

最近の非線形分散性波動理論の新展開

Recent Developments in Nonlinear-Dispersive Wave Theories

灘 岡 和 夫

Kazuo NADAOKA

1. はじめに

最近、水の波の波動理論は新たな展開を見せつつある。中でも灘岡ら(1991, 1992, 1993a, 1993b, 1994)は、多成分連成型の流速場表現に基づく新たな定式化により、従来のものとは大きく異なった非線形分散性波動方程式系を開発することに成功している。この方程式系は、任意の広帯域スペクトル場を扱える全く新しい方程式系であり、極浅海波から深海波にかけての広い範囲で、水表面波形だけでなく流速・圧力場に関してもかなり高い精度で記述することができる、という著しい特長を有している。

本稿では、まず、最近の非線形分散性波動方程式に関する研究動向を概括した上で、この灘岡らの波動理論の内容を、Nadaoka, et al. (1994)を主たる材料として解説する。

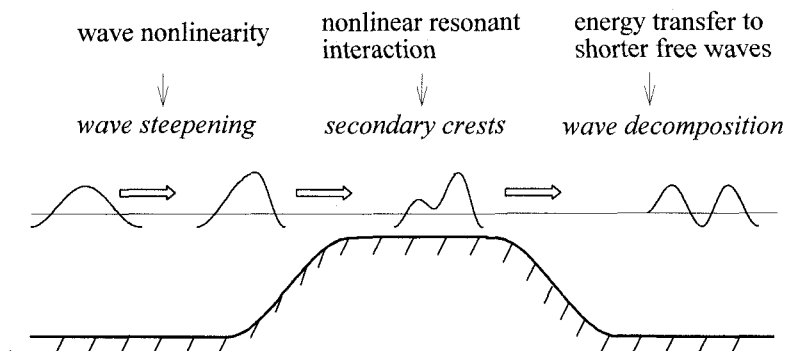
2. 非線形分散性波動理論の新たな展開が必要とされる背景

波浪変形を支配する最も重要な要素として、波の分散性と非線形性を挙げることができる。特に最近では海洋構造物の大水深化などにより、波の不規則性の評価が重要となりつつあるため、波の分散性を正しく表現できる分散性波動方程式による動場の解析手法が望まれている。

これまでの沿岸域における波動場解析には、主として、Berkhoff(1972)の緩勾配方程式に代表される単一周期波(monochromatic waves)を対象とした解析手法が用いられてきたが、分散性波動場を対象とするには各成分波ごとの計算が必要になってしまう。これに対し、解の重ね合わせをすることなく波の分散性を表現できる波動方程式としてSmith & Sprinks(1975)や、最近ではKirbyら(1991, 1992)、窪ら(1991)、Kubo et al. (1992)により非定常緩勾配方程式と呼ばれる波動方程式が提案されている。ところがこれらはいずれも線形波動方程式で、波の非線形性の効果は考慮できない。一方、分散性だけでなく非線形性をもある程度表現可能にしたものとしてBoussinesq方程式がある。しかしながら、これらの非定常緩勾配方程式やBoussinesq方程式は、いずれも、対象とする波動場のスペクトル帯域が狭い場合すなわち狭帯域スペクトル場にしか適用できず、特にBoussinesq方程式についてはその適用性が長波領域近傍に限られてしまう。

したがって、問題は二重にあって、一つには、既存の波動方程式が何れも非分散もしくは狭帯域スペクトル場を前提とした方程式となっているという問題があり、いま一つは、非線形と分散性の両方を表現し得るBoussinesq方程式が、たんに狭帯域分散性方程式であるというだけでなく、長波近傍のみに適用領域が限られた「浅い波の方程式」になっている、という問題がある。このうち、前者の「**狭帯域性の制約**」の問題は、任意のスペクトルを有する不規則波動場を取り扱おう場合、当然関わってくる問題である。これに対して、後者の「**浅海域性の制約**」の問題は、深海域からの浅水変形を追跡する場合には当然問題になるものの、浅海域での波浪計算に限ればあまり問題がないように思える。しかしながら、浅海域であっても、対象とする波浪場が必ずしも常に浅海波条件を満たすとは限らない。

一例として、図-1に示すような浅瀬上を通過する波動場について考えてみよう。この場合には、図中に示しているようなメカニズムによって波浪場が透過波側で顕著な分裂現象を起こすことが、現地観測(例えば、Byrne,



図－１ 浅瀬上を通過する際の波の分裂のメカニズムに関する概念図

1969; Young, 1989), 室内実験(例えば, Beji & Battjes, 1993), そして境界積分法による数値実験(大山・灘岡, 1992; Ohya & Nadaoka, 1994)により明らかにされている。このような波の分裂現象が生じる場合には, たとえ入射波側では浅海波条件となっていたとしても, 透過波側では深海波条件となり得る。このような場合には, 少なくとも透過波側ではBoussinesq方程式を使うことはできない。

このようなことから, Boussinesq方程式に何らかの改良を施すことによって, その適用範囲を深海波側に拡張することが, 最近多くの研究者によって試みられている。例えば, Madsen et al. (1991)は, Boussinesq方程式に補正項を付加することによって, より広いスペクトル帯域まで方程式の有効性を広げることを試みている。しかし, その場合に改良の対象とされているのは方程式の分散特性だけであって, 流速場や圧力場の表現も改良されるわけではない。また, 有効スペクトル帯域を広げるといってもやはり限度があり, 任意のスペクトル帯域で有効となるわけではない。一方, Nwogu (1993)は, Madsen et al. (1991)のような補正項を付加する手法ではなく, 水平流速変数としてある深さ z_a での水平流速をとり, この z_a をtuning parameterとして分散関係式の最良近似を得る, というアプローチによって, Boussinesq方程式の改良を試みている。しかし, この場合も改良の対象となるのは方程式の分散特性だけであって, 流速場の表現が全水深にわたって改良されるわけではない。

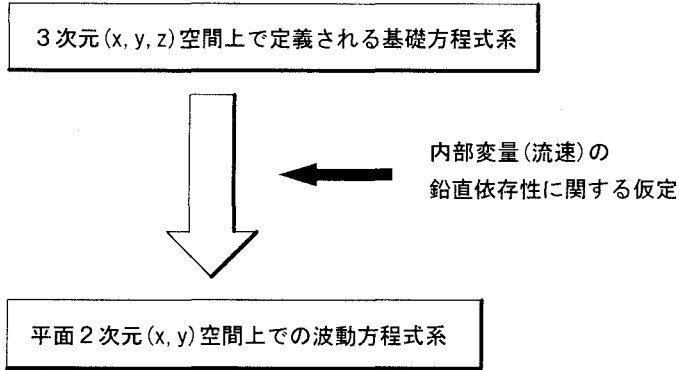
これに対して, 灘岡ら(1991, 1992, 1993a, 1993b, 1994)は, 後述する「多成分連成法」という新しい流速場表現法に基づいた新たな波動方程式系を導出することに成功している。この波動方程式系は, 任意の広帯域スペクトル場を扱える全く新しい方程式系であり, 極浅海波から深海波にかけての広い範囲で, 水表面波形だけでなく流速・圧力場に関してもかなり高い精度で記述することができる, という著しい特長を持つもので, 上記の「狭帯域性の制約」と「浅海性の制約」も基本的に取り除くことができる。

次節以降に, この波動理論の内容を, その基本的な考え方とともに説明する。

3. 波動方程式の導出過程の一般的枠組み

数学的な操作という面から, 水の波に関する波動方程式の導出過程をみると, それは一般に, 図－2に模式的に示しているように, 流速場(あるいは速度ポテンシャル ϕ)に関する鉛直(z)方向依存性に関して何らかの適当な仮定を導入することにより, ベースとなる3次元空間(x, y, z)上で定義された運動方程式と連続式(速度ポテンシャル ϕ を用いる場合には, それらは ϕ に関するLaplaceの方程式となる)を, 水平2次元空間(x, y)上の方程式系に変換する操作と行うことができる(灘岡・中川, 1991・1992・1993a)。

したがって, そのような操作によって得られる波動方程式の適用性は, 基本的には, 流速場(あるいは速度ポテンシャル ϕ)に関する鉛直方向依存性の仮定の内容に支配されることになる。例えば, 現在, 非線形・分散性波動方程式として最もよく用いられるBoussinesq方程式では, 速度ポテンシャル ϕ に関して, 次のような z の多項



図－2 数学的操作の観点から見た水の波の波動方程式導出過程の一般的枠組み

式を含んだ形の級数表示を導入することにより定式化されている(例えば, Mei, 1983)。

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(x, y, t)(z+h)^m \quad (1)$$

ここで h は水深で, 鉛直座標 z は静水位から上方に正にとっている. 基礎式である Φ に関するLaplaceの方程式に上式を代入し, さらに水平床の底面条件を用いれば, 上式はさらに次のように表される.

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi_0 - \frac{(z+h)^2}{2!} \nabla^2 \Phi_0 + \frac{(z+h)^4}{4!} \nabla^2 \nabla^2 \Phi_0 - \dots \quad (2)$$

ここに, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である. この式(2)によって, もとの3次元的速度ポテンシャル場 Φ が, 水平2次元空間 (x, y) 上の未知変数 Φ_0 によって表現できることになる. なお, Boussinesq方程式は, 通常, 上式右辺の最初の2項までをとって定式化されている.

このように, Boussinesq方程式では Φ の鉛直方向依存性を z の多項式によって表現する形になっているが, これは, 式(1)や(2)の第1項が鉛直方向依存性をもたない形になっていることからわかるように, Φ に関する長波極限 $kh=0$ (k は波数)の回りの漸近展開表示に他ならない. このことは, Φ に関するLaplaceの式の水平床上の一般解(例えば, Nadaoka & Hino, 1993)

$$\Phi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k, t) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp(ikx) dk \quad (3)$$

($A(k, t)$ は位相情報を含んだ非定常波数スペクトル)を $kh=0$ の回りで漸近展開することによって式(2)が得られることから, より直接的に理解できる(灘岡・中川, 1991). したがって, このような**長波回りの漸近展開法的な流速場表現**に基づいた定式化によって得られるBoussinesq方程式の適用性は, 本質的に長波極限およびその近傍に限られることになる.

4. 「多成分連成法」による新たな流速場表現

このことから逆に考えれば, 波動方程式の適用範囲をより拡張するには, 流速場の鉛直依存性表現を, 長波回りの漸近展開的な表現ではなく, より一般性のある表現にすればよいのではないかという発想が自然に出てくる. 要は, **流速場の近似の仕方**の問題なのである. 長波から深海波を含む任意のスペクトルの不規則波をも扱い得る一般的な波動方程式の導出を目的とするのであれば, それに適した流速場表現を模索する必要がある.

ここでは、水平流速ベクトル $\mathbf{q}=(u,v)$ を次のような有限な N 項の成分和で表わすことを考える。

$$\mathbf{q}(x,y,z,t)=\sum_{m=1}^N \mathbf{U}_m(x,y,t)F_m(z) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{U}_m$ は $\mathbf{q}$ に対応する2次元ベクトルで水平2次元空間 (x,y) 上で定義される関数である。また、上式中の $F_m(z)$ ($m=1,\dots,N$)は鉛直依存性関数系で、原理的には、対象とする流速場をよく近似し得る互いに独立な関数系であれば何でもよいが、ここでは、 $F_m(z)$ として次に示す関数を用いる。

$$F_m(z)=\frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m h} \quad (5)$$

このような $\cosh$ 関数系を鉛直依存性関数系として用いたのは、一つには、先の式(3)で示した速度ポテンシャル Φ に関するLaplaceの式の一般解が $\cosh$ 関数によって表現されていることによっている。(なお、式(5)の形の鉛直依存性関数は線形波動場だけのものと誤解されやすいが、式(3)が線形・非線形に関わりなく有効であることから考えても明らかなように、式(5)は非線形波動の場合にも適用可能である。)

ところで、式(3)を離散表示して、

$$\Phi(x,z,t)\cong\sum_{i=1}^{i_{\max}} A(k_i,t)\exp(ik_i x)\Delta k\frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h} \quad (6)$$

と表すと、この $A(k_i,t)\exp(ik_i x)\Delta k$ の部分と式(4)中の $\mathbf{U}_m(x,y,t)$ の部分の間に形式上の対応が見られることから、式(4)、(5)は、単なる流速場の離散スペクトル表現ではないかと誤解されがちである。実際、筆者も、理論開発当初の段階では、たとえ流速場を式(4)、(5)によってうまく表わせたとしても、広い波数帯域の不規則波動場を表すには、展開項数 N をかなり大きくとらなければいけなくなるのではないかと予想していた。というのも、そのような場合、式(6)の離散スペクトル表現では、スペクトル成分 $A(k_i,t)$ の総数 $i_{\max}$ をかなり大きくとる必要があることから、そのようなスペクトル法のイメージが抜けきれていなかったからである。しかし実際には、式(4)、(5)での展開項数 N は必ずしも大きくとる必要はない。そのことを以下に具体的に示す注)。

式(6)の離散スペクトル表現では、 $i_{\max}$ 個の鉛直依存性関数 $\cosh k_i(h+z)/\cosh k_i h$ を含むが、もしかりに、各々の鉛直依存性関数がすべて式(4)、(5)の形で N 個のあらかじめ設定した鉛直依存性関数 $F_m(z)$ によって十分よく近似できるならば、けっきょく、式(6)の離散スペクトル表現自体も限られた N 個の鉛直依存性関数 $F_m(z)$ で表現できることになる(灘岡・中川, 1991, 1993a)。このことを具体的に確かめるために、ここで式(6)の離散スペクトル表現式中の $\cosh k_i(h+z)/\cosh k_i h$ を、次式によって近似することを考える。

$$\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cong\sum_{m=1}^N Q_m F_m(z) \quad (7)$$

ただし、ここでは、 k_i を任意の波数として k と記している。右辺の係数 Q_m ($m=1,\dots,N$)は、上式の近似が任意の kh に対して十分よく成立するように決める必要があるが、ここでは、Galerkin法によってこれらの係数を決めることを考える。具体的には、式(7)の両辺に順次 $F_m(z)$ をかけて、 z に関して $-h$ から 0 まで積分し、それによって得られる Q_m ($m=1,\dots,N$)に関する N 本の連立方程式を解くことによって算定することができる。

図-3は、近似対象である式(7)の左辺の関数において、 kh の値として図中に①~⑤で示す5つのケースに選んだ場合の近似結果(°印)をそれぞれ示したものである。この計算例では、展開項数 N は4で、 $F_m(z)$ を規定する $k_m h$ の値としては1.6, 3.5, 6.0, 10.5に設定している。ここで示している5つのケースは、長波極限($kh=0$)か

注) 式(4)、(5)と式(6)の間には、もう一つの本質的な違いがある。それは、上記の $A(k_i,t)\exp(ik_i x)\Delta k$ と $\mathbf{U}_m(x,y,t)$ の対応関係に関わる問題である。すなわち、離散スペクトル法による式(6)の流速場表現では、この式形から明らかなように水平方向依存性をも周期関数 $\exp(ik_i x)$ の形で規定しているのに対し(例えば、Fenton & Rienecker, 1980)、式(4)、(5)では $\mathbf{U}_m(x,y,t)$ として特に規定しておらず、波動場の非周期的な空間発展も問題なく扱える形になっている。

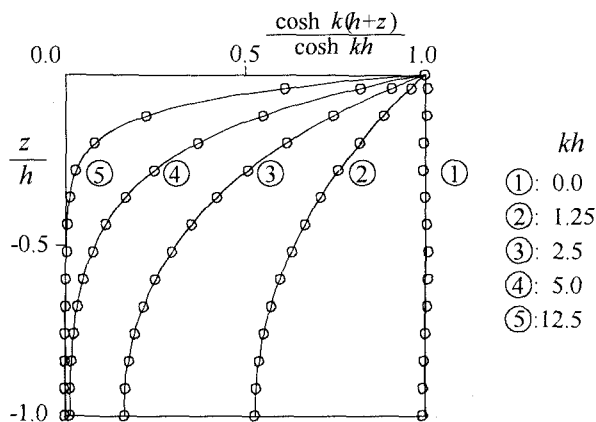


図-3 さまざまな kh の鉛直依存性関数 $\cosh k(h+z)/\cosh kh$ に対する近似結果

ら、かなりの深海波の条件 ($kh=12.5$; 深海波領域は kh でいえば $\pi < kh$ である) を含んでいるが、すべてのケースにわたって、かなり良好な一致が得られていることがわかる。このように、わずか4程度の展開項数で長波極限からかなりの深海波条件にわたって式(7)の近似を極めて良好に行えるという結果は、任意波数のスペクトル成分をあらかじめ設定した小数の $F_m(z)$ ($m=1, \dots, N$)によって表せるということを意味しており、このことからけっきよ上記のように、任意の広い波数帯域の不規則波の流速場をもこの $F_m(z)$ ($m=1, \dots, N$)によって表現することが可能になることになる。このことは極めて重要な発見であり、式(4), (5)による流速場表現が、新しい一般性のある波動理論の開発の基礎となり得ることを示すものである。

ところで、式(4)をBoussinesq方程式の場合の式(1)と比べると、形式的に $U_m(x, y, t) \leftrightarrow \Phi_m(x, y, t)$, $F_m(z) \leftrightarrow (z+h)^m$ という対応関係があり、みかけ上、流速場表現の枠組みとして類似性があるように見えるが、先に述べたように、Boussinesq方程式では長波極限回りの漸近法的手法により流速場を表現する（したがって第1項の Φ_0 がleading termとして扱われる）のに対し、式(4)では、流速場の最良近似を得るように、有限な N 個の $U_m(x, y, t)$ を互いに連成させるやり方で求めるようにしているところに本質的な違いがある。

この連成方法として、ここではGalerkin法を用いているが、選点法などの他の重み付き残差法的手法を用いることも考えられる。重要なことは、従来のような漸近展開法的な手法ではなく、このような多成分を連成させる流速場表現手法の導入により、**流速場表現の自由度や一般性を飛躍的に増加させる道が開けたこと**である。ここでは、灘岡・中川(1991, 1992, 1993a)により、その具体的な意味付けとともに導入されたこのような新たな考え方に基づく流速場の表現技法を、その一般性を考慮して、「**多成分連成法**」と呼ぶことにする。

以下に、この多成分連成法に基づく波動方程式の定式化について詳しく述べる。

5. 多成分連成法に基づく新たな非線形分散性波動方程式の導出

5.1 3次元 (x, y, z) 空間上の基礎方程式系

波動方程式の導出の出発点となるのは、先に述べたように、3次元 (x, y, z) 空間上で定義された基礎方程式系である。この基礎方程式系としては、ここでは、連続式

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

と、Eulerの方程式を用いる。このうち、Eulerの方程式に関しては、そのままの形で用いてもよいが（灘岡・中川、

1993b), 最終的に得られる波動方程式の形をより簡単なすっきりした形にするために, ここでは流速場の非回転性を仮定して, 水平方向と鉛直方向のEulerの方程式の式形を, それぞれ, 式(9)と(10)のように書き換えておく(灘岡ら, 1994).

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + w^2) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + w^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (10)$$

ここに, $\mathbf{q}$: 水平流速ベクトル(u, v), w : 鉛直方向流速, p : 圧力, g : 重力加速度, ρ : 密度である(式(9), (10)は, 一般化されたBernoulliの定理から直接的に簡単に求めることができる).

鉛直方向のEulerの方程式(10)を, 鉛直方向に任意の z から自由表面 η まで積分すると, 次式が得られる.

$$\int_z^\eta \frac{\partial w}{\partial t} dz + \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + w^2) \Big|_z^\eta = - \left(\frac{1}{\rho} p + gz \right) \Big|_z^\eta \quad (11)$$

これから, 水表面での力学的境界条件

$$p = 0 \quad \text{at } z = \eta(x, y, t) \quad (12)$$

を用いることにより, 圧力 p に関する次の関係式が得られる注).

$$\frac{1}{\rho} p = g(\eta - z) + \int_z^\eta \frac{\partial w}{\partial t} dz + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{q}_s + w_s^2) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + w^2) \right] \quad (13)$$

つぎに, この式(12)を水平方向のEulerの方程式(9)に代入すれば, けっきょく次式が導かれる.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \left[g\eta + \int_z^\eta \frac{\partial w}{\partial t} dz + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{q}_s + w_s^2) \right] = 0 \quad (14)$$

ここで, $\mathbf{q}_s$ と w_s は水表面 $z=\eta$ での $\mathbf{q}$ と w である. 以上の手続きにより, 式(14)のように, 水平方向のEulerの方程式から, 圧力項を消去することができ, さらに, 非線形項をすべて自由表面での変数によって表すことができる.

一方, 鉛直流速 w は, 底面での境界条件

$$w = -\mathbf{q} \cdot \nabla h \quad \text{at } z = -h(x, y) \quad (15)$$

を用いて, 連続式(8)を鉛直方向に底面 $z=-h$ から任意の z まで積分することにより,

$$w = -\nabla \cdot \int_{-h}^z \mathbf{q} dz \quad (16)$$

と表すことができる. したがって, 先の式(13)や(14)は, 式(16)式を用いることにより, すべて水平流速ベクトル $\mathbf{q}$ と水面変位 η だけで表すことができることになる. なお, この式(16)は, 流速場に関する式(4), (5)の多成分連成表現を代入することにより, 次のように表される.

$$w(x, y, z, t) = - \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\frac{\sinh k_m(h+z)}{k_m \cosh k_m h} \mathbf{U}_m(x, y, t) \right] \quad (17)$$

注) 後野(1994a)は, 昨年の本研修会の講義集において, われわれの波動理論のレビューを行い, その中で, 運動方程式の鉛直積分による圧力の表現を得る定式化の議論から, われわれの波動理論では鉛直依存性関数として z の多項式を用いることができない, としている. しかしこれは, この鉛直積分を不定積分の形で行っていることによる数式展開上の誤りである. ここでの議論から明らかのように, 本波動理論では, 鉛直依存性関数として式(5)のような双曲線関数だけが許されるわけではない. z の多項式も含めて, 任意の互いに独立な関数系を用いることができる. 具体的にどのような関数系を選ぶかは, 対象とする流速場をどのように合理的に近似するかといった議論によることになる.

5. 2 強非線形・強分散性波動方程式

さて、以上で、波動方程式導出の基礎となる3次元 (x, y, z) 空間上の基礎方程式系の議論が終わり、これらの水平2次元化によって波動方程式系を具体的に導出する準備ができた。

まず、連続式(8)については、底面境界条件式(15)と、水表面での運動学的条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \eta = w \quad \text{at } z = \eta(x, y, t) \quad (18)$$

を用いて、鉛直方向に底面 $z=-h$ から水表面 $z=\eta$ まで積分することにより、次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{-h}^{\eta} \mathbf{q} dz \right) = 0 \quad (19)$$

これに、先の式(4)、(5)を代入すれば次式となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\frac{\sinh k_m(h+\eta)}{k_m \cosh k_m h} \mathbf{U}_m \right] = 0 \quad (20)$$

つぎに、水平方向運動方程式(14)から、 $\mathbf{U}_m$ ($m=1, \dots, N$)の時間発展方程式を導く。これには、先に示した多成分連成法の考え方に従って、式(14)に関してGalerkin法を適用すればよい。すなわち、式(4)、(5)を式(14)に代入して得られる式の両辺に、重み関数として順次鉛直依存性関数 $F_m(z)$ をかけたのちに、 z に関して $-h$ から η まで積分する。そうすると、以下のような N 本のベクトル方程式が得られる（それぞれ x, y 方向成分の方程式があるので方程式の総数としては $2N$ ）。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N a_{nm} \frac{\partial \mathbf{U}_m}{\partial t} + b_n \nabla \cdot \left[g \eta + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{q}_s + w_s^2) \right] = \\ \sum_{m=1}^N \left[c_{nm} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_m)_t + \mathbf{d}_{nm} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{U}_m)_t \right], \quad (n=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_{nm} = a_{mn} &= \frac{1}{2 \cosh k_m h \cosh k_n h} \left\{ \frac{\sinh(k_m + k_n)(h+\eta)}{k_m + k_n} + \frac{\sinh(k_m - k_n)(h+\eta)}{k_m - k_n} \right\}, \quad b_n = -g \frac{\sinh k_n(h+\eta)}{k_n \cosh k_n h}, \\ c_{nm} = c_{mn} &= \frac{1}{k_m^2 \cosh k_m h \cosh k_n h} \left[\frac{\cosh k_m(h+\eta) \sinh k_n(h+\eta)}{k_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sinh(k_m + k_n)(h+\eta)}{k_m + k_n} + \frac{\sinh(k_m - k_n)(h+\eta)}{k_m - k_n} \right\} \right], \quad \omega_m^2 = g k_m \tanh k_m h \end{aligned} \quad (22)$$

なお、式(21)中の係数マトリックス $\mathbf{d}_{nm}$ は、やや複雑な数式表現となるのでここには示していないが、 $O(\varepsilon \cdot \nabla h)$ の項を無視することによって、 $\mathbf{d}_{nm} \equiv \mathbf{D}_{nm}$ として見積もることができる。

この式(21)は、先の鉛直積分型連続式(20)とともに、 $2N+1$ 個の未知変数、 η と $\mathbf{U}_m$ ($m=1, \dots, N$)に関する連立微分方程式系を構成している。これは、各未知変数の時間発展を記述する波動方程式系に他ならない。ここで、重要なことは、これらの方程式を導く過程で、 η の一価性の仮定以外は非線形性に関わる近似を一切していないということである。また、後で示すように、この波動方程式系はごくわずかの展開項数 N で、分散性を広い波数領域にわたって表現することができる。このようなことから、この式(20)、(21)は、「**強非線形・強分散性波動方程式**」と呼ぶことができる。

5.3 弱非線形・強分散性波動方程式

しかしながら、数値解析上の観点から見ると、式(20)、(21)はやや問題を含んでいる。というのも、式(22)に示されているさまざまな係数が、多くの双曲線関数を含んでいるうえ、それらの引数として未知変数 η が入り込んでいるからである。これらの点はいずれも計算時間を長くする要因となるし、数値アルゴリズムのロバスト性の点でも不利な要素となっている。そこで、ここでは、このような数値解析上の難点を取除く一つの方法として、式(20)、(21)の弱非線形バージョンを導いておく。

まず、基礎となる式(14)、(19)において、 q の $z=0$ の回りでのTaylor展開を導入し、1次オーダーの非線形項のみを残す形にすると、以下の式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 q dz + \eta q_0 \right) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \left[g \eta + \int_z^0 \frac{\partial w}{\partial t} dz + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (q_0 \cdot q_0 + w_0^2) \right] = 0 \quad (24)$$

ここで、 q_0 と w_0 は、静水位 $z=0$ での q と w である。

このような操作に対応して、Galerkin法を適用する際の鉛直積分の上限を η から0に変更すれば、最終的に、式(20)、(21)の弱非線形バージョン、すなわち「弱非線形・強分散性波動方程式」として、以下の方程式系が得られる。(もちろん、式(23)、(24)でより高次の非線形項を残せば、方程式の非線形性表現を向上させることができる。)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_m^2}{g} + \eta \right) U_m \right] = 0 \quad (25)$$

$$\sum_{m=1}^N A_{nm} \frac{\partial U_m}{\partial t} + B_n \nabla \cdot \left[g \eta + \eta \frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (q_0 \cdot q_0 + w_0^2) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^N [C_{nm} \nabla (\nabla \cdot U_m) + D_{nm} (\nabla \cdot U_m)] \quad (n=1, \dots, N) \quad (26)$$

ここに、

$$A_{nm} = \frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{k_n^2 - k_m^2}, \quad A_{nn} = \frac{g \omega_n^2 + h (g^2 k_n^2 - \omega_n^4)}{2 g k_n^2}, \quad \omega_m^2 = g k_m \tanh k_m h, \quad B_n = \frac{\omega_n^2}{k_n^2}, \quad C_{nm} = \frac{B_n - A_{nm}}{k_m^2},$$

$$D_{nm} = \nabla C_{nm}, \quad D_{nn} = \frac{2}{k_m^2 - k_n^2} \left[\frac{2 \nabla k_m}{k_m} \left\{ A_{nm} - (k_m^2 - k_n^2) C_{nm} \right\} + \frac{g \nabla h}{\cosh k_n h \cdot \cosh k_m h} \right] \quad (27)$$

式(26)中の q_0 と w_0 は、次式によって算定できる。

$$q_0 = \sum_{m=1}^N U_m, \quad w_0 = - \sum_{m=1}^N \nabla \cdot \left(\frac{B_m}{g} U_m \right) \quad (28)$$

この弱非線形バージョンでは、先の強非線形バージョンのものに比べて、方程式中の係数の形が、式(27)に示されているように、かなり簡単になる。

5.4 強分散性波動方程式系の線形分散特性

ここで示した多成分連成法による強分散性波動方程式の分散特性は、これらの方程式系で $k_m h$ ($m=1, \dots, N$)を具体的に設定したときの固有値問題の解として調べることができる。図-4は、その例を示したもので、 $N=4$ とし、 $k_m h$ ($m=1, \dots, N$)の値として先の図-3で用いたものと同じ値を設定した場合の解析結果である。これを見ると、長波極限($kh=0$)からかなりの深海波領域にわたる広い範囲で、実線で示した理論的な線形分散曲線とほぼ一致す

る結果が得られていることがわかる。図中には、通常の Boussinesq 方程式と Madsen et al.(1991)による improved Boussinesq 方程式の分散曲線も比較のため示しているが、これで見ると、 improved Boussinesq 方程式の場合でも、理論曲線に対して良好な一致が見られる範囲は、高々 $kh \approx 3$ までとなっていることがわかる。

強分散性波動方程式がこのように広い範囲で理論分散曲線をほぼパーフェクトに表現できる理由は、 $N=1$ とした単一成分方程式の線形分散特性を調べることによって理解することができる。この場合の分散特性は、対応する固有値問題の解として、次のような解析的な表現が可能である。

$$C^2 = \frac{C_p^3}{C_g + \frac{k^2}{k_p^2}(C_p - C_g)} \tag{29}$$

ここに、 C_p と C_g は、設定波数パラメータ k_p から線形理論で計算される位相速度と群速度である。これに対して k と C は任意の波数およびそれに対応して線形理論で算定される位相速度である。図-5は、やはり先の図-3で用いた4つの $k_m h$ の値をそれぞれ $k_p h$ の値として設定した場合の、式(29)による分散特性算定結果である。これか

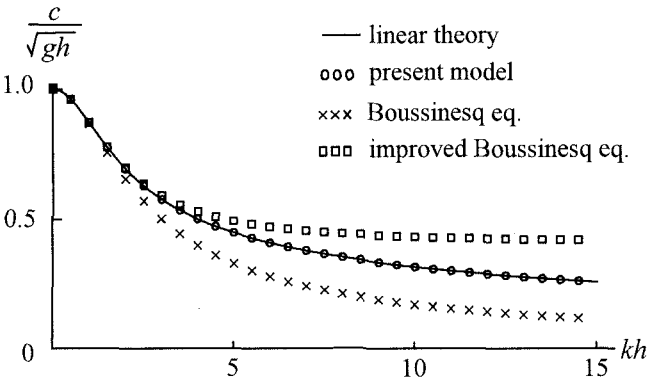


図-4 強分散性波動方程式の線形分散特性

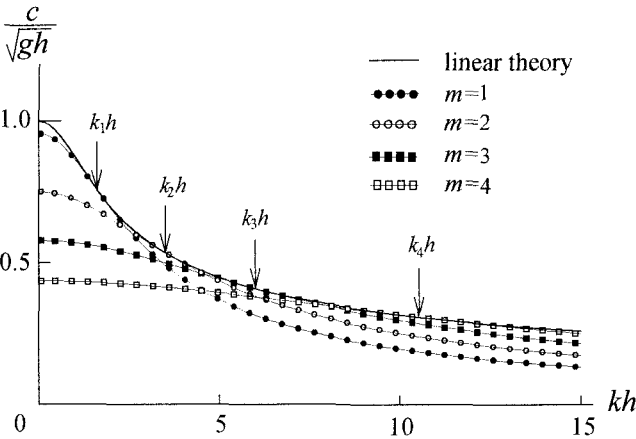


図-5 $N=1$ とした単一成分方程式の線形分散特性

ら、各ケースの分散曲線が、設定波数パラメータ $k_p h$ の点で理論分散曲線に接する形となっていることがわかる。強分散性波動方程式では、Galerkin法によってこれらの成分を組み合わせることで連成させることにより、図-4に見られるような広帯域にわたる良好な分散特性が実現されている。

5.5 単一成分 ($N=1$) 形式：非線形狭帯域波動方程式

図-5で示されているように、各成分単独での分散特性曲線が、それぞれの設定波数パラメータ k_p を中心とした波数領域で、理論分散曲線を精度良く近似できているということは、もし、対象とする波動場のスペクトル帯域が k_p の回りの狭帯域スペクトルであれば、強非線形・強分散性波動方程式(20), (21), あるいは弱非線形・強分散性波動方程式(25), (26)で、 $N=1$ すなわち単一成分形式とした波動方程式系によっても、十分精度良く波動場の時間発展を記述できることを意味している。そこで、ここでは、このような単一成分形式の方程式系^{注)}を「**非線形狭帯域波動方程式**」とよび、その特性について議論する。

例えば、弱非線形・強分散性波動方程式、式(25), (26)の単一成分形式（この場合は「**弱非線形狭帯域波動方程式**」で、式(20), (21)の単一成分形式は「**強非線形狭帯域波動方程式**」と呼ぶことになる）は、以下のように書ける。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{C_p^2}{g} + \eta \right) \mathbf{q}_0 \right] = 0 \quad (30)$$

$$C_p C_g \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial t} + C_p^2 \nabla \cdot \left[g \eta + \eta \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 + w_0^2) \right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{C_p(C_p - C_g)}{k_p^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{q}_0) + \nabla \left[\frac{C_p(C_p - C_g)}{k_p^2} (\nabla \cdot \mathbf{q}_0) \right] \right\} \quad (31)$$

ここで、 k_p は、 $N=1$ としたときの波数パラメータ (k_1) であり、 C_p と C_g は、 k_p から通常の線形理論によって計算される位相速度と群速度である。

上式は、この C_p と C_g に関して特定の表現形式を与えることによって、既存のいくつかの波動方程式をその特別な場合として含むことを示すことができる。例えば、Airyの浅水方程式とBoussinesq方程式は、以下のように導くことができる。

(1) Airyの浅水方程式： $C_p = C_g = \sqrt{gh}$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \mathbf{q}_0] = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(g \eta + \frac{1}{2} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 \right) = 0 \quad (33)$$

(2) Boussinesq方程式：

$$C_p = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k_p^2 h^2}{6} \right), \quad C_g = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k_p^2 h^2}{2} \right)$$

注) 単一成分の場合、未知数の数と方程式の数を整合させるという点だけで考えると、Galerkin法を用いる必要性はなくなる。しかしGalerkin法を用いずに、運動方程式をたんに水深積分して得られる式の分散特性は、図-5のように、理論的な分散曲線に対して接するように（したがって群速度も一致するように）はならず交差する形になる(Nakagawa, 1993)。これは、Galerkin法での運動方程式に鉛直依存性関数 $F_m(z)$ を掛けて水深積分する操作が、じつは、運動方程式に水平流速 u を掛けて水深積分する操作、すなわちエネルギー輸送方程式を得る操作になっていることに起因している。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \eta) \mathbf{q}_0] + \frac{h^3}{3} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{q}_0) = 0 \quad (34)$$

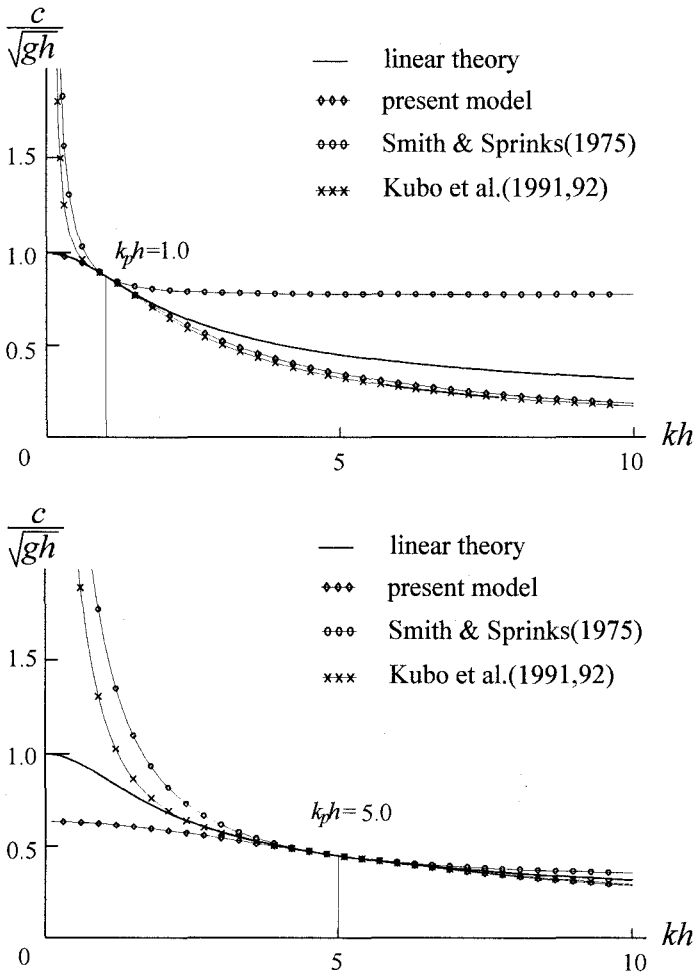
$$\frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial t} + \nabla \left(g \eta + \frac{1}{2} \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_0 \right) = 0 \quad (35)$$

ただし、簡単のため、ここでは高次項を全て省略し、一定水深の場合を扱っている。これは、Peregrine (1967) の $z=0$ での流速 $\mathbf{q}_0$ を用いて表した Boussinesq 方程式に他ならない。

5. 6 結合型単一成分形式：非線形緩勾配方程式

狭帯域非線形波動方程式を構成している式(30)と(31)を組み合わせると η のみの方程式に書き換え、さらに緩勾配近似を導入すると、次の式が得られる。

$$C_g \eta_{tt} - C_p^3 \nabla^2 \eta - \frac{(C_p - C_g)}{k_p^2} \nabla^2 \eta_{tt} - C_p \nabla (C_p C_g) \cdot (\nabla \eta) - \frac{3}{2} g C_p \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k_p^2 C_p^4}{g^2} \right) \nabla^2 (\eta^2) = 0 \quad (36)$$



図－6 単一成分方程式および非線形緩勾配方程式と既存の非定常緩勾配方程式の線形分散特性の比較

上式の線形化方程式

$$C_g \eta_t - C_p^3 \nabla^2 \eta - \frac{(C_p - C_g)}{k_p^2} \nabla^2 \eta_t - C_p \nabla (C_p C_g) \cdot (\nabla \eta) = 0 \quad (37)$$

は、さらに若干の式変形を行うと、Smith & Sprinks (1975)による非定常（あるいは狭帯域）緩勾配方程式

$$\eta_t + \omega_p^2 \left(\frac{C_p - C_g}{C_p} \right) \eta - \nabla (C_p C_g \nabla \eta) = 0, \quad (\omega_p = C_p k_p) \quad (38)$$

および、定常波動場であればBerkhoff (1972)のもともとの楕円型の緩勾配方程式（Zは波の振幅）

$$k_p^2 C_p C_g Z + \nabla \cdot (C_p C_g \nabla Z) = 0 \quad (39)$$

を導くことができる。したがって、式(36)は、既存の緩勾配方程式の非線形波動場への拡張版と見ることができ。その意味で、式(36)は、「**非線形緩勾配方程式**」と呼ぶことができる。

なお、線形波動場に対する既存の非定常緩勾配方程式としては、上記のSmith & Sprinks (1975)だけでなく、最近では、例えば、Kirby et al.(1991, 1992)や窪ら(1991)、Kubo et al.(1992)によるものがある。これらと、ここで示した非線形緩勾配方程式の線形化方程式(37)は、非定常（あるいは狭帯域）緩勾配方程式という意味では同類のものであるが、各々の分散特性は図-6に示されているように、互いにかなり異なる（Kirby et al.(1991, 1992)の分散特性はSmith & Sprinks (1975)と同じであるので示していない。また、式(37)の分散特性は先の単一成分方程式の分散特性と同じで式(29)で与えられる）。同図では、 $kph=1.0$ と 5.0 の二つのケースに対する比較結果を示している。これから、まず、本モデル以外のものは、 kh がゼロに近づくにつれて波速が急激に大きくなって発散する形になるうえ、特に $kph=1.0$ のケースでは kph の回りのごく狭い波数範囲しか理論的な分散曲線を近似できていないことがわかる。したがって、これらのモデルでは、狭帯域スペクトル場を扱うことが可能であるものの、狭帯域性の制約がより厳しくかかってくることになる。

5. 7 一方向非線形緩勾配方程式

非線形緩勾配方程式(36)は、波の進行方向に関して特に制約を設けていないが、いま例えばxの正の方向のみに波列が伝播する場合に限定して考えると、より一層の簡略化が可能となる。すなわち、ちょうどBoussinesq方程式からKdV式を導出する場合と同様の数式展開（例えば、Mei, 1983, p. 549）を式(36)に対して施せば、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} C_g \eta_t + \frac{1}{2} C_p (C_p + C_g) \eta_x - \frac{(C_p - C_g)}{k_p^2} \eta_{xxt} - \frac{C_p (C_p - C_g)}{2 k_p^2} \eta_{xxx} \\ + \frac{1}{2} \left[C_p (C_g)_x + (C_p - C_g) (C_p)_x \right] \eta + \frac{3}{4} g \left(3 - 2 \frac{C_g}{C_p} - \frac{k_p^2 C_p^4}{g^2} \right) \left(\eta^2 \right)_x = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

ここに、 $\omega_p = k_p C_p$

上式で、式中の C_p と C_g をいくつかの特別なケースに対する表現形式を与えることにより、先と同様に、既存のいくつかの波動方程式を得ることができる。例えば、長波近傍の弱分散性波動の場合、

$$C_p = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k_p^2 h^2}{6} \right), \quad C_g = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{k_p^2 h^2}{2} \right)$$

であるから、 $C_0 = \sqrt{gh}$ として、

$$\eta_t + C_0 \left[\eta_x + \frac{h_x}{4h} \eta + \frac{h^2}{6} \eta_{xxx} + \frac{3}{4h} \left(\eta^2 \right)_x \right] = 0 \quad (41)$$

を得る．これは、非一様水深の場合のKdV方程式に他ならない．

一方、深海波領域では、 $C_p = \sqrt{g/k_p}$ 、 $C_g = C_p/2$ 、であるから、これより、

$$\eta_t + \frac{3}{2} C_p \eta_x - \frac{1}{k_p^2} \eta_{xx} - \frac{C_p}{2k_p^2} \eta_{xxx} + \frac{3}{2} \frac{g}{C_p} \left(\eta^2 \right)_x = 0 \quad (42)$$

を得る．この式に対応する既存の波動方程式は存在しないが、この式は、式(36)と同様に、深海波領域における2次オーダーのStokes波解を解析解として持つことが確かめられている．

5. 8 多成分連成法に基づくその他の波動方程式と本波動理論との関係

以上述べてきた灘岡ら (1991, 1992, 1993a, 1993b, 1994) による波動モデル (以下「本モデル」と呼ぶ) は、従来の漸近法的な定式化に基づくBoussinesq-KdVタイプの波動方程式と異なり、多成分連成法による流速場表現に基づく全く新たな定式化によるものであるが、その後、本モデルのバリエーションと呼ぶべき方程式がいくつか提案されている (磯部, 1994a, 1994b; 後野, 1993, 1994)．そこで、ここで、これらの波動モデルと本波動モデルの位置づけを明確にしておくことにする．

先に述べたように、波動モデルの定式化の基本は、流速場の鉛直依存性の近似をどのようにするかということであって、本モデルの基礎となっている「多成分連成型の流速場表現」は、そのような本質的な要請から考えだされされたものである．そして、この多成分連成法に基づく新たな理論的な枠組みを構築したことが、本波動モデルを生み出す最大のポイントになっている．

その意味で、同じ多成分連成法に基づく磯部 (1994a, 1994b) のモデルは本モデルと実質的にほとんど同じものである、数学的な連成技法として本モデルで用いているGalerkin法ではなく変分原理を用いている点が異なるだけである注1)．(例えば、数学的連成手法として選点法を用いることも原理的に可能である．そうすると、バリエーションがもう一つ増えることになる．) また、後野 (1993, 1994) のものも、対象とする内部変量を流速ではなく圧力にとっていることに伴う見かけ上の違いはあるものの、基本的に本モデルと同じ多成分連成法の枠組みでの定式化によるものである．

もっとも、それぞれのモデルの基本的な枠組みは同じでも、数式展開形式の違いは多少とも具体的なモデルの使い勝手 (数値解析アルゴリズムなど) の違い等となって現れてくる．また、流速場の多成分連成近似として、具体的にどのような鉛直依存性関数系を採用するか、という点も実際上かなり重要になる．この点に関して、本モデルでは双曲線関数系を用いているのに対し、磯部 (1994a, 1994b) はべき乗式系を、また後野 (1993, 1994) はルジャンドル多項式系を用いている注2)．

本モデルで双曲線関数系を採用している理由はきわめて簡単である．そうすれば、さきの単一成分形式方程式系のところで具体的に示したように、狭帯域スペクトル場ないしは規則波の場合には多成分である必要はなく、わずか1成分で深海波から極浅海波にわたる任意の領域において、波動場を十分精度良く表現することが可能になるからである．また、広帯域スペクトル場であっても、通常、2ないし3の成分数で十分であることが確認さ

注1) 磯部は、自らの論文 (磯部, 1994a) の中で、われわれの波動モデルを「ガラーキン法」と名づけ、彼のものを「非線形緩勾配方程式」と称している．われわれの理論をたんに「ガラーキン法」と呼ぶことの不当性は、本論中に説明した内容で理解していただけたと思うが、もしそう呼ぶのであれば、彼自信のものも「変分原理法」とでも称するべきであろう．他の研究者の開発した理論に無断で名前を付けるのであれば、極めて慎重かつフェアでなければならない．

注2) 多成分連成法による流速場表現では、先にも述べたように、原理的には、対象とする流速場を良く近似し得る互いに独立な関数系であればなんでもよい．したがって、同じ多成分連成法に基づく磯部や後野の波動モデルでも、双曲線関数系を用いることは可能である．しかし、例えば、磯部の波動モデルで双曲線関数系を用いた場合、その線形化一成分バージョンとしてKirby et al. (1991, 1992) の非定常緩勾配方程式が得られるが、この方程式は、5. 6で示したように、本モデルによる緩勾配方程式(37)に比べて分散特性に難がある．

ている。ただし、以上の議論は、鉛直依存性関数として双曲線関数以外のものの使用を否定するものではない。局所的な水深急変部の表現など、場合によっては、さらに適当な関数系をつけ加えることも考えられる。しかし、そのような作業は、上記の多成分連成法の大きな枠組みの中での精度アップの議論にすぎない。

6. 数値解析例

6. 1 数値計算上の手順

ここで、本波動モデルによって具体的に数値計算を行う場合の手順について簡単に触れておく。多成分連成法に基づく本波動モデルでは、波数パラメータ k_m ($m=1,\dots,N$) (これはスペクトル法的表現での通常の「波数」ではないことに注意) を設定することが基本になる。ただし、具体的に設定するのは、 k_m ($m=1,\dots,N$)ではなく、対応する N 個の角周波数 ω_m ($m=1,\dots,N$)である。というのも、角周波数 ω_m ($m=1,\dots,N$)は不変量として扱えるのに対し、波数パラメータ k_m ($m=1,\dots,N$)は、分散関係式 $\omega_m^2 = gk_m \tanh k_m h$ のもとに、水深 $h(x,y)$ に対応して空間的に変化する量として扱う必要があるからである (図-7)。このことは、通常の不規則波計算において、入射波条件が波数スペクトルではなく周波数スペクトルで与えられることもうまく整合している。したがって、実際の不規則波の数値計算の手順としては、入射波条件として与えられる周波数スペクトルに対して、そのスペクトル範囲を十分カバーするように ω_m ($m=1,\dots,N$)を設定し、対応する波数パラメータ k_m ($m=1,\dots,N$)を各計算格子点で水深 $h(x,y)$ と分散関係式 $\omega_m^2 = gk_m \tanh k_m h$ によって算定することになる。

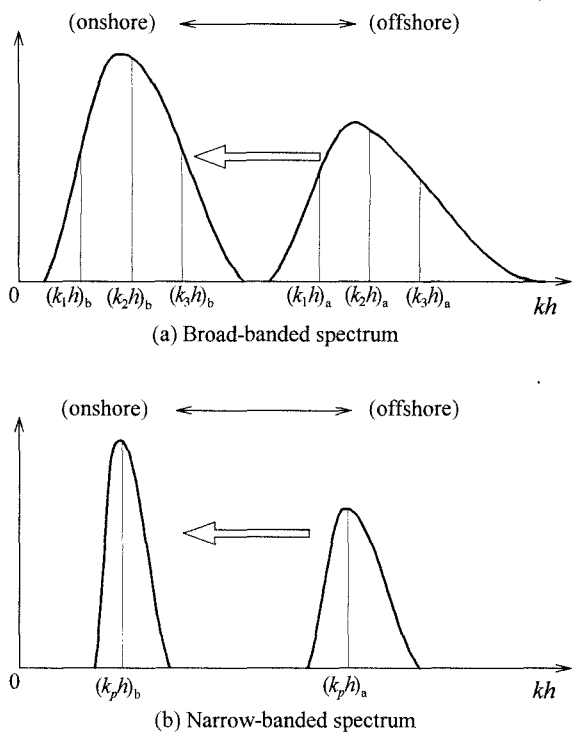


図-7 (a)広帯域スペクトルと(b)狭帯域スペクトルの不規則波の浅水変形に伴うスペクトル変形の概念図

このとき、成分数 N と周波数 ω_m ($m=1, \dots, N$)の値の設定の仕方を具体的にどのように行うかということが問題となる。まず、成分数 N については、これまでの著者等によるいくつかの計算例から、広帯域スペクトル波動場の場合でも、せいぜい $N=2\sim 3$ で十分であることが確認されている。もちろん狭帯域スペクトル場であれば、 $N=1$ とした単一成分形式のさまざまなバージョンの方程式を使うことができる。このとき、狭帯域性の判断は、基本的には、式(29)で示される単一成分方程式の線形分散曲線が k_p (あるいは ω_p)の回りで理論的な分散曲線を十分近似し得る範囲内に対象とするスペクトルのバンド幅が入っているかどうかを見ればよい。もちろん、非線形干渉等に基づくスペクトル変形によってスペクトルが広帯域化することが予想される場合には単一成分形式の方程式では不十分になる。

周波数 ω_m ($m=1, \dots, N$)の値は、基本的には、対象とするスペクトルの形と周波数帯域の広さを念頭において、どの周波数帯域での計算精度を必要とするかということを考慮して設定することになる。一つの目安として、スペクトル上のエネルギーの受け持ち割合を、なるべく互いに同じ程度になるように設定することが考えられる。ただし、これはあまり厳密な要請ではなく、 ω_m ($m=1, \dots, N$)の値の設定にはかなり自由度があると思ってよい。これまでの計算例から、 ω_m ($m=1, \dots, N$)の値の多少の変更は、計算結果にほとんど影響を与えないことがわかっている。また、図-7(b)のような狭帯域スペクトルであれば、ピーク周波数 ω_1 すなわち ω_p を設定すればよい。

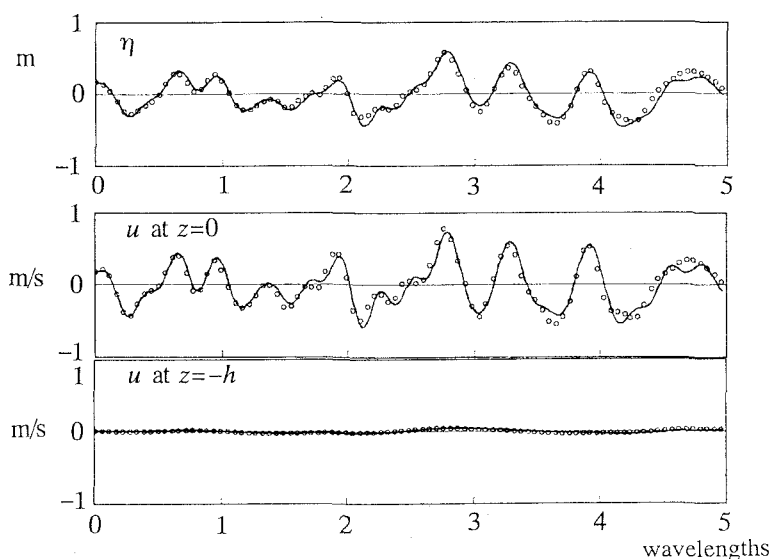
6. 2 数値解析アルゴリズム

本波動モデルにはさまざまなバージョンがあるが、このうちの単一成分形式である弱非線形狭帯域波動方程式(30), (31)は、通常のBoussinesq方程式と比べると、各項に掛かっている係数は異なっているものの、式形としては同じであるので、その数値解析にあたっては、Boussinesq方程式を対象とした既存のさまざまな効率的なアルゴリズムを用いることができる。新たな対処が必要となるのは、式(20), (21)あるいは式(25), (26)といった多成分形式の方程式系である。この場合には、方程式を差分化したときのマトリックスが、上記の弱非線形狭帯域波動方程式やBoussinesq方程式の場合のような三重対角ではなくブロック三重対角になる。このようなブロック三重対角の場合に有効な数値解法としては一般化Thomas法(例えば、Keller, 1974)があり、ここではそれに基づくアルゴリズムを構成している。その詳細については、紙面の都合から、いずれ別の機会に詳述したいと考えている。

6. 3 数値解析例

(1) 線形不規則波

数値解析例として、まず最初に、多成分連成法に基づく本波動モデルの基本的な妥当性を示すために、線形化した強分散性方程式によって深海波領域の広帯域線形不規則波浪場の数値シミュレーションを行った結果を示す。入射波条件としては、 $h/L_m=1$ (L_m は平均周期 T_m に対応する波長)のBretschneider型のスペクトルを与えている。成分数 N は3とし、 $k_m h$ ($m=1, \dots, N$)は、 $k_1 h=2\pi$, $k_2 h=3\pi$, $k_3 h=5\pi$ と設定している。格子間隔 Δx と時間ステップ Δt は、スペクトル成分として高波数成分が含まれていることを考慮して、それぞれ $L_m/90$, $\Delta t=T_m/90$ としている。図-8がその結果で、表面水位 η , $z=0$ と $z=-h$ での水平流速 u に関する計算値を理論値とともに示している。これから、表面水位だけでなく水平流速についても理論値とのかなり良好な一致が得られていることがわかる。特に、水平流速が $z=0$ と $z=-h$ の両方でかなり良い一致を示していることは注目すべき結果で、本波動理論の基礎となっている多成分連成法による流速場表現の基本的な妥当性を示すものである。なお、ここでは、計算領域端での透過条件として放射条件を用いているが、一般に広帯域不規則波の場合には、放射条件において設定すべき代表波速の決め方が問題となるのに対し、本モデルのような多成分形式であれば、 $k_m h$ ($m=1, \dots, N$)のそれぞれに応じた波速によって各成分を透過させられるので、広帯域不規則波の透過条件を設定しやすくなる、という大きな利点がある。実際、図-8の結果は計算開始後20周期後のものであるが、このことは、設定した透過条件が十分うまく機能していることを示すものである。

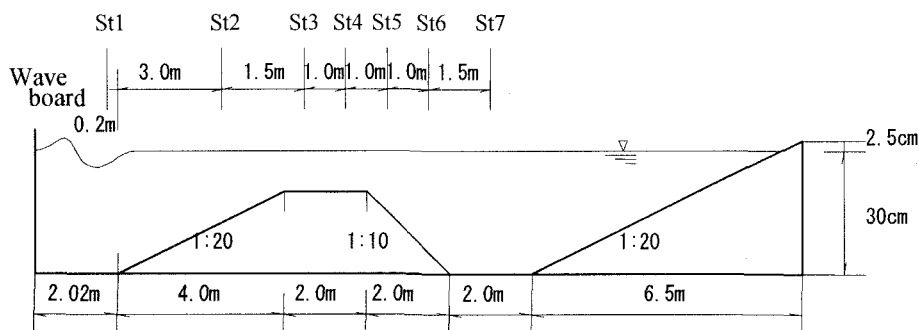


図－8 線形広帯域不規則波に関する計算結果(O)と理論値(—)との比較

(2) 浅瀬上を通過する非線形波列

つぎに、弱非線形・強分散性方程式(25),(26)によって、台形浅瀬上を通過する非線形規則波の変形を計算した結果(灘岡ら, 1994)を示す。対象としたのは、図－9に示すような台形浅瀬上を通過する規則波ないしは不規則波に関する実験である。この場合には、 $N=2$ とし、設定周波数パラメータとしては、 $\omega_1=2\pi/T$ 、 $\omega_2=4\pi/T$ としている。比較の対象とした実験データの入射波高 H と周期 T はそれぞれ2.0cmと1.5sで、この場合の相対水深 h/L は最大でも0.35である。

図－10(a)は図－9に示されている測点3,5と7での表面波形に関して、また図－10(b)は測点7での図中に示されている3つの深さでの水平流速波形に関して、本波動理論による計算値を実験値と比較して示したものである。これに対して、図－11(a),(b)は、同様の比較を、Madsen et al.(1991)の改良Boussinesq方程式による計算値に対して行った結果である。これから、まず、本波動理論による結果は、多少の位相差が現れているものの、表面波形と流速波形の両方で実験値との良好な一致が得られていることがわかる。一方、改良Boussinesq方程式による結果は、表面波形に関しては、本波動モデルによるものと比べて若干一致度が落ちる程度だが、流速場の計算精度はかなり悪くなっている。



図－9 台形浅瀬模型の概要と測定点配置

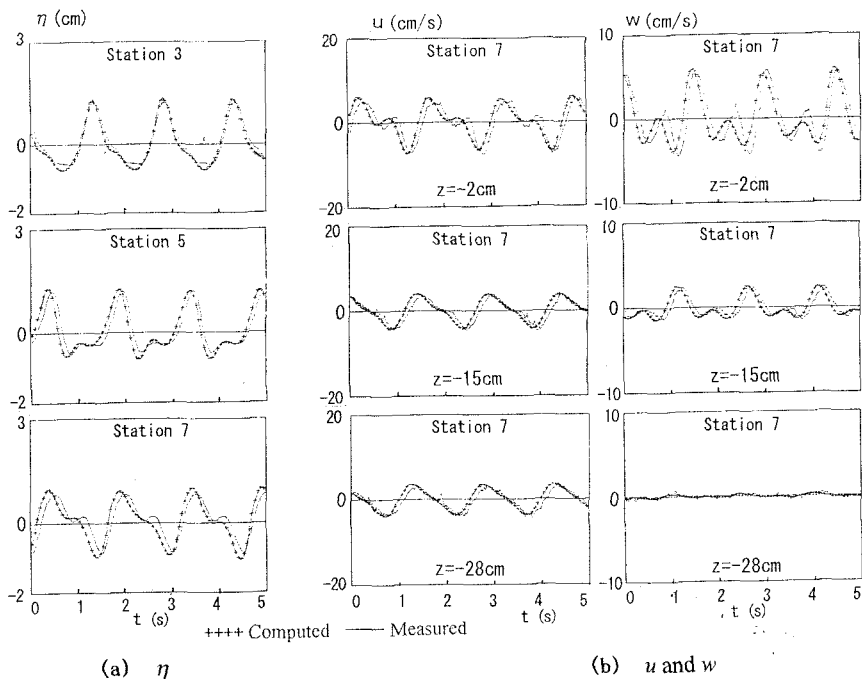


図-10 台形浅瀬上の非線形規則波に関する弱非線形・強分散性方程式による計算結果と実験値の比較

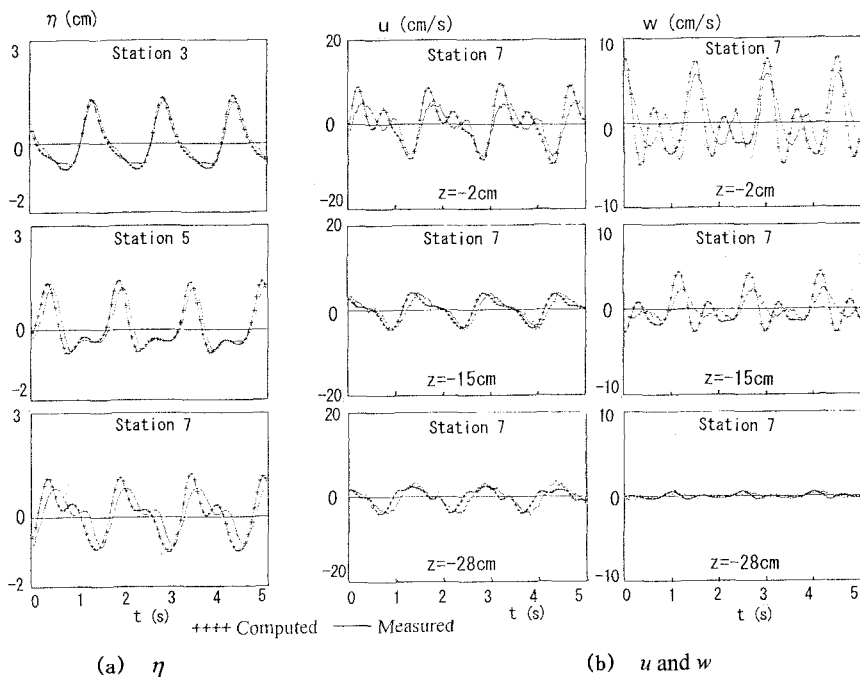


図-11 台形浅瀬上の非線形規則波に関する改良Boussinesq方程式による計算結果と実験値の比較

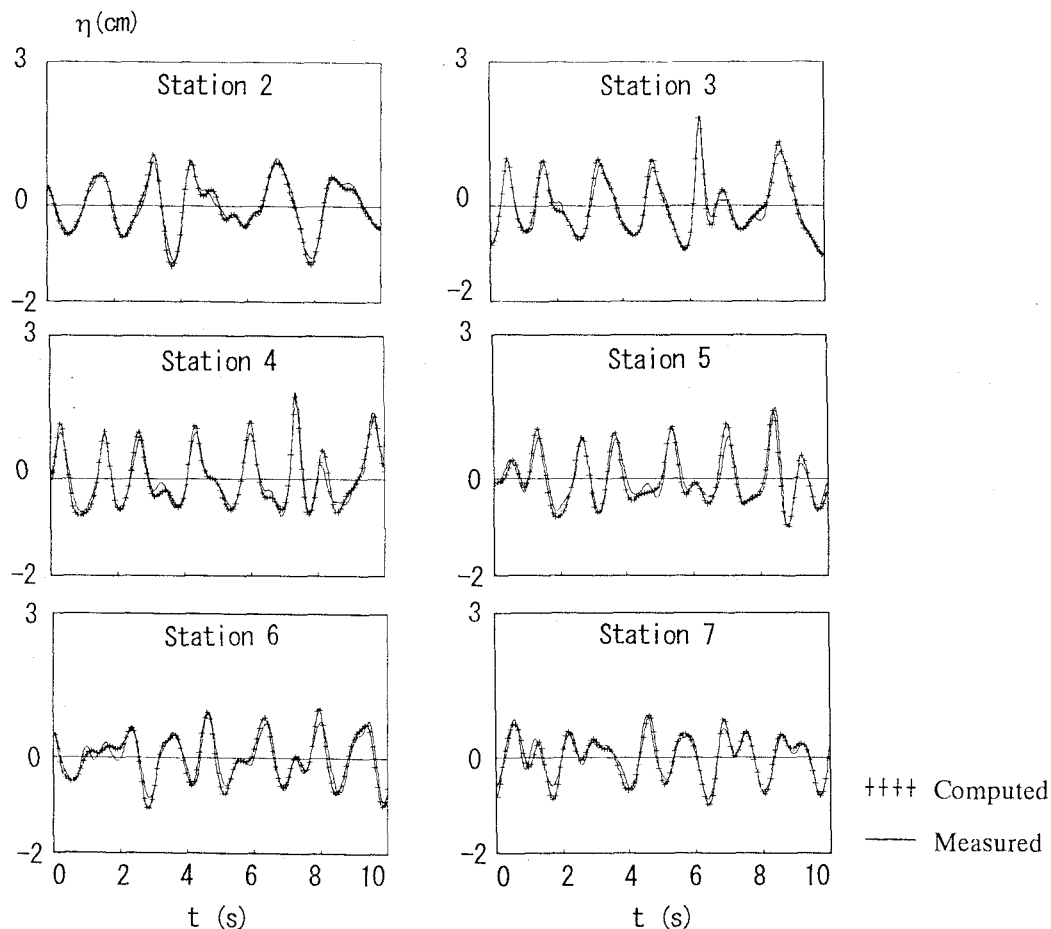


図-1 2 台形浅瀬上の非線形不規則波に関する弱非線形・強分散性波動方程式による計算結果と実験値の比較

上記のように、この計算条件では相対水深 h/L は最大でも 0.35 で、比較的浅い条件での計算であったこともあって、改良 Boussinesq 方程式は、表面波形については比較的良好な結果を与えている。しかし、先述したように、改良 Boussinesq 方程式では分散特性に関してはある程度の改良が行われているものの、流速や圧力といった内部変量に関しては特に改良が加えられているわけではない。このことが、比較的浅い条件での計算であるにもかかわらず、流速場についての精度がかなり低くなっていることの大きな原因であるものと考えられる。逆にいうと、このように、本波動理論による結果が流速場についてもかなり精度良く表現できるという点は、新しい流速場表現形式に基づく本波動理論の優位性を示す重要なポイントとなっている。

つぎに、非線形不規則波について、同様の台形浅瀬上での変形の計算を行った結果を示す。対象としたのは、Beji & Battjes (1994) の実験で、弱非線形・強分散性波動方程式 (25), (26) で成分数 2 として計算を行った。設定した波数パラメータ k_1, k_2 はそれぞれ $k_0, \pi k_0$ (k_0 はピーク周期 T_0 に対応する波数) である。入射波条件はピーク周期 $T_0=2s$ の JONSWAP スペクトルである。図-1 2 に、表面波形に関する実験データとの比較結果を示す。これから、各測点においてかなり良好な結果が得られていることがわかる。なお、 $N=1$ とした非線形緩勾配方程式 (36) による計算も行っているが、その場合でも、若干の精度低下は見られるものの、比較的良好な結果が得られることが確かめられている。

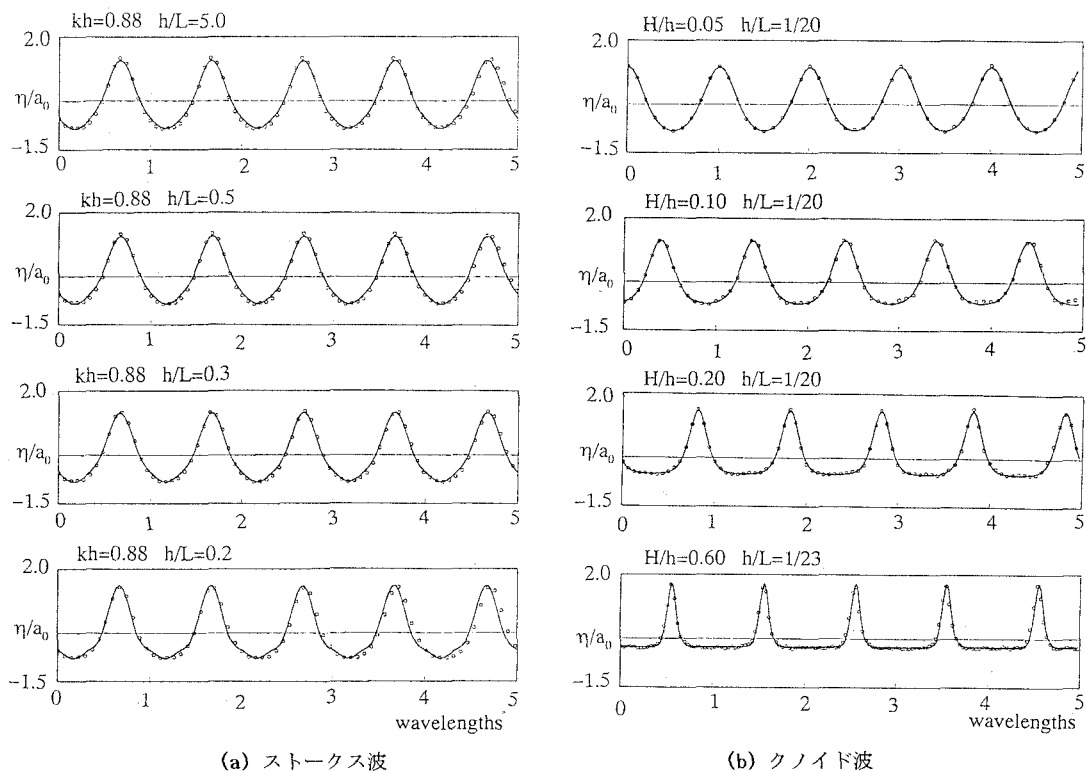


図-1.13 ストークス波とクノイド波に関する理論値(—)と一方向非線形緩勾配方程式による計算値(O)との比較

(3) ストークス波およびクノイド波

定形非線形波列の理論解であるストークス波とクノイド波に関する比較を行った。図-1.13に示す結果は、一方向非線形緩勾配方程式(40)によって計算した結果を、ストークス波とクノイド波の2次近似解と比較したもので、波浪条件は図中に示すとおりである。これからわかるように、最もシンプルなバージョンである一方向非線形緩勾配方程式によっても、 $h/L=0.05\sim 5.0$ といったかなり広い範囲で、理論値との良好な一致が得られていることがわかる。なお、定形非線形波列の理論解としては孤立波解も対象としており、やはり良好な一致が得られているが、ここでは省略する。

7. おわりに

ここでは、最近著者等によって開発された多成分連成法に基づく新しい波動モデルを中心に、最近新たな展開が見られる非線形分散性波動理論に関して解説した。最後に、特に若い読者のために、この波動理論の開発のいきさつについて少し紹介しておく。

この波動理論の基本的なアイデアを思いついたのは、1991年の正月前後のことであった。当時、Boussinesq方程式の適用範囲を深海波側まで広げて行こうとする試みが世界的な流行になっていたが、私の研究室では、何とか従来にない新しい波動方程式を開発していくことを考えていた。思いついたアイデアは、当時学部4年生で私の

研究室に所属していた中川康之君（現、運輸省港湾技術研究所水理研究室）の卒業論文にさっそく活かされ、まだ線形バージョンではあったが強分散性方程式の原形ができ上がった。しかも、この過程で、当初の予想とは異なり、ごくわずかの成分数で任意の不規則波浪場のもとでの流速場表現が可能であることが発見された。多成分連成法による流速場の表現技法の基本形の完成である。

しかし、その後の道のりは決して平坦ではなかった。自信満々で申し込んだその年の海岸工学講演会では不採択となり、やはりその年にABSTRACT申し込みのあったICCEでもrejectされた。そこでしかたなく、とりあえずこの成果を早く活字化するために、われわれの学科の研究報告（灘岡・中川，1991）で発表した。

翌年、土木学会の年次講演会でも発表した（灘岡・中川，1992）、このときの反応は随分手応えが違った。当時、土木学会海岸工学委員会の研究現況レビュー小委員会では海岸波動論に関する議論を頻繁に行っており、後から伝え聞いた話では（私は参加していなかった）、その中でBoussinesqタイプの既存の非線形分散性波動論の限界が議論され、新しいタイプの波動モデルの必要性が認識されつつあった。このような背景にあって、上記の年次講演会での発表内容は、少なからずインパクトを与えることができたようである。後野は、さっそくわれわれの示した多成分連成法のアイデアに則って、圧力方程式を基礎式とした定式化を行っている。そしてその後、磯部も、基本的にはわれわれの波動モデルと同じだが、具体的な多成分連成技法としてGalerkin法ではなく変分原理による定式化の結果を示している。

一方、われわれの研究は1992年以降も発展し、波動理論の非線形化（灘岡・中川，1993b）、波動理論の簡素化・さまざまな方程式系の導出・効率的な数値解析法の開発・室内実験による検証（灘岡ら，1994）、と進んでいった。この間、私が1991年にオランダ・デルフト工科大学のBattjes教授の研究室に半年滞在していたときに知り合ったDr. Beji（現、イスタンブール工科大学海洋工学科準教授）が鹿島学術振興財団の補助を得て来日し、われわれの研究に合流したことによって、研究のスピードが加速度的にアップした。現在は、さらに平面波動場への拡張（Beji・灘岡，1995）や、碎波モデルの組み込み、風応力や底面摩擦力の組み込み、等を行っており、理論のさまざまな応用を含めて、今後さらにいろいろな発展が期待できるものと考えている。

以上が、本波動理論の開発の経緯と現状である。現在では、われわれの波動理論は多くの方々の支持を得られるようになったが、理論開発の当初は、上述のように、必ずしも簡単に評価していただけるような状況ではなかった。そのころ私の胸中にあったのは、これまでとは全く違う波動理論をつくらうという意地であり、さらに、「必ずうまくいく」という理論開発の発展性に対する確信であった。その後、上述のように、理論の発展とともに、われわれの理論に類似した試みもいくつかなされるようになり、われわれの指向するところがかなり具体化してきたように思う。

波動理論開発にまつわるこのような裏話が、若い研究者や学生諸君にどの程度参考になるかはわからないが、できることならば、少しでも多くの若手研究者が、新しい枠組みを与えるような研究に果敢にチャレンジしていただきたいと願っている。

参 考 文 献

- 磯部雅彦(1994a)：非線形緩勾配方程式の提案，海岸工学論文集，第41巻，pp. 1-5。
磯部雅彦(1994b)：波浪解析のための波動方程式の比較研究，土木学会論文集，No. 479/Ⅱ-27，pp. 1-14。
大山 巧・灘岡和夫(1992)：潜堤を通過する非線形波列の分裂現象の解析，土木学会論文集，No. 452/Ⅱ-20，pp. 31-40。
窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃(1991)：非定常緩勾配不規則波動方程式について，海岸工学論文集，第38巻，pp. 46-47。
灘岡和夫・中川康之(1991)：Galerkin法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について，東京工業大学土木工学科研究報告，No. 44，pp. 63-75。
灘岡和夫・中川康之(1992)：Galerkin法に基づく強分散性波動方程式の基本特性に関する検討，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集Ⅱ，pp. 1024-1025。

- 灘岡和夫・中川康之(1993a)：不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討，土木学会論文集，No. 467/Ⅱ-23，pp. 83-92.
- 灘岡和夫・中川康之(1993b)：新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み，海岸工学論文集，第40巻，pp. 6-10.
- 灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史(1994)：新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確立と室内実験による検証，海岸工学論文集，第41巻，pp. 11-16.
- 後野正雄(1993)：緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性，海岸工学論文集，第40巻，pp. 21-25.
- 後野正雄(1994a)：非定常不規則波動場の解析手法，1994年度水工学に関する夏季研修会講義集，Bコース，土木学会，pp. B-8-1~B-8-20.
- 後野正雄(1994b)：強非線形不規則波動場に対する連成振動方程式とその基本特性，海岸工学論文集，第41巻，pp. 16-20.
- Beji, S・灘岡和夫(1995)：新たな非線形分散性波動モデルによる平面波浪場解析，海岸工学論文集，第42巻，(印刷中)
- Beji, S. and Battjes, J.A.(1994): Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar, Coastal Eng., Vol.23, pp.1-16.
- Berkhoff, J.C.W.(1972): Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.
- Byrne, R.J.(1969): Field occurrences of induced multiple gravity waves, J. Geophys. Res., Vol.74, pp.2590-2596.
- Fenton, J.D. and Rienecker, M.M.(1980): Accurate numerical solutions for nonlinear waves, Proc. 17th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.50-69.
- Keller, H.B.(1974): Accurate difference methods for two-point boundary-value problems, SIAM J. Numerical Analysis, Vol. 11, No.305.
- Kirby, J.T., and C.Rasmussen(1991): Numerical solutions for transient and nearly periodic waves in shallow water, Proc. ASCE, Engineering Mech. Specialty Conf., pp.328-332.
- Kirby, J.T., C. Lee and C. Rasmussen(1992): Time-dependent solutions of the mild-slope wave equation, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.391-404.
- Kubo, Y., Kotake, Y., Isobe, M. and Watanabe, A.(1992): Time-dependent mild slope equation for random waves, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.419-431.
- Madsen, P.A., Murray, R. and Sørensen, O.R.(1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp. 371-388.
- Mei, C.C.(1983): The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons, 740pp.
- Nadaoka, K. and Hino, H.(1984): Conformal mapping solution of a wave field on the arbitrary shaped sea bottom, Proc. 19th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, pp.1192-1208.
- Nadaoka, K. and Nakagawa Y.(1993a): Fully-dispersive wave equations derived by a Galerkin formulation, Meet'n '93, ASCE/ASME/SES Abstracts, p.724.
- Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y.(1994a): A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical simulations, Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng. (in printing)
- Nakagawa, Y.(1993): Development of an evolution equation for nonlinear water waves with full dispersivity, Master Thesis, Dept. of Civil Eng., Tokyo Inst. Tech.
- Nwogu, O.(1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.119, No.6, pp.618-638.
- Ohyama, T. and Nadaoka, K.(1994): Transformation of a nonlinear wave train passing over a submerged shelf without breaking, Coastal Eng., Vol.24, pp.1-22.
- Peregrine, D.H.(1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol.27, pp.815-827.
- Smith, R. and Sprinks, T.(1975): Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol.72, pp.373-384.
- Young, I.R.(1989): Wave transformation over coral reefs, J. Geophys. Res., Vol.94, pp.9779-9789.