

多方向不規則波の屈折・回折・碎波変形計算モデル

Numerical Models of Refraction, Diffraction and Breaking of
Multi-Directional Random Waves

磯 部 雅 彦
Masahiko ISOBE

1 はじめに

1.1 波浪変形の諸要素

深海域から浅海域に入射した波浪は、水深変化や構造物の影響によって変形する。図-1は浅海域における波浪変形の諸要素を模式的に示したものである。浅海域に波が進入すると、底面での水粒子運動が拘束されるようになる。これによって、波が海岸線に直角に入射する場合には浅水変形が起こり、斜めに入射する場合には屈折が起こる。流れが存在する場合にはそれによっても変形する。そして、水深が波高と同程度になると碎波が起きる。また、構造物前面では反射、背後では回折が起こり、さらに構造物が透過性ののであれば透過が起こる。これらの他にも底面摩擦や内部粘性による波浪減衰や、水面での風応力による波の発生・発達なども考えられる。いずれも波形・波高の変化を伴うものであり、構造物の設計、港の防波堤配置の検討、海浜流や漂砂量の計算などにおいて、それらの変形の予測は欠かせない。

これらの波浪変形を解析するのに、まず最も簡単な微小振幅の規則波（微小振幅波理論）が用いられるが、実際の海の波は不規則であり、また、荒天時には有限振幅性も無視できない。

本稿では、平面的変形における波浪の不規則性、特に方向分散性の重要性について述べるとともに、平面的波浪場の数値シミュレーションに際して、波浪の不規則性を取り入れる方法について議論する。

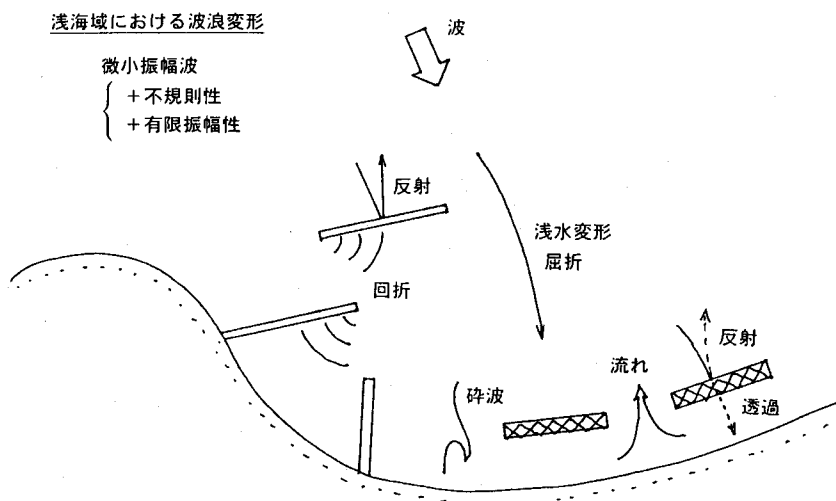


図-1 浅海域における波浪変形の諸要素

1.2 波浪の不規則性の重要度

不規則波は、振幅が微小であるという条件のもとで、周期（周波数）と進行方向（波向）が異なり互いに独立な無限の規則的な成分波の重ね合わせとして表現できる。このとき、周波数と波向に関するエネルギーの密度を表すものが方向スペクトルである。そして、周波数分散性ととも方向分散性も考慮した不規則波を特に多方向不規則波と呼び、波向は一定として周波数のみに関するエネルギー密度を考える単一方向不規則波と区別する。

不規則波を便宜的に規則波として取り扱う場合、不規則波の代表値として有義波高と有義波周期が取られることが多く、これらに対する規則波としての変形計算を行って波浪変形を予測することになる。図-2は平行等深線海岸において水深変化にともなう規則波の屈折係数の変化を図示したものである。水深の減少により波向が海岸に直角に近づくにつれて隣同士の波向線の間隔が増大し、これによって単位幅あたりのエネルギー輸送量が減少し波高を減少させる効果を生じる。これを表す係数が屈折係数である。したがって、初めから海岸線に直角に波が入射すれば屈折係数は1から変化しないが、斜め入射になるほど波向の変化が大きいかから同じ水深での屈折係数は小さくなる。

次に図-3は光易型の方向関数を用いた標準的な方向スペクトルを有する多方向不規則波の屈折係数を図示したものであり（合田・鈴木，1975）， $S_{\max}=10$ は方向分散性の高い風波を， $S_{\max}=75$ は方向分散性の低いうねりを表している。この計算は与えられた方向スペクトルから各成分波のエネルギーを求め、各成分波の屈折計算結果をそれぞれのエネルギーに応じて重ね合わせるというものである。規則波の場合と違い、主波向が海岸線に直角（ $\alpha_p = 0^\circ$ ）であっても成分波には直角でないものも含まれるため、水深の減少とともに屈折係数が減少する。特に、方向分散性が高い $S_{\max} = 10$ の場合にこれが顕著である。しかし、反対に主波向が海岸線に平行に近い場合には、多方向不規則波には波向が海岸線に直角に近い成分波も含まれる関係で、屈折係数は規則波よりも大きくなる。

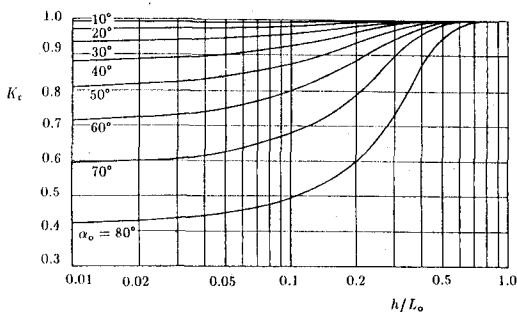


図-2 平行等深線海岸における規則波の屈折係数

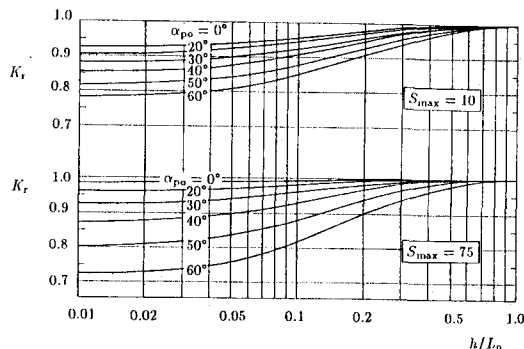


図-3 平行等深線海岸における不規則波の屈折係数（合田・鈴木，1975）

図-4および5は半無限防波堤周辺の回折による波高比，すなわち回折係数 K_d の分布を，同様な手法で規則波および不規則波に対して求めた結果であり，主波向は防波堤に直角としてある（合田・鈴木，1975）。規則波では $x/L = 0$ (L は波長) の付近で回折係数の急激な変化がみられるのに対し，多方向不規則波では変化が全体にわたってゆるやかになっている。これは方向分散性によって急激な変化が均されたためである。また，多方向不規則波では，防波堤のすぐ背後にも直接進入する成分波があるので，この領域の静穏度が規則波ほどよくならないこともわかる。参考のために図-5には，防波堤によって遮蔽されない波向の範囲の成分波が回折せずに進入するものとして，そのエネルギーが K_d^2 (エネルギーは波高の自乗に比例するから) となる方向を点線で示している。いずれの回折係数に対しても点線と実線とはよく一致し，不規則波の方向分散性が

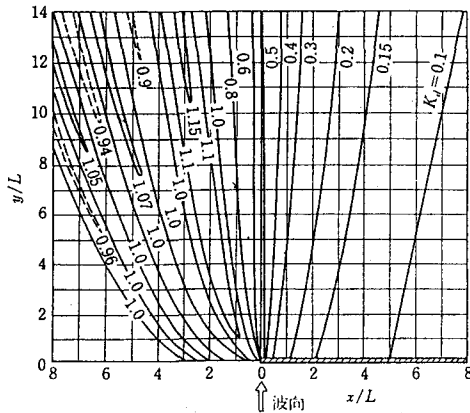


図-4 半無限防波堤による規則波の回折係数

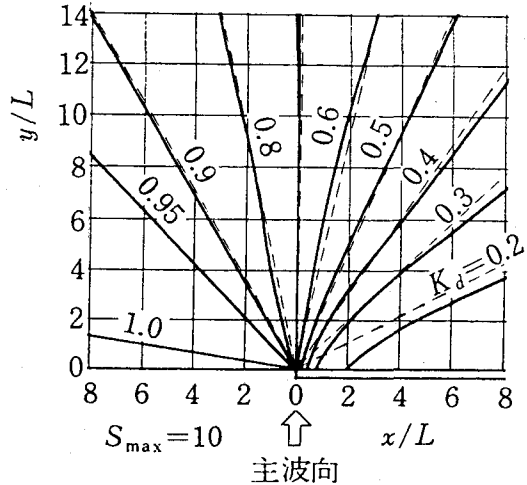


図-5 半無限防波堤による不規則波の回折係数と
不規則波エネルギーの方向分布

回折係数に対して支配的になっていることがわかる。特にこの例では、方向分散性を考慮するならば、成分波の回折係数は単純に波の直接進入域で1、遮蔽域で0ととってもよいほどなのである。

以上のように、屈折や回折に対しては波浪の多方向不規則性の影響が大きい。また、波浪の不規則性は波ごとの砕波点を変動させるために、砕波点付近の不連続性を緩和することにもなる (Yamaguchi, 1988; 合田・渡辺, 1990)。これらは、有義波高や有義波周期を用いて規則波で代表させて計算した結果と比べて無視できない差を生み出すので、不規則波としての取り扱いが不可欠となる。以下においては、屈折、回折、砕波を含む波浪の平面的変形を数値シミュレーションする場合に、どのように波浪の多方向不規則性を取り扱うかを中心に解説する。このうち、第2節は既往の研究成果の取りまとめであり、第3節は最近著者らが開発した方法について述べる。

2 種々のモデル方程式の特徴と多方向不規則波浪への適用例

2.1 モデル方程式の分類

平面的波浪場といっても水粒子運動でみれば鉛直方向を加えて3次元になるから、平面的波浪場を解析するためには本来3次元の基礎方程式を解く必要がある。しかし、現在のコンピューターの記憶容量と計算速度から考えると、3次元的な扱いができる問題は極めて限られた狭領域の問題だけである。実務的な多くの問題を解析するためには、基礎方程式を鉛直方向に解析的に積分して得られる2次元のモデル方程式が用いられる。鉛直積分を行う際には必ず何らかの仮定が必要となるが、その仮定によってそれぞれの特徴と適用限界を有する種々のモデル方程式が得られる。

表-1は主なモデル方程式と適用範囲を示している。これらのうち、波向線法とエネルギー平衡方程式は屈折計算のモデル方程式、ヘルムホルツ方程式と高山の方法は回折計算のモデル方程式であり、緩勾配方程式およびこれから派生する非定常緩勾配方程式・非定常緩勾配不規則波動方程式・放物型波動方程式、ならびに数値波動解析法は屈折と回折を同時に含む方程式である。ここまでのすべてが基本形として線形方程式なに対し、非線形長波方程式とブシネスク方程式は浅海域における非線形波浪変形を取り扱うものである。

不規則波への適用性からみると、エネルギー平衡方程式は方向スペクトルの屈折変形を直接計算すること

表-1 平面波浪場のモデル方程式の理論的適用範囲

計 算 手 法 (参考文献例)	浅水変形	屈折	回折	反射	碎波モデル	任意水深	流れの影響	不規則性	有限振幅性	計 算 領 域			備 考
										広	中	狭	
波向線法 (屈折図法) (Keller, 1958)	○	○	×			○	○	○	△	○	○	○	波速に有限振幅性を含める
エネルギー平衡方程式 (Karlsson, 1969)	○	○	▽	△	○	○	○	○	×	○	○	○	
ヘルムホルツ方程式 (Gaillard, 1984)	○	○	○	○	×	○	×	○	×			○	傾域ごとに一様水深のみ
高山の方法 (高山, 1981)			○	○	×	○	×	○	×		○	○	一様水深のみ
緩勾配方程式 (Berkhoff, 1972)	○	○	○	○	○	○	○	○	△			○	
非定常緩勾配方程式 (渡辺・丸山, 1984)	○	○	○	○	○	○	○		×			○	碎波モデル・境界条件処理が容易
数値波動解析法 (伊藤・谷本, 1971)	○	○	○	○		○			×			○	
非定常緩勾配不規則波動方程式 (藤ら, 1991)	○	○	○	○	○	○		○	×			○	
放物型波動方程式 (Radder, 1979)	○	○	○	△	○	○	○	○	△		○	○	
非線形長波方程式 (Kellerら, 1960)	○	○	○	○	○	×	○	○	○			○	鉛直加速度が無視される浅海域に限定される
ブシネスク方程式 (Peregrine, 1967)	○	○	○	○		○	○	○	○			○	原方程式は浅海域に限定される

○：基本形で適用可能，○：応用形で一般的適用可能，△：応用形で部分的適用可能
▽：基本理論では考慮されていないが実用上適用可能，空白：研究により適用できる可能性あり，×：適用不可能。
計算領域＝広：深海から浅海を含む程度，中：構造物周辺の海域程度，狭：港内程度。

ができる方程式であり，非定常緩勾配不規則波動方程式によれば線形な不規則波の屈折・回折を時系列的に取り扱うことができる。その他の線形方程式も重ね合わせ法によって不規則波を取り扱うことは原理的に可能である。また，非線形長波方程式およびブシネスク方程式によれば浅海域での非線形不規則波動を時系列的に取り扱うことが原理的に可能である。ただし，ブシネスク方程式については，数値計算上の問題が完全に解決されておらず，一般的な適用には今後の研究が必要である。

以下では，それぞれのモデル方程式について不規則波への適用法を中心に解説するが，モデル方程式については Liu(1990) による解説も大変参考になる。

2.2 波向線法

波向線法は規則波の屈折計算用のモデル方程式であり，緩勾配上を単一成分波が進行するものとして得られる (Keller, 1958)。この方法では，eikonal 方程式と呼ばれる位相 χ を決定するための式 (1) と波高 (波エネルギー E) を決定するための式 (2) を解く。

$$(\nabla\chi)^2 = k^2 \quad (1)$$

$$\nabla(EC_g) = 0 \quad (2)$$

ここに， k は水深から分散関係式によって決定される波数， C_g は群速度ベクトルである。式 (1) によって χ が計算されれば，定義式

$$\mathbf{k} = \nabla\chi \quad (3)$$

により波数ベクトルが求められ，これより波向が決定する。

屈折の基礎方程式は互いに同値な種々の表示形がある。まず、式(3)より波数ベクトルが非回転となることから

$$\nabla \times \mathbf{k} (= \frac{\partial k_y}{\partial x} - \frac{\partial k_x}{\partial y}) = 0 \quad (4)$$

であり、式(1)を使わずに上式から直接波数ベクトル $\mathbf{k}$ を求めてもよい。また、1本の波向線に沿って沖側から波向角 α の変化を計算するためには、次式が用いられる。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial m} \quad (5)$$

ここで、 s は波向線方向、 m は波峰線方向と一致する曲線座標系であり、 C は波速を表している、上式は波数ベクトルの非回転式(4)と同値である。

波向線が決定されると2本の波向線の間隔 b から屈折係数が求められるが、波向線に沿ってこれを直接計算するための微分方程式が次式である (Munk・Arthur, 1952)。

$$\frac{d^2 b}{ds^2} + p \frac{db}{ds} + qb = 0 \quad (6)$$

$$p = -\frac{1}{C} \left(\cos \alpha \frac{\partial C}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$q = \frac{1}{C} \left(\sin^2 \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

屈折の方程式の解法は種々考えられているが、式(5)により沖から何本もの波向線を決めることにより屈折図を描く方法が広く知られている。この方程式には回折の効果が含まれていないため、浅瀬がある場合や図-6のように複雑な地形に対しては、波向線が交差して計算上の波高が無限大になるなどの不都合が生じる。

不規則波に対しては単位幅あたりの波向線の本数がエネルギーフラックスに対応していることから、交差に無関係に波向線を引き、最後に単位幅あたりに通った波向線の数から波高を決定する便宜的方法が Bouws・Battjes(1982) によって提案されている。

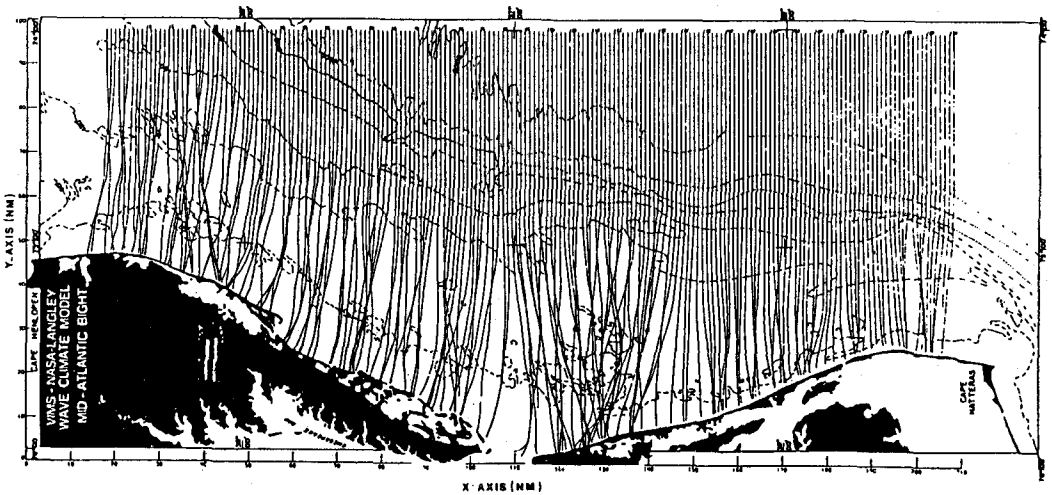


図-6 複雑な地形によって交差する波向線 (Bouws・Battjes, 1982)

2.3 エネルギー平衡方程式

エネルギー平衡方程式は成分波の屈折計算式を解析的に重ね合わせることで、直接的に不規則波の屈折計算ができるようにしたものである (Karlsson, 1969)。これは地点ごとのある着目する波向に関するエネルギー保存式である。微小な時間 dt の間に、水平方向に $C_g dt$ だけエネルギーが輸送されるだけでなく、距離 $C_g dt$ だけ進行する間に屈折によって $\partial\alpha/\partial s \cdot C_g dt$ だけ波向が変化するために、着目する微小な波向範囲の両側からのエネルギーの出入りが生じることに、この分をエネルギー保存式に取り入れる必要がある。これにより、方向スペクトル $S(f, \theta)$ に対するエネルギー平衡方程式として

$$\nabla(SC_g) + \frac{\partial}{\partial\theta}(SC_{g\theta}) = 0 \quad (9)$$

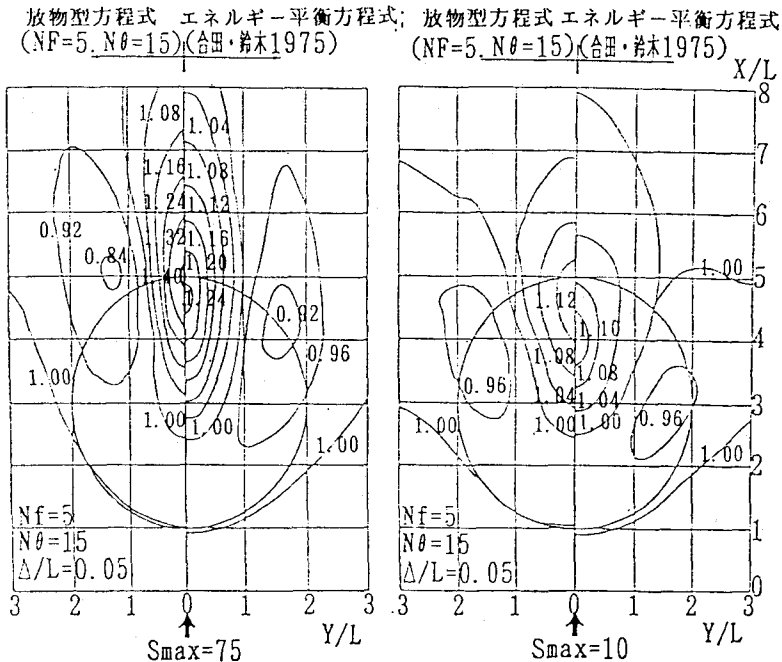
$$C_{g\theta} = \frac{\partial\alpha}{\partial s} C_g = -\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial m} C_g = \frac{C_g}{C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sin\theta - \frac{\partial C}{\partial y} \cos\theta \right) \quad (10)$$

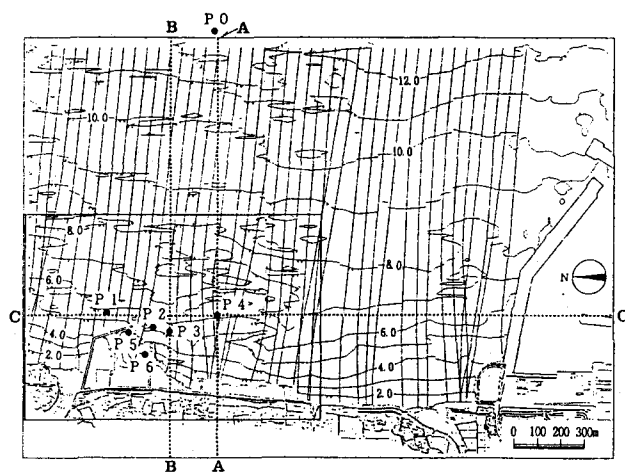
が得られる。

エネルギー平衡方程式は1階の偏微分方程式であり、位相を含まないために実数の方程式となる。このため、数値計算は比較的容易で楕円型方程式などと比べると広領域の計算が可能である。理論的に明らかなように、方程式には屈折の効果だけが含まれていて回折効果は入っていないが、数値拡散 (西村, 1987) が物理的な回折に似た結果を生じさせるといわれている。

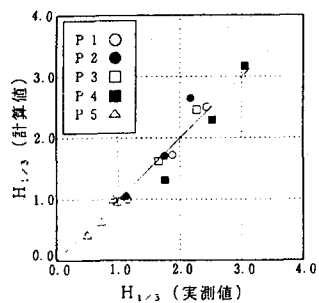
この方法の拡張形として、流れによる不規則波の屈折計算法は酒井ら (1981) や山口ら (1989) によって提案されており、また、碎波減衰モデルの組み込みも行われている (高山ら, 1991; 清水ら, 1992)。

図-7のような球面浅瀬背後においても問題なく計算結果を得ることができ (合田・鈴木, 1975; 丸山ら, 1984)、波高分布がそれぞれの右半分に示されている (芹沢ら, 1990)。また、現地に適用して波高および方

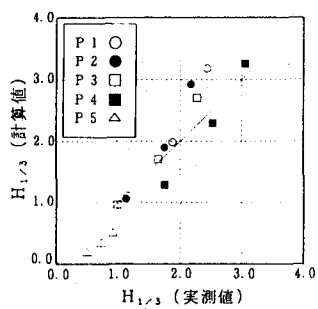




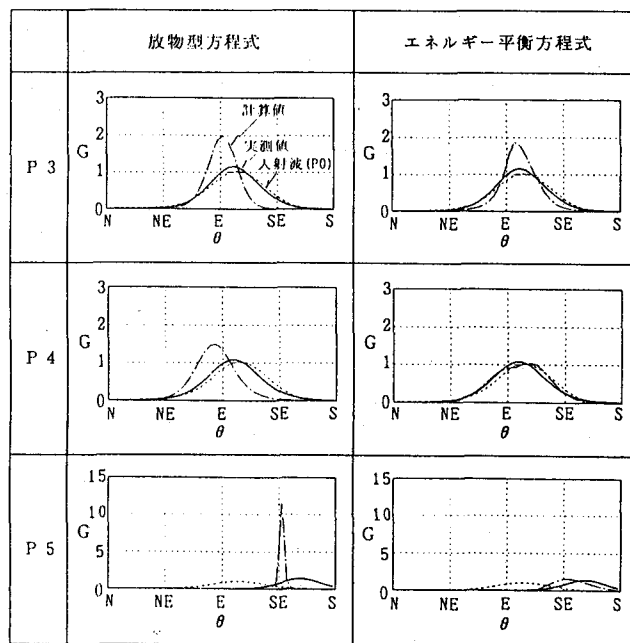
(a) 海底地形と観測点



(b) 波高 (放物型波動方程式)



(c) 波高 (エネルギー平衡方程式)



(d) 方向関数

図-8 エネルギー平衡方程式と放物型波動方程式によって計算される波高および方向関数の実測結果との比較 (清水ら, 1992)

向関数の実測結果と比べたものが図-8であるが、比較的良好一致を示す。特に、屈折を理論的に考えると極浅海域において方向スペクトルがきわめて集中するのに対し、エネルギー平衡方程式では数値拡散のためあまり集中せず、結果として実測値と一致することになる。

2.4 ヘルムホルツ方程式

一様水深を仮定する代わりに波動成分の単一性の仮定を取り除くと、回折のモデル方程式としてヘルムホルツ方程式が得られる。水面変動 η を振幅 $\hat{\eta}$ と時間変動項 $e^{-i\omega t}$ とに分離し、

$$\eta = \text{Re} [\hat{\eta} e^{-i\omega t}] \quad (11)$$

のように表すと、 $\hat{\eta}$ に対してヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \hat{\eta} + k^2 \hat{\eta} = 0 \quad (12)$$

が得られる。この方程式を構造物の配置に対応した様々な境界条件のもとで解くことにより、構造物周辺の波高分布が求められる。数値計算においてはグリーン関数を導入した境界要素法 (Brailler・Gaillard, 1967; Lee, 1971; Gaillard, 1984; 近藤ら, 1987) を用いると効率がよい。

不規則波への適用は重ね合わせ法によって行う。図-5もその結果の一例である。また、図-9は大規模港湾内の静穏度計算に適用した結果 (MIC) を、3地点における波高と1地点における波向について実測値と比較したものであるが、一致は良好であるといえる (大中ら, 1990)。

2.5 高山の方法

複雑な形状の港の内部の波高分布を不規則波に対して求めるために、成分規則波の計算を近似的なものによって簡略化したのが高山 (1981, 1982) の方法である。解は半無限防波堤と島堤による回折波の重ね合わせとして近似的に表示されている。この方法では、簡略化された解が用いられるため、不規則波を多数の成分波に分割して計算するのも比較的容易である。

図-10において、(a) はどのような回折波と反射波を考慮するかを示しており、また、(b) は反射の最大回数の違いによる計算結果の違いを表している。大規模港湾で岸壁の反射率が高くない場合には、多重反射の影響は小さくなく、2～3回の反射を考慮すれば十分となる。

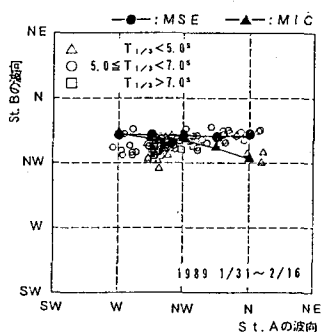
2.6 緩勾配方程式

傾斜海浜上に構造物が設置されているような場合には屈折と回折が同時に起こるが、このような場合に対するモデル方程式として導かれたのが緩勾配方程式であり、次式で表される (Berkhoff, 1972)。

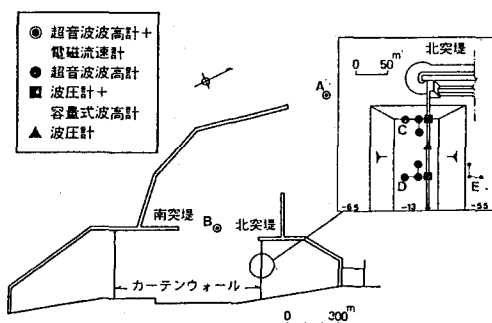
$$\nabla (C C_g \nabla \hat{\eta}) + k^2 C C_g \hat{\eta} = 0 \quad (13)$$

この方程式は、一様水深の条件下でヘルムホルツ方程式と一致し、進行波の単一成分波に対して屈折のモデル方程式に、波高分布による回折効果が含まれることを除いて一致する (Berkhoff ら, 1982)。

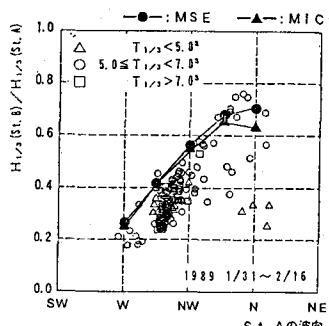
この方程式によって不規則波を取り扱う場合も重ね合わせ法を用いることになる (佐藤ら, 1988) が、1成分波に対する計算時間もある程度かかるため、多数の成分波の計算にはかなりの時間がかかる。図-9には成分波に対する緩勾配方程式を差分法によって解いて重ね合わせた結果も MSE として表示されている。実測値やグリーン関数法による計算値との一致は良好であるものの、グリーン関数法と若干の差が見られるのは、主に開口部の境界条件の処理法の違いによるものであると思われる。



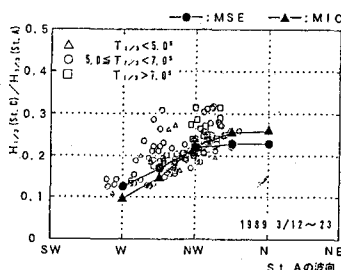
(b) St.Bの波向



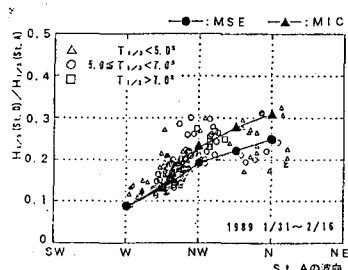
(a) 港の形状と観測点



(c) St.Bの波高

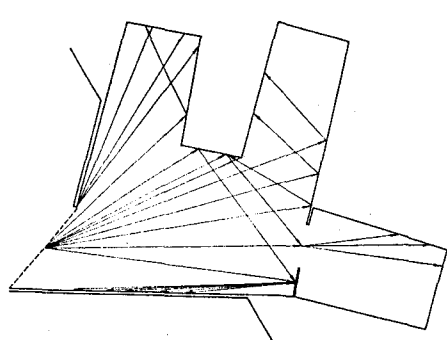


(d) St.Cの波高

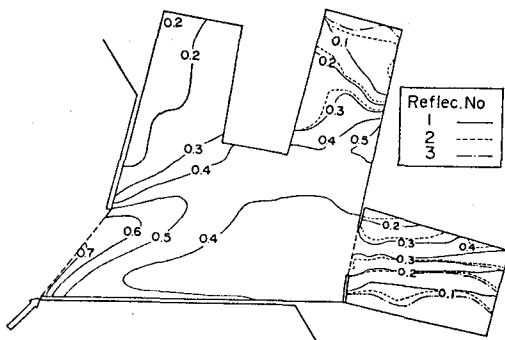


(e) St.Cの波高

図-9 グリーン関数法 (MIC) と差分法 (MSE) によって計算される港内波浪の実測結果との比較 (大中ら, 1990)



(a) 回折波と反射波の波向ベクトル



(b) 港内波高分布 (反射次数=1,2,3)

図-10 モデル港に対する高山の方法の計算例 (高山, 1981)

2.7 放物型波動方程式

放物型波動方程式は、楕円型偏微分方程式である緩勾配方程式を数値計算の容易な放物型方程式に近似したものである。精度と計算の容易さの両面から注目を集め、現在までに多くの近似式が提案されているが、Radder(1979)による基本的な表示式を示せば

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} = \left[ik - \frac{1}{2kCC_g} \frac{\partial (kCC_g)}{\partial x} \right] \hat{\eta} + \frac{i}{2kCC_g} \frac{\partial}{\partial y} \left(CC_g \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y} \right) \quad (14)$$

となる。これは x に関して1階の微分係数しか含まれていないので、 x 軸方向、すなわち岸方向に順次解を求めていくことができる。この点で、楕円型偏微分方程式であるヘルムホルツ方程式や緩勾配方程式を差分法によって解く場合には、全領域の未知数を連立させて解かなければならないので記憶容量と計算時間が多く必要となる。

成分波に対する計算の容易さから、不規則波に対して多数の成分波の計算を行うこともそれほど難しくなく、不規則波の碎波モデルも組み込んだ計算法も提案されている(磯部, 1986)。その際、Kirby(1986)が導いた放物型波動方程式は波向角の適用範囲が広いと、有力な式となるであろう。図-8には磯部(1986)の放物型方程式による波高の計算結果も示されているが、実測値との一致はエネルギー平衡方程式によるものよりも良好である。しかし、方向関数でみると、極浅海域で計算結果が非常に尖るのに対し、実測結果はあまり尖らない。これには方向スペクトルの推定法自体の問題や非線形性の問題があると思われるが、今後詳細な検討が必要である。図-11は沖合い防波堤背後の屈折・回折域の波浪場を計算した結果を実測値と比較したものである。矢印の長さが有義波高を、方向が平均波向を示し、実線が実測値に、点線が計算値に対応しているが、両者の一致は良好である(磯部ら, 1988)。

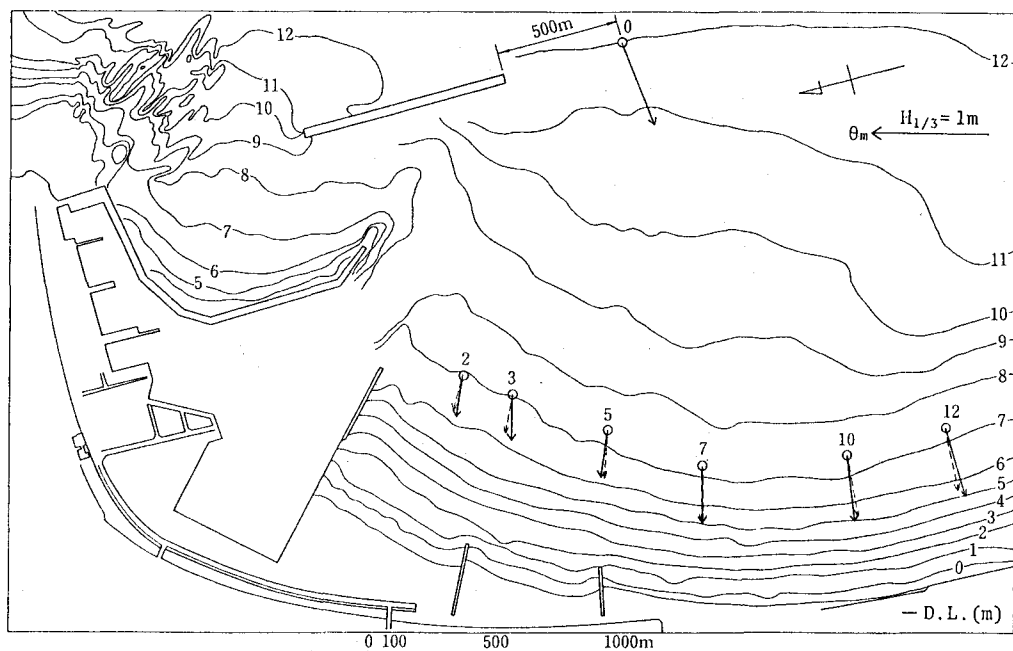


図-11 放物型波動方程式による波高の計算結果と実測結果との比較(磯部ら, 1988)

2.8 非定常緩勾配方程式

非定常緩勾配方程式は、緩勾配方程式に時間項を導入し水面変動 η と線流量ベクトル $\mathbf{q}$ の連立偏微分方程式に書き改めることにより、開境界条件や碎波減衰を取り扱いやすくしたものであり(西村ら, 1983; 渡辺・丸山, 1984), 基本形は

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + C^2 \nabla \eta = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n} \nabla (n \mathbf{q}) = 0 \quad (16)$$

と表される。ここに、 $n (= 1/2 + kh/\sinh 2kh)$ は浅水度係数であり、上式は緩勾配方程式と同値である。また、数値波動解析法(伊藤・谷本, 1971, 1972)のモデル方程式は、式(16)の n を除いたものとなっているが、このために浅水係数が正確に評価されず補正係数が必要となるので、非定常緩勾配方程式の方が優位にあるといえる。

この方程式も線形であるから原理的には重ね合わせ法により不規則波を取り扱うことが可能であるが、1成分波の数値計算にもある程度の計算時間を要するので多成分の重ね合わせは今のところ1次元問題で行われているに過ぎない(渡辺ら, 1988)。不規則波への拡張における計算時間の問題や碎波モデルの組み込みの問題を解決するために、非定常緩勾配不規則波動方程式が誘導されているが、これについては第3節で詳しく解説する。

2.9 非線形長波方程式

非線形長波方程式は水面変動 η と水平流速ベクトル $\mathbf{u}$ の連立偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla [(h + \eta) \mathbf{u}] = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta = 0 \quad (18)$$

ここに、 $\mathbf{u}$ は水平流速ベクトル、 h は静水深である。上式では、圧力の鉛直分布における鉛直加速度の影響が無視され、静水圧分布が仮定されているものの、非線形性は厳密に取り入れられ、また、不規則波に対しても時系列的な解析が可能となっている。

碎波を段波とみなすことにより、1次元(Kellerら, 1960; Freeman・Le Méhauté, 1964) および2次元(余ら, 1992) に対して規則波の浅水碎波変形が解析されているが、不規則波に対する適用例はない。

2.10 ブシネスク方程式

ブシネスク方程式は有限振幅性と分散性の影響をある程度取り込むことによって得られるモデル方程式であり、数種の形式があるが(後藤, 1984), 基本的なものは非線形長波方程式の運動方程式に分散項を付加した形になっている。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla [(h + \eta) \mathbf{u}] = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \eta - \frac{h^3}{3} \nabla \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{u} \right] = 0 \quad (20)$$

この方程式はある程度浅海域に有効な方程式であるが、深海域にも適用範囲を拡張した方程式が提案されている(Madsenら, 1991)。この方程式には非線形項や高次の微分項が含まれるため、数値計算に際しては差分式の安定性や精度をあげるなどの工夫が必要である。時系列的な計算では、現在のところ、島堤背後の規則波の回折が解かれた例がある(Madsenら, 1991)が、不規則波に適用した例はない。

3 非定常緩勾配不規則波動方程式とその応用

3.1 重ね合わせ法と時系列解析法

不規則波の変形を取り扱う場合に、現象が線形ならば、まず図-12のように入射波を規則的な成分波に分解し、それぞれの成分波の変形計算を行った後で結果を重ね合わせればよい。しかし、単一の成分波の変形に対しても計算時間がかなりかかる場合には、多成分について計算を行うのに無理がある。さらに、砕波現象のような非線形現象をモデル化すると含まれる係数値が全エネルギーなどの関数となるため、成分波を全く独立に計算することはできなくなる。

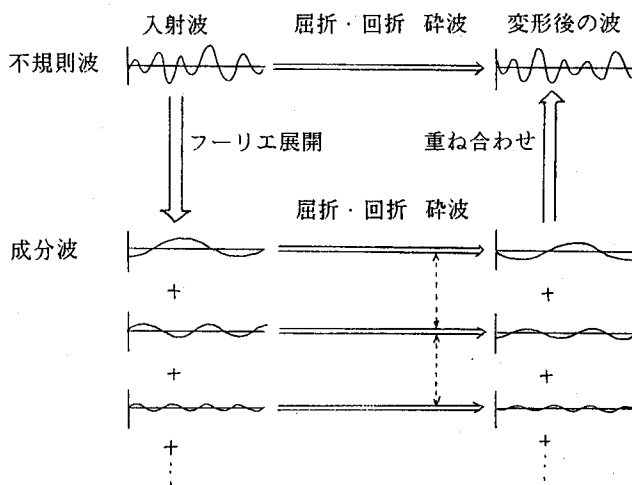


図-12 重ね合わせ法による不規則波の変形計算と直接的時系列解析による不規則波の変形計算

これに対し、不規則波の変形が時系列的に直接計算できれば、砕波の合理的なモデル化が容易になったり、全体の計算時間が短縮化されることが期待される。規則波に対しては、従来、緩勾配方程式、あるいはそれから派生する非定常緩勾配方程式や放物型方程式が実務的な波浪変形の諸問題に適用され、その有効性が実証されてきた。そこで、著者ら(窪ら, 1991, 1992; 小竹ら, 1992)は、緩勾配方程式を不規則波の変形の時系列解析に適用できるように変形し、非定常緩勾配不規則波動方程式を導いた。以下においては、その基礎理論と応用例について述べる。

3.2 非定常緩勾配不規則波動方程式の誘導

不規則な水面変動 η を成分規則波の重ね合わせとして表現すると

$$\eta = \text{Re} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \hat{\eta}_i e^{-i\omega_i t} \right] \quad (21)$$

となる。ここに、 ω_i は i 番目の成分波の角周波数であり、 $\hat{\eta}_i$ はその成分波の振幅で一定値をとる。 η から代表的角周波数 ω による時間変動分のみを

$$\eta = \text{Re} \left[\hat{\eta} e^{-i\omega t} \right] \quad (22)$$

によって分離し、さらに $\bar{\eta}$ を成分波の重ね合わせにより

$$\eta = \text{Re} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\eta}_i e^{-i\bar{\omega}t} \right] \quad (23)$$

と表示すれば、式(21)および(23)より

$$\bar{\eta}_i = \hat{\eta}_i e^{-i\Delta\omega_i t} \quad (24)$$

$$\Delta\omega_i = \omega_i - \bar{\omega} \quad (25)$$

となって、 $\bar{\eta}_i$ は時間の関数となる。そして、たとえば

$$\frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial t} = -i \Delta\omega_i \bar{\eta}_i \quad (26)$$

である。

屈折・回折による波浪変形では $\bar{\eta}_i$ は緩勾配方程式を満たす解として得られるが、式(24)のようにこれに時間項を乗じた $\bar{\eta}_i$ も緩勾配方程式を満たすことは明らかである。すなわち

$$\nabla [(CC_g)_i \nabla \bar{\eta}_i] + (k^2 CC_g)_i \bar{\eta}_i = 0 \quad (27)$$

であるが、ここで係数 CC_g および $k^2 CC_g$ には角周波数 ω_i に対応する値を用いなければならない。したがって、成分波ごとに係数値が異なってしまう、不規則波の全成分をまとめて計算することができない。そこで、若干の工夫をすることにより、係数値を成分によらない一定値とすることにより、不規則波の(時間変動する)振幅 $\bar{\eta}$ を直接解けるようにすることがここでの目的となる。

係数値を代表角周波数における値のまわりに Taylor 展開すると $\Delta\omega_i$ のべき乗が現われるが、式(26)のように $\bar{\eta}_i$ の時間微分係数にも $\Delta\omega_i$ のべき乗が現われることから、各べき乗を対応する次数の $\bar{\eta}_i$ の時間微分係数によって消去することができる。たとえば、Taylor 展開を1次までとれば、式(27)の第1項および第2項は

$$(CC_g)_i \nabla \bar{\eta}_i = \left[\overline{CC_g} + \frac{d(\overline{CC_g})}{d\omega} \Delta\omega_i \right] \nabla \bar{\eta}_i = \overline{CC_g} \nabla \bar{\eta}_i + i \frac{d(\overline{CC_g})}{d\omega} \nabla \left(\frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial t} \right) \quad (28)$$

$$(k^2 CC_g)_i \Delta \bar{\eta}_i = \left[\overline{k^2 CC_g} + \frac{d(\overline{k^2 CC_g})}{d\omega} \Delta\omega_i \right] \bar{\eta}_i = \overline{k^2 CC_g} \bar{\eta}_i + i \frac{d(\overline{k^2 CC_g})}{d\omega} \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial t} \quad (29)$$

となり、右辺の係数は代表角周波数において評価すべき一定値となる。そこで、これらを式(27)に代入すれば

$$\nabla [\bar{\alpha} \nabla \bar{\eta}] + i \nabla \left[\bar{\beta} \nabla \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha} \bar{\eta} + i \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \bar{C} \bar{C}_g \\ \bar{\beta} &= \frac{\bar{C}}{\bar{k}} \left[-2(1 - \bar{n}) + \frac{1}{2\bar{n}} (2\bar{n} - 1) \{1 - (2\bar{n} - 1) \cosh 2\bar{k}h\} \right] \\ \bar{\gamma} &= \bar{k} \bar{C} \left[2\bar{n} + \frac{1}{2\bar{n}} (2\bar{n} - 1) \{1 - (2\bar{n} - 1) \cosh 2\bar{k}h\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となり、成分波によらない一定値を係数とする偏微分方程式が得られる。したがって、もはや成分波ごとに計算してから解を重ね合わせる必要はなく、 $\bar{\eta}$ をこの式によって直接解けばよい。すなわち

$$\nabla [\bar{\alpha} \nabla \bar{\eta}] + i \nabla \left[\bar{\beta} \nabla \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha} \bar{\eta} + i \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

を解くことによって $\bar{\eta}$ が求められ、さらに式(23)より η が決定される。この式は不規則波の屈折・回折を計算するための、時間項の含まれた偏微分方程式なので、非定常緩勾配不規則波動方程式と呼ぶ。

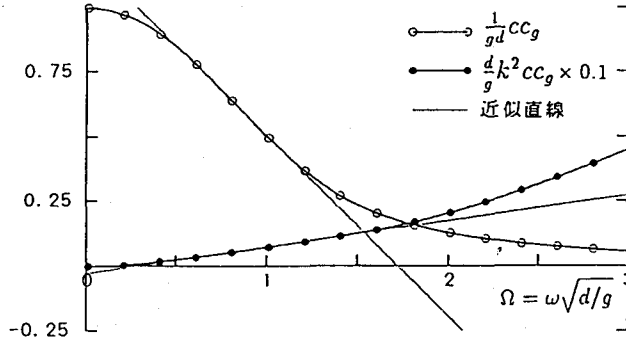


図-13 1次近似非定常緩勾配不規則波動方程式における係数の近似度 (窪ら, 1991)

第1次の Taylor 展開を用いた場合、係数 CC_g および $k^2 CC_g$ の ω に対する関数形を直線により近似したことになる。その精度を示す一例が図-13であるが、代表角周波数付近では問題がないと考えられるものの、代表角周波数から離れると誤差が大きく、特に近似直線の値が負になると波浪減衰などの不都合が起こる。そのような場合には、さらに近似度をあげる必要がある (小竹ら, 1992)。

なお、碎波減衰をモデル化するにはエネルギー減衰係数を f_D とする減衰項を追加して

$$\nabla [\bar{\alpha} \nabla \bar{\eta}] + i \nabla \left[\bar{\beta} \nabla \left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \right) \right] + \bar{k}^2 \bar{\alpha} (1 + i f_D) \bar{\eta} + i \bar{\gamma} (1 + i f_D) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

とすればよい。 f_D の表示式については窪ら (1991) が与えている。

3.3 数値計算の方法

非定常緩勾配不規則波動方程式 (33) は、初期条件および境界条件を与えることによりその数値解を求めることができる。その際、数値計算の効率、精度および安定性を勘案すると ADI 法を用いるのがよいであろう。

ADI 法を用いる場合の式 (33) の差分形としては、奇数ステップおよび偶数ステップにそれぞれ対応してたとえば以下になる。

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\alpha}_{i+1,j} - \bar{\alpha}_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{\bar{\eta}_{i+1,j}^{n+1} - \bar{\eta}_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \bar{\alpha}_{i,j} \frac{\bar{\eta}_{i-1,j}^{n+1} - 2\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} + \bar{\eta}_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{\bar{\alpha}_{i,j+1} - \bar{\alpha}_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{\bar{\eta}_{i,j+1}^n - \bar{\eta}_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \bar{\alpha}_{i,j} \frac{\bar{\eta}_{i,j-1}^n - 2\bar{\eta}_{i,j}^n + \bar{\eta}_{i,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \\ & + i \frac{\bar{\beta}_{i+1,j} - \bar{\beta}_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{(\bar{\eta}_{i+1,j}^{n+1} - \bar{\eta}_{i-1,j}^{n+1}) - (\bar{\eta}_{i+1,j}^n - \bar{\eta}_{i-1,j}^n)}{2\Delta x \Delta t} + i \bar{\beta}_{i,j} \frac{(\bar{\eta}_{i-1,j}^{n+1} - 2\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} + \bar{\eta}_{i+1,j}^{n+1}) - (\bar{\eta}_{i-1,j}^n - 2\bar{\eta}_{i,j}^n + \bar{\eta}_{i+1,j}^n)}{(\Delta x)^2 \Delta t} \\ & + i \frac{\bar{\beta}_{i,j+1} - \bar{\beta}_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{(\bar{\eta}_{i,j+1}^n - \bar{\eta}_{i,j-1}^n) - (\bar{\eta}_{i,j+1}^{n-1} - \bar{\eta}_{i,j-1}^{n-1})}{2\Delta y \Delta t} + i \bar{\beta}_{i,j} \frac{(\bar{\eta}_{i,j-1}^n - 2\bar{\eta}_{i,j}^n + \bar{\eta}_{i,j+1}^n) - (\bar{\eta}_{i,j-1}^{n-1} - 2\bar{\eta}_{i,j}^{n-1} + \bar{\eta}_{i,j+1}^{n-1})}{(\Delta y)^2 \Delta t} \\ & + \bar{k}_{i,j}^2 \bar{\alpha}_{i,j} (1 + f_D) \frac{\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} + \bar{\eta}_{i,j}^n}{2} + i \bar{\gamma}_{i,j} (1 + f_D) \frac{\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} - \bar{\eta}_{i,j}^n}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\alpha}_{i+1,j} - \bar{\alpha}_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{\bar{\eta}_{i+1,j}^n - \bar{\eta}_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \bar{\alpha}_{i,j} \frac{\bar{\eta}_{i-1,j}^n - 2\bar{\eta}_{i,j}^n + \bar{\eta}_{i+1,j}^n}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{\bar{\alpha}_{i,j+1} - \bar{\alpha}_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{\bar{\eta}_{i,j+1}^{n+1} - \bar{\eta}_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \bar{\alpha}_{i,j} \frac{\bar{\eta}_{i,j-1}^{n+1} - 2\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} + \bar{\eta}_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \\ & + i \frac{\bar{\beta}_{i+1,j} - \bar{\beta}_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{(\bar{\eta}_{i+1,j}^n - \bar{\eta}_{i-1,j}^n) - (\bar{\eta}_{i+1,j}^{n-1} - \bar{\eta}_{i-1,j}^{n-1})}{2\Delta x \Delta t} + i \bar{\beta}_{i,j} \frac{(\bar{\eta}_{i-1,j}^n - 2\bar{\eta}_{i,j}^n + \bar{\eta}_{i+1,j}^n) - (\bar{\eta}_{i-1,j}^{n-1} - 2\bar{\eta}_{i,j}^{n-1} + \bar{\eta}_{i+1,j}^{n-1})}{(\Delta x)^2 \Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{\beta_{i,j+1} - \beta_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{(\bar{\eta}_{i,j+1}^{n+1} - \bar{\eta}_{i,j-1}^{n+1}) - (\bar{\eta}_{i,j+1}^n - \bar{\eta}_{i,j-1}^n)}{2\Delta y \Delta t} + i \bar{\beta}_{i,j} \frac{(\bar{\eta}_{i,j-1}^{n+1} - 2\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} + \bar{\eta}_{i,j+1}^{n+1}) - (\bar{\eta}_{i,j-1}^n - 2\bar{\eta}_{i,j}^n + \bar{\eta}_{i,j+1}^n)}{(\Delta y)^2 \Delta t} \\
& + \bar{k}_{i,j}^2 \bar{\alpha}_{i,j} (1 + f_D) \frac{\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} + \bar{\eta}_{i,j}^n}{2} + i \bar{\gamma}_{i,j} (1 + f_D) \frac{\bar{\eta}_{i,j}^{n+1} - \bar{\eta}_{i,j}^n}{\Delta t} = 0
\end{aligned} \quad (35)$$

ここに、下付の2つの添字はそれぞれ x および y 軸方向の格子点の番号を、上付の添字は時間ステップ番号を示す。また、砕波によるエネルギー減衰係数 f_D は、時間ステップごとに得られる空間的な水面波形から砕波モデルを用いて評価する。上の2式を行列表示すると係数行列が x または y 軸方向の一系列の変数値を未知数とする3重対角行列になるために、短い計算時間で解を求めることができ、しかもある程度の精度と安定性が保証される。

実際の計算において、まず、初期条件としては静水状態を考え、差分式(34)および(35)では3段階の時間ステップでの変数が現われることから2ステップ分の変数値を0とおく。

次に、境界条件であるが、周辺が防波堤で囲まれているような場合にはその法線方向の微分係数を0とおけばよい。しかし、境界といっても実際には仮想的な境界で外海と連続している場合には、計算領域の波が外海へ自由に出ていくような境界条件、すなわち開境界条件を課す必要がある。ここでは、図-14のように計算領域周辺にエネルギー減衰帯を設け、そこでの減衰係数 f_D を内側から外側に向かって強制的に0からある値に増加させた。これにより、減衰帯の内側境界で内部から外海へ向かう波が反射することなく、減衰帯内でエネルギーを失うことになり、開境界条件が実現できる。

さらに、沖側減衰帯においては入射波成分を加える必要がある。多方向不規則波としての入射波は、与えられた方向スペクトルから成分波の振幅を計算し、位相をランダムにして重ね合わせることによって得られる。しかし、上述の1次近似の非定常緩勾配不規則波動方程式では、精度的な問題から、取り扱える周波数の範囲に限りがある。そこで、図-15のように、高周波成分をカットしてその分のエネルギーを低周波数側のエネルギーにそれらのもとのエネルギーに比例して分配する。

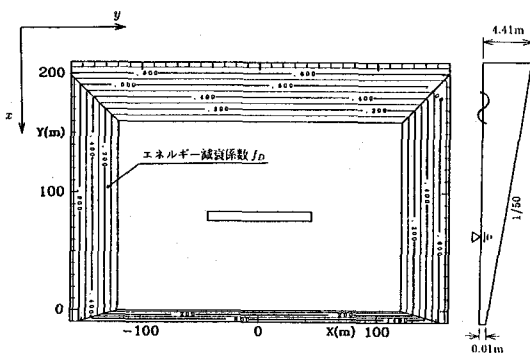


図-14 計算領域の一例 (窪ら, 1992)

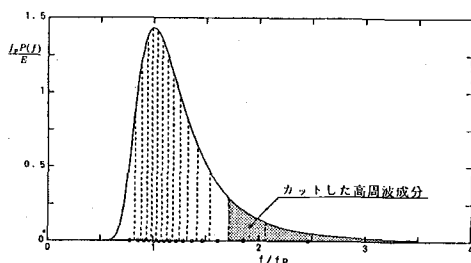


図-15 周波数分割の方法 (窪ら, 1992)

このようにして、時間ステップごとに入射波成分および砕波減衰係数を計算し、式(34)および(35)を境界条件とともに交互に解くという計算を繰り返すことにより、多方向不規則波の屈折・回折・砕波変形計算が時系列的に行えることになる。

3.4 非定常緩勾配不規則波動方程式の応用

図-16および17はそれぞれ深海条件および長波条件での一様水深中における2成分波の伝播計算を行った結果を示している。図から波速と群速度との関係が正確に現われていることが分かる。すなわち、非定常緩

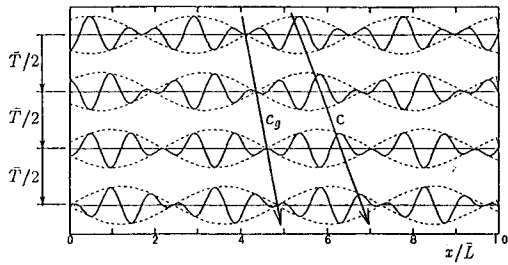


図-16 2成分波の伝播計算結果(深海条件)(窪ら, 1991)

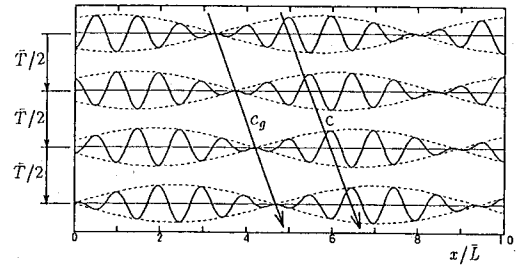
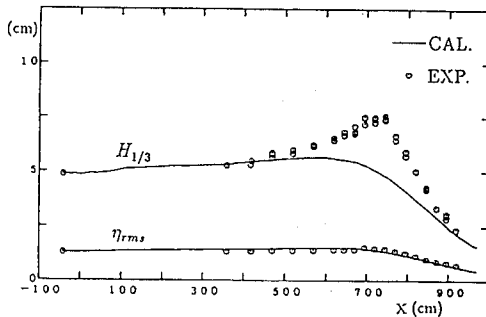


図-17 2成分波の伝播計算結果(長波条件)(窪ら, 1991)

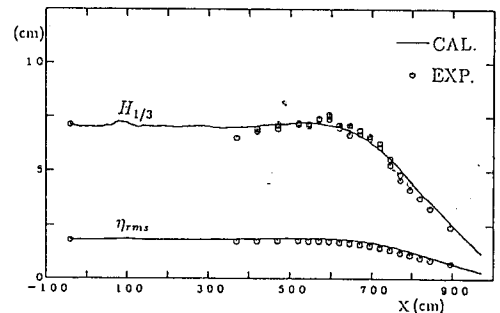
勾配不規則波動方程式では角周波数の違いによる波速の違いが取り込まれている。

図-18は不規則波の1次元浅水砕波変形の計算結果を、有義波高 $H_{1/3}$ および水面変動の rms 値 η_{rms} について実験値と比較したものである。入射波の波形勾配が小さい場合に砕波点付近の波高を過小評価する傾向があるが、これは有限振幅性を無視しているためである。しかし、エネルギーを代表する η_{rms} 値では一致は良好であるなど、砕波点付近の尖った波形に起因する誤差以外については大きな誤差はない。

図-19は case 3 について 4 地点の時間波形を計算結果と実験結果で比較したものである。(a) は不規則波

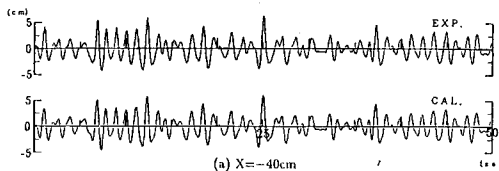


(a) case 1: $f_p=0.50\text{Hz}$, $H_{1/3}=5.4\text{cm}$

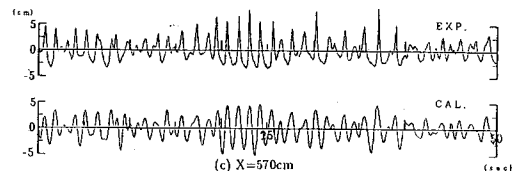


(b) case 3: $f_p=0.75\text{Hz}$, $H_{1/3}=9.2\text{cm}$

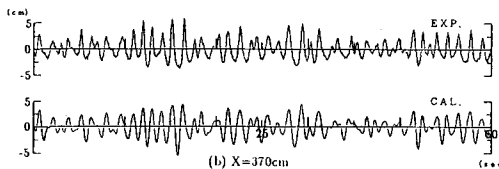
図-18 有義波高 $H_{1/3}$ と水面変動の rms 値 η_{rms} の計算値と実験値との比較 (窪ら, 1991)



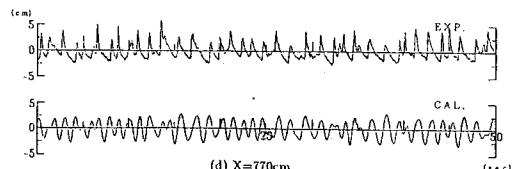
(a) $X=-40\text{cm}$



(c) $X=570\text{cm}$



(b) $X=370\text{cm}$



(d) $X=770\text{cm}$

図-19 水面変動 η の計算結果と実験結果との比較 (case 3)(窪ら, 1991)

を入射させる境界であり、両者が一致する。(b)のように砕波点よりもかなり沖側では両者の一致は良好である。しかし、(c)のように砕波点付近では実験波形が尖るのに対して、計算では線形理論を用いているために尖らない。また、(d)のように砕波帯内でも同様である。しかし、全体的に波群の進行する様子や、波エネルギーなどはよく再現されている。

図-20は、窪ら(1992)の方法による離岸堤周辺の波高分布の計算結果を規則波と多方向不規則波とで比較したものである。規則波では離岸堤前面に重複波が顕著に形成されるのに対し、多方向不規則波では離岸堤の直前を除いて波高変化が小さくなる。また、多方向不規則波では方向分散性のために離岸堤背後に回り込む波のエネルギーが大きくなる。

また、図-21は計算された波浪場からラディエーションストレスを計算し、さらにそれから海浜流を計算した結果を示している。不規則波では規則波に比べて波高分布がなめらかになるためにラディエーションストレスの勾配が小さくなり、その結果海浜流速は小さくなる。

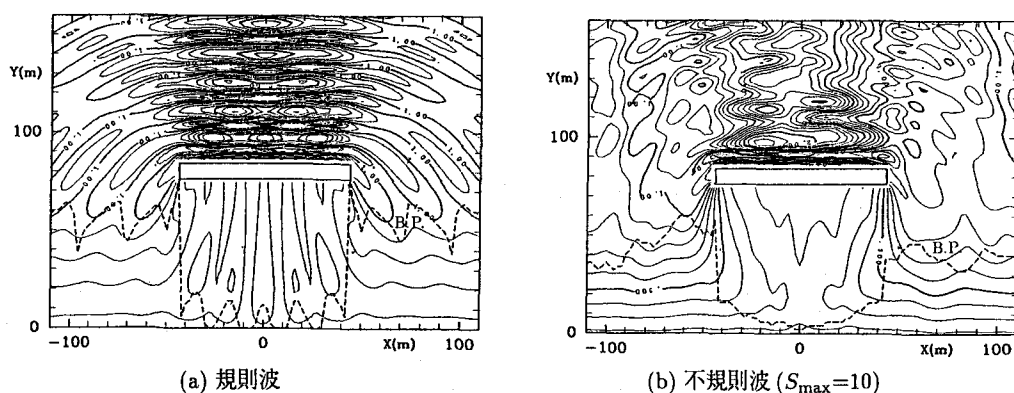


図-20 規則波と不規則波による離岸堤周辺の波高分布の計算結果比較

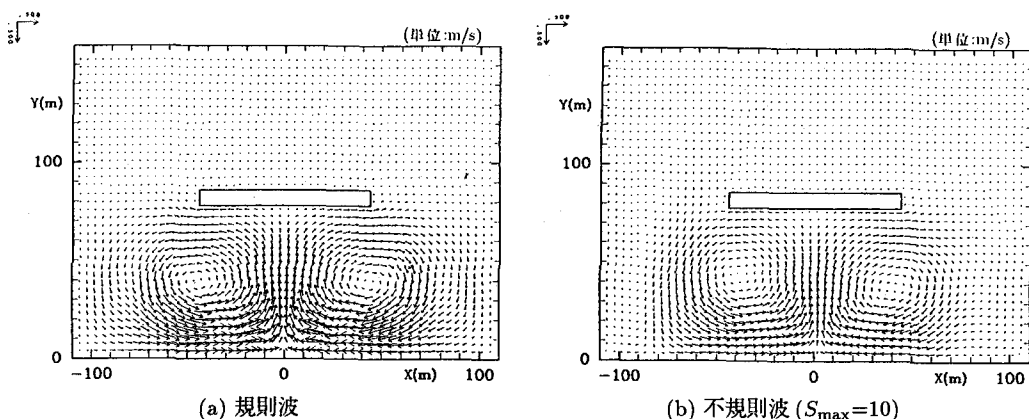


図-21 規則波と不規則波による離岸堤周辺の海浜流の計算結果の比較

4 おわりに

以上で見たように、規則波と不規則波では現象に有為な差異が認められる場合も多い。線形重ね合わせ法が有効である場合については、数値計算における多方向不規則波としての取り扱いが可能な場合も多く、さらに、非線形性の強い現象である砕波についても線形方程式に組み込むためのモデルが提案されている。

これらのうち、屈折が波浪変形の主因となる場合には、不規則波の屈折が取り扱えて計算が比較的容易であるという点で、エネルギー平衡方程式を用いるのがよいと思われる。また、屈折に加えて回折も起こる場合には放物型波動方程式を用いるのがよいであろう。いずれも不規則波の砕波モデルを組み込んだものも提案されている。さらに、多重反射が起こる場合には、一様水深ならヘルムホルツ方程式を、水深変化があれば緩勾配方程式に相当するものを用いる必要がある。ヘルムホルツ方程式に対しては境界要素法が適用できるので計算が高速化されるが、緩勾配方程式の場合にはある程度の計算時間が必要となり、不規則波の計算を行うためには大型の汎用コンピューターか高速のワークステーション程度を用いなければならない。不規則波の屈折・回折・反射・砕波を含んだ時系列解析が行える非定常緩勾配不規則波動方程式では、今のところ計算時間はさらに多くかかる。

このような状況から、屈折・回折に反射、透過、砕波を含み、さらに流れや海面・底面せん断力の影響も含んで、一般的で計算効率の高い計算法を開発することは今後の課題である。その際、不規則性とならんで重要な要素である波浪の非線形性を取り入れたモデルの一般化・実用化をはかることも必要である。

参考文献

- 1) 磯部雅彦(1986): 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法, 第33回海岸工学講演会論文集, pp. 134-138.
- 2) 磯部雅彦・泉宮尊司・堀川清司・清水琢三・大下哲則・関本恒治(1988): 屈折・回折領域における波浪場の現地観測, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 108-112.
- 3) 伊藤喜行・谷本勝利(1971): 数値波動解析法とその応用—構造物周辺の波—, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 67-70.
- 4) 伊藤喜行・谷本勝利(1972): 波向線交差域での波の屈折—数値波動解析法の応用(2)—, 第19回海岸工学講演会論文集, pp. 325-329.
- 5) 大中 晋・関本恒治・今井澄雄・寺田賢二・山田富朗(1990): カーテンウォール式取水口完成後における波浪・波力特性に関する現地観測, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 614-618.
- 6) 窪 泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃(1991): 非定常緩勾配不規則波動方程式について, 海岸工学論文集, 第38巻, pp. 46-50.
- 7) 窪 泰浩・小竹康夫・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃(1992): 非定常緩勾配不規則波動方程式を用いた波浪場・海浜流場・海浜地形変化の予測モデル, 海岸工学論文集, 第39巻, (印刷中)
- 8) 合田良実・鈴木康正(1975): 光易型方向スペクトルを用いた不規則波の回折・屈折計算, 港湾技研資料, No.230, 45p.
- 9) 合田良実・渡辺則行(1990): 沿岸流速公式への不規則波モデルの導入について, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 210-214.
- 10) 小竹康夫・磯部雅彦・渡辺 晃(1992): 非定常緩勾配方程式の高精度化, 海岸工学論文集, 第39巻, (印刷中)
- 11) 後藤智明(1984): アーセル数が多い場合の非線形分散波の方程式, 土木学会論文集, 第351号/II-2, pp. 193-201.
- 12) 近藤浩右・清水琢三・山田耕一(1987): グリーン関数を用いた港内波スペクトルの計算法, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 106-110.
- 13) 酒井哲郎・小関仁彦・岩垣雄一(1981): 流れによる不規則波の屈折の数値計算, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 118-122.
- 14) 佐藤典之・磯部雅彦・泉宮尊司(1988): 任意形状港湾に対する不規則波の港内波高分布計算法の改良, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 257-261.
- 15) 清水琢三・鶴飼亮行・原 基久・磯部雅彦(1992): 多方向不規則波の屈折・回折・砕波変形計算法の現地適用性, 海岸工学論文集, 第39巻, (印刷中)

- 16) 芹沢真澄・小沢和男・三船修司・磯部雅彦(1990): 実務における屈折・回折・砕波計算への放物型方程式の適用性, 海岸工学論文集, 第37巻, pp. 26-30.
- 17) 高山知司(1981): 波の回折と港内波高分布に関する研究, 港湾技研資料, No.367, 140p.
- 18) 高山知司(1982): 港内静穏度の計算法, 1982年度(第18回)水工学に関する夏期研修会講義集, Bコース, pp. B-2-1-B-2-18.
- 19) 高山知司・池田直太・平石哲也(1991): 砕波および反射を考慮した波浪変形計算, 港湾技術研究所報告, Vol.30, No.1, pp. 21-67.
- 20) 西村仁嗣(1987): エネルギー平衡方程式の積分に伴う数値分散について, 第34回海岸工学講演会論文集, pp. 11-15.
- 21) 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸(1983): 直接数値積分による波の場の解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 123-127.
- 22) 丸山康樹・平口博丸・鹿島遼一(1984): 不規則波に対する屈折計算法の適用性, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 148-152.
- 23) 山口正隆・畑田佳男・早川 淳(1989): 流れおよび水深の非定常変化を考慮した屈折変形の数値モデル, 土木学会論文集, 第405号/II-11, pp. 225-234.
- 24) 余 錫平・磯部雅彦・渡辺 晃(1992): 演算子分離法と有限特性曲線法を用いた平面波浪場の非線形数値計算モデル, 海岸工学論文集, 第39巻, (印刷中)
- 25) 渡辺 晃・磯部雅彦・泉宮尊司・中野英樹(1988): 非定常緩勾配方程式による不規則波の浅水砕波変形の解析, 第35回海岸工学講演会論文集, pp. 173-177.
- 26) 渡辺 晃・丸山康樹(1984): 屈折・回折・砕波変形を含む波浪場の数値解析法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 103-107.
- 27) Berkhoff, J.C.W. (1972): *Computation of combined refraction-diffraction*, Proc. 13th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 471-490.
- 28) Berkhoff, J.C.W., N. Booij and A.C. Radder (1982): Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., Vol. 6, pp. 255-279.
- 29) Bouws, E. and J.A. Battjes (1982): A monte carlo approach to the computation of refraction of water waves, J. Geophys. Res., Vol.87, pp. 5718-5772.
- 30) Brailer, L. and P. Gaillard (1967): Evolution récente des modèles mathématiques d'agitation due à la houle: Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, La Houille Blanche, No.8, pp. 861-869.
- 31) Freeman, J.C. and B.M. Le Méhauté (1964): Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, Proc. ASCE, Vol. 90, No. HY2, pp. 187-216.
- 32) Gaillard, P. (1984): Combined refraction-diffraction calculations with directional wave spectra, Proc. 19th Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 1040-1056.
- 33) Karlsson, T. (1969): Refraction of continuous ocean wave spectra, J. Waterways and Harbors Division, Proc. ASCE, Vol.95, pp. 437-448.
- 34) Keller, H.B., D.A. Levine and G.B. Witham (1960): Motion of a bore over a sloping beach, J. Fluid Mech., Vol.7, pp. 302-316.
- 35) Keller, J.B. (1958): Surface waves on water of non-uniform depth, J. Fluid Mech., Vol.4, pp. 607-614.
- 36) Kirby, J.T. (1986): Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., Vol.10, pp. 355-378.
- 37) Lee, J.J. (1971): Wave induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J. Fluid Mech., Vol.45, pp. 375-394.
- 38) Liu, P.L.-F. (1990): Wave transformation, The Sea, Vol. 9, pp. 27-63.
- 39) Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sørensen(1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp. 371-388.
- 40) Munk W.H. and R.S. Arthur (1952): Wave intensity along a refracted ray, National Bureau of Standard, Circ. 521, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., pp. 95-109.
- 41) Radder, A.C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol.95, pp. 159-176.
- 42) Yamaguchi, M. (1988): A numerical model of nearshore currents due to irregular waves, Proc. 21st Int. Conf. on Coastal Eng., pp. 1113-1126.