

グリーンの公式を用いた波動場解析

Analysis of Wave Fields by use of Green's Formula

浜 中 建一郎

Ken-ichiro HAMANAKA

目次

- § 1 はじめに
- § 2 グリーンの公式と積分方程式
 - 2. 1 積分方程式とデルタ関数
 - 2. 2 ラプラス方程式の主要解
 - 2. 3 積分の離散化と境界要素法
 - 2. 4 主要解とグリーン関数
- § 3 主要解を用いた波動場解析
 - 3. 1 断面 2 次元問題
 - 3. 2 3 次元問題
 - 3. 3 解析例
- § 4 グリーン関数とグリーン関数を用いた波動場解析
 - 4. 1 波動場におけるグリーン関数
 - 4. 2 John のグリーン関数
 - 4. 3 修正グリーン関数
 - 4. 4 3 次元修正グリーン関数
 - 4. 5 グリーン関数を用いた波動場解析
 - 4. 6 解析例
- § 5 平面 2 次元波動場解析
 - 5. 1 平面 2 次元波動場と境界条件
 - 5. 2 ヘルムホルツ方程式とグリーンの公式
 - 5. 3 境界条件と問題点
 - 5. 4 Hamanaka による境界条件
 - 5. 5 開口部のポテンシャル
 - 5. 6 解析例
- § 6 放射条件
- § 7 まとめ
- 参考文献

§ 1 はじめに

本論はグリーンの公式を用いた波動場解析、特に境界要素法による数値解析の基礎を理解することを目的として、主として著者等がこれまで行ってきた研究を中心にまとめたものである。

扱う問題を問題の空間次元で分類すれば、断面 2 次元、平面 2 次元、3 次元であり、用いた特異関数で分類すれば主要解とグリーン関数である。しかしながら、記述する順序は形式的に上で挙げた分類の順にするよりは理解の容易さを考えて決めた。

§ 2 ではグリーンの公式、それから導かれる積分方程式さらにそれを導くために必要な主要解について述べる。ここでは「偏微分方程式とその応用」（犬井鉄郎：1977）による所が多い。本論では他の書物を読まずとも理解できるように努めたつもりであるが、必要に応じて参照してほしい。

§ 3 では主要解を用いた波動場解析について述べる。この方法は断面 2 次元問題では古くから用いられており、Ijima et al (1976) や Subbiah et al (1991) が挙げられる。又、境界の分割数と解の収束性を調べたものとして、折橋・浜中 (1993) がある。

3 次元問題の例としては、金戸等 (1994) が挙げられる。

§ 4 では波動場に対するグリーン関数について述べる。波動場に対するグリーン関数としては John (1950) のものが知られているが、扱いが容易な級数表示には収束性に問題があることが、Fenton (1978) や Isaacson (1982) によって指摘されている。それに対し、その収束性の問題を解決した修正グリーン関

数が Orihashi et al (1994) や、折橋等 (1994) によって提案されている。

本章では上に挙げた John のグリーン関数の導出方法とその収束性の問題について述べる。その後、修正グリーン関数について述べる。最後に、グリーン関数を用いた波動場解析について述べ、若干の解析例を挙げる。

§ 5 では平面 2 次元波動場の解析について述べる。始めにヘルムホルツ方程式とグリーンの公式について述べる。この問題は種々のタイプの境界に対し適切な境界条件を与えることが重要である。このことから次に従来方法である Isaacson et al (1990) や Chou et al (1993) による境界条件を述べ、その問題点を説明する。最後に Hamanaka (1995) による境界条件を述べその妥当性を示す結果を解析例として挙げる。

§ 6 では放射条件について本論で与えた条件の妥当性の検討とゾンマーフェルトの放射条件の問題点を述べる。

§ 2 グリーンの公式と積分方程式

2. 1 積分方程式とデルタ関数

閉曲線 S によって囲まれた領域 V 内で、2 階微分可能な関数 ϕ 、 G に対し、グリーンの定理により以下の式が成立する。

$$\int_V (\phi \Delta G - G \Delta \phi) dv = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2.1)$$

ここで、 Δ はラプラシアン、 $\partial/\partial \nu$ は領域内から外へ向かう S 上の法線微分を表す。

本文では、以下 (2.1) をグリーンの公式と呼ぶ。(2.1) はガウスの発散定理やストークスの定理と同様、領域内部の積分が境界表面の積分に置き換わる表現のひとつである。

これらの定理に関しては、偏微分方程式論やベクトル解析等の適当な書物を参照していただきたい。

始めに、本節で述べる結論を先に示す。

今、領域 V 内で ϕ がラプラス方程式の解で G が以下に示す方程式の解であるとする。すなわち、

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta G = \alpha \delta_p(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

ここで、 δ_p は P 点を特異点とするデルタ関数で、簡単のため一次元で表せば、適当な連続関数 f に対し、

$$\int f(x) \delta_p(x) dx = \int f(x) \delta(x - x_p) dx = f(x_p) \quad (2.4)$$

となる性質を持つ。

(2.2) と (2.3) を (2.1) の左辺に代入すれば、(2.4) から、

$$\alpha \phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) ds \quad (2.5)$$

が成立する。

(2.5) が本節で述べようとしている積分方程式である。

(2.5) はデルタ関数の性質を認めれば形式的には簡単に導けるが、問題は (2.3) の性質を持つ G が具体的にどのような関数形をし、又それをどのようにして見付けるかにある。

そのことを述べる前に (2.4) のデルタ関数について若干補足しておく。

一般に超関数としてのデルタ関数は (2.4) の性質を持つだけで良く、その関数形についての制約はない。しかしここでは、後の議論のためにディラック (Dirac) のデルタ関数として考える。すなわち、(2.4) の性質を持つと同時に以下性質を持つ。

$$\left. \begin{array}{ll} \delta_p \rightarrow \infty & \text{on } \mathbf{x} = \mathbf{x}_p \\ \delta_p = 0 & \text{on } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_p \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

デルタ関数に (2.6) の性質を与えた上で、(2.3) を再度見ると、関数 G は少なくとも、 P 点で特異性を有し、 P 点以外ではラプラス方程式の解となっていることが分かる。

2. 2 ラプラス方程式の主要解

次に前節の最後に述べた様な性質を持つ関数 G を導いてみよう。

今、ラプラス方程式を n 個の独立変数を持つ場合に一般化し、

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 G}{\partial x_n^2} = 0 \quad (2.7)$$

とする。

P点の座標を $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ として、任意の点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ からの距離 r を、

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2} \quad (2.8)$$

とする。

G を r だけの関数と考えたうえで、(2.7)を r を用いて書き直すと、

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{dG}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{dG}{dr} \frac{x_i - \xi_i}{r}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = \frac{d^2 G}{dr^2} \left(\frac{x_i - \xi_i}{r} \right)^2 + \frac{dG}{dr} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^3} \right\}$$

であるから、

$$\Delta G = \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{dG}{dr} = 0 \quad (2.9)$$

を得る。

これは簡単に積分出来て、

$$\frac{dG}{dr} r^{n-1} = \text{const} \quad (2.10)$$

従って、

$$G = \frac{c_1}{r^{n-2}} + c_2 \quad (2.11)$$

の一般解を得る。

特に3次元($n=3$)の場合は、

$$G = \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (2.12)$$

であり、2次元($n=2$)の場合は(2.10)に戻って考えると、

$$G = c_1 \log r + c_2 \quad (2.13)$$

となり、1次元($n=1$)の場合は(2.9)に戻って考えると、

$$G = c_1 r + c_2 \quad (2.14)$$

が得られることが分かる。

このような、方向に無関係に距離だけに依存し、特異性を有する解は主要解と呼ばれる。

(2.11)から(2.14)で表される解は確かに2.1節の最後に述べたP点での特異性を有しているが、積分方程式(2.5)を導くときに用いた性質(2.3)を有するかどうかはこれだけではまだ分からない。

次にそのことについて述べる。理解を容易にするために2次元で考える。3次元の場合も2次元の場

合とまったく同様に論ずることが出来る。

関数 $\phi = \phi(x, y)$ は、

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

の解であるとする。

関数 $G(x, y; \xi, \eta)$ としては(2.13)より

$$G = \log r, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.16)$$

とする。

x, y を独立変数、 ξ, η をパラメータとみなすと、 $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$ の時 G は発散するから点 (ξ, η) は G の特異点である。以下、点 (ξ, η) をP点と呼ぶ。

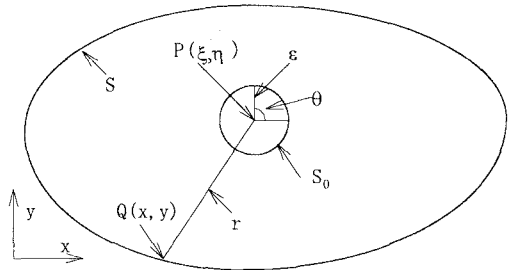


図1

ϕ と G に対し、(2.1)を適用することを考える。P点が領域Vの外にあれば、領域内では両関数ともラプラス方程式を満たし、(2.1)は右辺の境界上の積分が零となる。

P点が領域V内にあれば、P点上で G は微分を持たないので、そのままでは(2.1)に適用できない。そこで、図1のようにP点を中心とする半径 ϵ の小円で囲まれる領域を考えている領域から取り除いて考える。それを V_0 とする。また、小円を取り除いたことによって新たに出来る境界を S_0 とする。この領域 V_0 に対し(2.1)を適用する。今度は領域内に特異点はないから左辺は零となる。

さらに右辺の積分を実行する。境界面には、 S_0 が加わる。すなわち、

$$\int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds + \int_{S_0} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds = 0 \quad (2.17)$$

となる。ここで積分のための独立変数は x, y で図1

のQ点である。

次に (2.17) の S_0 上の積分を考える。 S_0 上では、

$$G = \log \varepsilon$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

である。また、 ϕ が十分滑らかで (2階微分可能の意味で)、 ε は十分小さいと考えると (あとで $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えるから)、 S_0 上の ϕ は P 上の $\phi(P)$ で近似し得る。

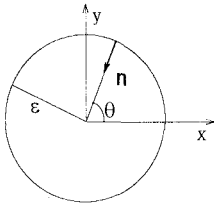


図2

ϕ の法線微分は、法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$$

とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} &= \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = (-\cos\theta, -\sin\theta) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \cos\theta - \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin\theta \end{aligned}$$

であるが、 ϕ の場合と同じ理由から S_0 上の法線微分

は P 上の微分で以下のように近似し得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\partial \phi(P)}{\partial x} \cos\theta - \frac{\partial \phi(P)}{\partial y} \sin\theta \quad \text{on } S_0$$

以上のことから (2.17) の S_0 上の積分は

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \right) ds &= \phi(P) \int_{S_0} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta \\ &+ \frac{\partial \phi(P)}{\partial x} \int_{S_0} (\cos\theta \log \varepsilon) \varepsilon d\theta + \frac{\partial \phi(P)}{\partial y} \int_{S_0} (\sin\theta \log \varepsilon) \varepsilon d\theta \end{aligned}$$

となるが、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$$

を考慮すると、上式の左辺の第2項、第3項は零となり、第1項だけが残る、

$$\int_{S_0} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \right) ds = -2\pi\phi(P)$$

となる。このことから (2.17) は、

$$2\pi\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \right) ds \quad (2.18)$$

となる。ここで小円の半径を $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると上式は近似ではなく厳密に成立する。

(2.18) は、(2.5) で $\alpha = 2\pi$ とした時と一致する。(2.18) と (2.1) を較べれば、関数 G は結果的に (2.3) の性質を持ったことが分かる。従って、少なくとも2次元では $\log r$ が積分方程式 (2.5) を導くための適当な特異性を持った特異関数であることが分かる。3次元の場合の (2.12) や1次元の場合の (2.14) も同様な性質を持つ特異関数であることが簡単に確かめられる。

なお、上で行った様に、特異点を含む領域で積分を実行する際、始め特異点を含む小領域を除いて積分し、そのあと小領域を零に近づけたときの積分の極限値を、求める積分値とすることを主値積分と呼ぶ。

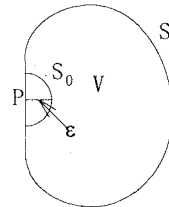


図3

P 点が境界 S 上にある場合は、 P 点を含む小半円の領域を除いて考えれば (図3)、

$$\pi\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} - G \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \right) ds \quad (2.19)$$

が導かれる。境界上のポテンシャルを未知数にして実際に問題を解くときには、この、(2.19) が使われ、一旦境界上のポテンシャルとその法線微分が知れたら領域内の任意の場所でのポテンシャルは (2.18) で求めることが出来る。

最後に3次元の主要解 (2.12) を

$$\left. \begin{aligned} G &= 1/r \\ r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

とした場合の積分方程式を結果だけ示す。その時、取り除く領域は特異点を中心とする小球である。

特異点 P が領域内部であれば、

$$4\pi\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (2.21)$$

特異点Pが境界上にあれば、

$$2\pi\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (2.22)$$

2. 3 積分の離散化と境界要素法

この節では、前節で述べた積分方程式を用いた数値解法である境界要素法の一般論を述べる。具体的な問題に関しては次章以降で述べられる。

今、簡単のため問題は2次元ラプラス方程式で支配されているとすると、(2.19)が成立する。主要解としては(2.16)を用いるとする。積分を離散化するために、境界を微小セグメントに分割し、それに通し番号を付ける。次に、各セグメント上の積分を考える。ここでは、最も簡単な近似、すなわち、セグメントの中央点での値で代表させた台形則を用いる。i番目のセグメント上のポテンシャルを ϕ_i とし、離散化した積分を添字jで表す。特異点Pをi番目のセグメントに位置させると(2.19)は、

$$\pi\phi_i = \sum_{j=1}^N (\bar{E}_{ij}\phi_j - E_{ij}\bar{\phi}_j) \quad (2.23)$$

ここで、 $\bar{\phi} = \partial\phi/\partial v$ を示し、 $\bar{E}_{ij}$ 、 E_{ij} は主要解Gによって決まり、j番目のセグメントの長さを ΔS_j とすると、

$$E_{ij} = \log r_{ij} \Delta S_j, \quad \bar{E}_{ij} = \left(\log \frac{\Delta S_i}{2} - 1 \right) \Delta S_i$$

$$\bar{E}_{ij} = \mathbf{n} \cdot \nabla (\log r_{ij}), \quad \bar{E}_{ii} = 0$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

なお、 E_{ij} および $\bar{E}_{ij}$ は特異点の位置しているセグメント上の積分で、主値積分を用いている。

(2.23)は積分方程式を離散化した一般形である。特定の問題を考えるときは、その問題に応じた境界条件が与えられる。一般に境界条件は未知数である ϕ と、その法線微分との関係式で与えられるから、それを(2.23)の右辺に代入することにより、 ϕ だけの線形代数方程式となる。最後にP点を順次移動させ、全てのセグメントに位置させると、未知数の数だけ方程式が得られ、それらを連立させて解くことにより境界上のポテンシャルが得られる。

2. 4 主要解とグリーン関数

前節までで、グリーンの公式に特異関数である主要解を適用することにより積分方程式が導かれることを述べた。この主要解は積分方程式を導くのに必要な適当な特異性を有しているというだけで、特定の問題に対する境界条件に関しては、なんら制約はなく、一般的には境界条件を満たさない。

これに対し、4章で述べるように、主要解と同じ特異性を有すると同時に、ある特定の問題に対する境界条件の一部を満たすような特異関数はグリーン関数と呼ばれる。

しかしながら、この呼び方には必ずしも統一性はなく、時には主要解とグリーン関数を合わせてグリーン関数と呼ぶこともあるようである。このことは、ある特異関数はある特定の問題に対しては境界条件を満たさず、単に主要解であるのに対し、別の問題に対しては、その境界条件の一部を満たすことがあることによるものと思われる。本文では、特に境界条件の一部を満たすことを強調する必要がある場合にはグリーン関数と呼ぶことにする。

§ 3 主要解を用いた波動場解析

3. 1 断面2次元問題

潜堤や水中トンネル、あるいはカーテンウォールのような奥行きのある構造物に波が直角に入射する場合は、波動場を断面2次元で考えても良いだろう。その時、波の反射、通過、構造物周りの流れ、構造物に働く力等を解析するのにグリーンの公式を用いた境界要素法がしばしば使われる。特に主要解を用いた方法は簡単で理解も容易であるから、グリーンの公式を用いた波動場解析の基礎を理解するには、この方法から始めると良いだろう。

始めに、波動場は時間的に周期的と仮定し、その角周波数を ω とすると、速度ポテンシャル $\hat{\Phi}$ は、

$$\hat{\Phi} = \text{Re} \left\{ \hat{\phi} e^{-i\omega t} \right\}$$

と表される。ここで、 Re は実部を表し、記号 $\wedge$ は有次元量を表す。

次に、全ての変数を角周波数 ω と重力加速度 g とで無次元化する。

$$\begin{aligned} (x, z) &= (\hat{x}, \hat{z}) \omega^2 / g, & t &= \omega \hat{t} \\ \phi &= \hat{\phi} \omega^3 / g^2 \dots & \text{etc.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

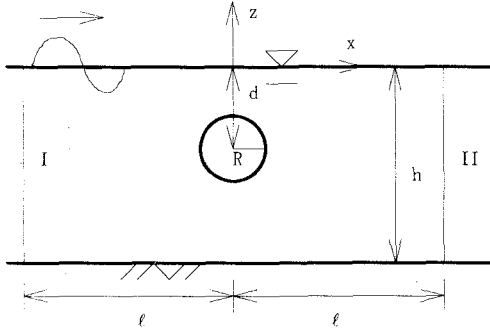


図 4

今、図 4 の様に水中に適当な構造物が水平に固定されているとすると、速度ポテンシャルに対する基礎方程式と境界条件は、水面での境界条件を線形化して、

$$\Delta \phi = 0 \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial \phi / \partial z &= \phi & \text{on } z &= 0 \\ \partial \phi / \partial z &= 0 & \text{on } z &= -h \\ \partial \phi / \partial v &= 0 & \text{on the surface of structure} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

と表される。

次に構造物から充分離れた位置に（構造物からの減衰定在波の影響が無視出来る程度）境界を設け、入反射側を境界 I、通過波側を境界 II とする。反射率、通過率を各々 a_r, a_t とすると、

境界 I ($x = -\ell$) では、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (e^{ikx} + a_r e^{-ikx}) A(z) \\ -\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial v} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -ik(e^{ikx} - a_r e^{-ikx}) A(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

境界 II ($x = \ell$) では、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= a_t e^{ikx} A(z) \\ -\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial v} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = ika_t e^{ikx} A(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ここで、

$$A(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}$$

で、 k は無次元波数で以下の無次元分散関係式を満たす。

$$k \tanh kh = 1 \quad (3.6)$$

(3.3)、(3.4)、(3.5) で与えられた境界条件を、離散化した積分方程式 (2.23) に適用する。水底及び構造物表面上では ϕ の法線微分は零であるから未知数は ϕ だけとなり、水面では (3.3) の第 1 式を代入することにより、未知数はやはり ϕ だけとなる。境界 I と II では、未知数は a_r と a_t であるが（数値）積分を実行すれば a_r と a_t に対する係数が得られる。特に、境界 I 上では入射波に関する項の積分は定数となり、方程式の定数項となる。又、特異点は底面、構造物表面、水面上では各セグメントに位置させるが、境界 I と II では各々の境界の適当なひとつのセグメントに位置させるだけでよい。この様にして未知数の数だけ方程式が得られ、解が得られる。

最後に、この方法は水深が一定でない場合も適用でき、その時水底での境界条件は (3.3) の第 2 式の変わりに、

$$\partial \phi / \partial v = 0 \quad \text{on } z = -h \quad (3.7)$$

となる。ただし、境界 I、II で与える波動解として、(3.4) や (3.5) の様な水平床の波動解を与える場合は、少なくとも境界 I、II の近傍では水深は一定である必要がある。しかし、境界 I、II で水底勾配を考慮した波動解を与えれば（例えば、Hamanaka 1983）、全域にわたって水深が変化しても良い。

一度境界上のポテンシャルが求めれば、ポテンシャル流れに対するベルヌーイの式から任意の位置での圧力が求まる。特に構造物上のポテンシャルから波力が求まる。

3. 2 3次元問題

単体構造物の回りの回折・散乱波動場の様な 3 次

元問題に対しては、主要解として(2.20)を、積分方程式として(2.22)を用いれば、断面2次元の場合と同様に解析を行うことが出来る。以下、3次元問題特有の留意点を述べる。

断面2次元の場合、構造物前後に入反射・通過境界として境界I、IIを考えた。3次元の場合は構造物から適当に離れていて、構造物を取り囲む様な鉛直壁状に境界を考える。ここではそれを遠方境界と呼ぶ。この遠方境界の平面形(遠方境界と水面又は底面の交線)は矩形や円形を含んだ任意の閉曲線で良いが、積分を離散化するために用いられる水面や底面上でのセグメントの形を考えれば、矩形を用いるのが簡便であろう。

次に遠方境界上で与える境界条件を考える。ここでは断面2次元の場合と同様に波動解を与える。一般に構造物の近傍では入射波としての平面波、構造物からの回折・散乱波としての円筒波、構造物近傍にトラップされる減衰定在波が存在する。このうち、回折・散乱波と減衰定在波は構造物から離れるに従って減衰するから、遠方境界を構造物から充分離して設定すれば、その境界上での波動場は入射波だけとなる。しかしながら、減衰定在波は数波長分離れるだけで無視し得る程度に減衰するに対し、回折・散乱波は、数10波長分離れてもおお構造物近傍での波高の数%の波高を持つ。水面・底面上の境界面の面積が増えるに従って、そこに配置する未知数の数が増えることの不利さを考えると、遠方境界は構造物から数波長分離れた位置に設定し、そこでは入射波と回折・散乱波を考慮すると良い。

回折・散乱波としては、水深方向に(3.5)と同じ分布関数を仮定すれば、水平方向には円周方向のFourier級数と半径方向の第1種Hankel関数との積で表され、その振幅が遠方境界上での未知数となる。

又、水深の変化に関しては、もし構造物近傍では水深が変化するが、遠方境界上では一定となる場合は上に述べた方法がそのまま使えるが、海域全体で水深が変化する場合は(遠方境界上で水深が一定とはならない)、入射波と回折・散乱波共に水深変化

を考慮した解を与えなければならない。

3. 3 解析例

解析例として3次元問題にたいする金戸等(1994)の計算結果を示す。矩形の没水平板が水中に水平に固定されている。減衰定在波が無視し得る程度に構造物から離れた位置に矩形の遠方境界を考える。そこでの波動場は入射波と適当な次数まで展開されたHankel関数で表される。

水面、底面および、構造物上のセグメントの上のポテンシャルとさらに各次数のHankel関数の振幅が未知数となる。特異点は水面、底面、構造物上の全てのセグメントと、遠方境界上の適当な位置に、Hankel関数の展開項数分だけほぼ等間隔に配置する。

図11は、全てを無次元で示せば、水深2.0波長6.1の入射波に対し、縦横4.0厚さ0.4の水平板を設置した場合の回折・散乱波の水面波形である。回折・散乱波は得られた結果から入射波を差し引いて求めたものである。

図中(a)には遠方境界の位置と構造物の大きさが示されている。(a)～(e)は没水深が深くなるにつれ、発生する回折・散乱波は弱くなっているのが分かる。又、ここでは省略するが、金戸等(1994)は水平板に働く波力の実験値との比較も行っており良好な結果が得られている。

§ 4 グリーン関数とグリーン関数を用いた波動場解析

4. 1 波動場におけるグリーン関数

2. 4 節で述べたように、グリーン関数は主要解と同じ特異性を持つと同時に、境界条件の少なくとも一部を満たす。その様なグリーン関数を特異関数として用いると、積分方程式 (2.19) や (2.22) での右辺の積分のうち、グリーン関数が境界条件を満たす境界上での積分は零となり、そこに未知数を配置する必要がなくなる。このことは未知数の数が多くなる 3 次元問題では圧倒的に有利である。

一般にグリーン関数を求めることはそれ程容易ではないが、波動場に対するグリーン関数としては、一様水深の海域における、水面と水底での境界条件と、構造物から充分離れた遠方境界での放射条件を満たすものとして John (1950) のものが良く知られている。

この John のグリーン関数には級数表示によるものと積分表示によるものがあるが、級数表示によるものが理解も容易で扱いも簡単である。しかしながら、この級数表示によるグリーン関数を用いた解析結果には収束性に難点があることを Fenton (1978) や Isaacson (1982) 等によって指摘されている。それに対し、Orihashi et al (1994)、折橋等 (1994) 等はこの収束性の問題がデルタ関数の扱い方によることを指摘し、その点を改良したグリーン関数として修正グリーン関数を提案した。

以下、4. 2 節で John のグリーン関数の級数表示の導出方法と、その収束性の問題がどこにあるのかを解説する。さらに、4. 3 節で修正グリーン関数について、4. 4 節で 3 次元修正グリーン関数について述べる。4. 5 節でグリーン関数を用いた波動場解析について述べ、4. 6 節で解析例を示す。

4. 2 John のグリーン関数

本節では、理解を容易にするために始めに断面 2

次元 (x, z) で考える。その後 3 次元への拡張について述べる。水深が一様である海域を考え、3. 1 節と同様、周期解を仮定し同じ無次元化を行うと、速度ポテンシャルに対する基礎方程式と境界条件は (3.2) と (3.3) で表される。

次に、グリーン関数としては水面と底面での境界条件と遠方境界での放射条件 (Radiation condition) を満たすものを考えると、基礎方程式と境界条件は、 (x_0, z_0) を特異点として、

$$\Delta G = -\delta(x - x_0, z - z_0) \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial G / \partial z &= G & \text{on } z &= 0 \\ \partial G / \partial z &= 0 & \text{on } z &= -h \\ \text{Radiation condition} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

となる。ここで、放射条件とは特異点から充分離れた位置では、 G は特異点から離れる方向に進む進行波の関数形となっていることを意味する。なお放射条件としてはゾンマーヘルトの放射条件式を与えることが多いが、それについては § 6 で述べる。

ここでは、構造物周辺で発生したどのような擾乱も、発生源から充分離れると進行波として構造物から離れていくこと、従って速度ポテンシャルの擾乱成分はそこでは進行波の関数形を持つことを仮定していることを意味する。断面 2 次元では、それは反射波と通過波であり、平面 2 次元や 3 次元では構造物から放射状に離れていく円筒波である。(4.2) の最後の条件はグリーン関数も同じ関数形を持つことを要請している。

次にグリーン関数の構成法を具体的に述べる。水面と底面の境界条件および放射条件を満たし、特異点 (x_0, z_0) を通る z 軸上を除きラプラス方程式を満たす解として、次のような関数達 (波動関数と呼ばれる) を考える。

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z+h) \\ F_n &= e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z+h) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ただし分散関係式として

$$k \tanh kh = 1, \quad k_n \tanh k_n h = -1 \quad (4.4)$$

これらの関数の級数和でグリーン関数を構成する。

$$G = C_0 e^{ik|x-x_0|} \cosh k(z+h) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n|x-x_0|} \cos k_n(z+h) \quad (4.5)$$

(4.5) で表されるグリーン関数に対する残された要請は特異点に於ける特異性である。このことを考えるために図5の様に $x = x_0$ を中心に微小幅 2ε の帯状領域を除いた領域を考える。

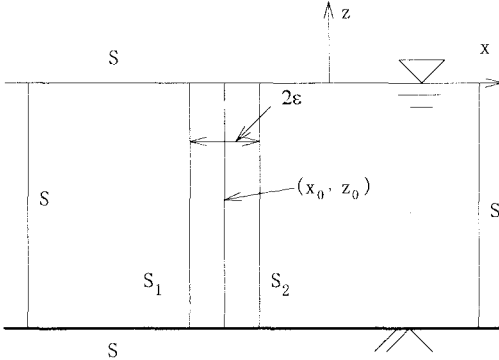


図5

この領域で (4.5) の G と速度ポテンシャル ϕ に対し、グリーンの公式 (2.1) を適用する。領域内では G も ϕ もラプラス方程式を満たすから左辺の領域内積分は消え、除いた領域によって新たに生じた境界 S_1, S_2 を考慮すると

$$\int_{S_1+S_2} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds = - \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (4.6)$$

と表される。

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限では G の対称性と ϕ の連続性から、境界 S_1 と S_2 上で同じ高さ z の位置では、 G と ϕ と $\partial G / \partial v$ は同じ値をとり、さらに

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|_{\text{on } S_1} = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial v} \right|_{\text{on } S_2} \quad (4.7)$$

である。よって (4.6) は

$$2 \int_{S_1} \phi \frac{\partial G}{\partial v} ds = - \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (4.8)$$

となる。

一方、(4.1) を形式的に (2.1) に適用すれば

$$\phi(x_0, z_0) = - \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (4.9)$$

となる。

(4.8) と (4.9) から

$$2 \int_{S_1} \phi \frac{\partial G}{\partial v} ds = \phi(x_0, z_0) \quad (4.10)$$

を満たさなければならない。これは $\partial G / \partial v$ が $x = x_0$ の z 軸に沿ってデルタ関数になることを要請する。

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2} \delta(z - z_0) \quad \text{on } S_1 \quad (4.11)$$

(4.11) の左辺に (4.5) を代入し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると、

$$\begin{aligned} & -ikC_0 \cosh k(z+h) + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos k_n(z+h) \\ & = \frac{1}{2} \delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。

(4.12) の両辺に $\cosh k(z+h)$ や $\cos k_n(z+h)$ を乗じ、 $-h \leq z \leq 0$ の範囲で積分すると、 $\cosh k(z+h)$ や $\cos k_n(z+h)$ の直交性と、(2.4) で表されるデルタ関数の性質から、 C_0, C_n が得られる。

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{i \cosh k(z_0+h)}{k h + \sinh^2 kh} \\ C_n &= \frac{1 \cos k_n(z_0+h)}{k_n h - \sin^2 k_n h} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

これはJohnのグリーン関数を無次元化したものと一致する。

以上の導出過程、特に (4.10) と (4.13) を導くときに使われたデルタ関数の性質は (2.4) だけである。このことはこのデルタ関数は超関数としてのデルタ関数であることを意味し、特異点以外の点での関数形には例えば (2.6) の様な制約は使われていない。この様なデルタ関数を級数展開によって近似した場合、展開項数を増加させるに従ってあらゆる点で関数値は発散することが知られている。例えば、以下のような周期デルタ関数をフーリエ級数で展開すると、

$$\left. \begin{aligned} \sum_n A_n e^{inx} &= \sum_m \delta(x - x_0 + 2\pi m) \\ A_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{2\pi} e^{-inx_0} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

となる。N個の級数和でデルタ関数を近似すると、

良く知られたフーリエ核となり

$$\delta_N(x) = \sum_{n=1}^N A_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\{(N+1/2)(x-x_0)\}}{\sin\{(x-x_0)/2\}} \quad (4.15)$$

となる。(2.15)は $N \rightarrow \infty$ とすると、すべての x で発散する。図6はその様子を示している。Johnのグリーン関数もこれと同じ発散性を有していると考えられ、実際次節で図示される。

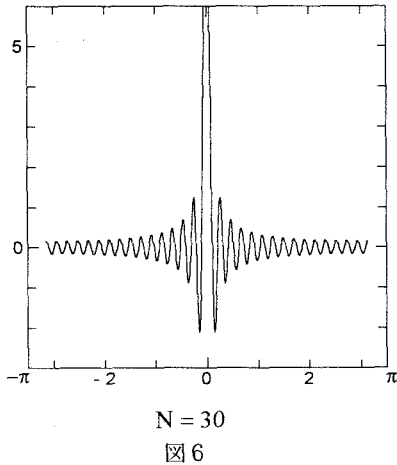
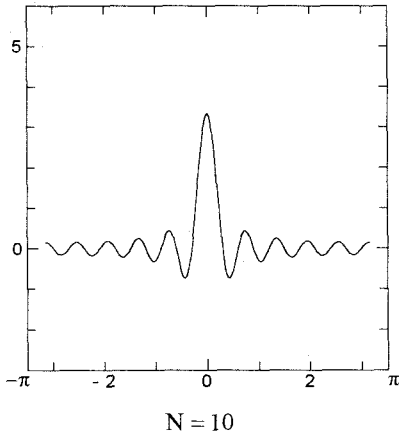


図6

この様な発散性を持ったデルタ関数であっても、問題を解く際に現れる積分が、もし完全に解析的に実行されるならば(2.4)の性質は維持されるから問題は生じない。しかし、離散化した数値積分を用いるときには病的な結果になることは容易に想像で

きる。境界要素法を用いると言うことは後者の場合である。

4.3 修正グリーン関数

前節で述べたデルタ関数の収束性の問題点を改善するために、デルタ関数として(2.4)に(2.6)を付加したディラックのデルタ関数を関数を採用する。さらに、ディラックのデルタ関数を以下の様な通常関数の極限で考える。

$$\delta(z-z_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(z-z_0) \quad (4.16)$$

$$\int_{z_0-a}^{z_0+a} \delta_a(z-z_0) dz = 1 \quad (4.17)$$

$$\delta_a(z-z_0) = 0 \quad \text{on } |z-z_0| > a \quad (4.18)$$

ここで近似関数 δ_a としては、矩形インパルス、三角インパルス、余弦インパルス等が考えられるが収束性の良い余弦インパルス(4.19)を採用することとする。

$$\delta_a = \frac{1}{2a} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi(z-z_0)}{a} \right\} \quad \text{on } |z-z_0| \leq a \quad (4.19)$$

このデルタ関数を用いてグリーン関数を構成するには、前節の(4.19)に於いて右辺の $\delta(z-z_0)$ を(4.19)の $\delta_a(z-z_0)$ とすればよい。以下前節同様の手続きで C_0, C_n を求めれば、(4.20)と(4.21)となる。

$$C_0 = \frac{i}{k} \frac{\cosh k(z_0+h)}{h + \sinh^2 kh} \frac{\sinh ak}{ak \{1 + (ak/\pi)^2\}} \quad (4.20)$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{k_n} \frac{\cos k_n(z_0+h)}{h - \sinh^2 k_n h} \frac{\sin ak_n}{ak_n \{1 - (ak_n/\pi)^2\}} & \text{on } ak_n \neq \pi \\ \frac{1}{2k_n} \frac{\cos k_n(z_0+h)}{h - \sin^2 k_n h} & \text{on } ak_n = \pi \end{cases} \quad (4.21)$$

なお、実際に境界要素法において、境界を離散化するにはインパルスの幅 $2a$ はセグメントの幅以下である必要がある。

図12は展開項数 $N=10$ と $N=30$ の時のJohnの

グリーン関数と修正グリーン関数の水平方向微分の比較を示す。前節で述べた様に、展開項数を増すと John のグリーン関数は大きな揺らぎが生ずるのに対し修正グリーン関数は与えたインパルスに収束している。展開項数をさらに増加させると修正グリーン関数はより良好に収束するが、John のグリーン関数はより強く発散し図示することは困難である。又、グリーン関数それ自体は John のグリーン関数も展開項数を増加させてもそれ程強い発散性は持たない。それに対し鉛直方向微分は水平方向微分と同様、 z 軸に沿って強い発散性を持つ。しかしながら鉛直方向微分を必要とするのは構造物の水平面であり、特異点から水平方向に離れると発散性は急激に減衰するからそれ程問題とはならないだろう。

従って John のグリーン関数を用いるときには、構造物が鉛直壁を持つ場合に大きな問題が生ずると考えられる。

4. 4 3次元修正グリーン関数

本節では前節で述べた修正グリーン関数を3次元に拡張する。グリーン関数に対する基礎方程式と境界条件は(4.2)を3次元に拡張し、 (x_0, y_0, z_0) を特異点として、

$$\Delta G = -\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \quad (4.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial G / \partial v &= G & \text{on } z=0 \\ \partial G / \partial v &= 0 & \text{on } z=-h \\ \text{Radiation condition} \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

となる。ここで Δ は3次元ラプラシアンで、放射条件は特異点から充分離れた位置ではグリーン関数は特異点から放射状に離れていく円筒波の関数形を持つものとする。

水面と底面での境界条件を満たす z 方向の関数形として

$$\left. \begin{aligned} A_0(z) &= \cosh k(z+h) \\ A_n(z) &= \cos k_n(z+h) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

を選び、以下のようにグリーン関数を級数表示する。

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n A_n \quad (4.26)$$

(4.26)をラプラス方程式に代入すると

$$\Delta_2 G_n \pm (k_n)^2 G_n = 0 \quad (4.27)$$

となる。ただし、 $\Delta_2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ で、複号 $n=0$ の時+、 $n \geq 1$ の時-をとる。

また、分散関数式は

$$k \tanh kh = 1, \quad k_n \tanh k_n h = -1$$

である。

(4.7)の解は $n=0$ の時、Bessel関数、Neumann関数、第1種と第2種Hankel関数、 $n \geq 1$ の時、第1種と第2種変形Bessel関数であるが、放射条件を満たす解として第1種Hankel関数と第2変形Bessel関数を選ぶ。ただし、円周方向には方向性を持たない0次のHankel関数及び0次の変形Bessel関数を用いる。

これらを用いると、(4.26)は

$$G = C_0 H_0^{(1)}(k_0 r) A_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n K(k_n r) A_n(z) \quad (4.28)$$

ただし、 $H_0^{(1)}$: 0次の第1種Hankel関数

K : 0次の第2種変形Bessel関数

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

次に、係数 C_0, C_n を決めるために G の特異性を考える。

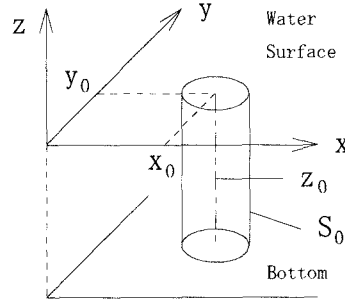


図7

グリーンの公式(2.1)を適用するために、図7のように特異点 (x_0, y_0, z_0) を通る z 軸を中心にした微小半径 ε の円柱領域を取り除いた領域で考える。

除いた領域によって新たに生じた境界を S_0 、それ以外の境界を S としてグリーンの公式を考えると、

$$\int_{s_0} (\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v}) ds + \int_s (\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v}) ds = 0 \quad (4.29)$$

ここで、用いたHankel関数と変形Bessel関数の対称性と速度ポテンシャルの連続性から、(4.29)の第1項の被積分関数のうち第2項は消え、

$$\int_{s_0} \phi \frac{\partial G}{\partial v} ds + \int_s (\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v}) ds = 0 \quad (4.30)$$

となる。

又、円柱上でのHankel関数と変形Bessel関数の法線微分は、ある z のもとで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} H_0^{(1)}(kr) &= -\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) = -i \frac{2}{\pi r} \\ \frac{\partial}{\partial v} K(k_n r) &= -\frac{\partial}{\partial r} K(k_n r) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

であるから、ある z のもとでの小円上の ϕ を一定とすると、

$$\int_{s_0} \phi \frac{\partial G}{\partial v} ds = \int_{-h}^0 \phi \left\{ -i4C_0 A_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi C_n A_n(z) \right\} dz \quad (4.31)$$

となる。

断面2次元の場合と同様の考えから、 G が (x_0, y_0, z_0) で特異性を有するという事は、(4.31)の右辺の $\{ \}$ がデルタ関数であることを要請する。ここでは修正グリーン関数を求めるためにデルタ関数としては、(4.16)～(4.19)と同じ全弦インパルスを採用する。従って、(4.12)に対応して

$$-i4C_0 A_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi C_n A_n(z) = \delta_z(z - z_0) \quad (4.32)$$

を得る。

(4.32)の両辺に A_0, A_n を掛けて、 $-h \leq z \leq 0$ で積分すれば、 A_0, A_n の直交性から C_0, C_n が求まり、

$$C_0 = \frac{i \cosh k(z_0 + h)}{2} \frac{\sinh ak}{h + \sinh^2 kh} \frac{1}{ak \left\{ 1 + (ak/\pi)^2 \right\}} \quad (4.33)$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{1 \cos k_n(z_0 + h)}{\pi h - \sin^2 k_n h} \frac{\sin ak_n}{ak_n \left\{ 1 - (ak_n/\pi)^2 \right\}} & \text{on } ak_n \neq \pi \\ \frac{1 \cos k_n(z_0 + h)}{2\pi h - \sin^2 k_n h} & \text{on } ak_n = \pi \end{cases} \quad (4.34)$$

となる。

この3次元修正グリーン関数も2次元修正グリーン関数と同様 John のグリーン関数の収束性の問題を克服していることが浜中・渡辺(1995)により示されている。

4. 5 グリーン関数を用いた波動場解析

グリーン関数を用いて波動場解析を行う方法は基本的には3. 1節や3. 2節で述べた主要解を用いた方法と同じであるが、積分を実行する境界に違いが現れる。この節では、グリーン関数を用いる場合の留意点を述べる。

4. 3節と4. 4節で求めたグリーン関数を用いると積分方程式は、特異点 P が領域内部にある時は、

$$-\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (4.35)$$

であり、特異点が境界面上にある時は、

$$-\frac{1}{2}\phi(P) = \int_s \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (4.36)$$

となる。なお、特異点 P の座標は断面2次元なら (x_0, y_0) 、3次元なら (x_0, y_0, z_0) である。

ϕ と G は(3.3)や(4.2)の第1式、第2式の水面と底面での境界条件を満たしているから、その上での(4.35)、(4.36)の積分は零となる。この場合 G は水平底の境界条件を満たしているから、問題は水深一定の場合に限られる。

次に遠方境界上の積分を考える。

断面2次元では、構造物から充分離れた位置で遠方境界を考えると、そこでのポテンシャルは入射波側では入射波と反射波、通過波側では通過波だけとなる。今、特異点を構造物上に置いて積分方程式(4.36)を考えれば、遠方境界上の積分において、反射波、通過波とグリーン関数による積分は両者とも放射条件を満たすから零となる。従って二つの遠方境界での積分には、入射波側での入射波とグリーン関数による積分だけが残る。この積分は、構造物のない入射波だけの波動場内の同じ位置に特異点を

置いた場合の積分方程式と同じであり、その積分は特異点の位置の入射波のポテンシャルを表すから、上に述べた遠方境界上の積分は特異点の位置の入射波のポテンシャルである。これは既知の量として定まるから、積分方程式を離散化した代数方程式 (2.23) における定数項となる。

以上のことから、グリーン関数を用いて波動場を解析する場合、代数方程式 (2.23) において必要な未知数は構造物表面のセグメント上のポテンシャルだけとなる。又、一度 (2.23) が解けると、任意の位置でのポテンシャルは積分方程式 (4.35) や (4.36) を用いて求めることが出来る。特に断面 2 次元問題では反射率・通過率を求める必要がある場合が多いが、構造物から充分離れた水面でのポテンシャルを求めれば得ることが出来る。しかしながら、遠方境界で予め反射波、通過波の波動解を考慮したポテンシャルを与え、反射率・通過率を未知数に加え、2つの遠方境界に1点ずつ特異点を配置して2本の代数方程式を加えると一度に解くことが出来る。

3次元の場合は、断面2次元の場合の反射波・通過波が回折・散乱波に変わるだけで全く同様に解くことが出来る。

4. 6 解析例

解析例として断面2次元問題の折橋等 (1995) の計算結果を示す。

図14と図15は図13に示す潜堤による波の反射率、通過率を求めたもので、図14は修正グリーン関数によるものと、ポテンシャル接続法との比較で、両解析は良く一致している。それに対し図15は John のグリーン関数によるもので構造物に鉛直壁があるため妥当な解は得られていない。

図17と図18は図16に示す没水形水平矩形構造物に対するグリーン関数の展開項数による解の収束の様子を示しており、図17の修正グリーン関数による結果は正常に収束しているのに対し、図18の John のグリーン関数による結果はやはり構造物が鉛直壁を持つために収束していない。

尚、図示は省略するが鉛直壁を持たない円形断面の構造物に対しては、John のグリーン関数でもこの様な病的な発散性は示さない。

§ 5 平面 2 次元波動場の解析

5. 1 平面 2 次元波動場と境界条件

港内静穏度解析の様な、水深が一定と仮定出来、岸壁や防波堤などの境界近傍での減衰定在波を無視し得る場合、鉛直方向に波動関数を仮定することにより、問題を平面 2 次元のヘルムホルツ方程式に帰着させることが出来る。

この問題も、グリーンの公式から積分方程式を導き、積分を離散化し、連立線形方程式に帰着させる境界要素法で解くことが出来る。

この場合、考慮すべき境界のタイプとしては、完全反射境界、開境界、入射境界、部分反射境界などがあげられるが、完全反射境界以外は、妥当な境界条件が与えられていない。例えば、Isaacson (1990) や、Chou (1993) の研究に見られる様に、開境界も含めた部分反射境界に対する境界条件としては、境界に対する直角入射の条件式が準用されてきた。しかしながら、この条件式では反射率が波の入射角に依存し、たとえある入射角に対して最適な条件 (係数) を与えたとしても、異なった方向から複数の波が入射する場合は使えない。

以上のことから、平面 2 次元波動場解析では、各種境界に対して妥当な境界条件を与えることが重要な問題となる。

本章では 5. 2 節で基礎方程式とそれに対するグリーンの公式および主要解について述べ、5. 3 節でこれまで用いられてきた境界条件とその問題点を述べ、5. 4 節でその問題点を克服した Hamanaka (1994) による各種境界条件について述べる。さらに 5. 5 節で開境界の境界条件式を用いて開口部のポテンシャルの簡単な表現が得られることを述べ、5. 6 節で計算例により境界条件の妥当性を検証する。

5. 2 ヘルムホルツ方程式とグリーンの公式

3章と同様、波動場は時間的に周期的と仮定し、その角周波数 ω と重力加速度 g とで全ての変数を無次元化すると、速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \text{Re}\{\bar{\phi}e^{-it}\} \quad (5.1)$$

で表され、3次元ラプラス方程式で支配される。水面($z=0$)と底面($z=-h$)での境界条件と共に、

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 \bar{\phi} / \partial x^2 + \partial^2 \bar{\phi} / \partial y^2 + \partial^2 \bar{\phi} / \partial z^2 &= 0 \\ \partial \bar{\phi} / \partial z &= \bar{\phi} \quad \text{on } z=0 \\ \partial \bar{\phi} / \partial z &= 0 \quad \text{on } z=-h \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

となる。さらに、

$$\bar{\phi} = \phi(x, y)Z(z), \quad Z(z) = \cosh k(z+h) \quad (5.3)$$

を用いて変数分離を行うと、

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (5.4)$$

の様にヘルムホルツ方程式が得られる。

ここで、 $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, $k \tanh kh = 1$ 。

これに対するグリーンの公式は、(2.1)を変形して以下ようになる。

$$\begin{aligned} \int_V \{ \phi(\Delta G + k^2 G) - G(\Delta \phi + k^2 \phi) \} dv \\ = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \end{aligned} \quad (5.5)$$

(5.5) から積分方程式を導くには G として0次の第1種 Hankel関数

$$H_0^{(1)}(kr), \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

を用いると、

特異点 $P = (x_0, y_0)$ が領域内では

$$4i\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (5.6)$$

特異点が境界上では、

$$2i\phi(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \quad (5.7)$$

となる。ここで第1種 Hankel関数はヘルムホルツ方程式の主要解である。積分方程式を導くためのヘルムホルツ方程式としては、他に第2種 Hankel関数や単に Neumann関数も考えられるが、第1種 Hankel関数は後に述べる遠方境界での放射条件を満たすという意味でグリーン関数ともなり得るので便利である。

5. 3 境界条件と問題点

(a) 完全反射境界

完全反射に対する条件は良く知られている様に境界での法線微分は零で

$$\partial \phi / \partial v = 0 \quad (5.8)$$

と与えられ、問題はない。

(b) 部分反射および開境界

Isaacson (1990) や Chou (1993) によれば、開境界も含めた部分反射境界条件としては

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = i\alpha k \phi \quad (5.9)$$

として与えられている。ここで α は反射率に関する係数である。

(5.9) を検討してみる。入射波、反射波のポテンシャルを各々 ϕ_I 、 ϕ_R として

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_I + \phi_R \\ \phi_I &= e^{i(k_x x + k_y y)} \\ \phi_R &= a_R e^{i(k_x x + k_y y + \delta)} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

ここで、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトルで、 $|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2$

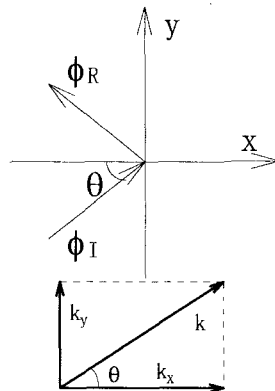


図8

(5.10) を (5.9) に代入して、境界が $x=0$ にあるとして整理すれば

$$a_R e^{i\delta} = \frac{k_x - \alpha k}{k_x + \alpha k}$$

θ を入射角として $k_x = k \cos \theta$ とすると

$$a_R e^{i\delta} = \frac{\cos \theta - \alpha}{\cos \theta + \alpha} \quad (5.11)$$

(5.11) は、ある係数 α のもとで境界条件を (5.9) で与えると、反射波の振幅 a_R や位相 δ は入射波

の入射角によって変化することを意味する。

簡単のため反射率 (K_R) で考えれば

$$K_R = |a_R e^{i\theta}| = \left| \frac{\cos\theta - \alpha}{\cos\theta + \alpha} \right| \quad (5.12)$$

例えば、直角入射 ($\theta=0$) の波に対し無反射 ($K_R=0$) とするには $\alpha=1$ とすれば良い。しかし $\theta \neq 0$ の波に対しては K_R は図9のようになり、入射角が浅く、波向が境界に平行に近づくにつれて反射率は1に近づく。

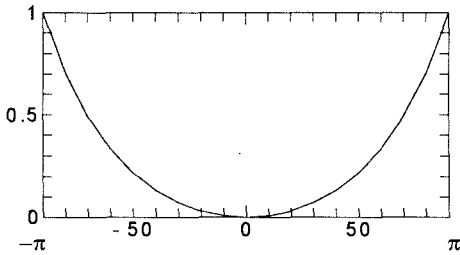


図9 K_R ($\alpha=1$)

以上のように (5.9) の境界条件では妥当な解は得られない。

5. 4 Hamanaka による境界条件

(a) 開境界

波が領域内から外に境界を自由に通過し再び戻ってこない場合、その境界を開境界と呼ぶ。

開境界に対する境界条件を与えるために、図10のように開境界BCの外側に半無限領域を考え、外領域(outer region)と呼ぶ。それに対し問題としている領域を内領域(inner region)と呼ぶ。

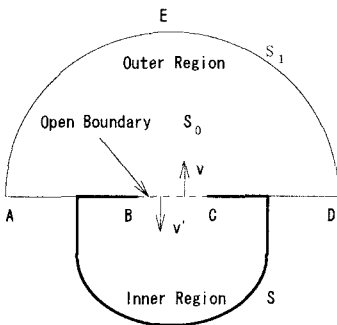


図10 開境界概念図

外領域に対し開境界から充分遠方に半円状に境界をとり、外領域は S_0 と S_1 で、内領域は S_0 と S とで囲まれているとする。

今、(5.7) 式をこの外領域に適用する。特異関数としては (5.13) 式の第1種ハンケル関数を用いる。

$$G = H_0^{(1)}(kr), \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (5.13)$$

特異点 P を開境界上の (x_0, y_0) に位置させると、

(5.7) 式は以下ようになる。

$$2i\phi(P) = \int_{S_0+S_1} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v'} - G \frac{\partial \phi}{\partial v'} \right) ds \quad (5.14)$$

ただし、 v' は外領域から外側への法線ベクトルである。

特異点 P は直線 AD 上にあるから、

$$\partial G / \partial v' = 0 \quad \text{on } AD$$

$$\partial \phi / \partial v' = 0 \quad \text{on } AB \text{ and } CD$$

である。

さらに関数 G とポテンシャル ϕ は遠方境界 AED で放射条件を満たすとして、(5.14) 式の積分領域は開境界上だけとなり、

$$2i\phi(P) = \int_{S_0} -G \frac{\partial \phi}{\partial v'} ds = \int_{S_0} G \frac{\partial \phi}{\partial v} ds \quad (5.15)$$

となる。

この (5.15) 式が内領域の開境界に対する境界条件となる。この境界条件は開境界を通過する波の波長や波向き、及び通過する波の数に依存しないばかりでなく平面波でも円筒波でも成立する。

又、開境界の両側の境界が開境界と直線上にない場合は、仮想的に直線上にあると考えて外領域を考えれば (5.15) が成立する。

(b) 入射境界

領域内に入射する波の条件を与える境界を入射境界と呼ぶ。一般に入射した波は領域内の他の境界や構造物で反射しその一部は再びこの入射境界に戻ってき、自由に外に通過しなければならない。その意味で、この波に対し開境界条件(5.15) 式が適用される。

(c) 部分反射境界

消波岸壁等の消波構造物は波のエネルギーの一部を反射させる。そのような境界を部分反射境界と呼ぶ。

部分反射境界に対する境界条件を導くために図10と同様、境界の外側に外領域を考える。領域内からこの境界に近づく波のポテンシャルを ϕ_T 、そこから部分反射するそれを ϕ_R とする。境界上のポテンシャル ϕ はその二つで表される。

$$\phi = \phi_T + \phi_R, \quad \partial\phi/\partial v = \partial\phi_T/\partial v + \partial\phi_R/\partial v \quad (5.16)$$

部分反射の条件に対する基本的考えは、この ϕ_T に対し開境界条件(5.15)式を適用すると同時に、反射率により ϕ_T に関係つけられた ϕ_R を与えることである。

今、仮に完全反射するとすると、

$$\phi_R = \phi_T, \quad \partial\phi_R/\partial v = -\partial\phi_T/\partial v$$

であるから、反射率Rの場合は

$$\phi_R = R\phi_T, \quad \partial\phi_R/\partial v = -R\partial\phi_T/\partial v \quad (5.17)$$

である。従って、

$$\phi_T = \phi/(1+R) \quad (5.18)$$

$$\partial\phi_T/\partial v = (\partial\phi/\partial v)/(1-R) \quad (5.19)$$

が成立する。

(5.18)式と(5.19)式を(5.15)式に適用すると、境界上のポテンシャルに対し

$$\frac{2i}{1+R}\phi(P) = \int_{S_0} \frac{G}{1-R} \frac{\partial\phi}{\partial v} ds \quad (5.20)$$

が得られる。

これが部分反射境界条件である。ここで S_0 は部分反射境界を表す。

尚、(5.20)に於いて無反射 $R=0$ とした場合は(5.15)と一致し開境界条件となる。

5.5 開口部上のポテンシャル

この節では開口部上のポテンシャルとその法線微分を開境界条件を適用することにより簡単な表現が得られることを示す。

始めに図10の様に一つの開口部を持った領域を考える。特異点を開口部に位置させ、(5.7)式を適用させると、

$$2i\phi(P) = \int_{S_0} \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) ds + \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) ds \quad (5.21)$$

右辺第2項を、 $I_S(P)$ で表し

$$I_S(P) = \int_S \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial\phi}{\partial v} \right) ds \quad (5.22)$$

とし、 S_0 上で $\partial G/\partial v = 0$ であることを考慮すると、

$$2i\phi(P) = - \int_{S_0} G \frac{\partial\phi}{\partial v} ds + I_S(P) \quad (5.23)$$

となる。

今開口部に開境界条件(5.15)式を適用し(5.23)式に加えると、以下の簡単な表現が得られる。

$$4i\phi(P) = I_S(P) \quad (5.24)$$

(5.24)式は開口部のポテンシャルは境界S上の積分だけで表されることを意味する。

次に簡単な場合を例にとり $I_S(P)$ を具体的に考える。図10の内領域を外領域と同様半無限領域とする。すなわち無限領域が、直線上にある開口部と二つの直線壁により二つに仕切られている。今内領域にも開口部から充分遠方に半円状の境界を考えると、(5.22)式の積分境界Sは直線壁と遠方境界となる。

直線壁上では

$$\partial\phi/\partial v = \partial G/\partial v = 0$$

であるから、(5.22)式は遠方境界上の積分だけで決まる。

一方内領域で境界に近づく波は直線壁で完全反射するがその一部は開口部を通して外領域で回折波をつくる。この開口部で反射しないことは内領域の入反射波波動場に影響を与えるが、その影響は回折波と同様の性質を持つことが期待されることからここでは負の回折波と呼ぶ。

この負の回折波は通常回折波と同様、遠方境界で放射条件を満たすと考えられるから(5.22)式の積分には寄与しない。従ってこの場合、 $I_S(P)$ は遠方境界上での入射波と完全反射波だけで決定される。すなわち、 $I_S(P)$ は開口部がない場合と同じ値をとることとなり(5.21)式あるいは(5.23)式で右辺第1項を無視した時と同じである。この時、(5.21)式、又は(5.23)の左辺の $\phi(P)$ は完全反射

波動場の壁面上のポテンシャルとなりそれによって $I_s(P)$ は決まる。

今、入射波 ϕ_i と反射波を ϕ_R を

$$\phi_i = e^{i(lx + my)}, \quad \phi_R = e^{i(lx - my)} \quad (5.25)$$

$$k = (l, m)$$

とすると、

反射壁上 $P(x_0, 0)$ でポテンシャルは

$$\phi(P) = \phi_i(P) + \phi_R(P) = 2e^{ikx_0} \quad (5.26)$$

となり、(5.21)式、又は(5.23)式から

$$I_s(P) = 4ie^{ikx_0} \quad (5.27)$$

となる。

従って開口部がある場合の開口部のポテンシャルは (5.24) 式から

$$\phi(P) = e^{ikx_0} \quad (5.28)$$

となり、開口部のポテンシャルは入射波のそれと一致する。

一方、開口部のポテンシャルの法線微分は入射波のそれと一致する保証はないから開境界条件 (5.15) 式により決定されなければならない。

5. 6 解析例

平面 2 次元問題は与える各種境界条件の妥当性に大きく依存している。特にこの章で述べた入射境界と部分反射境界の妥当性は、(5.15) で与えた閉境界条件の妥当性に依存している。

ここでは Hamanaka (1995) による計算結果を示す。

図 19 は開口部から入射した波が半無限領域で作る回折波を示す。開口部のポテンシャルとその法線微分は 5. 5 節で述べた方法で求めた。(a) は実部で (b) は虚部を示す。

次に図 19 の 3 本の破線で示した位置に開境界条件を与え同じ入射波の条件のもとで求めた結果が図 20 である。比較を容易にするため図 20 と同じ領域を切り取ったのが図 21 である。図 20 と図 21 は良好な一致を示しており開境界条件 (5.15) が妥当であることを示している。又、図示は省略するが、部分反射についても妥当な結果が得られている。

§ 6 放射条件

本章では、4. 2 節でふれた放射条件について述べる。4. 5 節や 5. 4 節では遠方境界でポテンシャル ϕ も特異関数 G も放射条件を満たすから、グリーン関数の公式における、その境界上の積分は零となるとした。そのことがグリーン関数の適用を容易にしている。

一方、4. 1 節では放射条件として ϕ は構造物から、 G は構造物上に置いた特異点から水平方向に充分離れると、離れる方向に進む進行波の波動解と同じ関数形を持つとした。

始めに上で与えた放射条件により境界上の積分が零になることを確かめる。

断面 2 次では、遠方境界を構造物から充分離れた位置で考えれば、減衰定常波 (グリーン関数(4.5)では第 2 項目以降) は無視出来、入射波側での反射波のポテンシャルと、特異点を構造物上に置いたグリーン関数は係数を除き共に

$$e^{-ikx} \cosh k(z+h) \quad (6.1)$$

の関数形となり

$$\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0$$

となるから積分は零となる。

通過波側では通過波のポテンシャルとグリーン関数は共に

$$e^{ikx} \cosh k(z+h) \quad (6.2)$$

に関数形となるから同様に積分は零となる。

3 次元の場合も遠方境界を構造物から、離れた位置で考えると、そこでは減衰定常波は無視でき回折・散乱波は放射状に広がる円筒波だけとなる。従ってそこでのポテンシャルは構造物の上の適当な水面に原点を置きそこからの水平距離を r とすると

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \cosh k(z+h) \quad (6.3)$$

となる。ここで $H_n^{(1)}$ は第 1 種 Hankel 関数である。

一方、特異点 (x_0, y_0, z_0) を構造物上に置いたグリーン関数 (4.28) は遠方境界で係数を除き

$$G = H_0^{(1)}(kr') \cosh k(z+h) \quad (6.4)$$

の関数形となる。

ここで

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r' = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_0)^2}$$

さらに、 r と r' は充分大きいことから (6.3) と (6.4) は

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp \left\{ i \left(k r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} e^{in\theta} \times \cosh k(z+h) \quad (6.5)$$

$$G = \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}} \exp \left\{ i \left(k r' - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \cosh k(z+h) \quad (6.6)$$

となる。

以上を用いて遠方境界上の回折・散乱波とグリーン関数とによる積分 (4.35), (4.36) を考えると、水深方向の積分は有限であることと、遠方境界が原点から離れるに従って $r' \rightarrow r$ であることから積分は零になる。このことが、4.2節で述べた様な意味で放射条件を与えた理由である。

次にゾンマーフェルトの放射条件を考える。理論物理学講座 (ゾンマーフェルト: 1971) によれば、解の一意性を与える条件のひとつとして放射条件が与えられ、水面波に対する断面 2 次元問題では

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (6.7)$$

3 次元問題では

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (6.8)$$

ここで r は擾乱源からの水平距離で、 u は ϕ 又は G である。

これ等の条件から、今問題にしている遠方境界上の積分が零となるのかを考える。断面 2 次元問題では (6.7) により確かに零となるが、3 次元問題では (6.8) だけで積分が零となるとは思えない。例えば遠方境界として原点を中心とする円周状にとると

そこでの積分は、

$$\begin{aligned} & \int \left(\phi \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) ds \\ &= \int dz \int \left(\phi \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) r d\theta \\ &= \int dz \int \left\{ \sqrt{r} \phi \sqrt{r} \left(\frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{r} G \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) \right\} d\theta \end{aligned} \quad (6.9)$$

上の積分に (4.44) を代入しても、積分が零となるには $r \rightarrow \infty$ で $\sqrt{r} \phi$ と $\sqrt{r} G$ が有限であることが必要であり、(4.44) の条件だけでは言えそうにない。

より厳密な検討は読者に任せるとし、ここでは 4.2 節で述べた意味で放射条件を与えることにより、遠方境界での擾乱波による積分が零となったことで良しとする。

§ 7 まとめ

本解説はグリーンの公式を用いた波動場解析、特に境界要素法による数値解析の基本的な考えを理解することを目的として書いた。従って、実際にこの方法を用いて解析する際に必要となる技術的な事柄、例えば、特異点を配置したセグメント上の積分 (用いた特異関数毎に主値積分を使って特別に処理する必要がある) や、セグメントの個数と解の収束性あるいはグリーン関数を用いた場合の級数の展開個数とセグメントの大きさとの関係等に関しては省略した。個々の文献を参考にしてほしい。

さらに進んだ問題としては、非線形性の取り扱い、積分精度をあける工夫あるいは非定常波動場へのグリーンの公式の応用等が挙げられるだろう。これ等のうち特に最後の問題に関しては「海岸波動」(海岸工学委員会、1994)でも取りあげているので参考にしてほしい。

参 考 文 献

- 犬井鉄郎 (1977) : 偏微分方程式とその応用、コロナ社
- Ijima,T.,C.R.Chou and A.Yoshida (1976) : Method of analyses for two dimensional water wave problem, Proc. Int. Conf. Coastal Engg., pp.2721-2736
- Subbiah,K.,N.J.Shnkar and H.Chong (1991) : Regular and random wave pressures around large diameter submarine pipeline near ocean bed, J. Hydraulic R., Vol.29, No.1, pp.49-66
- 折橋恒春・浜中建一郎 (1993) : 没水形水平構造物をよぎる波、土木学会道支部論文報告集、第49号、pp.697-700
- Hamanaka,K. (1983) : Asymptotic analysis of finite amplitude waves in water of gradually varying depth, Coast. Engg. Japan, Vol.26, pp.1-10
- 金戸俊道・加藤雅也・浜中建一郎 (1994) : グリーンの公式を用いた構造物回りの波の3次元変形と力、海洋開発論文集、Vol.10、pp.49-54
- John,F. (1950) : On the motion of floating bodies II. simple harmonic motion, Comm. Pure Appl. Math., Vol.3, pp.45-101
- Fenton,J. (1978) : Wave forces on vortical bodies of revolution, J. Fluid Mech., Vol.85, pp.241-255
- Isaacson,M. (1982) : Fixed and floating axisymmetric structures in waves, ASCE, Vol.108, ww2, pp.180-190
- Orihashi,T.,Y.Watanabe and K.Hamanaka (1994) : Modified Green function for water wave problem, Proc. Int. Symp. : Waves-Physical and Numerical Modelling, Vol. II, pp.1002-1010
- 折橋恒春・渡部靖憲・浜中建一郎 (1994) : 波動場における修正グリーン関数について、海岸工学論文集、第41回、Vol.1、pp.26-30
- 浜中建一郎・渡辺勝弥 (1995) : 三次元修正グリーン関数について、土木学会道支部論文報告集、第51号、Vol.B、pp.228-233
- Isaacson,M. and S.Qu (1990) : Wave in harbour with partially reflecting boundaries, Coast. Engg., Vol.14, pp.193-214
- Chou,C.R. and W.Y.Han (1993) : Wave induced oscillations in harbours with dissipating quays, Coast. Engg. Japan, Vol.36, No.1, pp.1-23
- Hmanaka,K. (1995) : Fundamental solution and boundary conditions on oscillations in harbors of arbitrary geometry, 12th Australasian Coast. Ocean Engg. Conf., pp.163-168
- ゾンマーフェルト (1971) : 理論物理学講座IV、講談社
- 海岸工学委員会 (1994) : 海岸波動、土木学会

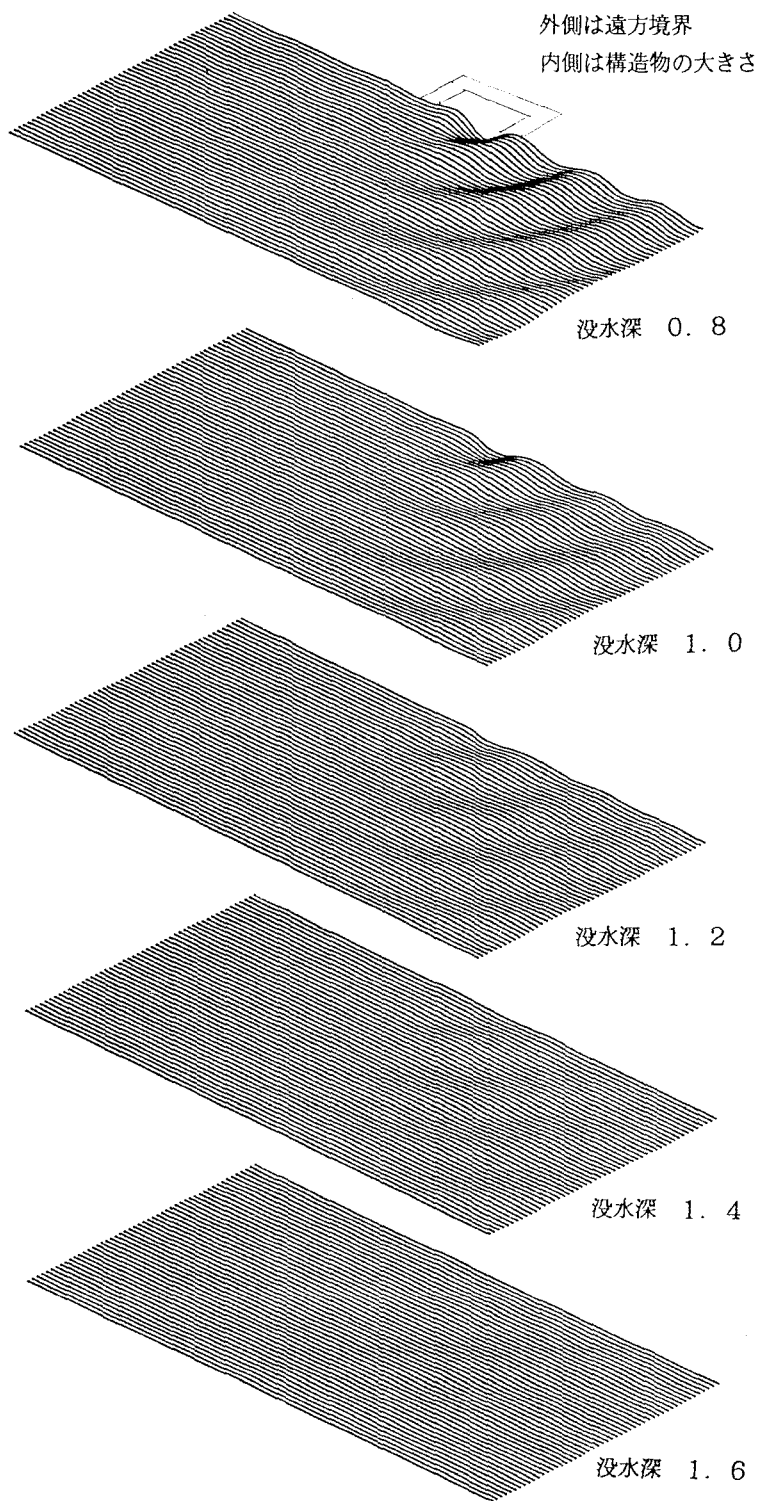
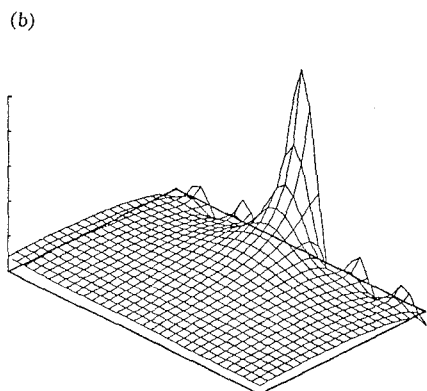
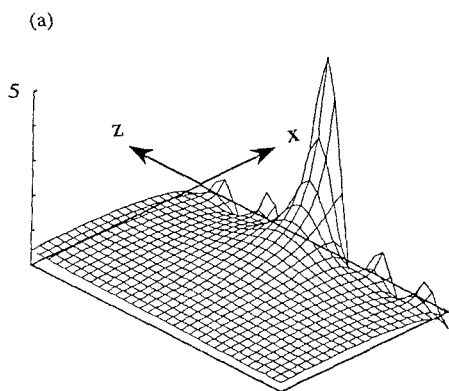
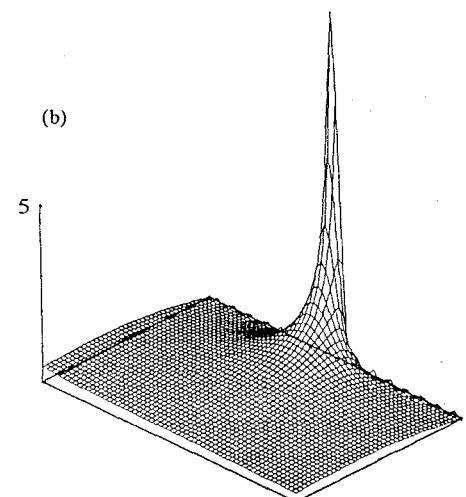
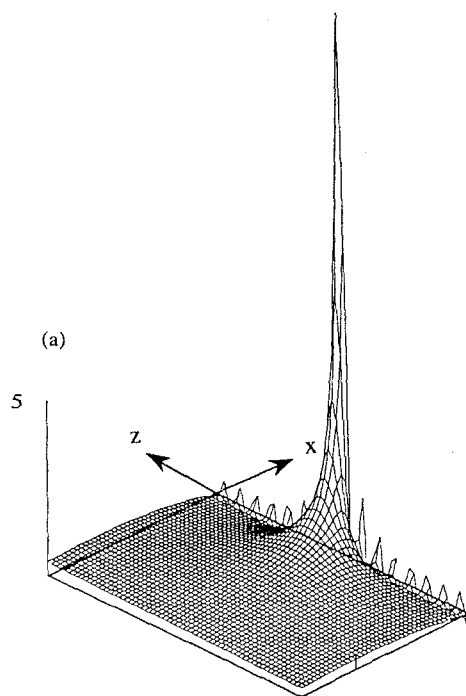


図11 没水平板上の回折・散乱波（金戸等：1994より） $h=2.0$



(a) John のグリーン関数
(b) 修正グリーン関数

$N=10$



(a) John のグリーン関数
(b) 修正グリーン関数

$N=30$

図12 グリーン関数の水平微分 (折橋：1994より)

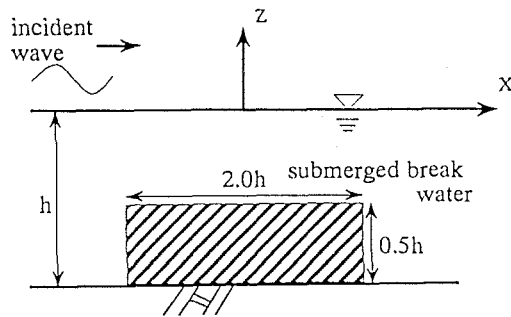
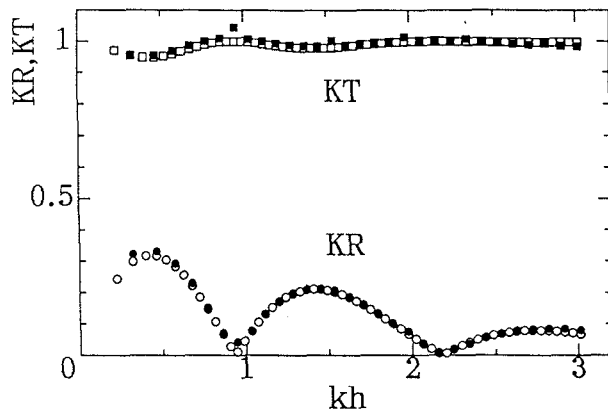


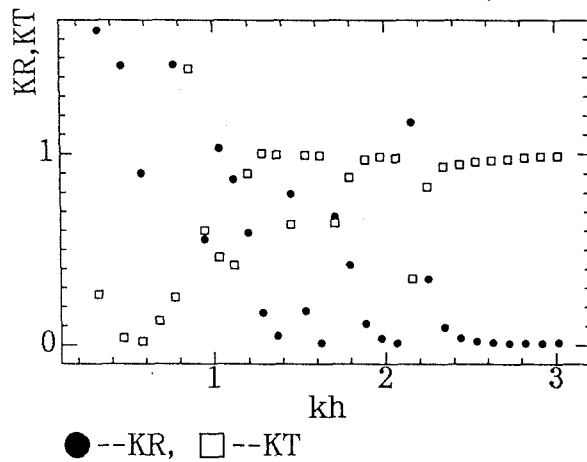
図13 潜堤概念図



●, ■ -- 修正グリーン関数 ($DS=0.025, N=500$)
○, □ -- 領域分割法 (ポテンシャル接続法)

図14 反射率・通過率 (修正グリーン関数、ポテンシャル接続法) (折橋等：1995より)

<John's Green Function ($DS=0.025$)>



● -- KR, □ -- KT

図15 反射率・通過率 (Johnのグリーン関数) (折橋：1995より)

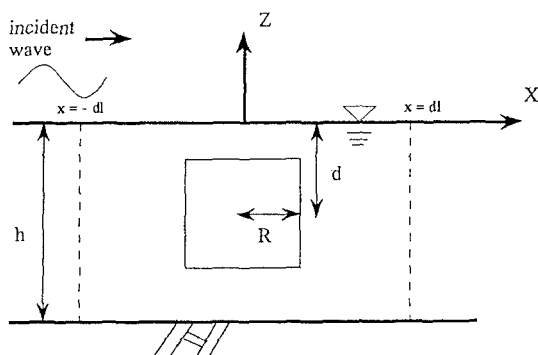


図16 水中構造物概念図

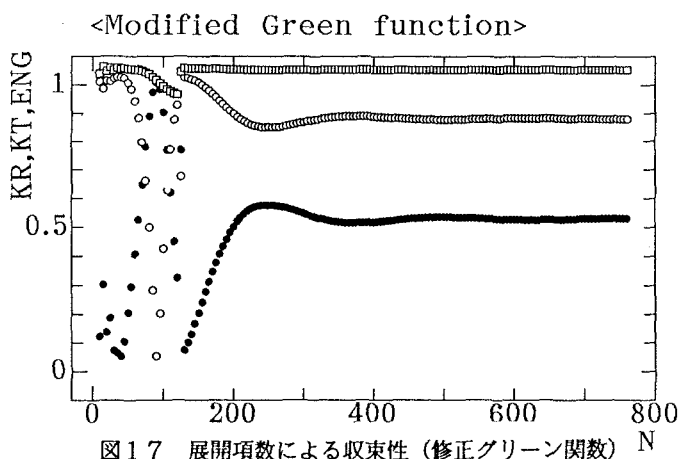
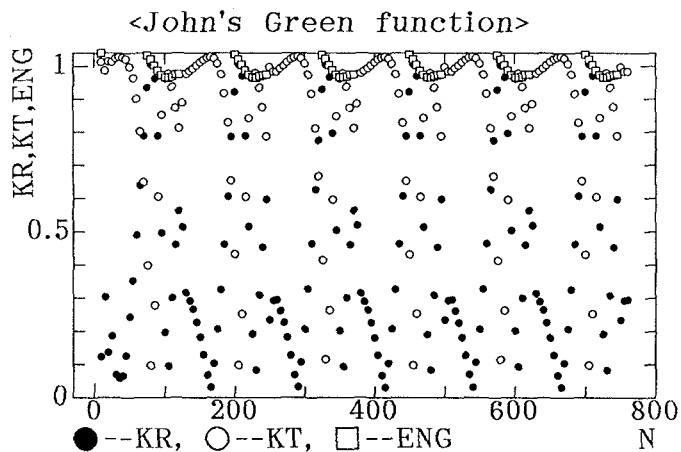


図17 展開項数による収束性 (修正グリーン関数) N

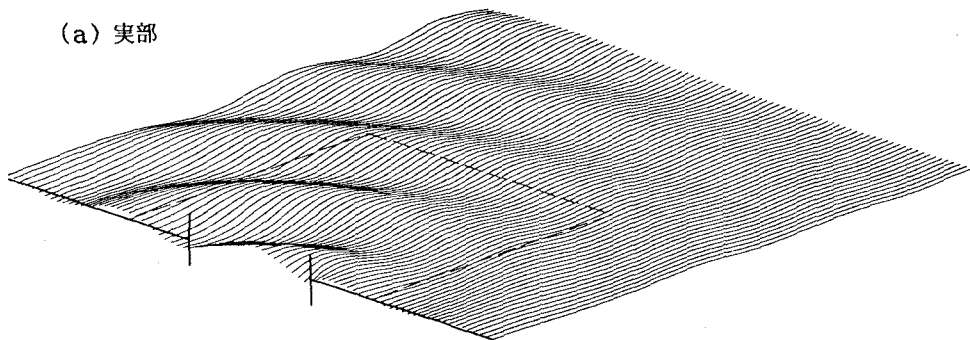


$H=0.5, R=0.2, D=0.25, DL=3.0, ZP=-0.1, N2=200$

図18 展開項数による収束性 (John のグリーン関数)

(折橋: 1995より)

(a) 実部



(b) 虚部

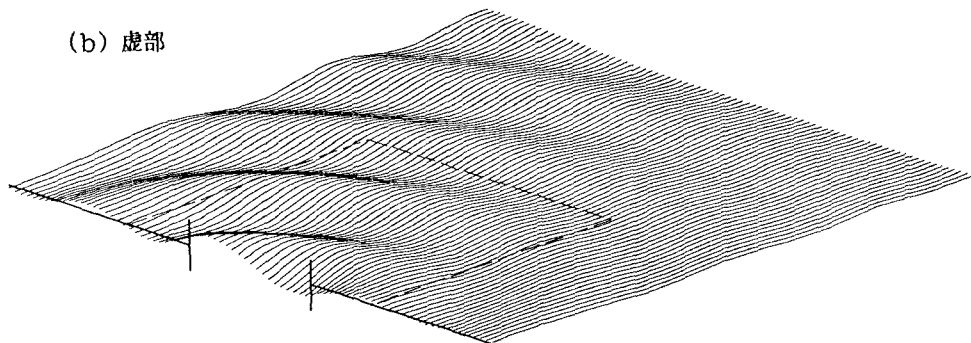
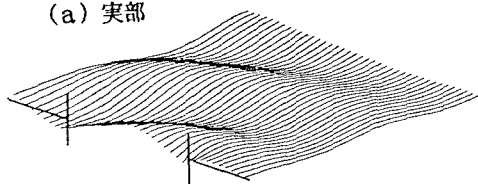


図19 回折波 (Hamanaka : 1995より)

(a) 実部



(b) 虚部

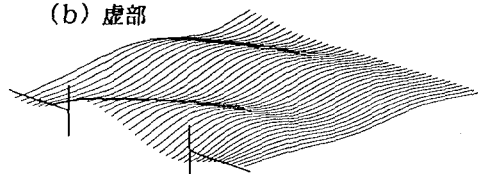
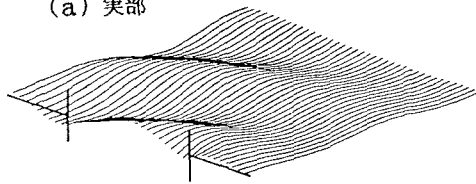


図20 開境界による解析

(Hamanaka : 1995より)

(a) 実部



(b) 虚部

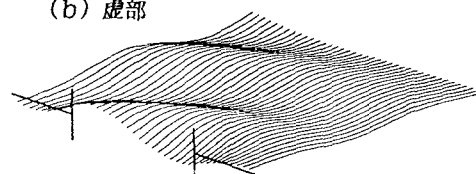


図21 図19の一部

(Hamanaka : 1995より)