる。また α について積分すると Longuet-Higgins の(88)式と同じになる。赤井らが用いた χ' は(81)式の χ_t と同じもので周波数である。したがって(99)式は振幅と周波数と波向きの結合確率分布となる。しかし(82)式の関係を用いると χ' は周期に変換できる。(98)式は3次元の確率分布であるのでデータとの比較を示すのは難しいが赤井らによればスペクトルが狭帯域であれば適合性は良いようである。一方木村ら(1995)は静水平面上に x, y 軸をとり、 y 軸方向に y_0 だけ離れた2点を選び、一方の点を波の峰が通過する時の他方の点における波の位相から波向きを定義している。2点での不規則波形を

$$\begin{aligned}
\eta_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\sigma_n t + \delta_n) = \eta_{c1} \cos \bar{\sigma} t - \eta_{s1} \sin \bar{\sigma} t \\
\eta_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\sigma_n t + \delta_n + v_n y_0) = \eta_{c2} \cos \bar{\sigma} t - \eta_{s2} \sin \bar{\sigma} t
\end{aligned} \tag{100}$$

とする。ここに C_n , σ_n , δ_n は第 n 成分波の振幅, 角周波数および初期位相角, $\bar{\sigma}$ は平均角周波数, v_n は y 軸方向の波数であり 2 点は y 軸方向に y_0 だけ離れているものとする。 η_{c1} , η_{s1} , η_{c2} , η_{s2} はすべて平均値 0 の正規分布をする。これら 4 変数の結合確率分布 (4 次元正規分布) を求め, 各変数を

$$\eta_{c1} = R_1 \cos \chi_1, \quad \eta_{s1} = R_1 \sin \chi_1, \quad \eta_{c2} = R_2 \cos \chi_2, \quad \eta_{s2} = R_2 \sin \chi_2 \quad (101)$$

とにおいて変数変換すると,

$$p(R_1, R_2, \chi_1, \chi_2) = \frac{1}{(2\pi)^2 (m_0^2 - \mu_3^2 - \mu_4^2)} \times \exp \left[-\frac{1}{2(m_0^2 - \mu_3^2 - \mu_4^2)} \left\{ m_0 (R_1^2 + R_2^2) - 2R_1 R_2 [\mu_3 \cos(\chi_1 - \chi_2) - \mu_4 \sin(\chi_1 - \chi_2)] \right\} \right] \quad (102)$$

を得る。ここに

$$\begin{aligned} \langle \eta_{c1}^2 \rangle &= \langle \eta_{s1}^2 \rangle = \langle \eta_{c2}^2 \rangle = \langle \eta_{s2}^2 \rangle = m_0 \\ \langle \eta_{c1} \eta_{c2} \rangle &= \langle \eta_{s1} \eta_{s2} \rangle = \mu_3 \\ \langle \eta_{c1} \eta_{s2} \rangle &= \langle \eta_{s1} \eta_{c2} \rangle = -\mu_4 \\ \langle \eta_{c1} \eta_{s1} \rangle &= \langle \eta_{c2} \eta_{s2} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (103)$$

である。いま $\chi_2 = 2n\pi + \varepsilon$ とおき, $\chi_1 = 2n\pi$ の時の R_1, R_2 および ε の結合分布を計算し, R_1, R_2 の結合分布である 2 次元 Rayleigh 分布でこれを割ると 2 点での波の振幅がそれぞれ R_1, R_2 の場合の ε の条件付き確率分布が得られる。

$$p(\varepsilon | R_1, R_2) = \exp \left\{ \frac{R_1 R_2 \kappa}{m_0 (1 - \kappa^2)} \cos(\varepsilon - \beta) \right\} / 2\pi I_0 \left\{ \frac{R_1 R_2 \kappa}{m_0 (1 - \kappa^2)} \right\} \quad (104)$$

を得る。ここに

$$\kappa^2 = (\mu_3^2 + \mu_4^2) / m_0^2, \quad \beta = \tan^{-1}(\mu_4 / \mu_3)$$

であり, $I_0[\cdot]$ は 0 次の変形ベッセル関数を意味する。波の峰線に直角方向に波向き線を取り, それと x 軸のなす角 θ を x 軸から時計回り方向に正としてとると,

$$\theta_i = \sin^{-1} \{ (\varepsilon_i L_i / 2\pi) / y_0 \} \quad (105)$$

となる。ここに L_i は波長である。これを用いて (104) 式を変換すると

$$p(\theta | R_1, R_2) = f(\theta) \exp \left\{ \frac{R_1 R_2}{m_0 y_*^2} \sqrt{(1 - y_*^2)} \cos \left(\frac{2\pi y_0}{L_*} \sin \theta - \beta \right) \right\} / 2\pi I_0 \left\{ \frac{R_1 R_2 (1 - y_*^2)^{1/2}}{m_0 y_*^2} \right\} \quad (106)$$

を得る。ここで y_* , $f(\theta)$ は

$$y_* = y_0 \bar{u} \gamma \cong \left\{ 1 - (\mu_3^2 + \mu_4^2) / m_0^2 \right\}^{1/2} \quad (107)$$

$$f(\theta) = \frac{2\pi y_0}{L_*} \cos \theta \quad (108)$$

であり, $\bar{u}$ は x 軸方向の波数の平均値, γ は Longuet-Higgins (1957) の long-crestedness パラメータ, L_* は $\bar{\sigma}$ に対応する波長である。図-9 は θ の確率分布を示したもので R_1, R_2 をともに平均振幅 R_m の 1.0 から 2.5 倍まで変化させて計算したものである。不規則波のスペクトルは Bretschneider-光易スペクトル, 方向分布関数は合田ら (1975) のもので $S_{max} = 10$ として用いた。図-10 は S_{max} による θ の分布に変化を示したもので S_{max} を 10, 25, 75 と変化させて計算した。振幅は R_1, R_2 とも R_m を用いた。

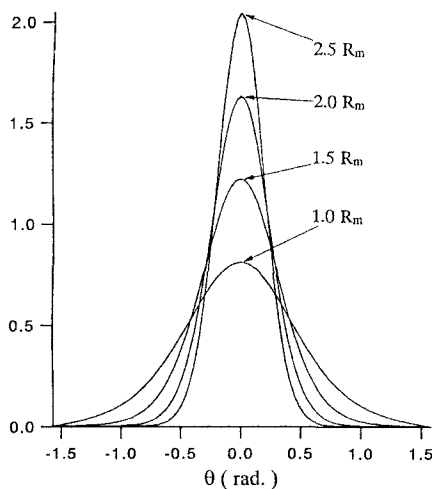


図-9 波向きの確率分布, $S_{max} = 10$

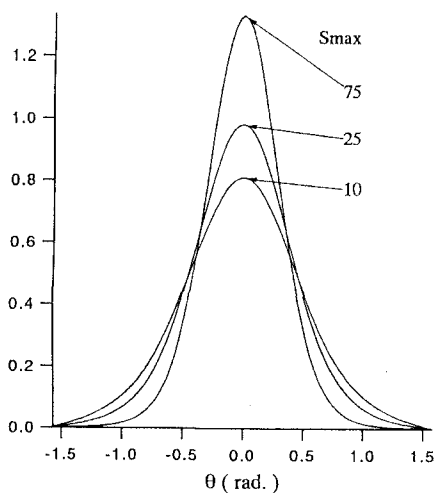


図-10 波向きの確率分布 $R_1 = R_2 = R_m$

6.2 波峰の長さの確率特性

波の峰の長さの有限性は、防波堤など幅のある構造物に対して作用外力の低減効果を持つと期待されるが観測が非常に難しいことから研究例は少ない。ここでは合田ら(1991,1992)による数値シミュレーションの結果を紹介する。計算に用いたスペクトルは合田(1987)による修正JONSWAP型、方向分布関数はやはり合田ら(1975)による光易型分布関数である。図-11は $S_{max} = 25$ とした深海条件での波峰の平面パターン図で、1辺がピーク周波数に対応する成分波の波長 L_p の20倍の範囲が示されている。波峰は時間を固定して計算した不規則波の平面波形で水位が閾値を越える範囲と定義されている。この図では有義波高の10%の値が閾値として用いられている。図からもわかるように範囲が小さく峰と見なしにくいものも多く定義の難しさがうかがわれる。図-12は $S_{max} = 10, 25$ の場合で、波峰のデータの長い方から図中に示される4種類(0.4%, 1%, 5%, 10%)を選び、峰方向の波のプロフィルを静水面から0.2m, 0.5m, 1m, 1.5mおよび2mのレベルで水平に切り、各レベル毎の峰方向の長さを全部の波について平均した値を示したものである。ただし図は左右対称に示しており、横軸の2倍の値が平均峰長となる。

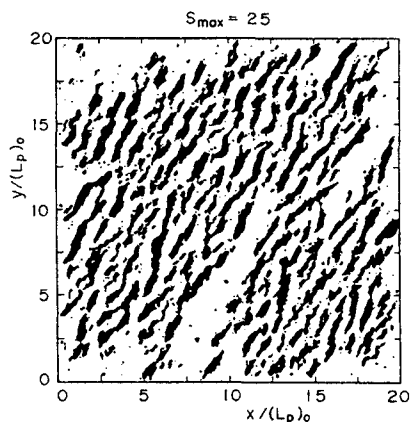


図-11 波峰線のパターン図

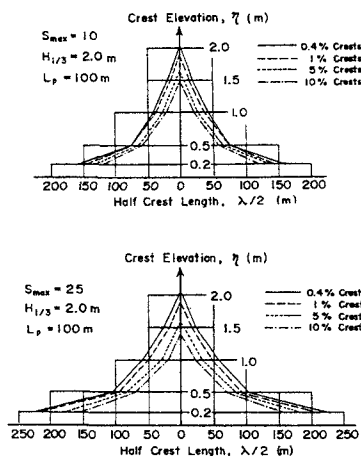


図-12 峰長の平均値

6.3 有限な区間に来襲する波高の確率特性

図-13は波高計と多方向不規則波の波形の関係を示したものである。波高計は1点に固定されているので近傍をいかに大きな波が通過しようともその点の水位変動が小さければ小さな波としか認識しない。一方、船舶、ケーソンなど有限な大きさを持つ構造物では物体に沿って波高が変化し、大きな波が作用すればどの部分に作用しようとも”大きな波”と認識される。このように構造物の大きさの範囲の中で波高が選択的に認識される場合には波高の確率分布は構造物の規模に応じて変化する。木村ら(1994)は有限な区間内での包絡線の振幅の最大値の確率特性について次のような検討を行っている。

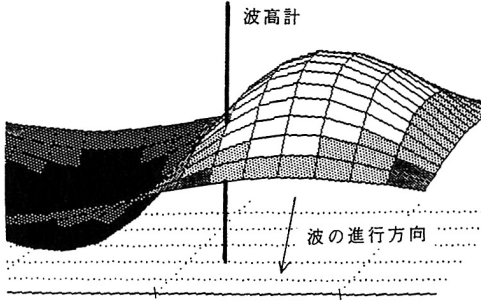


図-13 波高計と波の空間波形

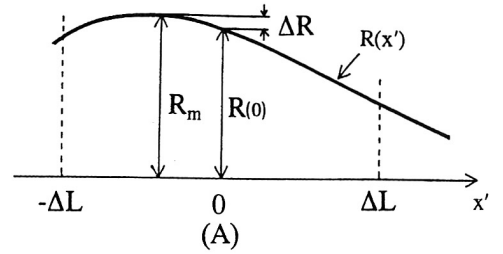


図-14 包絡線の場所的な変化

多方向不規則波浪場に座標軸 x', y' をとり、 x' 軸に沿って鉛直な面 H を立てる。この面で切られる多方向不規則波の波形に包絡線を引く。図-14に包絡線 $R(x')$ を模式的に示した。波高計設置点を $A(x' = 0)$ とし、 $-\Delta L \sim \Delta L$ の範囲を対象とする。この範囲の中で $R(x')$ の最大値 R_m と A 点での包絡線の振幅 $R(0)$ との差を ΔR とする。 ΔR は

$$|R'(0)/R''(0)| \leq \Delta L \text{ の場合}$$

$$\Delta R = -\{R'(0)\}^2 / 2R''(0) \quad (109)$$

$$|R'(0)/R''(0)| > \Delta L \text{ の場合}$$

$$R'(0) \geq 0$$

$$\Delta R = R'(0) \Delta L + R''(0) (\Delta L)^2 / 2$$

$$R'(0) < 0$$

$$\Delta R = -R'(0) \Delta L + R''(0) (\Delta L)^2 / 2 \quad (110)$$

ここに $R'(0), R''(0)$ は A 点における $R(x)$ の1次及び2次の導関数の値である。

いま $\Delta R_* < \Delta R < \Delta R_* + dR$ となる領域を S とすれば、 A 点での振幅が $R(0)$ の場合の ΔR の確率分布は

$$p(\Delta R)_R = \int_S p\{R'(0), R''(0); R(0)\} dS \quad (111)$$

で与えられる。 $p\{R'(0), R''(0); R(0)\}$ は $R(0)$ なる条件下での $R'(0)$ と $R''(0)$ の結合確率分布である。(111)より $-\Delta L < x' < \Delta L$ での R_m の確率分布は

$$\begin{aligned} p(R_m) &= \int_{R(0)}^{\infty} p(\Delta R)_R p\{R(0)\} dR(0) \\ &= \int_{R(0)}^{\infty} \int_S p\{R(0), R'(0), R''(0)\} dS dR(0) \end{aligned} \quad (112)$$

で与えられる。 $p\{R(0), R'(0), R''(0)\}$ はRice(1945)が与えており、これを用いて計算すると図-15の様な結果が得られる。ここで多方向不規則波のスペクトルとしてはBretschneider-光易型 ($H_{1/3} = 5.5m, T_{1/3} = 10s$), 方向分布関数としては合田ら(1975)による光易型方向分布関数で S_{max} が10のものを用いた。また水深有義波長比 $h/L_{1/3}$ は1.0とした。平面 H は主波向きに直角に置き、 ΔL は $0.05L_{1/3}$ および $0.1L_{1/3}$ として計算した。図中の点線が計算結果で、 $\Delta L = 0$ の場合のものがRayleigh分布(実線)である。図中には比較のために計算結果

に best fit する Weibull 分布を波線で示しておいた。図からもわかるように波高の大きな部分の確率が大幅に増えており、Weibull 分布の形状母数は ΔL の増加とともに大きくなり、 $0.075L_{1/3}$ 付近で 2.5 程度になる。したがって構造物の 1 部が高波により被災すると全体が機能を失うような構造物の場合には Rayleigh 分布を用いると危険な場合がある。

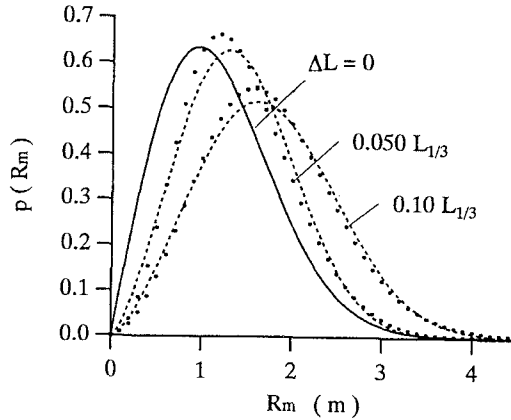


図-15 R_m の確率分布

7. 波高の時系列

6. までの説明は波高あるいは周期 1 つの確率特性に関するものであった。ここでは連続した波高の時系列 $\dots, H_{i-2}, H_{i-1}, H_i, H_{i+1}, H_{i+2}, \dots$ の連なりの確率特性について説明する。現地波浪の観測記録を検討すると波高の大きな波は 1 波だけ間欠的に現れることは少なく、数波の波群をなして来襲することが多い。この特性は海岸堤防からの越波、浮体の長周期動揺などに大きな影響を与えるものと考えられている。たとえば高波の連はあらかじめ設定した波高を連続して越える波の数として定義される。この分野の研究は Sawhney(1962)、合田ら(1969)によって開始され、合田(1970)は高波の連の確率分布として次式を与えた。

$$p(j) = p^{j-1}q \quad (113)$$

j は波高の閾値 H_c を連続して越える波の数(連)である。 p, q は波高の確率分布が Rayleigh 分布をするとして

$$\begin{aligned} p &= \exp\left\{-H_c^2/8m_0\right\} \\ q &= 1 - p \end{aligned} \quad (114)$$

と与えられている。連の平均長およびその標準偏差は

$$j = 1/q, \quad \sigma(j) = \sqrt{p}/q \quad (115)$$

で与えられる。高波のくり返し間隔すなわち $H > H_c$ なる波群が現れてから次に $H > H_c$ なる波群が現れるまでの間隔(トータルラン)の確率分布は

$$p(j) = \frac{pq}{p-q} \left(p^{j-1} q^{j-1} \right) \quad (116)$$

トータルランの平均値および標準偏差は

$$j = 1/p + 1/q, \quad \sigma(j) = \sqrt{p/q^2 + q/p^2} \quad (117)$$

となる。(113) 式は隣り合う波高に相関がないとして導かれている。その後 Rye(1974) らは現地のデータを用いて高波の連を検討し、隣り合う波高には若干の相関があり、平均長は(115)式で与えられるものより幾分長くなることを報告した。Kimura(1980)は数値シミュレーションの結果を基に、隣り合う波高には若干の相関

があるが、一つ置いた波高相互の相関は無視し得るほど小さいことから波高の時系列をMarkov連鎖と仮定し、その推移確率を正規化された2次元Rayleigh分布で与えた。すなわち、 $H > H_c$ となる高波の連の確率は

$$p(j) = p_{22}^{j-1} (1 - p_{22}) \quad (118)$$

その平均長及び標準偏差は

$$\begin{aligned} j &= 1 / (1 - p_{22}) \\ \sigma(j) &= \sqrt{p_{22}} / (1 - p_{22}) \end{aligned} \quad (119)$$

高波のトータルランの確率分布は

$$p(j) = \frac{(1 - p_{22})(1 - p_{11})}{p_{22} - p_{11}} (p_{22}^{j-1} - p_{11}^{j-1}) \quad (120)$$

その平均値及び標準偏差は

$$\begin{aligned} j &= 1 / (1 - p_{22}) + 1 / (1 - p_{11}) \\ \sigma(j) &= \left(p_{11} / (1 - p_{11})^2 + p_{22} / (1 - p_{22})^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (121)$$

となる。ここに p_{11} は隣り合う波高がともに $H < H_c$ 、 p_{22} は隣り合う波高がともに $H > H_c$ となる推移確率であり、次式で与えられる

$$\begin{aligned} p_{11} &= \int_0^{H_c} \int_0^{H_c} p(H_1, H_2) dH_1 dH_2 / \int_0^{H_c} p(H_1) dH_1 \\ p_{22} &= \int_{H_c}^{\infty} \int_{H_c}^{\infty} p(H_1, H_2) dH_1 dH_2 / \int_{H_c}^{\infty} p(H_1) dH_1 \end{aligned} \quad (122)$$

ここに

$$p(H_1, H_2) = \frac{4H_1 H_2}{(1 - \kappa^2) H_{rms}^4} \exp \left\{ -\frac{(H_1^2 + H_2^2)}{(1 - \kappa^2) H_{rms}^2} \right\} I_0 \left\{ \frac{2\kappa H_1 H_2}{(1 - \kappa^2) H_{rms}^2} \right\} \quad (123)$$

$$p(H_1) = \frac{2H_1}{H_{rms}^2} \exp \left\{ -\frac{H_1^2}{H_{rms}^2} \right\} \quad (124)$$

であり、(123)式は2次元Rayleigh分布、(124)式はRayleigh分布である。(123)式の κ は相関に関するパラメータで、隣り合う波高の相関係数 γ_{HH} とは次の関係がある。

$$\gamma_{HH} = \frac{1}{1 - \pi/4} \left\{ E(\kappa) - \frac{1}{2} (1 - \kappa^2) K(\kappa) - \pi/4 \right\} \quad (125)$$

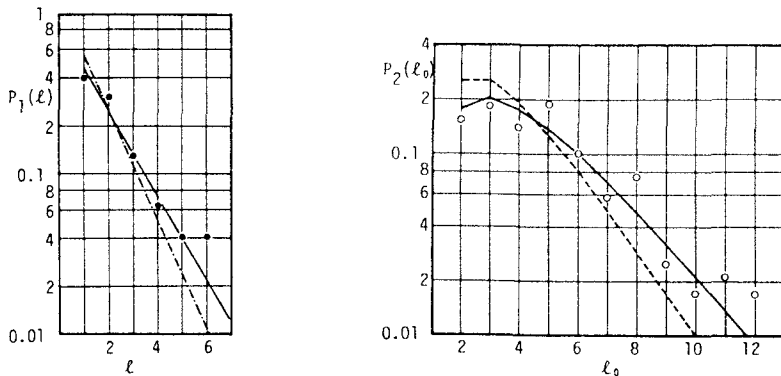


図-16 波高の連とトータルランの確率分布($H > H_m$)

ここに $E[\cdot]$, $K[\cdot]$ はそれぞれ第1種および第2種の完全楕円積分である。シミュレーションによる波高の連のデータと(118)式および(120)式との比較はスペクトルに関わりなく良好な一致が見られた。Kimuraはデータから γ_{HH} を計算し、(125)式を用いて κ を計算したが、Battjesら(1984)、Longuet-Higgins(1984)は

$$\kappa = \frac{1}{m_0} \left\{ \left[\int_0^\infty S(f) \cos 2\pi f \tau_0 df \right]^2 + \left[\int_0^\infty S(f) \sin 2\pi f \tau_0 df \right]^2 \right\} \quad (126)$$

で与えることを提案している。図-16は(46)式のスペクトルの $r=5$ の場合の $H > H_m$ の連とトータルランの確率分布を示したものである。ここに H_m は平均波高である。図中の実線が(118)、(120)式であり、鎖線が(113)、(116)式である。また図-17は $H > H_{1/3}$ の連及びトータルランの平均長をデータと比較したもので(合田, 1985)、実線が(119)、(121)式である。

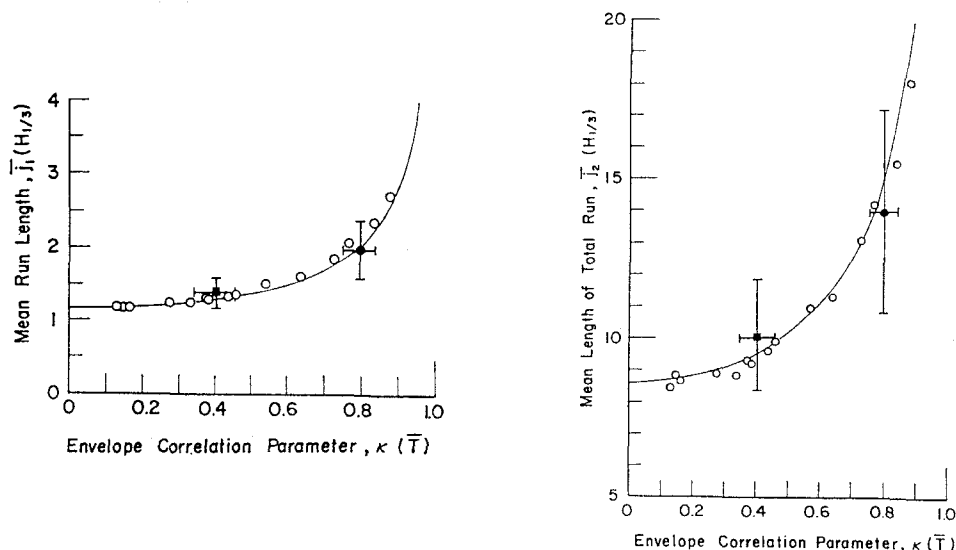


図-17 高波の連とトータルランの平均長($H > H_{1/3}$)

8. おわりに

現行の海中構造物では、まず長期波浪統計解析で所期の再現期間を持つ波を推定し、深海条件ではそれを1.8~2倍して最高波(H_{max})₀を決める。浅海域では浅水変形等による(H_{max})₀の波の変形特性を考慮して決めた波高を設計波とすれば、波浪の短期確率特性に関する情報がなくとも構造物の設計が可能となっており、技術者は短期波浪統計の意義がわかりにくい状況にある。しかし将来的には短期波浪統計の情報を理解することで設計条件の緩和などが可能となることが期待されている。本文では大きな研究の流れを説明する事をまず心懸けた。すべての研究を網羅した訳ではないので、詳細な点は以下に示す参考文献あるいはその文献の参考文献を参考にしていただきたい。チェックはしたものの式の数が多いので誤りが残っていないかと心配している。結果を利用する際には原論文、原式の確認をお願いする。本文をまとめるにあたり各節の範囲内では変数の記号を統一するように心懸けたが、基本的には各著者の表示を尊重したので節を越えて読まれる場合には注意をお願いする。

参考文献

- 赤井鈴子, 水口 優(1988):多方向不規則波における波高・周波数・波向の結合確率分布, 第35回海岸工学講演会論文集, pp.143-147.
磯部雅彦(1987):多方向不規則波の波別解析法に関する理論的考察, 第34回海岸工学講演会論文集, pp.111-115.
北野利一, 間瀬 肇(1995):峰高とその時刻における包絡線との差の確率分布の理論, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.266-270.

- 木村 晃, 太田隆夫(1993):ゼロクロス法で定義した不規則波の波高の確率特性について, 海岸工学論文集, 第40巻, pp.146-150.
- 木村 晃, 太田隆夫(1994):有限な区間に来襲する波高の最大値の確率分布, 海岸工学論文集, 第41巻, pp.191-195.
- 木村 晃, 早川幸子(1995):不規則波の波向きに関する研究, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.261-265.
- 合田良実, 永井康平(1969):造波板の変速運動による発生不規則波のスペクトルについて, 港湾技術研究所報告, 第8巻, 第3号, pp.47-75.
- 合田良実, 鈴木康正(1975):光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No.230, 45p.
- 合田良実(1977):波浪観測記録における波高と周期の結合分布について, 港湾技研資料, No.272, 19p.
- 合田良実(1985):波浪の統計的性質に関する二, 三の数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第24巻, 第4号, pp.65-102.
- 合田良実(1987):数値シミュレーションによる波浪の標準スペクトルと統計的性質, 第34回海岸工学講演会論文集, pp.131-135.
- 合田良実(1990):港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会, 330p.
- 合田良実, 常盤安弘(1991):数値実験に基づく波峰長の統計的性質について, 海岸工学論文集, 第38巻, pp.141-145.
- 合田良実(1992a):不規則波の研究の流れと展望, 第28回水工学に関する夏期研修会講義集, B-5
- 合田良実, 水沢達也(1992b):数値計算による波峰長の統計的性質について, 海岸工学論文集, 第39巻, pp.106-110.
- 権 正坤, 石本晴義, 樫木 亨, 出口一郎(1988):波高, 周期及び波向の結合確率分布について, 第35回海岸工学講演会論文集, pp.148-152.
- 関本恒浩, 鶴飼亮行, 今井澄雄, 寺田賢二(1990):波群特性を考慮した最高波高の出現確率に関する研究, 海岸工学論文集, 第37巻, pp.111-115.
- 竹内 信, 山本善之(1972):正規不規則過程における相継ぐ極値の近似確率分布とシミュレーションについて, 日本造船学会論文集, 第131号, pp.97-113.
- 間瀬 肇, 松本明男, 岩垣雄一(1986):不規則波の浅水・碎波変形計算モデルに関する研究, 土木学会論文集, No.375/II-6, pp.221-230.
- 水口 優, 金子紀行, 赤井鈴子(1989):狭帯域周波数スペクトルのもとでの波高・周波数・波向の結合確率分布, 海岸工学論文集, 第36巻, pp.144-147.
- 安田孝志, 伊藤一教, 森 信人(1992):1方向不規則波の波高分布に及ぼす非線形干渉の影響について, 土木学会論文集, No.443/II-18, pp.83-92.
- 安田孝志, 森 信人, 川口浩二, 多田彰秀(1995):一方向波列の碎波率とそれを考慮した波高分布の推定法, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.91-95.
- Battjes, J.A. and G. Ph. van Vledder(1984):Verification of Kimura's theory for wave group statistics, Proc. 19th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.642-648.
- Cartwright, D.E. and M.S. Longuet-Higgins(1956):The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol.237, pp.212-232.
- Cavanie, A. M. Arhan and R. Ezraty(1976):A statistical relationship between individual heights and periods of storm waves, Proc. Conf. on Behaviour of Offshore Structures, Vol.II, pp.354-360.
- Forristall, G.Z.(1978):On the statistical distribution of wave heights in a storm, J. Geophys. Res. Vol.83, No.C5, pp.2353-2358.
- Funke, E.R. and E.P.D. Mansard(1980):On the synthesis of realistic sea state, Proc. 17th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.2974-2991.
- Goda, Y.(1970):Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rept. of Port and Harbour Res. Inst., Vol.9, No.3, pp.3-57.
- Kimura, A.(1980):Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th Int. Conf. on Coastal Eng. pp.2955-2973.
- Kimura, A.(1981):Joint distribution of the wave heights and periods of random sea waves, Coastal Eng. in Japan, Vol.24, pp.77-92.
- Lake, B.M. and H.C. Yuen(1978):A new model for nonlinear wind waves, 1, Physical model and experimental evidence, J. Fluid Mech., 88, pp.33-62.
- Longuet-Higgins, M.S.(1952):On the statistical distribution of the heights of sea waves, J. Marine Res. Vol.IX, No.3, pp.245-266.
- Longuet-Higgins, M.S.(1957):The statistical analysis of a random, moving surface, Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A(966), Vol.249, pp.321-387.
- Longuet-Higgins, M.S.(1958):On the intervals between successive zeros of a random function, Proc. Roy. Soc. Ser. A, Vol.246, pp.99-118.
- Longuet-Higgins, M.S.(1963):The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves, J.

Fluid Mech., 17, pp.459-480

Longuet-Higgins, M.S.(1980):On the distribuion of the heights of sea waves: Some effects of nonlinearity and finite band width, J. Geophys. Res., Vol.85, No.C3, pp.1519-1523.

Longuet-Higgins, M.S.(1983):On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol.389, pp.241-258.

Longuet-Higgins, M.S.(1984):Statistical properties of wave groups in a random sea state, Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A, Vol.312, pp.219-250.

Rice, S.O.(1944):The mathematical analysis of random noise, Bell System Tech. J., Vol.23, pp.282-332.

Rice, S.O.(1945):The mathematical analysis of random noise, Bell System Tech, J., Vol.24, pp.46-156

Rye, H.(1974):Wave group formation among storm waves, Proc. 14th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.164-183.

Sawhney, M.D.(1962):A study of ocean wave amplitudes in term of the theory of runs and a Markov chain process, Tech. Rep. of New York Univ., 29p.

Tayfun, M.A.(1983):Effects of spectrum band width on the distribution of wave heights and periods, Ocean Eng., Vol.10, No.2, pp.107-118.

Tayfun, M.A. and J.M. Lo(1990):Nonlinear effects on wave envelope and phase, J. Wtrwy., Port, Coastal, and Oc. Eng., ASCE, Vol.116, No.1, pp.79-100.