

非定常不規則波動場の解析手法

Analysis of Unsteady Irregular Water Waves

後 野 正 雄

Masao NOCHINO

1. はじめに

屈折、回折、反射、砕波を含む不規則な波の変形を求める方法は確立されたものがなく、現在様々な方法が提案され、あるいは、試みられている状況にある。

砕波現象の生じない港内の波高分布などを求めるときは、定常規則波の解を重ね合わせることで不規則波浪場の波の変形を求めることができる。この場合には良く知られたBerkhoffの緩勾配方程式を用いて計算が可能である。しかし、砕波が生じるような波の変形を対象とする時には、砕波点をどのように決定するかという問題が生じる。不規則波の成分波個々の砕波点を用いて波高の分布を計算し、重ね合わせによって不規則波の有義波高の波高分布を求める手法も検討されている。しかし、不規則波の砕波点は時々刻々変化する。波別解析的に表現すれば不規則波の砕波点は個々の波ごとに異なる。このような不規則波の砕波と砕波後の波高変化を求めるためには、非定常な波の解析を検討することはより自然なことであろう。

対象とする波が極浅海域に属する場合はブーシネスク方程式を用いることができる。ブーシネスク方程式は波の非線形も十分に考慮することができ、非線形不規則な波の変形を非定常解析できる方程式としてほぼ確立されている。ただ、ブーシネスク方程式では、深海波から長波に至る広い海域での不規則波の変形を取り扱うことはできない。

このようなことから、深海域から長波領域に至る広い海域で不規則な波の変形を非定常に解析できる手法が求められる。つい最近まで、このような手法としてはMAC法であるとか強非線形ポテンシャルモデルであるとか、いわゆる純粋な数値計算手法のみであった。

これに対して、ここ数年の間に緩勾配方程式と同じく平面2次元の方程式でありながら、不規則波の変形を時系列解析することができる方程式(あるいは方程式系)が磯部ら、灘岡ら、後野により提案され、それぞれ非定常緩勾配不規則波動方程式、強分散波動方程式、連成振動方程式と呼ばれている。磯部らは一連の研究により(窪ら, 1991; 小竹ら, 1992; 磯部, 1993)非定常緩勾配方程式に習い、不規則波動場を解析できる2階の波動型偏微分方程式を開発している。灘岡ら(1993a)はただかだか数個の鉛直関数の重ね合わせで不規則な波動場(強分散線形波動場)を表現し、強分散性波動方程式を開発した。個々の鉛直関数は水平方向の流速を表すために用いられ、流速は波動場の運動方程式を満たすように定められる。後野(1993)は変動圧力のラプラス方程式を用い、変動圧力を直交関数形で展開する事により、3次元のラプラス方程式を平面2次元の楕円型方程式に変換した。不規則な波動場は、この方程式と水面に関する運動学的境界条件から得られる振動方程式との組み合わせにより、連成振動方程式の形式で表現されている。

これらの手法を用いると深海域から長波までの幅広い領域で不規則な波の非定常解析が可能である。また、波の非線形性を考慮できる手法もあり、ブーシネスク方程式や緩勾配方程式に代わる手法として期待されている。

以下の各章ではこの3つの手法について述べていくことにする。

2. 非定常緩勾配不規則波動方程式

2.1 非定常緩勾配方程式の分散関係式

Smith & Spinks(1975) は規則波に対する非定常緩勾配方程式として次のような式を導いている。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) - \sigma \left(1 - \frac{C}{C_g} \right) \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 ϕ は水表面における速度ポテンシャル値 (実数) である。また C, C_g は波速、群速度、 $n = C_g/C$, k は波数、 σ は角周波数、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平方向の微分作用素を表す。また、規則波の仮定を導入すれば Berkhoff(1972) の提案した緩勾配方程式と一致する。

ここで、式 (1) を不規則波に適用できる式であるとみなしてその特性を考えてみよう。まず、適当な k と σ を与える。当然、 k と σ は微小振幅波理論における分散関係を満たすものとする。これによって式 (1) の係数は全て決定する。次に、この式に波数 $\lambda (\neq k)$ の波を与えるとその波の時間的な変動が求められ、角周波数 ω が定まる。この波を $\phi = \hat{\phi} e^{-i(\lambda x - \omega t)}$ と表し、式 (1) に代入して整理し、一定水深を仮定すると、次のような式が得られる。

$$\omega^2 = \lambda^2 CC_g + \sigma^2 (1 - n) \quad (2)$$

この式は角周波数 ω と波数 λ の関係を与える式であるから、偏微分方程式 (1) 自体の固有の分散関係式である。もちろん波数として $\lambda = k$ を与えれば $\omega^2 = \sigma^2$ が得られる。

仮に、元の波数 k とは異なる任意の波数 λ を与えた時、方程式固有の分散関係式 (式 (2)) によって定まる角周波数 ω が微小振幅波理論の分散関係式を (近似的に) 満たすものとしよう。このとき、式 (1) を解いて求められる波は微小振幅波理論と同じ特性をもつ波となる。波数 k と波数 λ は独立であるから、この方程式は与えられた波の条件とは直接かかわりのない係数をもつ方程式である。さらに、式 (1) は線形方程式であるからいくつもの解 (波) を重ねあわせることができる。個々の波は微小振幅波の分散関係式を (近似的に) 満たすので、このようにして求められた不規則な波は実際の水面波の十分な近似になっている。

この結論は式 (2) が微小振幅波理論の分散関係式の十分な近似であるという仮定が成立すれば求められる。残念ながら式 (1) の固有の分散関係式である式 (2) は微小振幅波理論における分散関係式の十分な近似であるとはいえない。この式 (1) に不規則な波動場の初期条件を与えればそれらしい答えは求められる。しかし、その答えは現実の水面波を表したものとはいえない。

磯部らの一連の研究は、基本な方針として、この (双曲型) 偏微分方程式の固有の分散関係式が微小振幅波の十分な近似になるように偏微分方程式の各項の係数を求めようとしたものである。

2.2 有理式近似を用いた方程式の誘導

磯部らは一連の研究の中で Berkhoff(1972) の提案した緩勾配方程式を元にこれを不規則波へも適用できるようにその拡張を試みてきた。ここでは、その中の磯部 (1993) による有理式近似を用いた非定常緩勾配不規則波動方程式の誘導を簡単に紹介する。

基本的な方針は先に述べた様に、双曲型の偏微分方程式の固有の分散関係式が微小振幅波理論の分散関係式の十分な近似になる様に方程式の係数を定めようとするものである。これ以外に磯部は碎波後の波高減衰を念頭に置くとともに実用的な計算についても配慮している。

2.2.1 方程式の形式

まず、減衰項を含めた形式の方程式として次のような双曲型偏微分方程式を仮定している。

$$\nabla^2 \tilde{\phi} - ia_1 \nabla^2 \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right) + (b_0 + ic_0) \tilde{\phi} + i(b_1 + ic_1) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} - b_2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

ここで、 a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 は波の周波数によって変化しない係数 (全て非負の実数) である。また、未知変数 $\tilde{\phi}(x, y, t)$ は不規則波を構成する成分波の水位変動 $\eta(x, y, t)$ と次の様に結びつけられている。

$$\eta(x, y, t) = \frac{\tilde{\phi}}{\sqrt{CC_g}} e^{-i\bar{\sigma}t} \quad (4)$$

式中の C, C_g は対象とする不規則波の代表角周波数 $\bar{\sigma}$ に対応した波速、群速度である。ここで考えている水位変動 η は成分波の角周波数 σ で時間的に変動するので、複素振幅を $\hat{\eta}$ とすると $\eta = \hat{\eta} e^{-i\sigma t}$ と表せる。上式と比較すると

$$\tilde{\phi} = \hat{\eta} \sqrt{CC_g} e^{-i\sigma't} \quad (5)$$

となる。ここで、 σ' は代表角周波数 $\bar{\sigma}$ と不規則波を構成する成分波の角周波数 σ の差を表し

$$\sigma' = \sigma - \bar{\sigma} \quad (6)$$

である。成分波の角周波数と代表周波数が近い時は σ' は小さく、 $\tilde{\phi}$ は時間的にゆっくり変動することになる。

2.2.2 方程式固有の分散関係式

式 (3) の解が

$$\tilde{\phi} = a \exp[i(\hat{k}_x \cos \theta = \hat{k}_y \sin \theta - \sigma' t)] \quad (7)$$

になるものと仮定し、これを式 (3) に代入すると式 (3) 固有の分散関係式が次の様に求められる。

$$-\hat{k}^2(1 - a_1\sigma') + (b_0 + ic_0) + (b_1 + ic_1)\sigma' + b_2(\sigma')^2 = 0 \quad (8)$$

上式に先の式 (6) を代入すれば $\hat{k}$ と σ の関係が求まる。この $\hat{k}$ と σ は成分波の波数と角周波数であるから、この両者が微小振幅波理論の分散関係式を満たすように係数を定めればよい。ただし、 c_0, c_1 の2つの係数は基本的には波の減衰係数に相当し、分散関係式とは独立に定めるべき係数である。

ここで、係数を定める際に物理的、数学的な制約が必要となる。物理的には時間的に発散するような解を含まないことが必要である。これを数学的に表せば、実数値の $\hat{k}$ に対して σ' の虚数部分が負になる

$$\text{Im}\{\sigma'\} \leq 0 \quad (9)$$

ことが必要となる。このための数学的な制約を満たさなければならない。この数学的な制約条件 (必要十分条件) は次の様になる。

$$b_1^2 - 4b_0b_2 \geq 0, \quad c_0 = 0 \quad \text{for } c_1 = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 - \left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{c_0}{c_1}\right)\left(\frac{b_0}{b_2}\right) \leq 0 \quad \text{for } c_1 > 0 \quad (11)$$

磯部はこの必要十分条件に対して係数を定めるための方法として次のような十分条件を用いている。

$$b_1 = 2\sqrt{b_0b_2}, \quad a_1 > 0, \quad c_1 = 2c_0\left(\frac{b_1}{b_2}\right) \quad (12)$$

ここで、 c_0 は代表周波数の波の減衰係数を表すものとなる。この係数の大きさは砕波後の波高減衰から定めるべきものである。他の係数とは独立に定められる。結局、この十分条件を用いれば式 (3) 中の未定係数は a_1, b_0, b_2 の3つとなる。この係数を定めるためには適当な周波数とこれに対応した微小振幅波理論の分散関係式を満たす波数の組を3組与え、式 (8) に代入して3元連立方程式を解けばよい。例えば代表周波数 $\bar{\sigma}$ に対して $(2\bar{\sigma}, \bar{\sigma}, 0.5\bar{\sigma})$ の様に角周波数を与えれば未定係数 a_1, b_0, b_2 が数値的に求まる。もちろん、この角周波数に対応した波数は水深によって変化するので、求められた係数も水深とともに代わることになる。なお磯部はこの未定係数の決定の際、計算の際の差分格子間隔によって係数の値が影響を受けることを考慮して、差分間隔の影響を考慮した係数の決定方法を提案している。

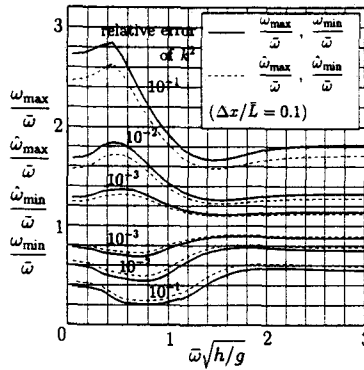


図-1 非定常緩勾配不規則波動方程式の分散特性

2.3 分散特性

図-1 は非定常緩勾配不規則波動方程式の分散特性を表したものである。分散特性には差分の際の分割幅が影響する。この図は空間的な分割幅 Δx を代表周波数に対応した波長 $\bar{L}$ の $1/10$ とした場合の結果である。これは通常の差分間隔に比べると非常に荒い分割に当る。図中の点線は未定係数を決定する差に用いた角周波数の最大値最小値を示し、実線はこの角周波数を用いて求めた波数(k^2)が微小振幅波理論の理論解と所定の誤差範囲内に納まる角周波数を示している。角周波数は全て代表周波数との比で表されており、横軸は代表周波数の変化を表している。横軸は水深を用いた無次元周波数を示し、この値が小さくなるほど比水深が小さくなる。所定の誤差としては 10% , 1% , 0.1% を用いている。したがって、それぞれの誤差に対応して最大、最小の角周波数を示す点線と実線が2本ずつ示されている。また、最大最小の角周波数に挟まれた領域の誤差は全て所定の誤差より小さい。この図より、横軸の値が小さくなるほど(代表波の比水深が小さくなるほど)微小振幅波の分散関係を満たす周波数領域は広くなる傾向にあることが分かる。しかし、深海波の領域(横軸の値が 1.8 以上)ではその周波数帯の幅は余り変化しなくなる。

3. 強分散波動方程式

灘岡らの手法は非線形の境界条件に対しても適用可能であるが、ここでは線形の場合について解説する。

3.1 基礎式と境界条件

静水面上に原点を置き、鉛直上向きに z 、水平面上に x, y 軸を取り、流速を $\vec{v} = (u, v, w)$ で表す。完全流体の連続式、線形化された運動方程式はそれぞれ次の様である。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \vec{p} \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (15)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 g は重力の加速度である。

水面の位置を $z - \eta(x, y, t) = 0$ 、水底の位置を $z + h(x, y) = 0$ とした時、水面および水底の境界条件は次のようになる。ただし、水面については線形化された条件を示しておく。

$$p = 0 \quad z = \eta \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + w = 0 \quad z = 0 \quad (17)$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0 \quad z = -h \quad (18)$$

3.2 水平方向流速の鉛直分布

これらの基礎方程式に対して、まず水平方向の流速ベクトル $\vec{u} = (u, v)$ を次のように仮定する。

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^M \vec{W}_m(x, y, t) \cdot F_m(z; k_m h) \quad (19)$$

ここで、 $F_m(z; k_m h)$ は水平方向流速の鉛直方向分布を定める関数で

$$F_m(z; k_m h) = \frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m h} \quad (20)$$

と定義される。この鉛直方向関数 $F_m(z; k_m h)$ は水面の位置 $z = 0$ において $F_m = 1$ の値を取る。したがって、 $\sum_{m=1}^M \vec{W}_m(x, y, t)$ は水表面における水平方向の流速ベクトルを示している。この水平方向の流速ベクトル $\vec{u} = (u, v)$ の仮定は成分波の重ね合わせではないことに注意すべきである。ここで用いられる k_m は仮想的な波数であり、不規則波を調和成分の重ね合わせで表す場合の周波数に対応した波数とは関係がない。灘岡らは $M = 4$ 程度を採用して具体的な計算を行っているが、これも 4 成分波で不規則波を表そうとしたものでもない。また、鉛直方向流速の鉛直方向の分布形は一切仮定を設けない。

3.3 水位変動と圧力の方程式

ここでの波動方程式の導出は原理的にはブーシネスク方程式と同じ方法を用いる。まず、連続式(式(13))を鉛直方向に水底 ($z = -h$) から水面 ($z = 0$) まで積分し、式(17)、(18)を用いると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= \nabla \cdot \int_{-h}^0 \vec{u} dz - \vec{u} \cdot \nabla h|_{z=-h} + w|_{z=0} - w|_{z=-h} \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{-h}^0 \vec{u} dz = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、式(19)を代入し、積分を実行すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^M \nabla \cdot \left\{ \vec{W}_m \frac{\tanh k_m h}{k_m} \right\} = 0 \quad (22)$$

次に、鉛直方向の運動方程式(14)を鉛直方向に不定積分し圧力 p を求める。このとき、実際に積分ができるように連続式を用いて w を $\vec{u}$ で表す。ここが、本手法の特徴の一つである。

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial p}{\partial z} dz &= \int -\rho g dz - \int \rho \frac{\partial w}{\partial t} dz \\ &= -gz + C + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{\partial w}{\partial z} dz dz \\ &= -gz + C - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int \int \nabla \cdot \vec{u} dz dz \\ &= -gz + C - \rho \nabla \cdot \int \int \vec{u} dz dz \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、式(19)を代入し、積分を実行し、水面での力学的境界条件式(16)を満たすように積分定数を決定すると次式のように圧力が求められる。

$$p(z) = \rho g(\eta - z) - \rho \sum_{m=1}^M \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial \vec{W}_m}{\partial t} \frac{1}{k_m^2} \left(1 - \frac{\cosh k_m(h+z)}{\cosh k_m h} \right) \right\} \quad (24)$$

ここで、上式の右辺第1項については $z = \eta$ において圧力が0となるように、第2項については $z = 0$ において圧力が0となるように積分定数を定めている。

3.4 水表面流速ベクトル

最後に $\vec{W}_m$ を決定する方程式を求める。すでに圧力が $\vec{W}_m$ を用いて表現されているので、これを運動方程式(14)に代入し鉛直方向に積分すればよい。このとき単純に積分したのでは方程式が一つしか求められない。未知数 $\vec{W}_m$ は M 個あるので、重みとして M 個の関数 $F_m(z; k_m h)$ を用い、 M 個の方程式を作る。すなわち、

$$\int_{-h}^0 F_m(z; k_m h) \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right\} dz = 0, \quad \text{for } m = 1, 2, \dots, M \quad (25)$$

これをガラーキン法と呼ぶ。これまでと同様に、微分と積分の順序を適当に入れ替えて、積分が容易にできるようにし、積分を実行する。このとき、海底勾配 ∇h の高次項である $\nabla^2 h$ 、 $|\nabla h|^2$ に関する項を無視する。これは海底勾配が穏やかである($|\nabla h| \ll 1$)という緩勾配の仮定を設けていることになる。これらの計算により $\vec{W}_m$ に関する方程式として次式が得られる。

$$\underline{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial t} \\ \dots \\ \frac{\partial \vec{W}_M}{\partial t} \end{bmatrix} = \underline{b}(\nabla \eta) + \underline{C} \begin{bmatrix} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial t} \right) \\ \dots \\ \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{W}_M}{\partial t} \right) \end{bmatrix} + \underline{D} \left\{ \begin{bmatrix} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial t} \right) \\ \dots \\ \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{W}_M}{\partial t} \right) \end{bmatrix} (\nabla h) + \begin{bmatrix} (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial t} \\ \dots \\ (\nabla h \cdot \nabla) \frac{\partial \vec{W}_M}{\partial t} \end{bmatrix} \right\} \quad (26)$$

ここで、 $\underline{A}, \underline{C}, \underline{D}$ は M 次の正方行列、 $\vec{b}$ は M 成分を持つベクトルでそれぞれ次に様になる。

$$\underline{A} = \{a_{ij}\}, \quad a_{ij} = \left\{ \frac{\sinh(k_i + k_j)h}{k_i + k_j} + \frac{\sinh(k_i - k_j)h}{k_i - k_j} \right\} / (2 \cosh k_i h \cosh k_j h) \quad (27)$$

$$\underline{C} = \{c_{ij}\}, \quad c_{ij} = \left\{ \left\{ \frac{\tanh k_j h}{k_j} - a_{ij} \right\} / k_i^2 \right\} \quad (28)$$

$$\underline{D} = \{d_{ij}\}$$

$$d_{ij} = \left[\tanh k_i h \left\{ \frac{\sinh(k_i + k_j)h}{k_i + k_j} + \frac{\sinh(k_i - k_j)h}{k_i - k_j} \right\} - \left\{ \frac{\cosh(k_i + k_j)h - 1}{k_i + k_j} + \frac{\cosh(k_i - k_j)h - 1}{k_i - k_j} \right\} \right] / (2k_i \cosh k_i h \cosh k_j h) \quad (29)$$

$$\vec{b} = \{b_i\}, \quad b_i = -g \frac{\tanh k_i h}{k_i} \quad (30)$$

以上の議論から式(22),(26)を解くことにより不規則波の水位変動が求められる。

これらの式の誘導過程において加えられた条件としては水面の境界条件の線形化と水底における緩勾配の仮定のみであり、規則波を想定したような条件は含まれていない。このことはこの強分散性波動方程式により砕波を除く不規則波の波の変形が求められることになる。残された問題は $m = 1 \sim M$ に対応した k_m を決定方法と入射境界に対する不規則な波のデータの生成方法である。

3.5 不規則波に対する入射境界の生成

ここでは $x = x_o$ に入射境界を作るための方法を述べる。入射境界においても $\vec{W}_m$ を与えなければならない。まず、線形理論であるので、入射境界で与えるべき水平方向流速(入射境界に垂直に入射する流速) $u(x_o, z, t)$ は次の様に表すことができる。

$$u(x_o, z, t) = \sum_{i=1}^I g \frac{a_i k_i}{\sigma_i} F_i \cos(k_i x_o - \sigma_i t + \theta_i) \quad (31)$$

ここで I は不規則波を規則波の線形重ね合わせで表現した時の成分数、 $a_i, k_i, \sigma_i, \theta_i$ はそれぞれ各成分波の振幅、波数、角周波数、位相差である。一方、強分散性波動理論では水平方向流速を式(19)の様に表現しているので、 $x = x_o$ では

$$\sum_{m=1}^M W_m(x_o, t) \cdot F_m(z; k_m h) = \sum_{i=1}^I g \frac{a_i k_i}{\sigma_i} F_i \cos(k_i x_o - \sigma_i t + \theta_i) \quad (32)$$

となる。この式の両辺に F_m を掛けて水底から水面まで積分すると最終的に $\vec{W}_m(x_o, t)$ を与える式が得られる。

$$\vec{W}_m(x_o, t) = \begin{bmatrix} W_1(x_o, t) \\ \vdots \\ W_M(x_o, t) \end{bmatrix} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{Q} \cdot \vec{f}(x_o, t) \quad (33)$$

ここで、 $\underline{R}$ は M 次の正方行列、 $\underline{Q}$ は (M, I) 行列、 $\vec{f}$ はベクトルで I 個の成分をする。それぞれ次の様に表される。

$$\underline{R} = \{r_{m,n}\}, \quad r_{m,n} = \int_{-h}^0 F_m F_n dz \quad (34)$$

$$\underline{Q} = \{q_{m,i}\}, \quad q_{m,i} = \int_{-h}^0 F_m F_i dz \quad (35)$$

$$\vec{f} = \{f_i\}, \quad f_i = g \frac{a_i k_i}{\sigma_i} \cos(k_i x_o - \sigma_i t + \theta_i) \quad (36)$$

3.6 $\vec{W}_m$ の波数と角周波数

先に述べた入射境界の生成法を用いて単一規則波に対する $\vec{W}_m$ の波数と角周波数を考えてみよう。先の理論中で $I = 1$ とおけば単一規則波に対する $\vec{W}_m$ の解が次のように求まる。

$$\vec{W}_m(x_o, t) = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{Q} g \frac{a_1 k_1}{\sigma_1} \cos(k_1 x_o - \sigma_1 t + \theta_1) \quad (37)$$

この式より、強分散性波動方程式を規則波に適用したときの $\vec{W}_m$ の特性がわかる。 $\vec{W}_m$ のすべての成分について、その時空間的な変化は当然正弦的になり、その波数は k_1 、角周波数は σ_1 である。この端数、角周波数は単一規則波のそれであり、鉛直方向関数を定めるパラメータ k_m とは全く関係がない。

3.7 鉛直方向関数の個数 M と k_m の選択

灘岡らは水平方向流速の鉛直方向分布表現（式 (19)）の個数 M を 4 とし、水平床上の不規則波に対してこの強分散性波動方程式を適用した。水平床上では線形波動の重ね合わせで不規則波の変形が求められるので、この理論解と計算結果を比較し、非常に良好な結果を示した。

この計算において対象とした不規則波は平均周期 10s、水深 50m で、 $kh = 2.0$ のブレッッドシュナイダー型スペクトルをもつ波である。この波に対して灘岡らは図-2 に示すような $k_m h$ を用いている。この k_m の選

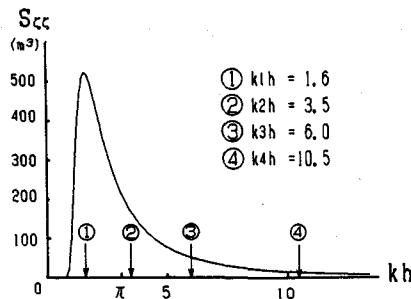


図-2 対象不規則波の波数スペクトルと選択された $k_m h$

択方法について確定された手法はないが、 k_m の選択方法によって強分散性波動方程式の解が大きく変化する

とは考えられない。これは、図-3 に示す様に強分散波動方程式の分散特性が非常に広い範囲で従来の微小振幅波理論と一致しており、この特性に対する k_m の選択方法の影響が大きいと考えられるからである。また、高々4個の鉛直方向関数の重ね合わせで非常に広い範囲での波の分散特性と鉛直方向分布を表現できることは非常に大きな発見であるといえる。

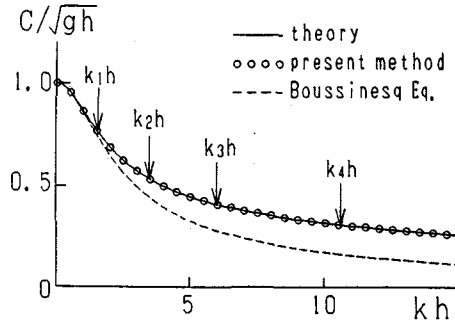


図-3 強分散性波動方程式における分散特性

4. 連成振動方程式

4.1 基礎方程式と境界条件

4.1.1 変動圧力のラプラス方程式

流速を $\vec{v} = (u, v, w)$ で表すと完全流体の運動方程式は次の様に書くことができる。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (38)$$

ここで、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 g は重力の加速度である。

この式 (38) の発散を求め、式 (13) を用いて整理すると次のような楕円型の方程式が得られる。

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = (\text{rot } \vec{v})^2 - \vec{v} \cdot (\text{rot rot } \vec{v}) \quad (39)$$

ここで Δ は3次元のラプラシアンである。式 (39) の右辺は渦度を含んでいる。今、流体内部に関して速度の2乗項が他の項に比して無視できる（線形化）とする。ここで、変動圧力 $\bar{p}$ を

$$\bar{p} \equiv \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (40)$$

と定義し、圧力 p に関する方程式を書き換えると、変動圧力 $\bar{p}$ に関する基礎式として次式のラプラス方程式を得る。

$$\Delta \bar{p} = 0 \quad (41)$$

4.1.2 境界条件

水面の位置を $z - \eta(x, y, t) = 0$ とした時、水面の力学的境界条件は $p = 0$ であるので、これを変動圧力 $\bar{p}$ を用いて書き換えると以下のようになる。

$$\bar{p} = g\eta \quad \text{at } z = 0 \quad (42)$$

一方、水面の運動学的境界条件は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad \text{at } z = 0 \quad (43)$$

ここで、 w は鉛直方向流速である。ここで、線形化された鉛直方向の運動方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (44)$$

この式を用いて w を消去すると、水面変動 η に関する時間発展の方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad \text{at } z = 0 \quad (45)$$

水底の境界条件は水底での法線方向流速 (v_n) が $v_n = 0$ となる。これを水底における法線方向の運動方程式に適用し、変動圧力 $\bar{p}$ を用いて書き換え、 x, y, z 座標系で表すと次式ようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \bar{p} \cdot \nabla h \right) = 0 \quad (46)$$

結局、変動圧力 $\bar{p}$ を用いると、基礎式として $\bar{p}$ のラプラス式 (41)、水面の境界条件として式 (42) および (45)、水底の境界条件として式 (46) が得られる。

これらの式は変動圧力 $\bar{p}$ を速度ポテンシャル ϕ と置き換えると従来の速度ポテンシャルを持ちいた線形波動理論の基礎式とはほぼ一致する。この理論と速度ポテンシャル論との差異は、入射境界において与える物理量が異なる。この理論では水位変動 η と圧力 p から求めた変動圧力 $\bar{p}$ を与える。これらは直接観測可能な物理量である。これに対して速度ポテンシャルでは、水位変動 η から波動理論を用いて速度ポテンシャルを求めなければならない。将来、非線形不規則波動場を解析する際、速度ポテンシャルを求めるためにどのような波動理論を用いるのかは大きな問題となるであろう。また、この理論では流体内部の渦度が与えられれば渦のある流れに対しても適用可能である。もちろん、流体内部の渦度を与えることは容易なことではなく、現段階ではこれがこの理論の優位性を示すものではない。しかし、将来の発展性としては評価すべきである。

4.2 変動圧力の級数展開

4.2.1 直交関数の選択

変動圧力 $\bar{p}$ の鉛直方向分布を直交関数を用いて級数表示することを考える。後で述べるように変動圧力 $\bar{p}$ はラプラス方程式の形式のまま鉛直方向に積分される。そこで、積分しやすい直交関数として、この理論では偶数次のルジャンドル多項式を用いる (例えば、森口他, 1960)。

$$\bar{p} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x, y, t) P_{2(m-1)}(\bar{z}) \quad (47)$$

ここで、 $\bar{z} = 1 + z/h$ 、 q_m は級数展開の係数、 $P_m(\bar{z})$ は次式で示される m 次のルジャンドル多項式である。

$$P_0(\bar{z}) = 1, \quad P_m(\bar{z}) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{d\bar{z}^m} (\bar{z}^2 - 1)^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (48)$$

$$P_1(\bar{z}) = \bar{z}, \quad P_2(\bar{z}) = \frac{1}{2}(3\bar{z}^2 - 1), \quad P_3(\bar{z}) = \frac{1}{2}(5\bar{z}^3 - 3\bar{z}), \quad P_4(\bar{z}) = \frac{1}{8}(35\bar{z}^4 - 30\bar{z}^2 + 3), \quad \text{etc.} \quad (49)$$

線形理論では z は区間 $[-h, 0]$ で定義されるので、 $\bar{z}$ は $[0, 1]$ で定義される。通常、ルジャンドルの多項式はその変数が区間 $[-1, 1]$ で定義され、この区間で直交性が保証されている。これに対して、式 (47) は、区間 $[0, 1]$ で定義されている。しかし、偶数次のルジャンドル多項式が偶関数であることを用いると、区間 $[-1, 1]$ における直交性から

$$\int_0^1 P_{2(m-1)}(z) P_{2(n-1)}(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{for } m \neq n \\ \frac{1}{4m-3}, & \text{for } m = n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (50)$$

という関係が容易に導ける。すなわち、区間 $[0, 1]$ における偶数次のルジャンドル多項式は直交性を有し、式 (47) のような級数表示が可能である。

また、偶数次のルジャンドル多項式は水底 ($\bar{z}=0$) において次の性質を持つ。

$$\frac{d}{d\bar{z}} P_{2(m-1)}(\bar{z}) = 0, \quad \text{at } \bar{z} = 0 \quad (51)$$

式 (47) により級数展開された変動圧力 $\bar{p}$ は水底の境界条件式 (46) を満足しない。したがって、後述するように基礎式 (41) を鉛直方向に積分する際に水底の境界条件式 (46) を特別に考慮する必要がある。

4.2.2 級数の収束性

実際には式 (47) の無限級数をどこかで打ち切らなければならない。この時、級数の収束性が高ければただか数個の項数で元の関数が精度良く表現できる。

ここでは微小振幅波理論における変動圧力の振幅 $\bar{p}_s$ を式 (47) で表し、その収束性を検討する。ここで、 $\bar{p}_s$ としては微小振幅波理論の変動圧力の振幅を $g\eta$ で無次元化した次式を用いる。

$$\bar{p}_s = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} = \frac{\cosh kh\bar{z}}{\cosh kh} \quad (52)$$

級数展開の係数 q_m は次式で求めることができる。

$$q_m = (4m-3) \int_0^1 \bar{p}_s P_{2(m-1)}(\bar{z}) d\bar{z} \quad (53)$$

図4は式 (53) で得られた $q_m (m=1, \dots, 5)$ を比水深 $h/L (= kh/2\pi)$ の関数として表したものである。比水

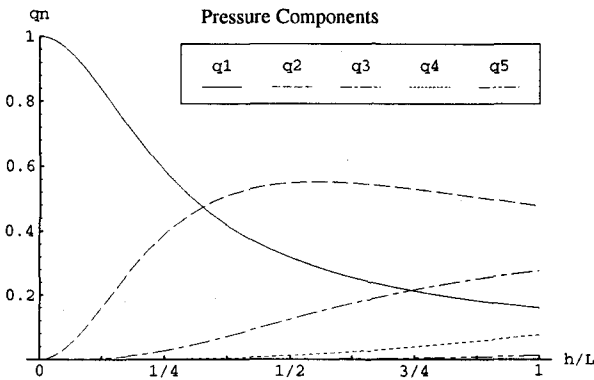


図-4 ルジャンドル多項式による級数展開の収束性

深が小さいほど q_1 が卓越し、 q_2 以上の係数は小さくなっている。比水深が大きくなると q_2 が卓越するようになり、 q_3 以上の係数も比水深とともに値が大きくなって行く。しかし、比水深の大きな領域においても、式 (47) による変動圧力の級数展開は非常に高い収束性を示し、ただか5項程度を採用するだけで変動圧力を精度良く表現できることが分かる。

しかし、対象とする不規則な波動場においては、有義波の比水深が小さくても、短周期側の波は大きな比水深を示す。したがって、採用する項数が多いほど不規則な波動場を正確に表現できることになる。逆に、項数が多いほど計算量が増加し、非実用的な計算法となる。

後野 (1992) は4項だけを採用し、以下の議論を展開している。

4.3 支配方程式の導出

4.3.1 水面の境界条件

まず、水面 ($\bar{z}=1$) において、偶数次のルジャンドル多項式は $P_{2(m-1)}(1) = 1$ という値をとる。したがって、水面の境界条件式 (42) は次の様に書替えられる。

$$g\eta = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \quad (54)$$

また、ルジャンドル多項式の微係数に関する特性を用いると、水面の運動学的境界条件式 (45) は次のように変動圧力の係数で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{h}(3q_2 + 10q_3 + 21q_4) \quad (55)$$

4.3.2 未知変数 q_m の支配方程式

級数展開の項数を 4 に限ると変動圧力 $\bar{p}$ は次の様になる。

$$\bar{p} = q_1 P_0(\bar{z}) + q_2 P_2(\bar{z}) + q_3 P_4(\bar{z}) + q_4 P_6(\bar{z}) \quad (56)$$

この式の中の未知変数 $q_m = q_m(x, y, t)$ は式 (41) のラプラス式を満たすように決定しなければならない。そこで、ガラーキン法を用いて係数 q_m の支配方程式を求める。 η と $q_1 \sim q_4$ の 5 つの未知数に対して、すでに式 (55), (54) の 2 つの方程式を得ているので、残り 3 つの方程式が必要となる。

ガラーキン法に基づき、式 (41) に式 (56) を代入し、 P_0, P_2, P_4 をそれぞれ重みとして掛け、 z に関して $[-h, 0]$ の間積分を行う。このとき、水底の境界条件式を次式のように加えることにより、水底の変化を適切に取り入れることができる。

$$\int_{-h}^0 P_{2(m-1)}(\bar{z}) \Delta \bar{p} dz + \left(\nabla h \cdot \nabla \bar{p} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} \times P_{2(m-1)}(0) = 0 \quad \text{for } m = 1, 2, 3 \quad (57)$$

この式を積分して求められた 3 つの方程式には $|\nabla h|^2, \nabla^2 h$ に関する項が含まれる。緩勾配の仮定に従い、これらの項を無視するとともに、式 (54) を用いて係数 q_4 を消去すると最終的に以下の方程式が得られる。*

$$\nabla^2 q_1 + \frac{1}{16h} \nabla h \cdot (11 \nabla q_1 + 3 \nabla q_2 - 11 \nabla q_3) - \frac{1}{h^2} (21q_1 + 18q_2 + 11q_3) = -\frac{5g}{16h} \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{21g}{h^2} \eta \quad (58)$$

$$\nabla^2 q_2 + \frac{1}{64h} \nabla h \cdot (-95 \nabla q_1 + 129 \nabla q_2 + 165 \nabla q_3) - \frac{1}{h^2} (90q_1 + 90q_2 + 55q_3) = \frac{65g}{64h} \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{90}{h^2} g \eta \quad (59)$$

$$\nabla^2 q_3 + \frac{1}{128h} \nabla h \cdot (99 \nabla q_1 - 693 \nabla q_2 - 205 \nabla q_3) - \frac{1}{h^2} (99q_1 + 99q_2 + 99q_3) = -\frac{333g}{128h} \nabla h \cdot \nabla \eta - \frac{99}{h^2} \eta \quad (60)$$

式 (55) においても式 (54) を用いて q_4 を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{h} (21g\eta - 21q_1 - 18q_2 - 11q_3) \quad (61)$$

以上の議論より、式 (58)~(60) と式 (61) の 4 式が最終的な緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式である。

これらの式の特徴は、まず、ルジャンドルの多項式を用いて変動圧力を表現したことにより式中に現れる係数が水深 h を除いて全て定数であることがあげられる。従来の理論では式中の係数に波速 C 、群速度 C_g と言った係数が用いられる。

次に、従来の波動理論は理論の展開上全く用いられていない。従来の波動理論は級数展開の打ち切り項数を決定するために参照しただけである。

最後に、波動場を表現するための方程式であるにも関わらず、水位変動 η の時間発展を記述した式 (61) は波動方程式の形式ではなく、むしろ振動方程式の形式に近い。式 (58)~(60) は波動場全域の水位の分布から、波動場全域の圧力特性を決定する。水位の時間発展は振動型の方程式から圧力の鉛直方向の勾配によって定まる。すなわち、不規則波動場の支配方程式として提案された式 (58)~(60) と式 (61) は、波動場を連成振動の場として表現したものと考えられる。

後野 (1993) の式は正しくない。本稿の式あるいは後野・平井 (1994) の式が正しい

4.4 支配方程式の分散関係式

ここでは、先の不規則波動場の支配方程式を一定水深上の定常規則波に適用し、支配方程式が持つ固有の分散関係式を求め、従来の微小振幅波理論と比較することによりその基本的な特性を明らかにする。

まず、一定水深上を x 軸の正の方向に進む定常進行波を考え、 $\eta = e^{i(kx - \sigma t)}$ とおく。ここで k は波数、 σ は角周波数である。線形理論を扱っているので振幅は 1 としている。今の段階で波数 k は未知である。式 (61) の形式から q_m に関しても

$$q_m = \hat{q}_m e^{i(kx - \sigma t)}, \quad (m = 1, 2, 3) \quad (62)$$

のように仮定できる。これらの η, q_m を式 (58)~(60) に代入すると振幅 $\hat{q}_m$ に関する代数方程式が得られる。これを解いて $\hat{q}_m$ を求め、 η とともに式 (61) に代入し整理すると、支配方程式の固有の分散関係式が次のように求められる。

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = (kh)^2 \frac{10395 + 1260(kh)^2 + 21(kh)^4}{10395 + 4725(kh)^2 + 210(kh)^4 + (kh)^6} \quad (63)$$

これは次の微小振幅波理論の分散関係式と対応する式である。

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = kh \tanh kh \quad (64)$$

図 5 はこの理論と微小振幅波理論の分散関係式 (63) と (64) の比較をしたもので、縦軸には $h/L_o (= \sigma^2 h/g/(2\pi))$ 、横軸には $h/L (= kh/2\pi)$ を用いている。この図より、 $h/L < 1$ 以下において両者はよく一致しているが、 $h/L > 1$ においてはこの理論と微小振幅波理論との差異が大きくなっていくことがわかる。群速

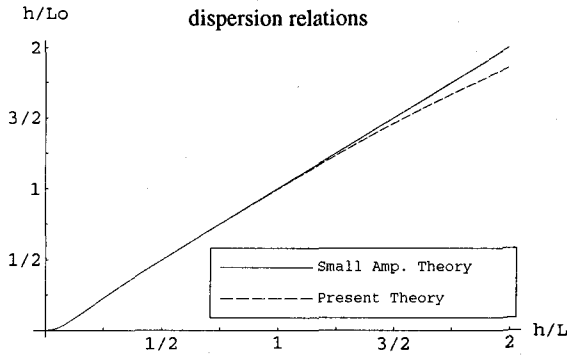


図-5 分散関係式の比較

度 C_g は $\partial\sigma/\partial k$ で表され、これは分散関係式の微係数に相当する。式 (63) は式 (64) の *Padé* 近似表現になっている。一般に、関数値の近似精度に比べ、微係数の近似精度は低い。従って、群速度 C_g についてもその精度を調べる必要がある。ここでは群速度係数 C_g/C について調べることにする。本理論における群速度係数は次のようになる。

$$\frac{C_g}{C} = \frac{30}{495 + 60kh^2 + kh^4} \frac{343035 + 83160kh^2 + 14049kh^4 + 564kh^6 + 10kh^8}{10395 + 4725kh^2 + 210kh^4 + kh^6} \quad (65)$$

図 6 は、この理論における波速 C 、群速度係数 C_g/C の微小振幅波理論に対する相対誤差 (%) を示したものである。この図より、 $h/L < 0.6$ 以下においては相対誤差 0.1% 以下の精度で波速、群速度が一致していることがわかる。 $h/L > 0.6$ になると群速度の精度が急激に下がり、 $h/L \approx 0.75(3/4)$ で 0.5%、 $h/L \approx 0.85$ で 1% に達する。このことから、この理論は比水深約 1/2 以下の規則波に対して高い精度で適用可能であることがわかる。

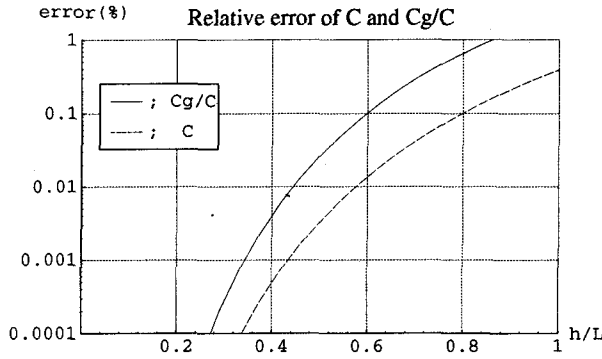


図-6 速度，群速度係数の相対誤差

4.5 入射境界の作成法

領域の両端における境界条件，特に入射境界の取扱は重要な問題である．本計算では一方の端は反射壁とした．入射波境界は次のように取り扱った．この理論では入射境界において η, q_1, q_2, q_3 の4変数の値を与える必要がある．このうち η については観測可能な物理量であるので問題ない． q_1, q_2, q_3 については，角周波数 σ が与えられれば微小振幅波理論を用いて変動圧力 $\bar{p}$ を式 (52) の様な形式で与えることができる．このとき q_m は式 (53) を用いて求められる．ただし，波数 k は与えなければならない．またこの波数 k は時間とともに変動すべきである．もし，一定の k を与えるとすれば不規則な波の入射条件を正しく与えたとは言えないであろう．

波数 k は角周波数 σ が与えられれば式 (63) あるいは式 (64) で与えられるものとする．また，角周波数 σ は時間とともに変化するものとする．この時間の関数となる角周波数 σ は規則波のときに成立する $\partial^2 \eta / \partial t^2 = -\sigma^2 \eta$ の関係式により求めることにする．しかし，この式を素直に計算すると $\eta \sim 0$ の時に発散し，まともな角周波数 σ の時系列が求められない．ここでは，入射境界における水位変動の時系列 $\eta_{in}(t)$ が与えられたとき，以下に示す方法により，角周波数 σ の時系列を求める．

まず，与えられた水位変動 $\eta_{in}(t)$ とその Hilvert 変換 $\tilde{\eta}_{in}(t)$ を用いて複素水位変動 $\zeta(t)$ を次のように求める．

$$\zeta(t) = \eta_{in} + i\tilde{\eta}_{in} \quad (66)$$

$\tilde{\eta}_{in}(t)$ と $\eta_{in}(t)$ はそれぞれの複素フーリエ係数 $\tilde{H}(\omega)$ と $H(\omega)$ の間に次のような関係があるので，これを用いて $\tilde{\eta}_{in}(t)$ を容易に求めることができる．*

$$i\tilde{H} = \begin{cases} H & , \text{ for } \omega > 0 \\ 0 & , \text{ for } \omega = 0 \\ -H & , \text{ for } \omega < 0 \end{cases} \quad (67)$$

角周波数 $\sigma(t)$ の時系列は次式で求められる．

$$\sigma(t) = -\Re \left\{ \frac{d^2 \zeta / dt^2}{\zeta} \right\} \quad (68)$$

ここで $\Re$ は実数部を表す．

*後野 (1992) の論文ではこの式の左辺に複素数の i が抜け落ちている．本稿の式が正しい．

4.6 数値計算結果の一例

ここでは、式(58)~(60)と式(61)の不規則波への基礎的な適用性を調べる。不規則波の伝播変形の基礎的な性質を抽出するために、一様水深場を一方向に伝播する、基本周波数の異なる、2組の波群の伝播を計算する。

4.6.1 計算条件

計算領域は約2km、2つの波群の基本周期は3.0sと9.0sで、水深は7mである。基本周期を用いた比水深はそれぞれ1/2と1/10となる。節点間隔と時間間隔は最も短周期側の波の分割の程度により定まる。この計算では節点間隔を周期3sの波の波長の1/20、時間間隔は周期の1/16とした。なお波群は sech^2 型の包絡波形で、入射端において4~7波程度の長さとなるようにし、包絡波形の最大振幅はどちらの波群も1とした。

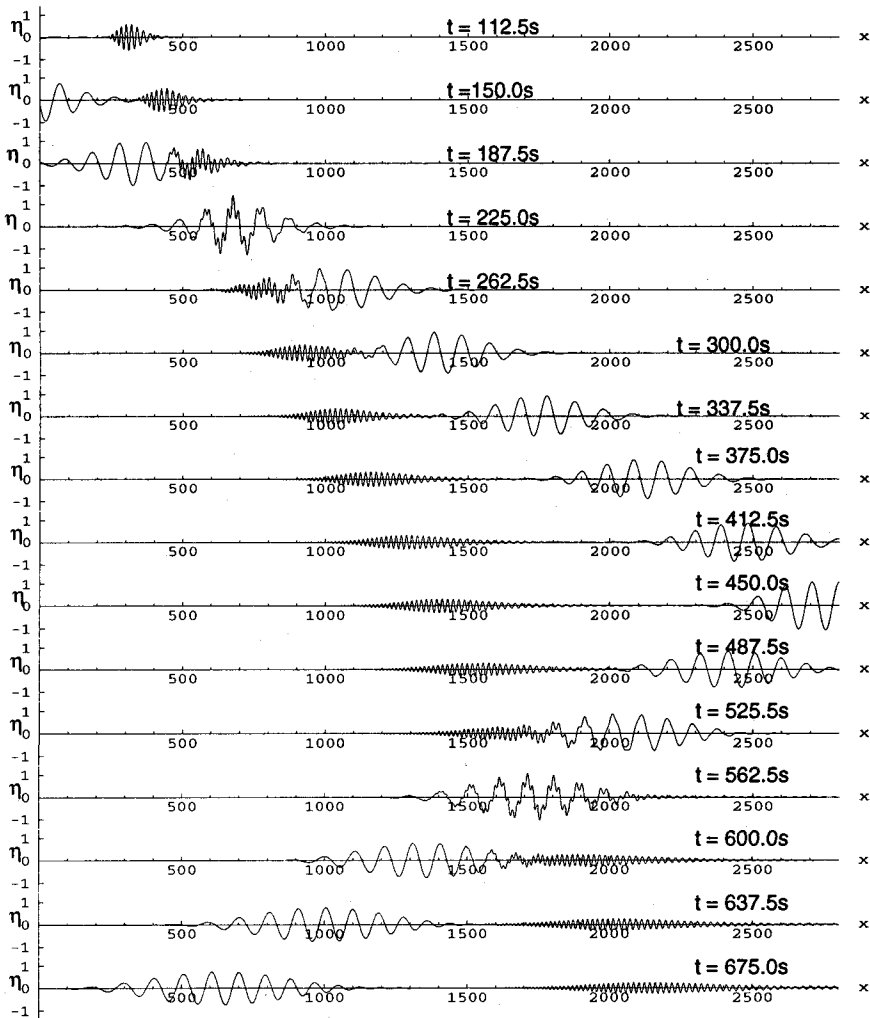


図-7 基本周波数の異なる2つの波群の伝播変形計算の結果

4.7 数値計算結果

図7は計算結果を水位変動 η の空間波形の形式で示したもので、各図はそれぞれ 37.5s 毎の結果である。なお、横軸の値は接点番号を示している。図中には短周期の波群が先行し、これを長周期の波群が追いつき、追い越し、さらに反射壁で反射し、再び短周期の波群と衝突し通り抜けていく様子が表れている。また個々の波群は、伝播とともに前後に広がりながら、振幅が小さくなっていく。波群の中央部の伝播速度は微小振幅波理論の群速度とほぼ一致している。

ここで用いた波群は数波長の長さを有し、それぞれが非常にせまいスペクトル幅を有する不規則波である。線形理論であるので、個々の波群は周波数分散により、伝播とともに分散していく。また、波群間の干渉も表れないので、個々の波群はそれぞれの群速度でお互いに独立に伝播する。しかし、水位変動 η は個々の波群による水位変動の重ね合わせたものになる。

すなわち、図に示された結果は線形理論では当然の結果である。しかし、この結果は単一の方程式系により、 η の時間発展として求められたものであり、このことは式 (58)~(60), (61) が線形不規則波の時系列を直接求め得ることを示している。

5. 理論の比較

5.1 理論の背景と拡張性・実用性

前節までで議論してきた3つの理論について、二三の比較を行うことにする。比較検討すべき内容は多いが、ここでは理論を構築する背景となる基本的な考え方、理論の拡張性と実用化に対する問題点を中心に論議することとする。

これまでの理論の概要から見ても非定常緩勾配不規則波動方程式は他の2つに対して異なる立場から理論を構築していることがわかる。磯部等のこれまでの一連の研究から見ても理論の根底にあるのは規則波に対する緩勾配方程式である。本稿で紹介した有理式に基づく理論展開は、規則波の緩勾配方程式からはかけ離れた理論には見えるが、他の2つの理論と比べると緩勾配方程式を元にしていないことは間違いない。

一方、強分散性波動方程式と連成振動方程式は従来の緩勾配方程式とは異なる手法で理論を組み立てている。どちらの理論も物理的な基礎方程式から出発し、水平方向流速や変動圧力といった物理量の鉛直方向関数を仮定している。この点については緩勾配方程式も同様であるが、緩勾配方程式がただ一つの鉛直方向関数を用いているのに対して、これらの理論は複数の鉛直方向関数を用いられる。不規則な波動場を表現するためにこの複数の鉛直方向関数を用いることは非常に重要な問題である。

理論の拡張性について考えると、強分散性波動方程式と連成振動方程式は非線形性を取り入れるとができる(灘岡ら, 1993; 後野, 1994)。通常、非線形性を考慮する場合は運動方程式中の移流項に含まれる渦の存在を無視できなくなる。従来、非線形性を考慮した理論のほとんどが速度ポテンシャルを用いた理論であり、言い換えると渦無し流れに対する非線形理論であった。強分散性波動方程式と連成振動方程式はどちらも運動方程式を直接用いる理論であり、速度ポテンシャルを用いていないことから、渦を考慮することが可能である。特に、強分散性波動方程式は運動方程式を直接積分することから、非線形性を強慮する段階で渦の影響自体が運動方程式中に繁栄されている。これに対して連成振動方程式では非線形性を強慮する場合においても渦の効果は方程式中に渦度の形式で陽に表現されており(式(39)参照)、渦の影響を取り入れるためには渦度あるいは渦度の鉛直方向分布をモデル化して与えなければならない(後野, 1994)。

実用的な観点からみると、非定常緩勾配不規則波動方程式はすでに碎波後の波高(あるいはエネルギー)減衰を取り入れており、すでに平面波浪場への適用や海浜流の計算等とも組み合わせられており(石井ら, 1993)、最も実用化に近いといえる。しかし、非線形性の取り込については現段階では明らかにされていない。

5.2 研究者の基本的な考え方

これらの理論の背景，拡張性・実用性の差は研究者の基本的な考え方の差から生まれているように見える。あくまでも筆者の勝手な推測であることを断った上で，磯部・灘岡先生の研究の基本的な姿勢について少し述べておこう。これらの研究の最終的な目標の一つは海岸で生じる海浜流や漂砂を解明あるいは計算で求めることにある。海浜流を求めるためには波の特性が必要となる。この特性には当然砕波や砕波後の波高減衰も含まれる。

磯部先生はこれらの波の特性は線形理論で求めれば十分であり，もし非線形性の影響が必要な場合には補正することが可能であると考えておられるようである。また，砕波点の判定や砕波後の減衰についても波高の分布さえきちんと求めることができれば実用的には問題がないと考えておられるようである。

一方灘岡先生はこれらの波の特性を求めるにあたって，物理的なモデルを用いることを重視されているようである。本稿で紹介した強分散性波動方程式も砕波後の波高（エネルギー）減衰もきちんとした物理的モデルに基づいた理論により説明，計算すべきであると考えておられるようである。

5.3 鉛直方向分布関数の比較

ここでは鉛直方向分布関数の選びかたを解説しながら，強分散性波動方程式と連成振動方程式の比較を行う。この2つの理論に加えて，ブーシネスク方程式も議論の対象としよう。

ブーシネスク方程式にも様々な形式のものがあリ，それぞれに誘導方法や物理的な仮定が異なる。基本的にはブーシネスク方程式は長波性を仮定したものであり，物理量は鉛直方向にはほぼ一定とみなされる。物理量として例えば水平方向流速 u をとると，これを水表面流速 $\bar{u}$ を用いて次のように仮定する。

$$u = \bar{u}\{1 + \epsilon(1 + z/h)^2\} = \bar{u}\{1 + \epsilon z^2\} \quad (69)$$

ここで， ϵ は微小な無次元パラメータである。すなわち，物理量の鉛直方向分布を一定からわずかにだけ変化したものとし，その微小な変化を鉛直座標 z の2乗に比例した形式で与える。

このブーシネスク方程式を加えて，3つの理論の鉛直方向分布関数をまとめると表-1のようになる。

表-1 鉛直方向分布関数の比較

	ブーシネスク方程式	強分散性波動方程式	連成振動方程式
物理量	理論によって異なる	水平方向流速	変動圧力
鉛直方向分布関数	$1, z^2$	$\frac{\cosh k_m h z}{\cosh k_m h}$	$P_{2(m-1)}(\bar{z})$
項数	2	4	4
関数列の直交性	非直交関数列	非直交関数列	直交関数列
備考	理論によって関数形も多少変化する	k_m は適当に選ぶ	P_m は m 次のルジャンドル多項式

この表から明らかなようにブーシネスク方程式と連成振動方程式は z の多項式で鉛直方向分布を表現している。また，直交関数列を用いているのは連成振動方程式だけである。

もし，強分散性波動方程式の理論において直交関数列を用いることができれば k_m のような任意性のある係数は必要なくなる。また，強分散性波動方程式（式(26)）の係数行列 A が対角行列となる。係数行列 A が対角行列であれば，式の見通しもよく，数値計算での計算量も小さくなる。しかし，鉛直方向分布関数として連成振動方程式で用いられているルジャンドルの多項式を用いると問題が生じる。圧力を求める際に流速，すなわち，鉛直方向分布関数を二回不定積分しなければならない。この不定積分で次のような積分定数が出てくる。

$$c_1 z + c_2$$

実は、強分散性理論ではこの定数のうち c_1 を無視し、 c_2 を水面の力学的条件を満たすように定めている。ところが z の多項式であるルジャンドルの多項式を鉛直方向分布関数として用いるとこの積分定数を無視できなくなり、圧力の分布を決定できなくなってしまう。結局、強分散性波動方程式の理論に対しては z の多項式を用いるような鉛直方向分布関数を用いることができないということである。

鉛直座標 z の多項式で表現された鉛直方向関数にはもう一つの特性がある。通常、微小振幅波理論では速度ポテンシャルの鉛直方向分布が $\cosh kh\bar{z}$ の形式になる。これは水深が一定のときの解であるが、水深が急変する場合や浮体が存在する場合には散乱項と呼ばれる $\cos k_n h\bar{z}$, ($n = 1, 2, \dots$) の形式の解が必要となる。これらを2種類の関数は直交性を持ち、このため、 $\cos k_n h\bar{z}$ を用いて $\cosh kh\bar{z}$ を表現するというようなことはできない。さて、これらの関数をテイラー展開すると次のようになる。

$$\cosh kh\bar{z} = 1 + \frac{(kh\bar{z})^2}{2!} + \frac{(kh\bar{z})^4}{4!} + \frac{(kh\bar{z})^6}{6!} + \dots \quad (70)$$

$$\cos kh\bar{z} = 1 - \frac{(kh\bar{z})^2}{2!} + \frac{(kh\bar{z})^4}{4!} - \frac{(kh\bar{z})^6}{6!} + \dots \quad (71)$$

すなわち、鉛直座標 z (あるいは $\bar{z}$) の多項式であれば $\cosh$ も $\cos$ も同じ様に表現できるということである。この事は、ルジャンドルの多項式を用いている連成振動方程式は散乱項の必要な水深の急変部に対しても適用できることを示唆している。

6. ステップ地形への連成振動方程式の適用性

図-8中に示したような断面2次元において水深不連続部を有する領域を考える。ここでは連成振動方程式の水深不連続部への適用性を確認することが目的であるので、水深不連続部近傍において水深は一定であるとする。水深の不連続部を $x = x_0$ とし、この位置での全ての物理量を $x_0 + 0$ の極限值と $x_0 - 0$ の極限值に分けて考える。これは領域分割法と同様に領域を2つに分割することと同じである。例えば物理量として q_m を例にとると、以後これらを次のように表記することにする。

$$q_m^+ = q_m|_{x=x_0+0}, \quad q_m^- = q_m|_{x=x_0-0} \quad (72)$$

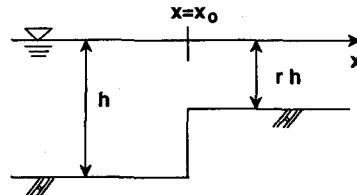


図-8 ステップ地形の模式図

領域を分割したとき、この境界上では力学的境界条件と運動学的境界条件が成り立たなければならない。まず、運動学的境界条件は次のようである。

$$u^- = \begin{cases} u^+, & \text{for } -rh < z < 0 \\ 0, & \text{for } -h < z < -rh \end{cases} \quad (73)$$

ただし、 $0 \leq r \leq 1$ である。 r が1を越えるときは式の表現を代えなければならない。上式を時間で微分し、水平方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (74)$$

を用いて u を消去し, $\bar{p}$ を用いて運動学的境界条件を表すと次のようになる.

$$\frac{\partial \bar{p}^-}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \bar{p}^+}{\partial x}, & \text{for } -rh \leq z \leq 0 \\ 0, & \text{for } -h \leq z \leq -rh \end{cases} \quad (75)$$

一方, 力学的境界条件は次のようである.

$$\bar{p}^- = \bar{p}^+, \quad \text{for } -rh < z < 0 \quad (76)$$

これらの物理的な関係式から q_m の方程式に変換するために, 式 (75) と式 (76) の両辺に重みとしてルジャンドルの多項式 $P_{2(m-1)}(\bar{z})$, $m = 1, 2, 3$ を掛け, 水底から水面 ($z = 0$) まで積分する. これにより次のような関係式が得られる.

$$q_m^+ = q_m^- + \sum_{k=1}^3 \{a_{m,k}\} q_k^-, + c_m \eta^- \quad \text{for } m = 1, 2, 3 \quad (77)$$

$$\frac{\partial q_m^-}{\partial x} = \frac{\partial q_m^+}{\partial x} + \sum_{k=1}^3 \{b_{m,k}\} \frac{\partial q_k^+}{\partial x}, + d_m \frac{\partial \eta^+}{\partial x} \quad \text{for } m = 1, 2, 3 \quad (78)$$

ここで, $a_{m,k}, b_{m,k}, c_m, d_m$ は不連続部の水深比 r の多項式で以下のような関数である.

$$a_{1,1} = (1-r)(-2+r)(8-72r+168r^2-132r^3+33r^4)/16 \quad (79)$$

$$a_{1,2} = 3(1-r)(-2+r)^2 r(12-22r+11r^2)/16 \quad (80)$$

$$a_{1,3} = 11(1-r)(-2+r)^2 r(2-6r+3r^2)/16 \quad (81)$$

$$a_{2,1} = 5(-2+r)(-1+r)r(-168+532r-462r^2+121r^3)/128 \quad (82)$$

$$a_{2,2} = (-1+r)(128+1568r-6160r^2+7280r^3-3520r^4+605r^5)/128 \quad (83)$$

$$a_{2,3} = 55(-2+r)^2(-1+r)r(4-20r+11r^2)/128 \quad (84)$$

$$a_{3,1} = 9(2-r)(-1+r)r(-28+238r-259r^2+75r^3)/128 \quad (85)$$

$$a_{3,2} = 9(1-r)r(48-504r+756r^2-409r^3+75r^4)/128 \quad (86)$$

$$a_{3,3} = (1-r)(-128+136r-3824r^2+6571r^3-3681r^4+675r^5)/128 \quad (87)$$

$$b_{1,1} = -1+r \quad (88)$$

$$b_{1,2} = 0 \quad (89)$$

$$b_{1,3} = 0 \quad (90)$$

$$b_{2,1} = 5(-1+r)r(-128+67r)/128 \quad (91)$$

$$b_{2,2} = (-1+r)(128+128r-97r^2)/128 \quad (92)$$

$$b_{2,3} = 55(-1+r)r^2/128 \quad (93)$$

$$b_{3,1} = 9(-1+r)r(-128+522r-483r^2+126r^3)/128 \quad (94)$$

$$b_{3,2} = 9(-1+r)r^2(-150+141r-34r^2)/128 \quad (95)$$

$$b_{3,3} = (-1+r)(128+128r+458r^2-1027r^3+359r^4)/128 \quad (96)$$

$$c_1 = g(1-r)(2-r)(8-72r+168r^2-132r^3+33r^4)/16 \quad (97)$$

$$c_2 = 5g(-2+r)(-1+r)r(168-532r+462r^2-121r^3)/128 \quad (98)$$

$$c_3 = 9g(-2+r)(-1+r)r(-28+238r-259r^2+75r^3)/128 \quad (99)$$

$$d_1 = 0 \quad (100)$$

$$d_2 = 15g(1-r)r^2/128 \quad (101)$$

$$d_3 = 9g(-1+r)r^2(-10+35r-14r^2)/128 \quad (102)$$

図-9は図-8に示したような水深不連続部を有する水域に深い側から波が入射した場合の透過率と反射率を示したものである。図中の実線は井島(1971)による理論解を示し、丸印が連成振動方程式による結果を示している。パラメーターは $k_0h(= \sigma^2h/g)$ である。この図より連成振動方程式による理論値と非常に良く一致し、連成振動方程式が水深不連続部へも適用可能であることが分かる。また、 x_0^- と x_0^+ における波高を比較すると、計算結果の範囲内において両者はたかだか0.1%程度の誤差で一致していた。このことは、本理論では水深不連続部における生じる波高の不連続も生じないことを意味する。

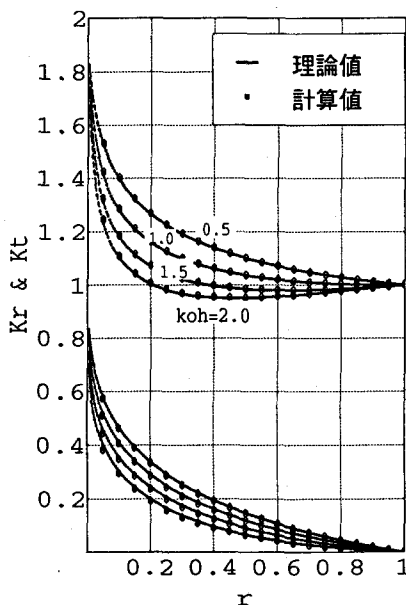


図-9 ステップ地形における透過・反射率

7. おわりに

ここ数年の間に急速に発達して来た非定常不規則波動場を非定常解析するための3つの理論について述べて来た。従来、不規則波の取り扱いには、ごく一部の数値計算法を除いて、成分波の重ね合わせでしか表現できなかった。ここで紹介した理論はこの不規則波を直接時系列で解くことが可能である。これはこれまでの理論の枠組みから大きくはみ出た新しい理論である。

これらの理論は著しい拡張性を内在させるものもあり、不規則波の波変形に限らず海岸付近の波と流れの理論にまで影響を与える可能性を秘めている。

これらの理論が整備され、発展すれば海岸工学における波変形や波流れの解析手法が塗り替えられるものと推測される。今まさにどんどんと研究が進み、続々と新しい成果が報告されていく分野です。できるかぎり多くの人がこの分野に参加し、活発な議論ができることを期待します。

このような機会に研究者として参加できることは大きな喜びであるとともに、この分野の研究者としては後発組に属する私が、先達を差し置いてこのようなものをまとめたことに対して申し訳ないと思っています。書き上げたものに目を通すと磯部先生や灘岡先生から「何や、これは!」というお叱りの言葉が聞こえてきそうで(大阪弁のわけないか)、耳を塞ぎながら締切日を横目にキーボードを叩いています。最後に執筆を嫌がっ

ていた私に, "そらお前も書かなアカンデ"と強く説得頂いた河田先生, 出口先生に謝意を表します.

参考文献

- Abbot, M. B., H. M. Petersen and D. Skovgaard(1978):On the numerical modeling of short waves in shallow water, Jour. Hyd. Res., Vol. 16, No. 3, pp.173~204.
- Berkhoff, J.C.W. (1972) :Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th Coastal Eng. Conf., pp.471-490
- Smith, R. and T. Spinks (1975): Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol.72, pp.383-384
- 石井敏男・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993):非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海講 40, pp.31-35
- 井島武士 (1971); 最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用, 1971 年度水工学に関する夏季研修会講義集, B コース
- 磯部雅彦 (1994):有利式近似に基づく非定常不規則波動方程式, 第 40 回海岸工学論文集, pp.26~30.
- 片山裕之・佐藤慎司 (1994):Boussinesq 方程式を用いた不規則波の浅水・碎波変形の計算法, 第 40 回海岸工学論文集, pp.16~20.
- 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 第 38 回海岸工学論文集, pp.45~50.
- 小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃 (1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式の高精度化, 第 39 回海岸工学論文集, pp.91~95.
- 樺木 亨・李 宗燮・出口一郎・松山 章 (1985):非線形分散理論による波浪変形および海浜流の数値予測モデルについて, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp.238~242.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993a): 不規則波動シミュレーションのための強分散波動方程式の導出とその基本特性の検討, 土木学会論文集, No. 467/II-23, pp.83~92.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993b):新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場の解析の試み, 第 40 回海岸工学論文集, pp.6-10.
- 後野正雄 (1993):緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式とその特性, 第 40 回海岸工学論文集, pp.21-25.
- 後野正雄・平井良昌 (1994a):定常連成振動方程式とそのステップ地形への適用性, 第 41 回海岸工学論文集, 掲載予定
- 後野正雄 (1994b):強非線形平面不規則波動場に対する連成振動方程式とその基礎的特性, 第 41 回海岸工学論文集, 掲載予定
- 森口繁一・宇田川欽久・一松 信 (1960): 数学公式Ⅲ, 岩波全書, 岩波書店, p310