

斜 交 波 の 諸 特 性

Characteristics of Crossing-waves

岩 田 好一朗

Koichiro IWATA

1. まえがき

我々が沿岸で見る一般的な風波は短波峰波 (short-crested waves) であり, 多くの方向から伝播してくる波の集合, いわゆる多方向不規則波として理解されている. 水深が浅くなってくると, 波の非線形性が強くなってくるので, 多方向不規則波を各成分波の線形重ね合せとして取り扱うのではなく, 各成分波間の非線形干渉を考慮して取り扱っていくのが一般的であろうと考えられる.

沿岸の浅海域における多方向不規則波の非線形干渉については今まで研究されてきているが, 充分解明されたとは言い難く, 波の方向性, 不規則性, 非線形性および分散性が波動場にどのような影響を与えるかなどについても未解明の部分が多いのが現状といえよう. いうまでもなく, 沿岸浅海域の環境創造や環境管理のためにも, 外力となる波浪場の諸特性を熟知しておくことは不可欠である.

本論では, 浅海域において, 異なる方向から伝播してくる2つの規則波列が重なって形成する波動場を取り上げる. これを, 本小論では斜交波 (crossing-waves) と称するものとする. そして, この斜交波の水面波形や水粒子速度の非線形な挙動を含んだ諸特性を水理実験と理論の両面から論じていくこととする. この斜交波の基本特性を明らかにすることは, 上述した浅海域での多方向不規則波の複雑な非線形挙動の基本特性を理解するために重要であり, また, 2つの方向から波が進行して重合するような波動場 (写真-1 参照) の内部機構を理解する上でも基本的に極めて重要である.

本小論では, 以後, 第2章では3次近似理論を紹介するとともにその適用範囲について触れる. 第3章では水面波形の時空間特性について, 第4章では水粒子速度の時空間特性と水粒子の平面速度ベクトルの軌跡を, それぞれ理論解析と水理実験の両面より議論していく. なお, 浅海域での斜交波については幾つかの研究はあるが (Chappelear(1960), Hsu et al., (1979), Hwung・Tsai(1982), She・Easson(1991), Kang et al.(1994), 富田・姜・他(1994), Hughes(1994), Moriya・Mizuguchi(1994), 姜・富田・他(1995)), 本小論では著者らの研究を中心にして記述することにする.

2. 理論解析

図-2.1に示す直角座標系を使って, 水深 h の一定水深域で, 2つの規則波 Wave-AとWave-Bが交差角 θ で重なり合う波動場を取り上げ, 摂動法に基づき周波数変調をも考慮した3次オーダーの近似理論を紹介する.

2.1 基礎方程式

流体を非粘性で非圧縮性とする. 流体運動を非回転運動とすると, x, y, z



写真-1.1 斜交する波の一例

方向の水粒子速度 u, v, w は速度ポテンシャル ϕ を使って、次式のように表現される。

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y, \quad w = \phi_z \quad (2.1)$$

なお、下付き添字 x, y と z はそれぞれの変数による偏微分を表す。また、 x と y は、図-2.1に示すように、水平軸、 z は静水面を原点とし鉛直上向きを正とする鉛直軸である。式(2.1)を用いると、流体の連続方程式はLaplace方程式となる。

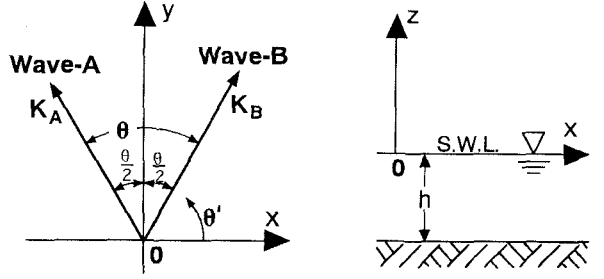


図-2.1 座標系

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (2.2)$$

自由表面と水底における境界条件はそれぞれ次式で与えられる。

自由表面での境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z &= 0 ; z = \eta & (\text{Kinematic condition}) \\ \phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta - R &= 0 ; z = \eta & (\text{Dynamic condition}) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

水底での境界条件：

$$\phi_z = 0 ; z = -h \quad (2.4)$$

なお、上式で、 η は水面波形、 t は時間、 g は重力加速度、 R はベルヌーイ定数である。

2.2 3次オーダー近似解

式(2.3)を $z = 0$ のまわりにTaylor展開する。

$$\left. \begin{aligned} \eta_t - \left[\phi_z + \eta \phi_{zz} + \frac{1}{2} \eta^2 \phi_{zzz} + \dots \right] + \left[\phi_x \eta_x + \eta \phi_{xz} \eta_x + \frac{1}{2} \eta^2 \phi_{xxx} \eta_x + \dots \right] \\ + \left[\phi_y \eta_y + \eta \phi_{yz} \eta_y + \frac{1}{2} \eta^2 \phi_{yyz} \eta_y + \dots \right] &= 0 ; z = 0 \\ g\eta + \left[\phi_t + \eta \phi_{tz} + \frac{1}{2} \eta^2 \phi_{tzz} + \dots \right] + \left[\frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + \frac{1}{2} \eta (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)_z \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \eta^2 (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)_{zz} + \dots \right] = R ; z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

つぎに、未知係数 ϕ, η と R 、およびWave-AとWave-Bの角周波数 σ_A と σ_B が波形勾配に対応する微小パラメータ α と β の級数で展開できるものと仮定すると、3次オーダーまでに対しては次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \alpha \phi_{10} + \beta \phi_{01} + \alpha^2 \phi_{20} + \alpha \beta \phi_{11} + \beta^2 \phi_{02} + \alpha^3 \phi_{30} + \alpha^2 \beta \phi_{21} + \alpha \beta^2 \phi_{12} + \beta^3 \phi_{03} \\ \eta &= \alpha \eta_{10} + \beta \eta_{01} + \alpha^2 \eta_{20} + \alpha \beta \eta_{11} + \beta^2 \eta_{02} + \alpha^3 \eta_{30} + \alpha^2 \beta \eta_{21} + \alpha \beta^2 \eta_{12} + \beta^3 \eta_{03} \\ R &= \alpha R_{10} + \beta R_{01} + \alpha^2 R_{20} + \alpha \beta R_{11} + \beta^2 R_{02} + \alpha^3 R_{30} + \alpha^2 \beta R_{21} + \alpha \beta^2 R_{12} + \beta^3 R_{03} \\ \sigma_A &= \sigma_{A00} + \alpha \sigma_{A10} + \beta \sigma_{A01} + \alpha^2 \sigma_{A20} + \alpha \beta \sigma_{A11} + \beta^2 \sigma_{A02} \\ \sigma_B &= \sigma_{B00} + \alpha \sigma_{B10} + \beta \sigma_{B01} + \alpha^2 \sigma_{B20} + \alpha \beta \sigma_{B11} + \beta^2 \sigma_{B02} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

なお、上式の ϕ_{ij} あるいは σ_{Aij} などの量で、下付き添字 $j=0$ の場合は斜交波を構成する1つの波Wave-A、 $i=0$ の場合はもう1つの波Wave-Bの線形な基本成分と自己干渉の成分を、 $i \neq 0, j \neq 0$ の場合は2つの基本波Wave-AとWave-Bの相互干渉の成分を表わす。

摂動展開された式(2.6)をTaylor展開された自由表面での境界条件(式(2.5))と水底での境界条件(式(2.4))と基本方程式(式(2.2))に代入し、 $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \beta^2, \beta^3, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ の摂動パラメーターごとにまとめて整理をして解いていくと、最終的には3次オーダーの近似解は次式のように与えられる(Kang et al.(1994))。

$$\begin{aligned} \phi = & aP_{10} \cosh K_A d \sin \Psi_A + bP_{01} \cosh K_B d \sin \Psi_B + a^2P_{20} \cosh K_{2A} d \sin \Psi_{2A} + b^2P_{02} \cosh K_{2B} d \sin \Psi_{2B} \\ & + a^3 \left(P_{303} \cosh K_{3A} d \sin \Psi_{3A} + P_{301} \cosh K_B d \sin \Psi_B \right) + b^3 \left(P_{033} \cosh K_{3B} d \sin \Psi_{3B} + P_{031} \cosh K_A d \sin \Psi_A \right) \\ & + ab \left(P_{11p} \cosh K_{A+B} d \sin \Psi_{A+B} + P_{11m} \cosh K_{A-B} d \sin \Psi_{A-B} \right) \\ & + a^2b \left(P_{21p} \cosh K_{2A+B} d \sin \Psi_{2A+B} + P_{21m} \cosh K_{2A-B} d \sin \Psi_{2A-B} + P_{21c} \cosh K_B d \sin \Psi_B \right) \\ & + ab^2 \left(P_{12p} \cosh K_{2B+A} d \sin \Psi_{2B+A} + P_{12m} \cosh K_{2B-A} d \sin \Psi_{2B-A} + P_{12c} \cosh K_A d \sin \Psi_A \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \eta = & aE_{10} \cos \Psi_A + bE_{01} \cos \Psi_B + a^2E_{20} \cos \Psi_{2A} + b^2E_{02} \cos \Psi_{2B} + a^3E_{30} \cos \Psi_{3A} + b^3E_{03} \cos \Psi_{3B} \\ & + ab \left(E_{11p} \cos \Psi_{A+B} + E_{11m} \cos \Psi_{A-B} \right) + a^2b \left(E_{21p} \cos \Psi_{2A+B} + E_{21m} \cos \Psi_{2A-B} \right) \\ & + ab^2 \left(E_{12p} \cos \Psi_{2B+A} + E_{12m} \cos \Psi_{2B-A} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \sigma_{A00} + \alpha^2 \sigma_{A20} + \beta^2 \sigma_{A02} \\ \sigma_B &= \sigma_{B00} + \alpha^2 \sigma_{B20} + \beta^2 \sigma_{B02} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$R = a^2 R_{20} + b^2 R_{02} \quad (2.10)$$

なお、1次オーダーの近似解は次式で与えられる。

$$\phi^{(1)} = \frac{ag}{\sigma_{A00}} \frac{\cosh k_A d}{\cosh k_A h} \sin \psi_A + \frac{bg}{\sigma_{B00}} \frac{\cosh k_B d}{\cosh k_B h} \sin \psi_B \quad (2.11)$$

$$\eta^{(1)} = a \cos \psi_A + b \cos \psi_B \quad (2.12)$$

$$\sigma_{A00}^2 = gk_A \tanh k_A h \quad (2.13)$$

$$\sigma_{B00}^2 = gk_B \tanh k_B h \quad (2.14)$$

ここで、 a と b はそれぞれWave-AとWave-Bの1次オーダーの振幅、 $d=z+h$ 、 $k_A=|\mathbf{K}_A|$ 、 $k_B=|\mathbf{K}_B|$ 、 $\mathbf{K}_A$ と $\mathbf{K}_B$ はそれぞれWave-AとWave-Bの波数ベクトルであり、 ψ_A と ψ_B は次式で与えられる。

$$\psi_A = \mathbf{K}_A \cdot \mathbf{X} - \sigma_A t + \delta_A, \quad \psi_B = \mathbf{K}_B \cdot \mathbf{X} - \sigma_B t + \delta_B \quad (2.15)$$

なお、 δ_A と δ_B はそれぞれWave-AとWave-Bの初期位相角である。また、式(2.7)～式(2.10)の中の係数は補遺の表-1で与えられる。式(2.7)～式(2.10)を利用すると、式(2.1)より水粒子速度 u, v, w が決定される。また、圧力 P は次式より求められる。

$$P/\rho = -gz - \phi_t - \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + R \quad (2.16)$$

ここで、 ρ は流体の密度である。

(1) 水位変動

水位変動 η の3次近似解の表示式は複雑であるが、表示式(式(2.8))をみると、Wave-Aの基本成分とその2倍と3倍周波数成分を表わす項(第1項と第3項と第5項)、Wave-Bの基本成分と2倍と3倍周波数成分を表わす項(第2項と第4項と第6項)、Wave-AとWave-Bの基本成分間の非線形干渉成分を表わす項(第7項と第8項)、Wave-Aの2倍周波数成分とWave-Bの基本周波数成分間の非線形干渉を表わす項(第9項と第10項)とWave-Aの基本周波数成分とWave-Bの2倍周波数成分間の非線形干渉成分を表わす項(第11項と第12項)の計12個の項より構成されていることがわかる。

この12項の大きさは、それぞれの係数 a , b , E_{10} , E_{01} , E_{20} , E_{02} , E_{11p} , E_{11m} , E_{30} , E_{03} , E_{21p} , E_{21m} , E_{12p} , E_{12m} によって決まる。これらの係数が交差角 θ および基本波の非線形性により、どのように変化するか考察してみる。図-2.2と図-2.3は、2つの基本波Wave-AとWave-Bの1次オーダーの振幅の和($aE_{10}+bE_{01}$)($\equiv A_1$)で無次元された式(2.8)の各項の係数の変化を示したもので、図-2.2は $h/L_A=0.2$, $L_B/L_A=1.0$, $\alpha=0.2$, $\beta=\alpha$ の場合の交差角 θ の変化に伴う無次元係数の変化を、図-2.3は交差角 $\theta=60^\circ$, $h/L_A=0.2$, $h/L_B=0.143$, $\beta=\alpha$ の場合の非線形の度合を示す β の変化に伴う無次元係数の変化を示したものである。なお、 L_A と L_B はそれぞれWave-AとWave-Bの波長である。

図-2.2に例示するように、自己干渉項の振幅である a^2E_{20} , b^2E_{02} , a^3E_{30} と b^3E_{03} は交差角 θ の影響を受けず、交差角 θ の影響は相互干渉項のみに現われる。一方、 β の増加に伴い、図-2.3に例示するように、 β の増大にともない2次や3次オーダーの項の振幅は1次オーダーの振幅に対して無視できない程に大きくなっていく。特に、3次オーダーの項の振幅は β が大きくなるにつれて急激に大きくなるので、基本波の非線形性が大きいほど高次オーダーの理論解が必要となってくる。なお、図-2.2で、 a^2bE_{21m}/A_1 あるいは ab^2E_{12m}/A_1 が $\theta=0\sim20^\circ$ で急に大きくなるのは、後述する共鳴干渉の条件に相当しているためである。

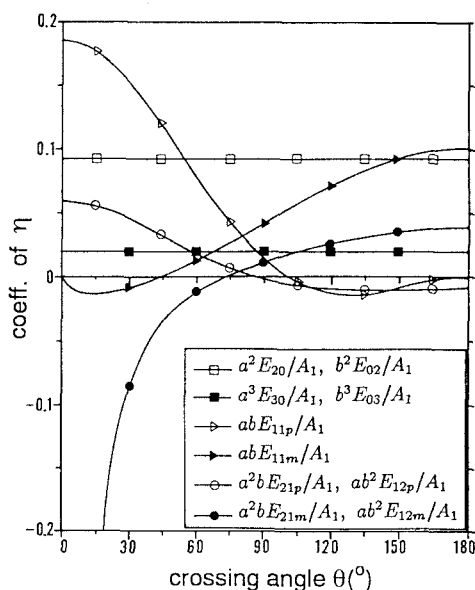


図-2.2 θ と水位変動に関する無次元係数の関係
($h/L_A=0.2$, $L_B/L_A=1$, $\alpha=0.2$, $\beta=\alpha$)

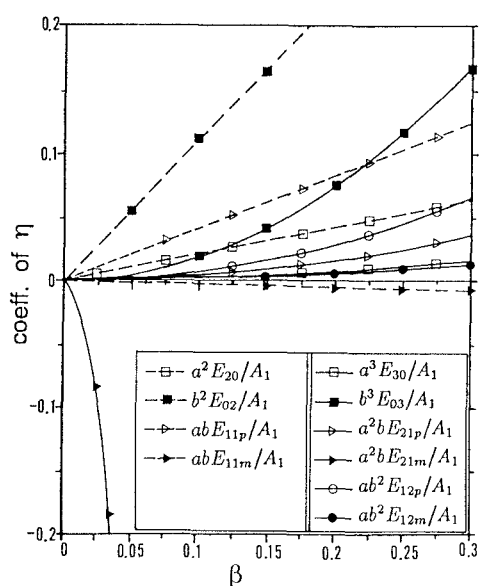


図-2.3 β と水位変動に関する無次元係数の関係
($\theta=60^\circ$, $h/L_A=0.2$, $h/L_B=0.143$, $\beta=\alpha$)

(2) 速度ポテンシャル

速度ポテンシャル ϕ は、式(2.7)に示すように、16個の項から構成されている。各項の大きさは a , b , P_{10} , P_{01} , P_{20} , P_{02} , P_{11p} , P_{11m} , P_{303} , P_{301} , P_{033} , P_{031} , P_{21p} , P_{21m} , P_{21c} , P_{12p} , P_{12m} , P_{12c} によって決まる。図-2.4は、図-2.2と同じ条件下で、1次オーダーの振幅係数の和 $P1(=aP_{10}+bP_{01})$ で無次元化された14個の無次元係数と交差角 θ の関係を示した一例である。図-2.4に示した条件の下では、 P_{11m} を除いた多くの2次オーダー、3次オーダーの項が1次オーダーの項に比べてかなり小さく、速度ポテンシャル全体に対する3次オーダー項の寄与の度合いが小さいことが認められる。なお、 P_{21m} (あるいは P_{12m})は $\theta \leq 25^\circ$ で急に減少しているが、これは水面変位(η)と同様に、共鳴干渉の条件を満足するためである。このような、 P_{21m} (あるいは P_{12m})の項を除くと、3次オーダーの項の値は小さい。図-2.4に例示したように、速度ポテンシャル全体に対する波の非線形性による高次オーダーの寄与は、水位変動(η)に比べると一般に小さい。

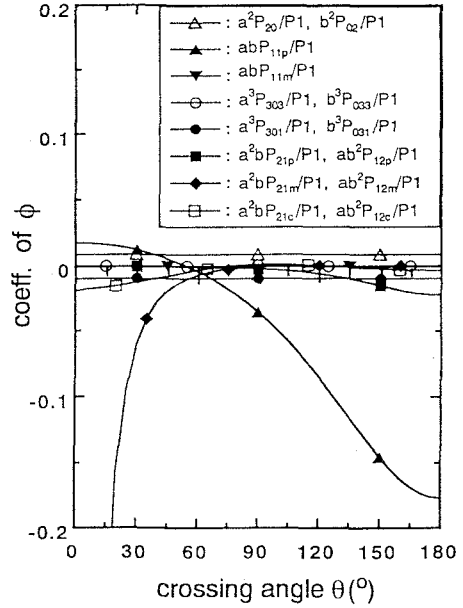


図-2.4 θ と速度ポテンシャルに関する無次元係数の関係 ($h/L_A=0.2$, $L_B/L_A=1$, $\alpha=0.2$, $\beta=\alpha$) (姜, 1995)

2.3 共鳴干渉

水面変位 η の E_{21m} あるいは E_{12m} および速度ポテンシャル ϕ の P_{21m} あるいは P_{12m} が次式を満たす場合は解は発散する。

$$(2\sigma_{A00} - \sigma_{B00})^2 = g(|2\mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B|) \tanh(|2\mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B|h) \quad (2.17)$$

あるいは、

$$(2\sigma_{B00} - \sigma_{A00})^2 = g(|2\mathbf{K}_B - \mathbf{K}_A|) \tanh(|2\mathbf{K}_B - \mathbf{K}_A|h) \quad (2.18)$$

このような場合は、 η の E_{21m} 項である $a^2bE_{21m}\cos\Psi_{2A-B}$ ($\equiv \eta_{21m}$)と E_{12m} 項である $ab^2E_{12m}\cos\Psi_{2B-A}$ ($\equiv \eta_{12m}$)と ϕ の P_{21m} 項を含む $a^2bP_{21m}\cosh K_{2A-B}\sin\Psi_{2A-B}$ ($\equiv \phi_{21m}$)と P_{12m} 項を含む $ab^2P_{12m}\cosh K_{2B-A}\sin\Psi_{2B-A}$ ($\equiv \phi_{12m}$)はそれぞれ次式のように変換できる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{21m} &= a^2b \left(t_R E_{21m1}^R \sin\Psi_{2A-B} + E_{21m2}^R \cos\Psi_{2A-B} \right) \\ \eta_{12m} &= ab^2 \left(t_R E_{12m1}^R \sin\Psi_{2B-A} + E_{12m2}^R \cos\Psi_{2B-A} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{21m} &= a^2b t_R P_{21m}^R \cosh K_{2A-B} \cos\Psi_{2A-B} \\ \phi_{12m} &= ab^2 t_R P_{12m}^R \cosh K_{2B-A} \cos\Psi_{2B-A} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned}
 E_{21m1} &= \frac{1}{2g} (F_{2A-B} N_{21-} - g M_{21-}), \\
 E_{12m1} &= \frac{1}{2g} (F_{2B-A} N_{12-} - g M_{12-}), \\
 P_{21m} &= \frac{g M_{21-} - F_{2A-B} N_{21-}}{2 F_{2A-B} C_{2A-B}}, \\
 t_R &= D_R / C_R
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 E_{21m2} &= \frac{1}{2g} \left(\frac{F_{2A-B} N_{21-} - g M_{21-}}{F_{2A-B}} - N_{21-} \right) \\
 E_{12m2} &= \frac{1}{2g} \left(\frac{F_{2B-A} N_{12-} - g M_{12-}}{F_{2B-A}} - N_{12-} \right) \\
 P_{12m} &= \frac{g M_{12-} - F_{2B-A} N_{12-}}{2 F_{2B-A} C_{2B-A}}
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

なお、 D_R と C_R は $2K_A$ - K_B 成分あるいは $2K_B$ - K_A 成分の進行距離と波速である。式(2.17)と式(2.18)を満たす $k_A h$ 、 k_B/k_A と θ ($k_B h$ 、 k_A/k_B と θ)の関係を示したのが、図-2.5である。なお、図中のコンターは共鳴干渉の条件を満たす交差角 θ である。同図より、1つの基本波が与えられた時、共鳴干渉を生じる場合のもう1つの基本波の波数と2つの波の交差角が求められる。なお、深海域については図-2.5の結果は従来の結果 (Longuet-Higgins (1962), Phillips (1960)) と一致する。

2.4 近似理論の適用範囲

前節の近似解は、テーラー級数展開により近似化された式(2.5)を使って、誘導されているので、基礎方程式(式(2.2))と底面での境界条件(式(2.4))を厳

密には満たすものの、2つの自由表面境界条件(式(2.3))を厳密には満足しないので、ある程度の誤差が含まれている。そこで、運動学的自由表面境界条件と力学的自由表面境界条件に対する誤差をそれぞれ γ_K と γ_D と定義し、この γ_K と γ_D が設定された許容誤差と一致する場合をその理論の適用限界、許容誤差の範囲内を適用範囲とする。

$$\gamma_K = (\eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y - \phi_z) / C_{mx} \quad (2.22)$$

$$\gamma_D = \left\{ \phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta - R \right\} / gH_{mx} \quad (2.23)$$

ここで、 C_{mx} と H_{mx} はそれぞれ斜交波を構成する2つの基本波のうち式(2.24)で定義される非線形性を表すパラメータ Π (Goda, 1983)が大きい方の基本波の波速と波高である。

$$\Pi = (H_0/L_0) \coth^3(2\pi h/L_0) \quad (2.24)$$

なお、 $L_0 = gT_0^2/2\pi$ 、 T_0 と H_0 は水深 h での周期と波高である。

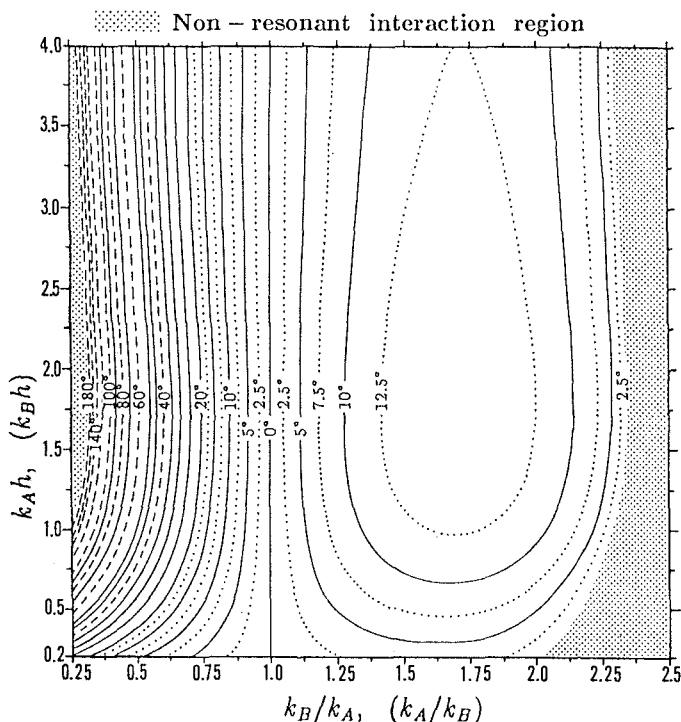


図-2.5 斜交波の共鳴干渉発生条件

理論の適用範囲は、対象とする物理量（例えば、波峰かあるいは波速かなど）により許容誤差と関連して変化する。本小論では、波峰に着目して、岩垣（1987）が単一規則波の1次近似解に対する適用上限値として提案した $\Pi = 0.03$ を採用し、これを斜交波の場合に適用している。すなわち、規則波の $\Pi = 0.03$ に対応する誤差 γ_K と γ_D を計算し、その中の大きい誤差 $\max\{\gamma_K, \gamma_D\}$ を許容誤差として採用する。そして、斜交波の1次近似理論、2次近似理論と3次近似理論の適用限界に対する許容誤差も、この規則波に対する値 $\max\{\gamma_K, \gamma_D\}$ と同じ誤差で与えられるものとする。斜交波の場合は、2つの基本波の周期の最小公倍数となる時間に対するrms（root mean square）値を採用する。このようにして設定された近似理論の適用上限値を与える許容誤差を使って波の特性量を決めていくと、図-2.6（a）と（b）に例示するような、1次近似、2次近似と3次近似理論の適用範囲が決定される。なお、同図は、一つの基本波Wave-Bの非線形性パラメータ Π_B を変数として示しており、 T_A と T_B は、それぞれ、Wave-AとWave-Bの周期である。また、砕波限界としてMiche（1951）の提案式を採用している。

図-2.6に示すように、1次近似解、2次近似解、と第3近似解の適用範囲は、交差角 θ 、周期比 $T_R = T_B/T_A$ とWave-AとWave-Bの非線形性の程度により複雑により変化する。そして、非線形性パラメータ Π_B が大きくなるにつれて、斜交波を記述する理論は、一般的に、斜交波を構成する2つの基本波のうち、高次オーダーの基本波の次数か、あるいはそれより1つ次数の高いオーダーの近似理論となっていく。

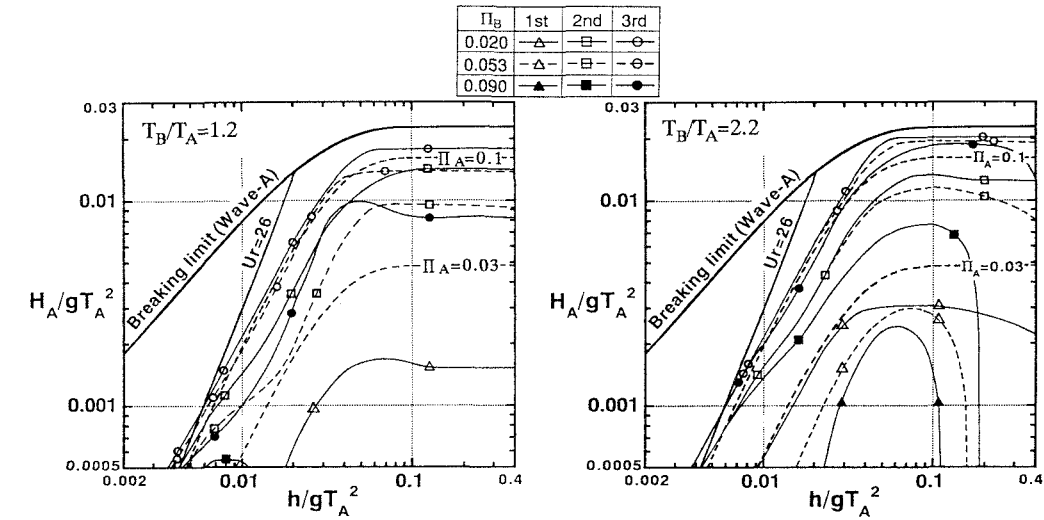


図-2.6 斜交波の近似理論の適用範囲（ $\theta = 60^\circ$ ）

3. 水面波形

3.1 振動パラメータの決定法

$\alpha = ak_A$, $\beta = bk_B$ とする。なお、 a , b は、それぞれ、2つの基本波Wave-AとWave-Bの1次の振幅であり、 k_A と k_B はそれぞれWave-AとWave-Bの波数である。式（2.7）～式（2.10）では、 α と β 以外に、Wave-AとWave-Bの初期位相角 δ_A , δ_B も未定量となるので、これらの4つの未定量を決めなければならない。本小論では、水理実験結果を使って次式で定義される γ_{a1} , γ_{a2} , γ_{a3} と γ_p が最小になるように決定している。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{a1} &= \sum_f (S_i(f)^2 - S_c(f)^2)^2, & \gamma_{a2} &= \sigma_A - 2\pi/T_A \\ \gamma_{a3} &= \sigma_B - 2\pi/T_B, & \gamma_p &= \sum_f [S_c(f)^2 \{ \delta_i(f)^2 - \delta_c(f)^2 \}^2] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここで、 $S(f)$ と $\delta(f)$ は、それぞれ、水面変動の周波数 f の成分の振幅と初期位相角、 f は周波数であり、下付添字 c と t は、それぞれ実験値と理論値を示している。

3.2 水面の時空間波形

図-3.1 (a) ~ (f) は、斜交波の水面波形の等高線図と空間波形の鳥瞰図を例示したものである。等高線図の太い実線は静水面 ($z=0$)，細い実線は静水面より上の水位，破線は静水面より下の水位であり，等高線は1 cm間隔で示している。また，図中の太い矢印は2つの基本波の進行方向を示している。

図-3.1に例示されているように，斜交波の波峰線は2つの基本構成波Wave-AとWave-Bの波峰線で形作られ，概略平行四辺形状となり，Wave-AとWave-Bそれぞれの波峰線上に，それぞれ，基本波Wave-BとWave-Aが重なるので，波峰線の高さは周期的に変化する。また，第1次近似理論の場合は静水面の上下の水位の平面積は等しいが，第3次近似理論の場合は静水面より下の水位の平面積の方が静水面より上の水位の平面積より大きくなり，さらに波形勾配が大きくなるにつれて（図-3.1の(d)と(f)参照），波峰がより尖り，波谷がより平坦な凹レンズ形になっていく。

図-3.2 (a) と (b) は水面の時間波形 $\eta(t)$ の計算値と実験値を比較したものである。図-3.2には，1次近似理論（線形理論），2次近似理論と3次近似理論の値が示されているが，(a)の場合は第2章で述べた近似理論の適用範囲から言えば，2次近似解の適用範囲であるので，2次近似解が，(b)の場合は3次近似解の適用範囲であるので，3次近似解が水理実験値と良く対応していることが判る。したがって，適用すべき理論を適切に見出すことは重要である。また，図-3.2からもわかるように，波の非線形性の度合が強くなるほど波形は波峰で尖り，波谷で平坦になる。

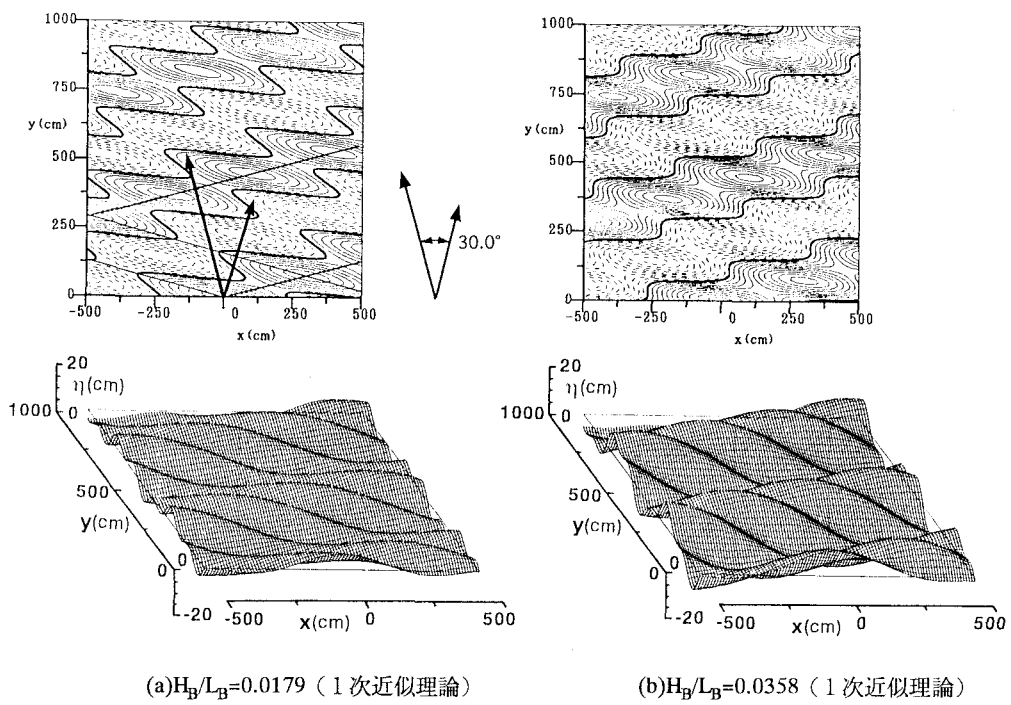


図-3.1 斜交波の水面波形の等高線と空間波形の鳥瞰図($h/L_A=0.326$, $H_A/L_A=0.039$, $h/L_B=0.12$) (姜, 1995)

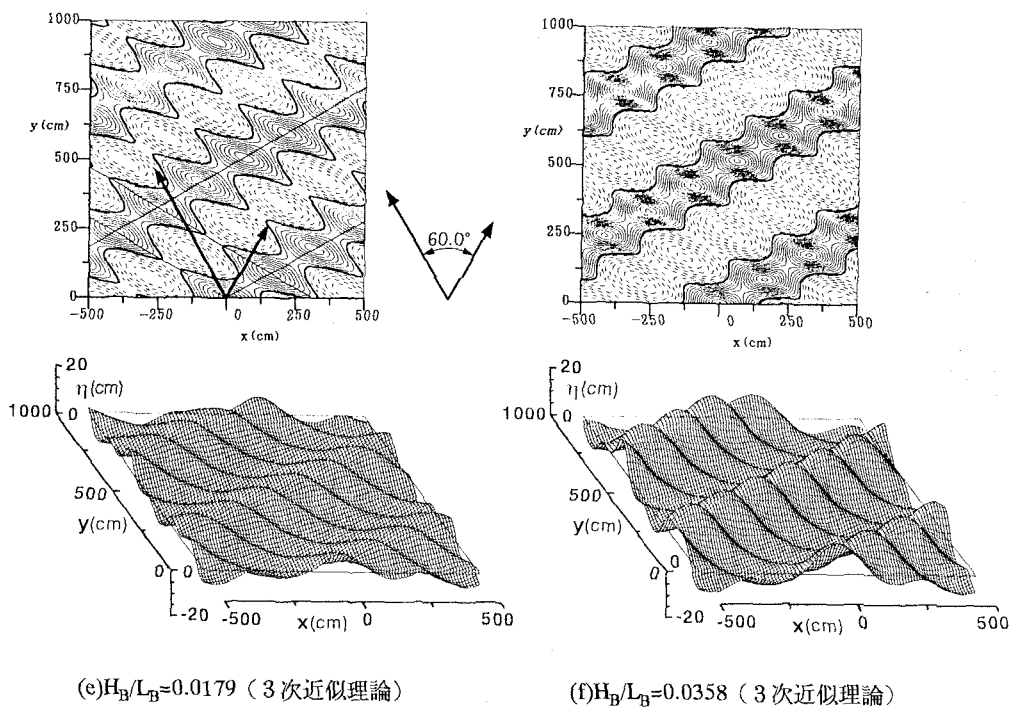
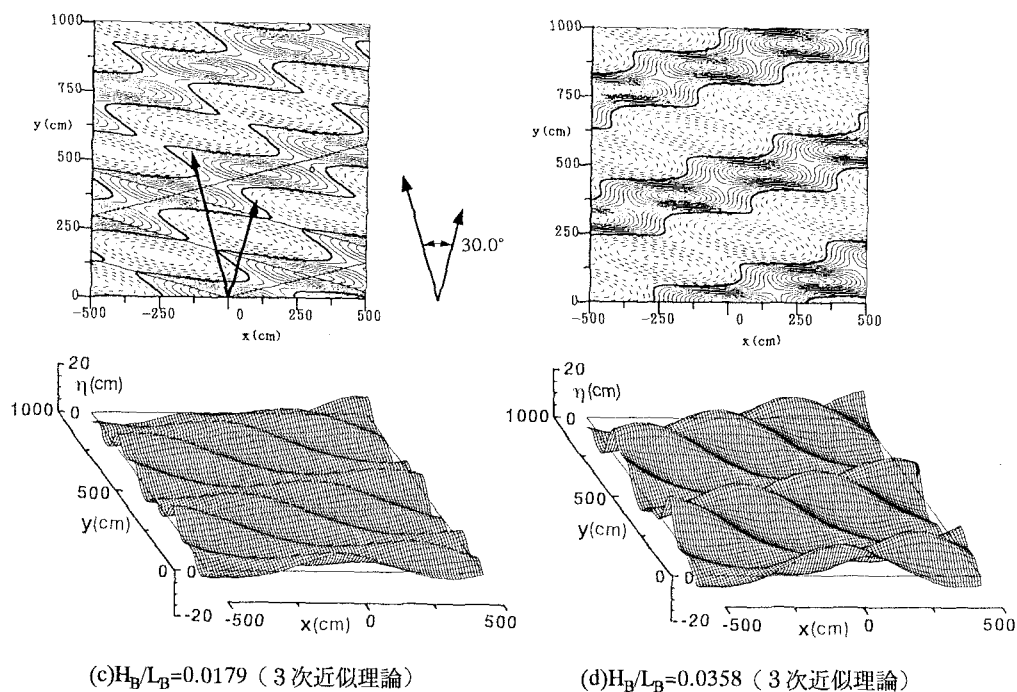


図-3.1のつづき

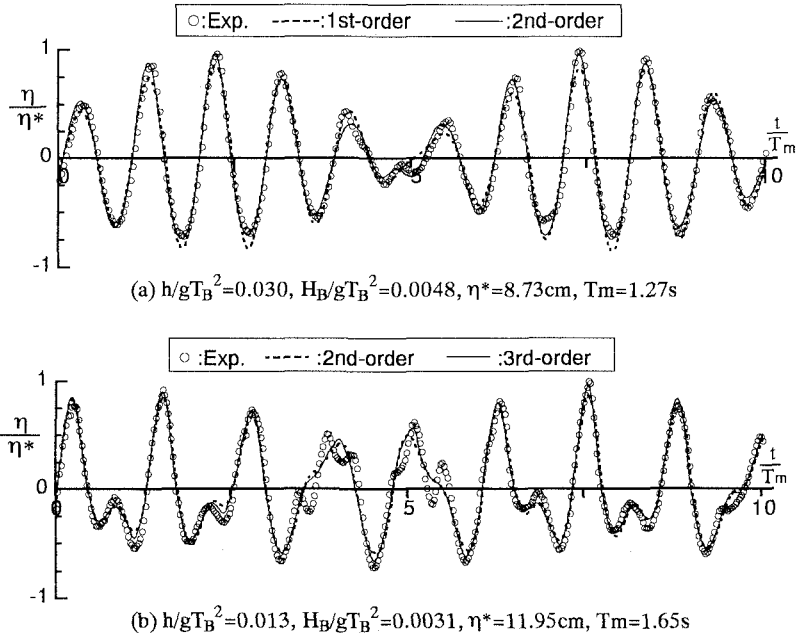


図-3.2 水面変位の実験値と近似理論による時間波形の比較 ($h/gT_A^2=0.042$, $H_A/gT_A^2=0.0055$, $\theta=60^\circ$)

つぎに、3次近似理論を使って斜交波の時間波形の非線形特性について簡単に記しておく。2つの基本波Wave-AとWave-Bの非線形性が強いほど、斜交波の非線形性の度合も大きくなる。まず、式(3.2)で与えられる水位の時間変動の上下非対称性を示す歪度(skewness) $S_{k\eta}$ の特性について略述する。

$$S_{k\eta} = \frac{1}{\eta_{\text{rms}}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\eta_i - \bar{\eta})^3 \quad (3.2)$$

なお、式(3.2)で、 $\bar{\eta}$ は平均値、 N はデータの数、 η_{rms} は η のroot mean square値である。

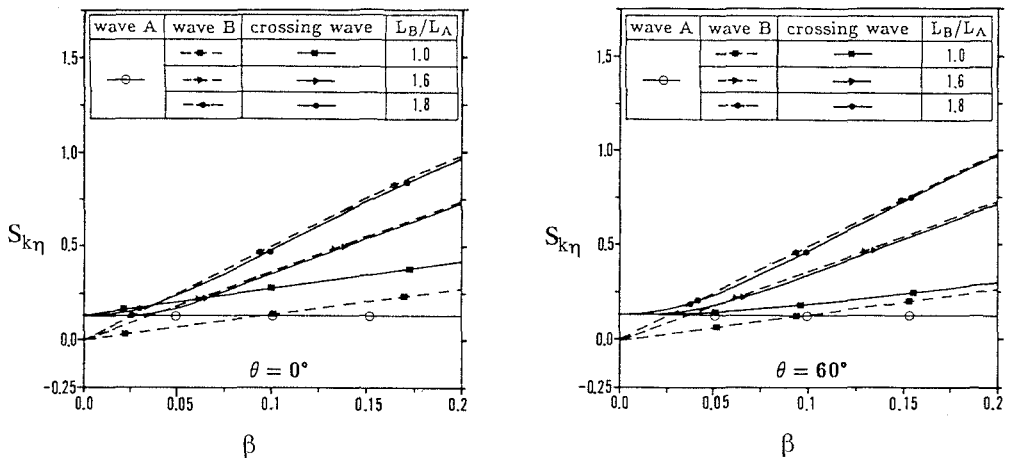


図-3.3 水位の時間変動の歪度 $S_{k\eta}$ (3次近似理論: Wave-Aに関する値は一定; $h/L_A=0.28$ で $\alpha=1$)

図-3.3に例示するように、Wave-Aの歪度が一定であれば、基本波のWave-Bの歪度が大きくなるにつれて斜交波の歪度は当然大きくなる。2つの波長比 L_B/L_A が大きい $L_B/L_A=1.8$ の場合は、斜交波の歪度は大きい歪度を持つ基本波の歪度の値に近づくが（図-3.3の場合はWave-B）、交差角 θ の変化により著しくこの傾向が変わることはない。しかし、2つの波長比 L_B/L_A が小さくなり $L_B/L_A=1$ になると、斜交波の歪度は2つの基本波のWave-AとWave-Bそれぞれの歪度より大きくなり、その度合は交差角 θ が 0° に近づくほど一般に大きくなる。

ゼロアップクロス法で定義される最大波高 $H_{\max}$ の無次元化された値 $H_{\max}/(H_A+H_B)$ （ H_A ：Wave-Aの波高， H_B ：Wave-Bの波高）は、図-3.4に例示するように、交差角 θ の増加に伴って減少し $\theta=90^\circ$ 前後で最小値をとり、その後増大するが、 $\theta=0^\circ$ で最も大きくなる。 $H_{\max}/(H_A+H_B)$ の値は、 R_L （ $=L_B/L_A$ ）と R_{WS} （ $=WS_B/WS_A$ ， WS_B ：Wave-Bの波形勾配， WS_A ：Wave-Aの波形勾配）により変化し、 $R_{WS}=1.0$ より $R_{WS}=2.0$ の方が波の非線形性が強くなるので、 $H_{\max}/(H_A+H_B)$ は大きくなる。また、 $R_L=1.0$ の場合、斜交波の非線形性の度合が最も強くなり、このため斜交波の最大波高 $H_{\max}$ は2つの基本波の波高の和 (H_A+H_B) と等しくなるか、大きくなる（ $1.015 \geq H_{\max}/(H_A+H_B) \geq 1$ ）。図-3.4の場合、全体的に $1.015 \geq H_{\max}/(H_A+H_B) > 0.95$ となっている。

つぎに、無次元化された最大水面変位 $\eta_{\max}/H_{\max}$ は、図-3.5に例示されているように、 $H_{\max}/(H_A+H_B)$ と同様、 R_L と R_{WS} によりかなり変化するが、交差角 θ による変化は一般に $H_{\max}/(H_A+H_B)$ の場合より小さい。

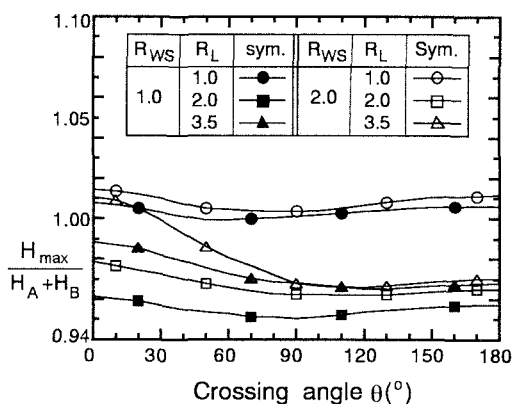


図-3.4 $H_{\max}/(H_A+H_B)$ と θ の関係（ $h/L_A=0.4$ ， $H_A/L_A=0.025$ ， $\delta_A=\delta_B$ の場合）

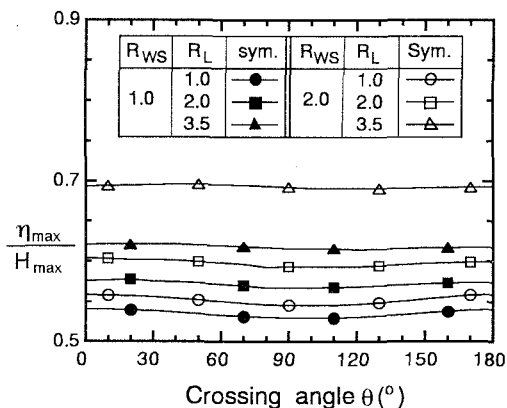


図-3.5 $\eta_{\max}/H_{\max}$ と θ の関係（ $h/L_A=0.4$ ， $H_A/L_A=0.025$ ， $\delta_A=\delta_B$ の場合）

4. 水粒子速度

4.1 時間波形

水面波形が1次近似解で表現できる場合は水粒子速度も1次近似理論で予測できるが、水面波形が2次および3次近似理論に近くなると、水粒子速度は当然1次近似理論では正確に予測できなくなる。図-4.1は水粒子速度（ u ， v ）の計測値と1次近似解と3次近似解の計算値の比較の一例であり、図中の T_m は平均周期， u^* と v^* はそれぞれ計測された x と y 方向の最大水粒子速度である。図-4.1の場合は、水位変動 η は3次近似理論に近い波形（図-3.2の(b)）となっている。水粒子速度の実験値と計算値の対応をみると、水面波形ほど、3次近似理論と一致していないものの、線形理論では説明できない所を充分補っており、3次近似理論の必要性がここでも確認できる（富田・姜・他（1994））。また、水粒子速度の場合、交差角 θ に関係なく、水底に近づくほど波の非線形性が弱まる。このため、水面近傍の場合より低次の理論を使っても、水底近傍の水粒子速度の推算精度はそれほど悪くない。

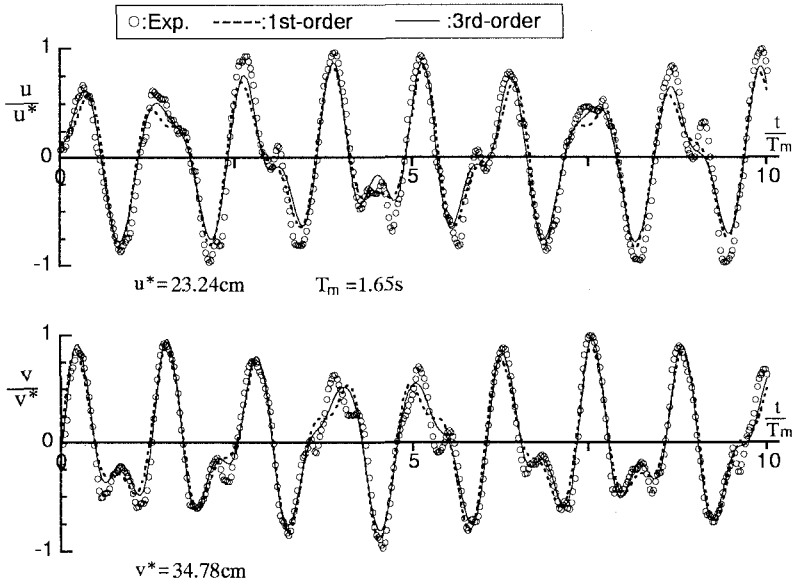


図-4.1 u, v の時間波形 ($T_A=1.1s$, $H_A=6.5cm$, $T_B=2.0s$, $H_B=12.0cm$, $\theta=60^\circ$, $z/h=-0.25$)

つぎに波の非線形性が水粒子速度の時間波形の上下非対称性にどのように係するのかについて3次近似理論を使って考察してみる．歪度 (skewness) S_{kq} を次式で定義する．

$$S_{kq} = \frac{1}{q_{rms}^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_i - \bar{q})^3 \quad (4.1)$$

ここで、 q は水粒子速度、 N はデータの数、 $\bar{q}$ は1波群中の q の平均値である．

図-4.2は S_{kq} と β の関係を L_B/L_A をパラメータにして、 $\theta = 0^\circ$ と 60° の場合に示した2例である．同図も含めて、斜交波の水粒子速度の歪度 (skewness) S_{kq} は、(i) 2つの基本波の交差角 θ や波長比 L_B/L_A によらず、歪度の大きい基本波の水粒子速度の歪度よりも小さいこと、(ii) 交差角が大きくなると、斜交波の水粒子速度の歪度は、歪度の大きい基本波の値により近くなっていくこと、また、(iii) 2つの基本波の波長比

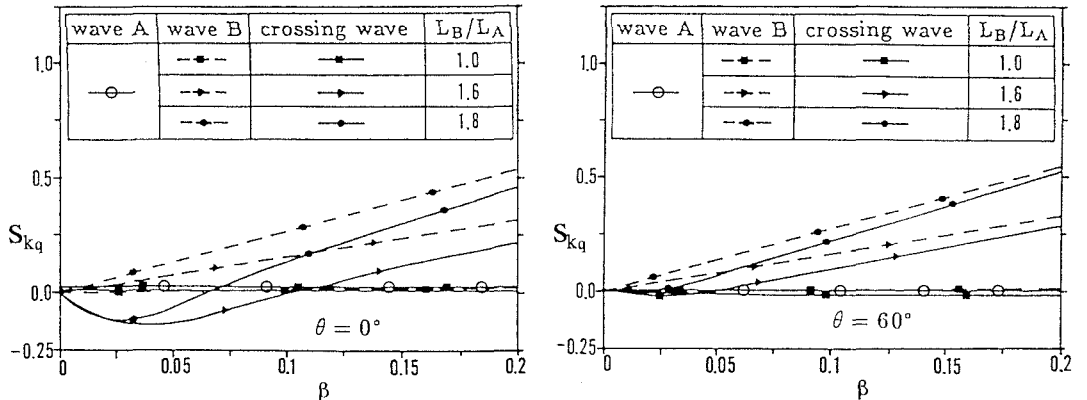


図4.2 水粒子速度 v の時間波形の歪度 S_{kq} ($\alpha=0.1$, $h/L_A=0.28$)

L_B/L_A が大きくなるほど、斜交波の水粒子速度の歪度に及ぼす2つの基本波の波形勾配や交差角の影響は一般に大きくなることなどが特徴的な傾向である。

4.2 水粒子速度の最大値とその鉛直分布

図-4.3は交差角 $\theta=0^\circ, 60^\circ$ の場合の斜交波1波群中の波峰と波谷における水平水粒子速度ベクトルの最大値とその方向 θ' （図-2.1参照）を示した一例である。図-4.3に例示するように、1つの波群中で最大となる水平方向の水粒子速度ベクトルの方向 θ' は、底面近傍では速度の大きい基本波の水粒子速度ベクトル方向に近いが、自由表面に近づくほどもう一つの基本波の影響を受け、2つの基本波の水粒子速度ベクトルの間の方向になる。これは、2つの基本波が異なった水深波長比を持つため、水面と水底近傍では斜交波の水粒子速度に及ぼす2つの基本波の寄与が異なることに帰因する。このような水粒子速度ベクトルの鉛直方向の偏向は交差角 θ が大きくなるほど大きくなることが理論（図-4.4参照）と実験から確認されている。

つぎに、水粒子速度ベクトルの平面軌跡について触る。図-4.5は $z/h=-0.25$ における1次近似理論と3次近似理論と水理実験より得られた斜交波の水粒子速度ベクトルの平面軌跡を示したものであり、図中の軌跡は2つの基本波の周期の最小公倍数の時間に対して示されている。線形理論（1次近似理論）では、波峰と波谷の位相における斜交波の最大水粒子速度の方向の差は 180° となる。しかし、非線形理論（3次近似理論）の場合には、既述したように、斜交波の水粒子速度は波峰の位相ではより大きな水粒子速度を持

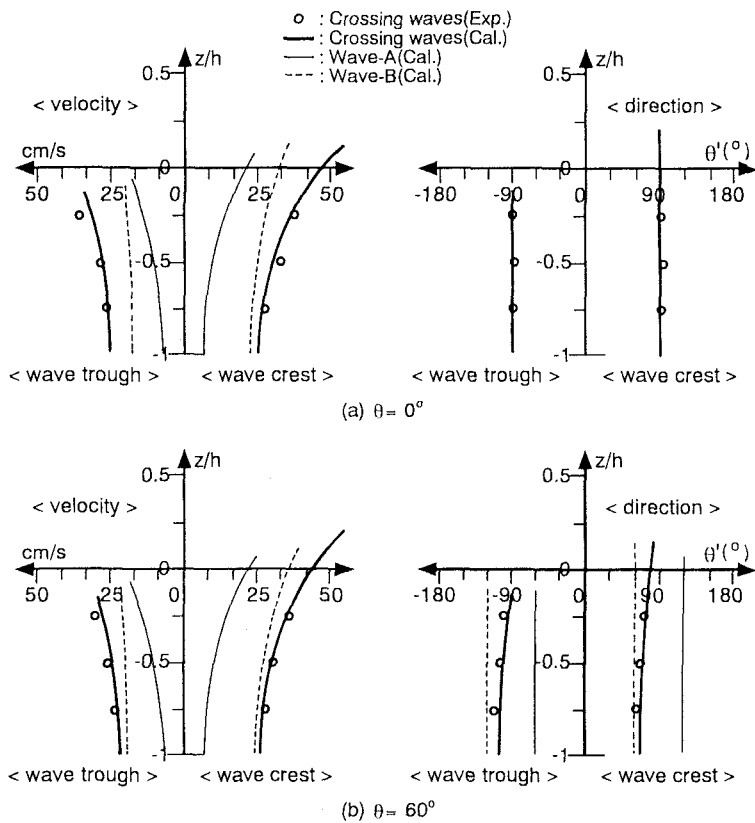


図-4.3 水粒子速度ベクトルの最大値とその方向の鉛直方向変化($T_A=1.1s, H_A=6.5cm, T_B=2.0s, H_B=12.0cm$)

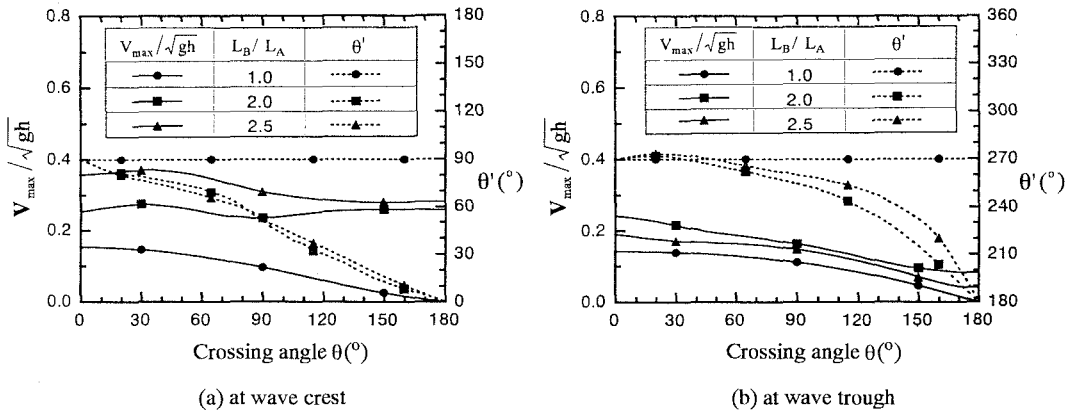


図-4.4 θ の変化による水平水粒子速度の最大値 $V_{\max}$ とその方向 θ' の変化($\alpha=\beta=0.2$, $h/L_A=0.28$, $z/h=-0.5$)

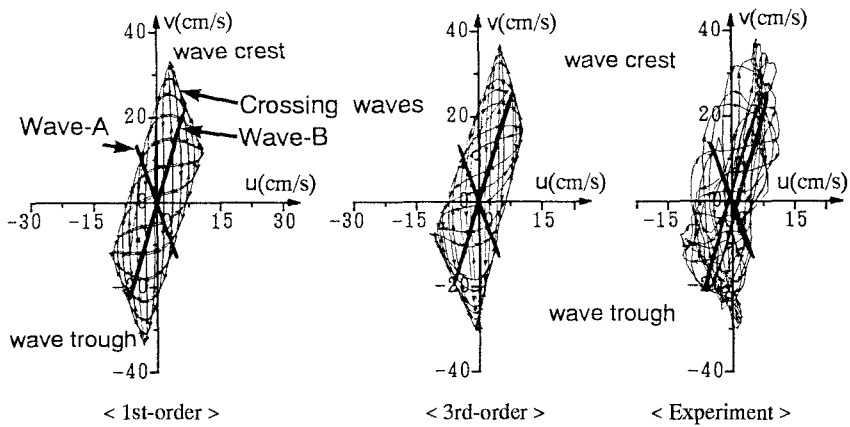


図-4.5 水粒子の水平速度ベクトルの平面軌跡 ($T_A=1.1s$, $H_A=6.5cm$, $T_B=2.0s$, $H_B=12.0cm$, $\theta=30^\circ$, $z/h=-0.25$)

つ基本波の方向（図-4.4の場合はWave-B）に偏向し、波谷の位相では水粒子速度の小さい基本波（図-4.4の場合はWave-A）の方向に偏向するため、それらの方向の差は 180° とならず、少し大きくなる。このことは、図-4.5にも例示されているように、水理実験からも認められる。

また、水平速度ベクトルの軌跡は2つの基本波の特性によっても変化する。そこで、水理実験で計測された水粒子の水平速度ベクトルの平面軌跡を楕円度 γ_u （式（4.2））を使って考察してみる。なお、軌跡全体の形状は楕円とならないが、図-4.5からも判るように、長軸と短軸を持つ楕円として大略近似できると仮定しての話である。

$$\gamma_u = \frac{\text{軌跡を楕円とみなした時の短軸の長さ}}{\text{軌跡を楕円とみなした時の長軸の長さ}} \quad (4.2)$$

図-4.6にも図示されているように、交差角 θ が大きくなるほど、また底面よりも自由表面に近づくほど、2つの基本波の両方の影響が強く現われて γ_u は順次大きくなり、水粒子の水平速度ベクトルの軌跡全体としての形状は楕円形よりも円形の割合が増していく。なお、図-4.6で $R_E^{(-0.5)}$ は、 $z/h=-0.5$ の $R_{1,B}/R_{1,A}$ ($R_{1,A}$ と $R_{1,B}$ はそれぞれWave-AとWave-Bの軌跡の楕円の長軸の長さ)である。

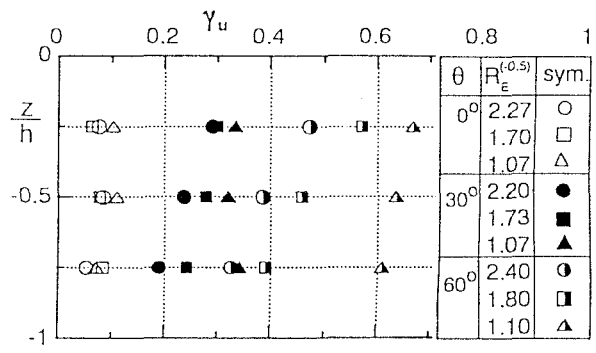


図-4.6 楕円度 γ_u の鉛直方向の変化 ($T_A=1.1s$, $H_A=6.5cm$, $T_B=2.0s$)

4.3 角周波数の変調

波の非線形性が強くなれば角周波数の変調が生じることはよく知られている。ここでは、3次近似理論を使って、波の非線形干渉に伴い、2つの基本波の角周波数 σ_A と σ_B の1次近似解の角周波数 σ_{A00} と σ_{B00} からのずれを式(4.3)で定義した F_A と F_B を使って検討してみる。

$$F_A = \frac{\sigma_A - \sigma_{A00}}{\sigma_{A00}}, \quad F_B = \frac{\sigma_B - \sigma_{B00}}{\sigma_{B00}} \quad (4.3)$$

なお、 $F_A = 0$, $F_B = 0$ は周波数の変調がないことを示す。図-4.7は β/α ($\alpha \geq \beta$ の条件で)の変化に伴う F_A と F_B の変化の一例を示したもので、図中の(a)は図-2.1と同様2つの基本波が逆行しない場合、(b)は2つの基本波が逆行する場合に対応する。

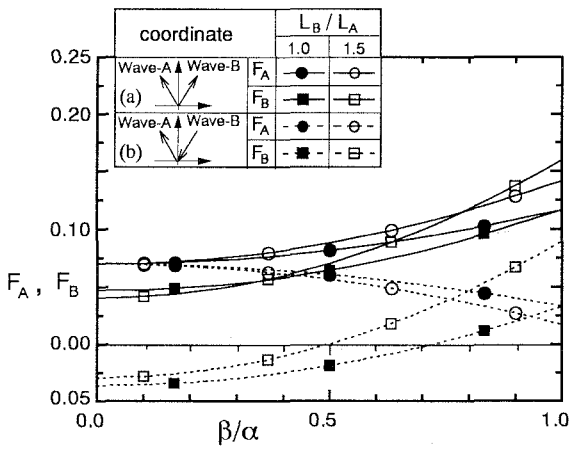


図-4.7 β/α の変化に伴う F_A と F_B の変化 ($\theta=60^\circ$, $h/L_A=0.2$, $\alpha=0.3$)

る。Wave-Bの非線形性が強くなるにつれて(β/α が大きくなるにつれて)、2つの基本波が逆行しない場合(aの場合)、 F_A と F_B はともに大きくなり、角周波数は1次近似理論より若干大きくなる。一方、2つの基本波が逆行する場合は F_B は大きくなるが、 F_A は小さくなり、 $L_B/L_A=1$ の場合は $\beta/\alpha=1$ で $F_A=F_B$ となる。このように、2つの基本波が逆行しない場合は、波の非線形干渉により2つの基本波の角周波数が大きくなることが指摘できる。

5. あとがき

本小論では斜交波を取り上げて、水位変動と水粒子速度に関する非線形な諸特性を中心にして、水理実験結果と3次近似理論に基づいて論議をしてきた。参考にした文献も限られており、また著者らの研究成果を中心としたため、斜交波の挙動の一部を紹介したに過ぎない。本小論が斜交波の基本特性を理解するための糸口となり、また多方向不規則波の諸特性への関心を与える一石となれば望外喜びとするところである。なお、本小論の取りまとめに際して、共同研究者の富田孝史助手と姜閔求助手の協力を得た。ここに記して謝意を表する次第である。

参考文献

- (1) Chappellear, J.E.(1961): On the description of short-crested waves, Beach Erosion Board, U.S. Army Corps of Engineers, Tech. Memo., No.125, pp.1-26.
- (2) Goda, Y.(1983): An unified nonlinearity parameter of water waves, Rept. Port and Harb. Res. Inst. Vol.22, No.3, pp.3-30.
- (3) Hsu, J.R.C., Y. Tsuchiya and R. Silvester(1979): Third-order approximation to short-crested waves, J. Fluid Mech., Vol.90, pp.179-196.
- (4) Hughes, S.A.(1994): Estimating laboratory oblique wave reflection, Waves-Physical and Numerical Modeling, Proc. Int'l Sympo., Vancouver, IAHR, pp.206-215.
- (5) Hwung, H.H and C.P. Tsai(1982): On the variation of characteristics of two wave trains crossing in intermediate depth, Proc. 18th Int'l Conf. on Coastal Engg., ASCE, pp.862-886.
- (6) Kang, Y., T. Tomita, K. Kurata and K. Iwata(1994): Wave kinematics of nonlinear crossing waves, Proc., 4th Int'l. Offshore and Polar Eng. Conf., pp.91-98.
- (7) Longuet-Higgins, M.S.(1962): Resonant interactions between two trains of gravity waves, J. Fluid Mech., Vol. 12, pp.321-332.
- (8) Miche, R.(1951): Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritime exposés à l'action de la houle, Annales des Ponts et Chaussées, 121^e Année, pp.285-319.
- (9) Moriya, Y. and M. Mizuguchi(1994): Weakly nonlinear bidirectional waves in shallow water, Waves-Physical and Numerical Modeling, Proc. Int'l Sympo., Vancouver, IAHR, pp.396-405.
- (10) Phillips, O.M.(1960): On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, J. Fluid Mech., Vol.9, pp.193-217.
- (11) She, K. and W.J. Easson(1991): Effects of three-dimensionality on wave kinematics and loading, Proc., 1st Int'l. Offshore and Polar Eng. Conf., pp.1-5.
- (12) 岩垣雄一(1987): 最新海岸工学, 森北出版, p.54.
- (13) 姜聞求(1995): 斜交波の非線形挙動に関する研究, 名古屋大学学位論文, 143p.
- (14) 富田孝史・姜聞求・岩田好一朗・倉田克彦(1994): 斜交波の水粒子速度に関する研究, 海洋開発論文集, Vol.10, pp.301-306.
- (15) 姜聞求・富田孝史・岩田好一朗・倉田克彦(1995): 浅水域における斜交波の非線形挙動と3次近似理論の適用限界, 海岸工学論文集, 第42巻. (印刷中)

補 遺

表-1 式(2.7)～式(2.10)における係数一覧

$$P_{10} = F_A / K_A S_A$$

$$P_{01} = F_B / K_B S_B$$

$$P_{20} = 3F_A / 8S_A^4$$

$$P_{02} = 3F_B / 8S_B^4$$

$$P_{303} = \frac{13 - 4C_A^2}{64S_A^7} K_A F_A$$

$$P_{033} = \frac{13 - 4C_B^2}{64S_B^7} K_B F_B$$

$$P_{301} = \frac{9 - 10C_A^2 - 2C_A^4}{16S_A^5} K_A F_A$$

$$P_{031} = \frac{9 - 10C_B^2 - 2C_B^4}{16S_B^5} K_B F_B$$

$$P_{11\pm} = F_A F_B \frac{\frac{F_A^2 S_B}{F_B S_A} \pm \frac{F_B^2 S_A}{F_A S_B} + 2F_{A\pm B} (\cos\theta C_A C_B \mp S_A S_B)}{2S_A S_B (F_{A\pm B}^2 - gK_{A\pm B} T_{A\pm B}) C_{A\pm B}}$$

$$P_{21\pm} = \frac{F_{2A\pm B} N_{21\pm} - gM_{21\pm}}{F_{2A\pm B}^2 - gK_{2A\pm B} T_{2A\pm B}} \frac{1}{C_{2A\pm B}}$$

$$P_{12\pm} = \frac{F_{2B\pm A} N_{12\pm} - gM_{12\pm}}{F_{2B\pm A}^2 - gK_{2B\pm A} T_{2B\pm A}} \frac{1}{C_{2B\pm A}}$$

$$P_{21C} = \frac{1}{2} \left(\frac{N_{21C}}{F_B C_B} + \frac{M_{21C}}{K_B S_B} \right)$$

$$P_{12C} = \frac{1}{2} \left(\frac{N_{12C}}{F_A C_A} + \frac{M_{12C}}{K_A S_A} \right)$$

$$E_{10} = 1$$

$$E_{01} = 1$$

$$E_{20} = \frac{K_A C_A}{4S_A^3} (2C_A^2 + 1)$$

$$E_{02} = \frac{K_B C_B}{4S_B^3} (2C_B^2 + 1)$$

$$E_{30} = \frac{3K_A^2}{64S_A^6} (8C_A^6 + 1)$$

$$E_{03} = \frac{3K_B^2}{64S_B^6} (8C_B^6 + 1)$$

$$E_{11\pm} = -\frac{1}{2g} \left\{ F_A F_B \left(\frac{C_A C_B}{S_A S_B} \cos\theta \pm 1 \right) - F_{A\pm B}^2 \right\} + \frac{F_{A\pm B} P_{11\pm} C_{A\pm B}}{g}$$

$$E_{21\pm} = \frac{K_{2A\pm B} N_{21\pm} T_{2A\pm B} - F_{2A\pm B} M_{21\pm}}{F_{2A\pm B}^2 - gK_{2A\pm B} T_{2A\pm B}}$$

$$E_{12\pm} = \frac{K_{2B\pm A} N_{12\pm} T_{2B\pm A} - F_{2B\pm A} M_{12\pm}}{F_{2B\pm A}^2 - gK_{2B\pm A} T_{2B\pm A}}$$

$$\sigma_{A20} = \frac{F_A (8C_A^4 - 8C_A^2 + 9)}{16S_A^4}$$

$$\sigma_{B20} = \frac{K_B N_{21C} T_B - F_B M_{21C}}{2F_B}$$

$$\sigma_{A02} = \frac{K_A N_{12C} T_A - F_A M_{12C}}{2F_A}$$

$$\sigma_{B02} = \frac{F_B (8C_B^4 - 8C_B^2 + 9)}{16S_B^4}$$

$$R_{20} = \frac{F_A^2}{4S_A^2}$$

$$R_{02} = \frac{F_B^2}{4S_B^2}$$

$$P_{11p} = P_{11+}, \quad P_{11m} = P_{11-}, \quad P_{21p} = P_{21+}, \quad P_{21m} = P_{21-}, \quad E_{11p} = E_{11+}, \quad E_{11m} = E_{11-}, \quad E_{21p} = E_{21+}, \quad E_{21m} = E_{21-}. \text{ および}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{iA\pm jB} &= |iK_A \pm jK_B|, & C_{iA\pm jB} &= \cosh K_{iA\pm jB} h, & S_{iA\pm jB} &= \sinh K_{iA\pm jB} h \\ T_{iA\pm jB} &= \tanh K_{iA\pm jB} h, & F_{iA\pm jB} &= i\sigma_{A00} \pm j\sigma_{B00}, & \Psi_{iA\pm jB} &= i\psi_A \pm j\psi_B \end{aligned} \right\}$$

ここで、

$$M_{21\pm} = M_{12\pm} \cos\theta + M_{21\pm}$$

$$M_{12\pm} = M_{12\pm} \cos\theta + M_{21\pm}$$

$$M_{21C} = M_{12C} \cos\theta + M_{21C}$$

$$M_{12C} = M_{12C} \cos\theta + M_{21C}$$

$$N_{21\pm} = N_{12\pm} \cos\theta + N_{21\pm}$$

$$N_{12\pm} = N_{12\pm} \cos\theta + N_{21\pm}$$

$$N_{21C} = N_{12C} \cos\theta + N_{21C}$$

$$N_{12C} = N_{12C} \cos\theta + N_{21C}$$

$$\begin{aligned}
M1_{21\pm} &= -K_A K_B \{0.5 (P_{10} E_{11\pm} C_A + P_{11\pm} C_{A+B} + F_{A+B}) \pm 2P_{01} E_{20} C_B + 2P_{20} C_{2A}\} \\
M2_{21\pm} &= -0.5P_{11\pm} (K_{A+B}^2 + K_A^2) C_{A+B} - K_A^2 (P_{10} E_{11\pm} C_A + 2P_{20} C_{2A} + 0.5F_A) \mp 0.5K_B^2 (P_{01} E_{20} C_B + 0.25F_B) \\
M1_{12\pm} &= -K_A K_B \{0.5 (P_{01} E_{11\pm} C_B - P_{11\pm} C_{B+A} + F_{B+A}) \pm 2P_{10} E_{02} C_A + 2P_{02} C_{2B}\} \\
M2_{12\pm} &= +0.5P_{11\pm} (K_{B+A}^2 + K_B^2) C_{B+A} - K_B^2 (P_{01} E_{11\pm} C_B + 2P_{02} C_{2B} + 0.5F_B) \mp 0.5K_A^2 (P_{10} E_{02} C_A + 0.25F_A) \\
M1_{21c} &= 0.5K_A K_B \{P_{11+} C_{A+B} + P_{11-} C_{A-B} - P_{10} C_A (E_{11+} + E_{11-}) - F_A\} \\
M2_{21c} &= 0.5P_{11-} C_{A-B} (K_{A-B}^2 - K_A^2) - 0.25K_B^2 F_B - 0.5P_{11+} C_{A+B} (K_{A+B}^2 - K_A^2) \\
M1_{12c} &= 0.5K_A K_B \{P_{11+} C_{B+A} - P_{11-} C_{B-A} - P_{01} C_B (E_{11+} + E_{11-}) - F_B\} \\
M2_{12c} &= -0.5P_{11-} C_{B-A} (K_{B-A}^2 - K_B^2) - 0.25K_A^2 F_A - 0.5P_{11+} C_{A+B} (K_{A+B}^2 - K_B^2) \\
N1_{21\pm} &= 0.25K_A K_B \{P_{10} P_{01} (K_A S_A C_B + K_B S_B C_A) \pm 2P_{10} P_{11\pm} C_A C_{A+B} + P_{01} P_{20} C_B C_{2A}\} \\
N2_{21\pm} &= +0.5P_{11\pm} \{P_{10} K_A (K_A C_A C_{A+B} - K_{A+B} S_A S_{A+B}) - K_{A+B} F_{A+B} S_{A+B}\} - 0.25P_{10} K_A F_A (2E_{11\pm} S_A + K_A C_A) \\
&\quad \mp 0.25P_{10} P_{01} K_A K_B (K_A C_A S_B + K_B C_B S_A) - 0.125P_{01} K_B F_B (4E_{20} S_B + K_B C_B) - P_{20} K_A S_{2A} F_{2A+B} \\
N1_{12\pm} &= 0.25K_A K_B \{P_{10} P_{01} (K_B S_B C_A + K_A S_A C_B) + 2P_{10} P_{11\pm} C_A C_{A+B} + P_{10} P_{02} C_A C_{2B}\} \\
N2_{12\pm} &= -0.5P_{11\pm} \{P_{01} K_B (K_B C_B C_{B+A} - K_{B+A} S_B S_{B+A}) - K_{B+A} F_{B+A} S_{B+A}\} - 0.25P_{01} K_B F_B (2E_{11\pm} S_B + K_B C_B) \\
&\quad \mp 0.25P_{10} P_{01} K_A K_B (K_B C_B S_A + K_A C_A S_B) - 0.125P_{10} K_A F_A (4E_{02} S_A + K_A C_A) - P_{02} K_B S_{2B} F_{2B+A} \\
N1_{21c} &= 0.5P_{10} K_A K_B \{C_A (P_{11+} C_{A+B} - P_{11-} C_{A-B}) + P_{01} (K_A S_A C_B + K_B S_B C_A)\} \\
N2_{21c} &= -0.5P_{11+} \{K_{A+B} F_{A+B} S_{A+B} - P_{10} K_A (K_A C_A C_{A+B} + K_{A+B} S_A S_{A+B})\} - 0.5F_A^2 (E_{11+} + E_{11-}) \\
&\quad - 0.5P_{11-} \{K_{A-B} F_{A-B} S_{A-B} - P_{10} K_A (K_A C_A C_{A-B} + K_{A-B} S_A S_{A-B})\} + 0.25g (K_A^2 - K_B^2) \\
N1_{12c} &= 0.5P_{01} K_A K_B \{CB (P_{11+} C_{A+B} + P_{11-} C_{B-A}) + P_{10} (K_B S_B C_A + K_A S_A C_B)\} \\
N2_{12c} &= -0.5P_{11+} \{K_{A+B} F_{A+B} S_{A+B} - P_{01} K_B (K_B C_B C_{A+B} + K_{A+B} S_B S_{A+B})\} - 0.5F_B^2 (E_{11+} + E_{11-}) \\
&\quad + 0.5P_{11-} \{K_{B-A} F_{B-A} S_{B-A} - P_{01} K_B (K_B C_B C_{B-A} + K_{B-A} S_B S_{B-A})\} + 0.25g (K_B^2 - K_A^2)
\end{aligned}$$