

方向スペクトルの推定理論と観測例

Estimation Methods of Directional Wave Spectrum,
and Their Applications to Field Data Analysis

橋 本 典 明

Noriaki HASHIMOTO

1. はじめに

海面を伝わる不規則な波浪は、周期（周波数）と伝播方向（波向）の異なる無数の成分波が重なり合って合成されたものとして表現できる。各成分波のエネルギーが周波数に対してどのように分布しているかを示したものを周波数スペクトル、成分波のエネルギーが周波数および波向に対してどのように分布しているかを示したものを方向スペクトルと言う。

周波数スペクトルについては既に多くの調査・研究が行われており、スペクトル構造もかなりのところまで明らかになっている。一方、波浪の本質的な構造を表わす方向スペクトルについてはいまだ十分に調査・研究されているとは言い難い。これは方向スペクトルの観測が多大な労力と費用を必要とするためである。波浪の発生、発達、減衰の各段階を支配するメカニズムの解明、あるいは港湾構造物の設計などの実用的な問題に対しても、方向スペクトルに関する知識が不可欠であることが指摘されており、方向スペクトルに関する調査・研究は今後精力的に取り組まなければならない重要な課題の一つである。

方向スペクトルの推定理論に関する解説は、合田により「港湾構造物の耐波設計」¹⁾、「海岸・港湾調査法」²⁾の中で、あるいは磯部により「海岸環境工学、補章A」³⁾の中で詳細になされており、改めてここで述べることはもはや不必要であると考えられる。また、浅学非才な著者がこの場を借りて、上記の問題を解説するなど恐れ多いこととも考えた。しかしながら、この11年間、沿岸波浪データ解析を生業とし、その解析法や多様な結果に悩み続けてきた著者の拙い経験を紹介することもある面では意味があることと思ひ直し、あえて拙文を書かせて頂くこととした。したがって、本稿では上記の著書に解説してある既往の方向スペクトル推定法を網羅して記述するのはやめ、主として著者らがこれまでに実施してきた研究を中心としてその考え方を述べることにした。なお、入・反射波共存場における入射波と反射波の分離計算法^{4), 5)}は方向スペクトル推定理論の工学的に重要な応用の一つであるが、紙数の都合で割愛することとした。

2. 方向スペクトル推定法の基礎

(1) 方向スペクトルの定義

ランダムな波形をもつ海面波は、第1次近似として、微小な振幅をもつ多くの波数と角周波数の成分波がランダムな位相角をもって重合したものと解釈することができ、Fourier-Stieltjes積分を用いて次式で表わされる。

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int \int dA(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)\} \quad (1)$$

ここに、 $\eta(\mathbf{x}, t)$ は座標 $\mathbf{x} = (x, y)$ 上で時刻 t での水面変動、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトル、 ω は角周波数、 i は虚数単位である。また、 $dA(\mathbf{k}, \omega)$ は複素振幅であり、その絶対値は振幅、偏角は位相角であり、 $0 \sim 2\pi$ の間に等密度にランダムに分布している。

波数・周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ は不規則な水面変動場の $\mathbf{k} \sim \mathbf{k} + d\mathbf{k}$ 、 $\omega \sim \omega + d\omega$ の領域の波動エネルギー密度として、

$$\langle dA^*(\mathbf{k}, \omega) dA(\mathbf{k}, \omega) \rangle = S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (2)$$

で定義される。ここに、 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均、* は共役複素数を意味する。

波数ベクトルを極座標表示すると、

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k \cos \theta, k \sin \theta) \quad (3)$$

と表される。ここに、 θ は波の伝播する方向角、 k は波数ベクトルの絶対値であり、微小振幅波を対象とする場合、次式で表される分散関係式、

$$\omega^2 = (2\pi f)^2 = gk \tanh kd \quad (4)$$

によって波数 k は周波数 f の関数として一義的に決められる。ここに、 d は水深である。分散関係式の成立を前提とし、波数ベクトル $\mathbf{k}$ と角周波数 ω で表される式(1)、(2)を周波数 f と方向角 θ を用いて変換すると、不規則な水面変動場の $f \sim f + df$ 、 $\theta \sim \theta + d\theta$ の領域の波動エネルギー密度として、

$$\langle dA^*(f, \theta) dA(f, \theta) \rangle = S(f, \theta) df d\theta \quad (5)$$

で方向スペクトルが定義できる。

方向スペクトル $S(f, \theta)$ は一般に周波数スペクトル $S(f)$ と方向分布関数 $G(\theta|f)$ の積として、

$$S(f, \theta) = S(f) G(\theta|f) \quad (6)$$

のように表される。方向分布関数は0以上の値を取り、かつ、

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta = 1 \quad (7)$$

あるいは別の表現を用いれば、

$$\int_0^{2\pi} S(f, \theta) d\theta = S(f) \quad (8)$$

の関係がある。

(2) 方向スペクトルを推定するための基礎式と既往の方向スペクトル推定法

方向スペクトルを測定する方法はこれまでに幾つか提案されている。波高計群、流速計、波浪観測ブイなどを用いる直接測定法、あるいは写真や電波を利用するリモートセンシング法などがある。また、これらの測定方法に応じて種々の方向スペクトル推定法が提案されている。例えば直接測定法に適用可能なものとして、直接フーリエ変換法(DFT法)⁹⁾、パラメータ法^{7), 8)}、最尤法(MLM)⁹⁾、拡張最尤法(EMLM)¹⁰⁾、最大エントロピー原理法(MEP)¹¹⁾、ベイズ型モデルを用いた方法(BDM)¹²⁾などの方法がある。これらの方法はいずれも、波数・周波数スペクトルに伝達関数を乗じ、波数ベクトルについてFourier変換したものがクロススペクトルになるという関係に基づいて推定する方法である。この、「任意の波動量間のクロススペクトルと波数・周波数スペクトルの一般的な関係式」は磯部ら¹⁰⁾によって導かれたもので、次式で表される。

$$\Phi_{mn}(\omega) = \int_{\mathbf{k}} H_m(\mathbf{k}, \omega) H_n^*(\mathbf{k}, \omega) \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)] S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{x}_m$ は m 番目の波動量 ξ_m の計測座標 (x_m, y_m) 、 $\Phi_{mn}(\omega)$ は波動量 ξ_m と ξ_n のクロススペクトルである。また、 H_m は水面変動 η から波動量 ξ_m への伝達関数であり、一般に次のように書ける¹⁰⁾。

$$H(\mathbf{k}, \omega) = h(k, \omega) (\cos \theta)^\alpha (\sin \theta)^\beta \quad (10)$$

表-1に主な波動量に対する $h(k, \omega)$ 、 α 、 β を示す¹⁰⁾。

式(9)を周波数 f および方向角 θ を用いて表現すると次式で表される。

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(f) = & \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ & - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] S(f, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 $x_{mn} = x_n - x_m$ 、 $y_{mn} = y_n - y_m$ である。

式(9)あるいは式(11)は直接測定法により得られたデータをもとに方向スペクトルを推定する際の基礎式である。すなわち、観測された複数の波動量の時系列データから複数の組み合わせのクロススペクトルが推定されるが、その各々のクロススペクトル毎に基礎式(9)あるいは式(11)で与えられる連立積分方程式が得られる。波数・周波数スペクトル $S(k, \omega)$ あるいは方向スペクトル $S(f, \theta)$ は、これらの連立積分方程式の非負の解として与えられる。

方向スペクトル推定法の問題の難しさは、この問題が不適切な逆問題であることによる。すなわち、海洋波は近似的には種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅波の重ね合わせとして表現され、本質的に無限の自由度を有しているが、観測して得られる情報はそれに比して極めて少数であるためである。したがって、未知数の数よりも、それを解くべき方程式の数が極めて少数であるという意味で不適切であり、基礎式が積分方程式で与えられるという意味で逆問題である。

このような不適切な逆問題の最も単純な解法としては、与えられた独立な積分方程式の数と等しい(あるいは、それよりも少ない)数の未知パラメータを含む関数を仮定し、これを上記の積分方程式に代入して、未知パラメータに関して解くことにより方向スペクトルを特定する方法がある。ただしこの場合も、方向スペクトルが非負であるという条件を満たす必要がある。既往の方向スペクトル推定法、例えば、DFT法、パラメータ法等の推定法は、このような類の方法であり、それぞれ便宜的な仮定や近似を用いて方向スペクトルの推定値を特定している。しかしながら、それぞれの推定法で用いられている仮定や近似方法の違いにより、得られる推定値もそれぞれ異なり、計算の簡便さ、分解能などの面でそれぞれの特徴を有している。

これら既往の方法に共通する問題点は、仮定した関数形(パラメトリック・モデルの形)が実際の海洋波の方向スペクトルを十分近似し得る関数であれば問題ないが、実際の現象を十分表現し得ない場合には、用いた関数形に依存して、その関数固有の短所が現われる点にある。すなわち、このような方法はパラメータの少ない低次のモデルで実際の現象の構造を表現しきれないときに、次数の上昇を行った結果、推定値を不安定にするばかりでなく、パラメトリック・モデル固有のくせを持ち込む点において、一般の統計モデルに共通した問題^{13), 14)}が生じる。

いずれにしても上記のDFT法やパラメータ法の類の方法は、概して推定精度が低く、ある場合には考えられない方向から幅広い方向分布を有する波浪が来襲したり、本来、方向集中度が高いはずのうねりが幅広いエネルギー分布を示すなど、解析者の頭を大いに悩ませる推定値が得られることが多い。

3. 最近の方向スペクトル推定法

現地観測データのように、限られた少数の観測データをもとに方向スペクトルを推定する問題を考える場合には、次の2つの場合に分けて考える必要がある。

① 現象の複雑さに比べて、得られる情報が少な過ぎる場合。

表-1 おもな波動量の水面変動に対する伝達関数
(文献10)より抜粋)

項 目	記号	$h(k, \omega)$	α	β
水 面 変 動	η	1	0	0
水 圧 変 動	p	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$	0	0
水面鉛直加速度	η_{tt}	$-\omega^2$	0	0
水面勾配 (x)	η_x	ik	1	0
" (y)	η_y	"	0	1
水粒子速度 (x)	u	$\omega \frac{\cosh kz}{\sinh kd}$	1	0
" (y)	v	"	0	1
" (z)	w	$-i\omega \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$	0	0

k : 波数、 ω : 角周波数、 d : 水深、 z : 底面からの高さ
 ρ : 流体の密度、 g : 重力加速度

② 現象を説明するために必要な情報はある程度得られているものの、情報中には互いに矛盾（誤差）が含まれている可能性がある場合。

①の場合は、得られる情報が少なすぎるので、一般には情報中に含まれる誤差そのものの特性を評価し得ない。この場合には、情報として与えられている以外の情報が混入しないようにし、与えられた情報を最大限有効利用して現象を客観的に把握する必要がある。

②の場合は、情報はある程度得られているものの、必ずしも十分ではなく、得られた情報のみから現象を把握することが最良とは言えない状況を想定したものである。この場合には、対象とする現象の一般的な認識を考慮しつつ、得られた情報の中から現象の本質を模索する形で推定する方法が良い結果を生むと思われる。

①の場合を対象として考案した方向スペクトル推定法として最大エントロピー原理法（MEP）¹¹⁾、②の場合を対象として考案したものにベイズ型モデルを用いた方法（BDM）¹²⁾があり、以下ではまずこれらについて述べる。また、その後に、現在最も広く用いられている拡張最尤法（EMLM）¹⁰⁾について述べる。

3. 1 最大エントロピー原理を用いた方向スペクトル推定法（MEP）

0～2πの全平面で波のエネルギーが来襲する方向分布を推定するためには少なくとも3成分以上の波動量を観測する必要がある。しかしながら、3成分観測データのような限られた少数の波動量の同時計測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。既往の推定法では便宜的に何らかの仮定や近似を用いることにより、解を一義的に求めている。しかしながら、その基礎となる仮定や近似に関してはいくらかの問題点が残されたままである。ここではこれらの問題点を解消し、さらに推定精度を高めるために、特に3成分観測データを対象として、不確定さの尺度であるエントロピーの概念を導入して、最大エントロピー原理（Maximum Entropy Principle; 以下MEPと略記する）から方向スペクトルを推定する方法について述べる。

（1）情報量とエントロピーの定義¹³⁾

ある特定の事象が起こって、それを教える情報を受け取ったとき、その情報により得られる情報量は、

$$\text{情報量} = -\log(\text{可能な事象の中で特定の事象が起こる確率}) \quad (12)$$

と定義される。

n 個の異なった互いに相反する事象 $A_i, (i=1, \dots, n)$ の中から、1つをでたために選択することを繰り返すある偶然事象があり、しかも前の選択の結果は後の選択結果に影響を及ぼさないものとする。また、それぞれの事象 $A_i, (i=1, \dots, n)$ の起こる確率を $p_i, (i=1, \dots, n)$ とする ($p_i \geq 0, \sum p_i = 1$)。このとき、 A_i の実現に関する情報量は式(12)によって $-\log p_i$ である。したがって、選択を繰り返した結果、得られる情報量の期待値は、

$$H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (13)$$

となる。式(13)は統計力学でいうエントロピーと同じ形をしている。情報理論においても式(13)で定義される H を情報エントロピー、略してエントロピーと呼ぶ。

エントロピー H は種々の性質を持っているが、特に次のことは重要である。

- ① p_i のいずれか1つが1になり、他の p_i がすべて0となるときに限り、 H は0となる。すなわち、ある1つの事象のみが確実に生起する場合にのみ、エントロピーは0になる。それ以外では常に正である。
- ② すべての標本点が等確率で生起する場合には、 H は最大値をとる。どの事象も生起し得るわけで、最も不確実な状況である。

分布が連続的な確率密度関数 $p_X(x)$ を持つ確率変数 X のエントロピー $H(X)$ は式(13)を拡張して、

$$H(X) = - \int p_X(x) \log p_X(x) dx \quad (14)$$

として定義する。エントロピー H は、情報源の中から特定の通報を選ぶときの自由度、あるいはそれを推定するときの不確かさを表わす。エントロピー H は情報理論において極めて重要な役割を果たす量である。

エントロピーの特性を用いた確率密度関数の決定法として、母集団の分布形をあらかじめ仮定せず、あるいは経験によって決定することなく、任意関数の期待値によって与えられる制約条件と確率の規格化条件のもとでエントロピーを最大化することによって確率密度関数を決定する方法として「Jaynesの原理」が知られている¹⁶⁾。以下に述べる最大エントロピー原理法(MEP)はこの「Jaynesの原理」を用いた方向スペクトル推定法である。

(2) MEPの定式化¹¹⁾

方向分布関数 $G(\theta|f)$ は非負、かつ、式(7)の関係を満たすことから、 $[0, 2\pi]$ で定義される確率密度関数と考えることができよう。したがって、確率密度関数の推定法としての最大エントロピー原理(Jaynesの原理)が適用できるものと思われる。この場合、エントロピーは次式で与えられる。

$$H = - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta \quad (15)$$

3成分観測データを対象とする場合、例えばブイに搭載された計器により水面変動 η 、 x 軸方向、 y 軸方向の水面勾配 η_x 、 η_y を計測する場合には式(11)より、次の5つの独立な連立積分方程式が得られる。

$$\int_0^{2\pi} G(\theta|f) \alpha_i(\theta) d\theta = \beta_i, \quad (i=0, 1, \dots, 4) \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(\theta) &= 1, & \beta_0 &= 1 \\ \alpha_1(\theta) &= \cos \theta, & \beta_1 &= \frac{Q_{12}(f)}{k C_{11}(f)} \\ \alpha_2(\theta) &= \sin \theta, & \beta_2 &= \frac{Q_{13}(f)}{k C_{11}(f)} \\ \alpha_3(\theta) &= \cos 2\theta, & \beta_3 &= \frac{C_{22}(f) - C_{33}(f)}{k^2 C_{11}(f)} \\ \alpha_4(\theta) &= \sin 2\theta, & \beta_4 &= \frac{2C_{23}(f)}{k^2 C_{11}(f)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに、 $C_{ij}(f)$ 、 $Q_{ij}(f)$ はそれぞれ $(\eta, \eta_x, \eta_y) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ とした場合のコスペクトルおよびクオドラチャスペクトルである。

したがって、式(16)を制約条件として、式(15)で与えられるエントロピー H を最大にする $G(\theta|f)$ を求めれば、これが最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ となる。これは、式(16)で与えられる情報以外の不確定要素ができるだけ一様となる $G(\theta|f)$ を決定していることになる。

上記の問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解く。ラグランジュ関数は、

$$\begin{aligned} L = & - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \ln G(\theta|f) d\theta + (\lambda_0 - 1) \left\{ 1 - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) d\theta \right\} \\ & + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left\{ \beta_i - \int_0^{2\pi} G(\theta|f) \alpha_i(\theta) d\theta \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

で与えられる。ここに、 λ_i ($i=0, \dots, 4$) はラグランジュの未定乗数である。

$$\frac{\partial L}{\partial G(\theta|f)} = -\{1 + \ln G(\theta|f)\} - (\lambda_0 - 1) - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \alpha_i(\theta) = 0 \quad (19)$$

より、 $G(\theta|f)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ を求めると、

$$\hat{G}(\theta|f) = \exp\{-\lambda_0 - \sum_{i=1}^4 \lambda_i \alpha_i(\theta)\} \quad (20)$$

となる。 $\alpha_i(\theta)$ は式(17)で与えられており、式(20)は $\exp$ の指数部が Fourier 級数の形となっているが、3 成分観測データを対象とする場合には $i=4$ で打ち切られる。

式(20)に含まれるラグランジュの未定乗数 λ_i ($i=1, \dots, 4$) は、式(20)を式(16)に代入して得られる次式、

$$\int_0^{2\pi} \{\beta_i - \alpha_i(\theta)\} \exp\{-\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta)\} d\theta = 0, \quad (i=1, \dots, 4) \quad (21)$$

なる非線形連立方程式を解くことによって決定される。また、 λ_0 は次式から計算される。

$$\lambda_0 = 1 \ln \left[\int_0^{2\pi} \exp\{-\sum_{j=1}^4 \lambda_j \alpha_j(\theta)\} d\theta \right] \quad (22)$$

以上をまとめると、式(21)の非線形連立方程式を解いて $\lambda_1 \sim \lambda_4$ を求め、式(22)から λ_0 を算出して式(20)に代入すれば、 $G(\theta|f)$ の最大エントロピー推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ が決定されることになる。

(3) MEP の数値計算法

式(21)は λ_j に関して非線形な連立積分方程式である。そこで式(21)を λ_j に関して解くために、多変数の Newton-Raphson 法を採用した。結果のみを示せば、以下の手順により λ_j が求められる。

$$\sum_{j=1}^4 A_{i,j} e_j = B_i, \quad (i=1, \dots, 4) \quad (23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{i,j} &= \int_0^{2\pi} \{\alpha_i(\theta) - \beta_i\} \alpha_j(\theta) \exp\{-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta)\} d\theta \\ B_{i,j} &= \int_0^{2\pi} \{\alpha_i(\theta) - \beta_i\} \exp\{-\sum_{k=1}^4 \lambda_k \alpha_k(\theta)\} d\theta \\ e_j &= \lambda_j^{k+1} - \lambda_j^k, \quad (k, k+1 \text{ は計算ステップ数}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

なる e_j に関する連立方程式において、初期値 $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0)$ を与え、残差 e_j について式(23)を解く計算を $(e_1, \dots, e_4)$ が十分小さくなるまで繰り返すことにより $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ の近似値を算出する。なお、式(23)～(24)の繰り返し計算に際しては、一般の場合には初期値を $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_4^0) = (0, \dots, 0)$ とし、 $|e_j| \leq 10^{-2}$ ($j=1, \dots, 4$) で収束したと見なして解を算出している。

数値計算法の詳細については文献(11)を参照されたい。

(4) MEP に関する考察

赤池は式(14)で定義されるエントロピー (Shannon のエントロピー) をめぐるさまざまな誤解について解説している¹⁷⁾。その中で Boltzmann により提案された本来のエントロピーの本質的な理解の必要性を主張している。ここではこれをもとに、ここで述べた方向スペクトル推定法について考察する。

Boltzmann により提案されたエントロピーは次式で与えられる。

$$B(p; q) = - \int p(x) \ln p(x) dx + \int p(x) \ln q(x) dx \quad (25)$$

赤池によれば、 $p(x)$ は真の分布に対応し、 $q(x)$ がわれわれの想定するモデルによる分布に対応しており、 $B(p; q)$ は想定したモデルから $p(x)$ のような分布が得られる確率の対数という解釈が許されるとしている。このため、 $B(p; q)$ は $q(x)$ による $p(x)$ の近似の程度を表わす極めて自然な評価規準であると述べている。 $B(p; q)$ は次の(26)を満たす。

$$\left. \begin{array}{ll} B(p:q) < 0 & : \quad p(x) \neq q(x) \\ B(p:q) = 0 & : \quad p(x) = q(x) \end{array} \right\} \quad (26)$$

すなわち、Boltzmannのエントロピー $B(p:q)$ はモデルの分布 $q(x)$ が真の分布 $p(x)$ に一致したときに最大値0をとる。

なお、式(14)で定義されるShannonのエントロピー H はBoltzmannのエントロピー $B(p:q)$ において、 $q(x)=1/\alpha$ （一様分布）とした場合に形式的に対応する。これは形式的な類似であり、Shannonが真に意図した解釈とは異なるかも知れないが、形式的な物理的解釈は可能であろうと思われる。すなわち、もし一様分布が、想定される分布の中で、物理的な意味において最も単純な構造をしているものという解釈が許されるならば、MEPにより推定される方向分布関数は、式(16)の制約条件下でとり得る最も単純な構造を持つエネルギー分布を推定しているものと解釈される。情報論的に解釈すれば、この単純さのために、与えられた情報以外の情報が混入することを防ぐことができるものと解釈される（独断的解釈だとは思いが…）。

しかしながら、MEPでは想定したモデルの分布 $q(x)$ を固定し、真の分布 $p(x)$ を変化させることにより、エントロピー最大化を実現している。物理現象を統計的方法により明らかにするという立場からは、本来ならば、真の分布 $p(x)$ は不変で、モデルの分布 $q(x)$ を変化させることにより、エントロピー最大化の実現を図るべきであり、明らかに逆の推論方法となっている。この意味からは、MEPは、結果として、形式的な便宜的な方法であるのかも知れない。しかしながら、MEPは有限の情報から推定される無数の方向スペクトル推定値から、ただ一つの解を特定するという立場で導入した。また、3. 1 (2)で示した定式化においては、3成分観測データから得られる制約条件として5つの独立な制約条件を用いて定式化を行った。3成分観測データは方向スペクトルを特定するための必要最小限のデータであり、また、方向スペクトルの推定においてクロススペクトル相互の矛盾を評価しにくい観測量の組み合わせでもある。このような状況においては、MEPにより推定される方向分布関数は、上記の独断的な解釈において妥当な推定値であろうと思われる。

しかしながら、MEPを3成分よりも多い複数の波動量の観測データへ拡張する場合、特に、相互の観測データが方向スペクトルの推定式の中で互いに矛盾（誤差）を持つ場合には、本方法をそのまま拡張することは困難であり、別の方向スペクトル推定法を開発する必要がある。これについては次に述べることとする。

3. 2 ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法

限られた少数の波動量の同時観測記録から方向スペクトルを推定する場合には、多くの不確定な要素が存在する。方向スペクトルの推定問題のように、限られた少数の情報から複雑な現象をとらえる問題では、既往の方向スペクトル推定法に用いられているような便宜的な数学的手法のみによっては、ある場合にはその物理現象をよく表現し得ない場合がある。換言すれば、方向スペクトルの推定問題においては、我々の得ることのできる情報は、その物理現象が持つ本来の物理構造のある一部の観測結果にすぎず、このような一部のみの情報から、形式的な便宜的方法により、その構造の全体を把握しようとするところに、従来の方向スペクトルの推定理論の問題点があると考えられることである。一方では、方向スペクトルの観測成果に基づいた、方向分布関数あてはめ法、などの推定法もあるが、方向分布関数の関数形が固定されているため、設定された関数形の範囲内の近似という意味での妥当性しか保証されない。

したがって、このような問題に対しては、その物理現象の真の構造をも含むであろう、自由度の大きな、柔軟な物理的モデルを想定し、そのモデルの中から真の構造に近いものを模索する方法が良い結果を生むであろうと期待される。

このような背景のもとに考案された方向スペクトル推定法が次に示すベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法（BDM）である。BDMは、一種の分布関数あてはめ法であるが、後で示されるように海洋波

の物理特性を考慮した推定法であり、柔軟性に富む方法である。

なお、方向スペクトルを推定するために解くべき積分方程式は任意の波動量を観測し、クロススペクトルを推定することにより与えられる。クロススペクトルの推定誤差はパワースペクトルの推定誤差と異なり、各周波数ごとに異なる変動性を有し、観測波動量の種類に依存して異なる次元を有する。したがって、方向スペクトルを推定するための基礎式として与えられる連立積分方程式は、それぞれ異なる次元や信頼性を有することになる。既往の方向スペクトル推定法にはクロススペクトルのこのような特性を考慮したものはない。より信頼性の高い方向スペクトルを推定するためには、クロススペクトルの推定誤差の特性も考慮した方向スペクトル推定法を開発する必要がある。BDMはクロススペクトルのこのような特性を考慮して定式化されている。

以下ではまずクロススペクトルの推定誤差について述べ、次に本方法を開発する際に参考にしたベイズの方法の基礎的な考え方を述べ、その後でBDMについて述べることとする。

(1) クロススペクトルの推定誤差^{18), 19)}

離散有限フーリエ変換を用いた1次のクロススペクトルの期待値は近似的に次式で与えられる。

$$E[\hat{\Phi}_{mn}(f)] = E[\hat{C}_{mn}(f)] - i E[\hat{Q}_{mn}(f)] \approx C_{mn}(f) - i Q_{mn}(f) = \Phi_{mn}(f) \quad (27)$$

1次のコスベクトル、クオドラチャスペクトルの分散は近似的に次式で与えられる。

$$\text{Var}[\hat{C}_{mn}(f)] \approx \frac{1}{2} \{ \Phi_{mm}(f) \Phi_{nn}(f) + C_{mn}(f)^2 - Q_{mn}(f)^2 \} \quad (28)$$

$$\text{Var}[\hat{Q}_{mn}(f)] \approx \frac{1}{2} \{ \Phi_{mm}(f) \Phi_{nn}(f) - C_{mn}(f)^2 + Q_{mn}(f)^2 \} \quad (29)$$

したがって、1次のクロススペクトルの絶対値の変異係数 V は近似的に次式で与えられる。

$$V(|\hat{\Phi}_{mn}(f)|) \approx \frac{1}{\text{coh}(f)} \quad (30)$$

すなわち、1次のクロススペクトルの統計的誤差は、コヒーレンス $\text{coh}(f)$ が1より小さいことから、誤差100%以上におよぶ。

統計的誤差を小さくするのに二つの方法がある。第1の方法は N 個のデータを M 回測定し、その各段階においてクロススペクトルを計算し、 M 個のスペクトルの平均をとって、その推定値とする方法である。第2の方法は、ウィンドーを用いて移動平均し、平滑化する方法である。しかしながら、何れの方法によって統計的誤差を減じても、クロススペクトルは各周波数ごとに異なる統計的変動性を有することになる。

(2) ベイズの方法^{20), 21)}

確率論の重要な定理として、同時確率密度関数と条件付確率密度関数の関係を表わすベイズの定理がある。これは次式で表わされる。

$$p(x, \theta) = p(x|\theta) p(\theta) = p(\theta|x) p(x) \quad (31)$$

式(31)を変形すると、

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta) p(\theta)}{p(x)} \quad (32)$$

が得られる。式(32)は x を既知として θ について推論する際に有効な式である。いま、 x をデータ、 θ を母数とすれば、 $p(x|\theta)$ はモデル分布、 $p(\theta)$ は事前分布、 $p(\theta|x)$ は事後分布の確率密度関数と呼ばれる。事前分布は実験あるいは観測によってデータ x を得る前の知識を反映し、事後分布は事前の知識に加えてデータ x により学習した知識を反映する。

モデル分布 $p(x|\theta)$ は x が既知で θ の関数と見なすとき、 θ の尤度を示す尤度関数 $L(\theta|x)$ となる。 x を既知とし、事後分布 $p(\theta|x)$ において、 θ に関係しない項を除くと、

$$p(\theta|x) \propto L(\theta|x) p(\theta) \quad (33)$$

と表わされる。これがベイズ的推論方法の本質的部分である。モデル分布 $p(x|\theta)$ が与えられた場合に、ベイズの方法を実現するためには、 θ の事前分布 $p(\theta)$ が必要である。この事前分布 $p(\theta)$ をどう選ぶかがベイズの方法を実用化する際の決定的な問題となる。この問題に対して赤池は次式で表される ABIC (赤池のベイズ型情報量基準)

$$ABIC = -2 \ln \int L(\theta|x) p(\theta) d\theta \quad (34)$$

を最小化するような事前分布を最適な事前分布 $p(\theta)$ として選択する方法を提案している²²⁾。

(3) BDMの定式化¹²⁾

以下では、式の誘導の便宜上、式(11)の2次元表示式 (m 番目の波動量と n 番目の波動量のクロスベクトルを $\Phi_{mn}(f)$ と表示する方式) を、1次元表示式 ($\phi_i(f)$ と表示する方式) に再構成して取り扱う。なお、 $\Phi_{mn}(f)$ から構成される行列 $\Phi(f)$ がエルミート行列であることを考慮し、行列 $\Phi(f)$ の上三角の部分のみを用いることとする。このとき、式(11)の独立な方程式の数を N として、式(11)は次式のように表わされる。

$$\phi_i(f) = \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) G(\theta|f) d\theta, \quad (i=1, \dots, N) \quad (35)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} H_i(f, \theta) &= H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} \\ &\quad - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] / D_{mn}(f) \\ \phi_i(f) &= \Phi_{mn}(f) / \{S(f) D_{mn}(f)\} \\ G(\theta|f) &= S(f, \theta) / S(f) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

である。 $D_{mn}(f)$ はクロスベクトルを無次元化するとともにクロスベクトルの推定誤差を正規化するために導入した関数であり、式(35)の実部、虚部に対してそれぞれ式(28)および式(29)の平方根、すなわちクロスベクトルの推定誤差の標準偏差を用いることとした。このような正規化により、与えられたクロスベクトルの偏差の発生確率が最小なバイアスの少ない方向スペクトルが推定されるものと思われる。

方向分布関数 $G(\theta|f)$ はその定義域 $[0, 2\pi]$ で0以上の値をとる関数であるが、以下では正值として取り扱う。これは $G(\theta|f)$ が0の領域でも、限りなく0に近い正值であれば、物理的にはそれほど不合理ではないと思われることと、後の展開の便宜のために設けた仮定である。

まず、方向分布関数 $G(\theta|f)$ の定義域 $[0, 2\pi]$ を十分大きな数 K で等分割する ($K\Delta\theta = 2\pi$)。また、方向分布関数 $G(\theta|f)$ は等分割された各微小区間内では離散的な一定値関数であるとする。これは、波浪の数値シミュレーション等で周波数および方向角の異なる成分波を重ね合わせることに同じであり、分割数を大きく取れば波浪の線形性を近似する意味で妥当である。

ここで、 $G(\theta|f) > 0$ であるので、

$$x_k(f) = \ln G(\theta_k|f), \quad (k=1, \dots, K) \quad (37)$$

と置くと、方向分布関数は次式のように近似される。

$$G(\theta|f) \approx \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} I_k(\theta) \quad (38)$$

ここに、

$$I_k(\theta) = \begin{cases} 1 & : (k-1)\Delta\theta \leq \theta < k\Delta\theta \\ 0 & : \text{その他} \end{cases} \quad (k=1, \dots, K) \quad (39)$$

である。式(38)を式(35)に代入すると、

$$\phi_i(f) = \sum_{k=1}^K \exp\{x_k(f)\} \int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \quad (40)$$

となる。右辺の積分は、 K が十分大きいとき、

$$\int_0^{2\pi} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta = \int_{(k-1)\Delta\theta}^{k\Delta\theta} H_i(f, \theta) I_k(\theta) d\theta \approx H_i(f, \theta_k) \Delta\theta \equiv \alpha_{i,k}(f) \quad (41)$$

ここに、 $\theta_k = (2k-1)\Delta\theta/2$ 、である。

いま、 $\phi_i(f)$ および $\alpha_{i,k}(f)$ は複素数であり、取扱いが不便である。そこで、

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= \text{Real}\{\phi_i(f)\} & \phi_{N+i} &= \text{Imag}\{\phi_i(f)\} \\ \alpha_{i,k} &= \text{Real}\{\alpha_{i,k}(f)\} & \alpha_{N+i,k} &= \text{Imag}\{\alpha_{i,k}(f)\} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

と分離し、すべてを実数に関する式として取り扱う。なお、式(42)の左辺は周波数 f の関数であるが、省略して記述した。以後特別な場合を除き、周波数 f は便宜的に省略して扱うこととする。このとき式(41)および(42)より、正規化されたクロススペクトルの誤差 ε_i を考慮して、結局、式(35)は次式のように表わされる。

$$\varepsilon_i = \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k), \quad (i=1, \dots, 2N) \quad (43)$$

ここに、 ε_i 、 $(i=1, \dots, 2N)$ は互いに独立であり、平均0、未知の分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。このとき ϕ_i 、 $(i=1, \dots, 2N)$ が与えられれば、 x_k 、 $(k=1, \dots, K)$ 、 σ^2 に関する尤度は

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^N \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{2N} \left(\phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right)^2 \right] \quad (44)$$

で与えられる。

以上の展開では方向分布関数 $G(\theta|f)$ は区分的一定値関数として近似した。この際、各微小区間ごとのエネルギーの相関については何ら考慮されていない。波の線形性からは各微小区間ごとのエネルギー分布はそれぞれ独立であると見なされるが、方向角 θ について不連続的なエネルギー分布をしているとは考えにくい。また、一般に方向分布関数は滑らかな連続関数と見なされている。したがって、方向分布関数 $G(\theta|f)$ が方向角 θ に対して滑らかであるという仮定の表現として、系列 $\{x_k\}$ が局所的には k の1次式でよく近似されるべきであると考え。この場合、 x_k の2次の階差

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \quad (45)$$

は0に近いと想定される。すなわち、

$$\sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 : \quad (\text{ただし、} x_0 = x_K, \quad x_{-1} = x_{K-1}) \quad (46)$$

を考えると、式(46)の値が小さいほど方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ は滑らかになると考えられる。したがって、方向分布関数の推定値 $\hat{G}(\theta|f)$ としては、式(46)をあまり大きくしない範囲で尤度、式(44)の大きいものが望ましい。これを定式化すると、適当なパラメータ（超パラメータ） u^2 を用いて、

$$\ln L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) - \frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \quad (47)$$

を最大化する $(x_1, \dots, x_K)$ を求めればよい。式(47)の最大化は式(47)を指数とする指数関数を対象として考えるならば、

$$L(x_1, \dots, x_K; \sigma^2) \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad (48)$$

の最大化に他ならないことが分かる。これは式(33)の関係において、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_K)$ の事前分布として、

$$p(\mathbf{x} | u^2, \sigma^2) = \left(\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^K \exp \left\{ -\frac{u^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad (49)$$

を想定したことに他ならない。データが与えられたときの事後分布は、

$$p_{\text{post}}(\mathbf{x} | u^2, \sigma^2) \propto L(\mathbf{x}, \sigma^2) p(\mathbf{x} | u^2, \sigma^2) \quad (50)$$

で与えられるから、事後分布のモードを推定値とすればよい。 u^2 を与えれば式(50)を最大化する $\mathbf{x}$ は σ^2 に無関係に決まり、

$$\sum_{i=1}^{2N} \left\{ \phi_i - \sum_{k=1}^K \alpha_{i,k} \exp(x_k) \right\}^2 + u^2 \left\{ \sum_{k=1}^K (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2})^2 \right\} \quad (51)$$

を最小化することにより得られる。

u^2 の決定と σ^2 の推定は次式で表わされるABIC (赤池のベイズ型情報量規準)

$$\text{ABIC} = -2 \ln \int L(\mathbf{x}, \sigma^2) p(\mathbf{x} | u^2, \sigma^2) d\mathbf{x} \quad (52)$$

の最小化によればよい。

(4) BDMの数値計算法

3. 2 (3) で述べた方法を用いて方向スペクトルを推定する場合、式(51)の最小化および式(52)の積分と最小化を実行しなければならない。しかしながら、いまの場合、それらを解析的に行うことは困難である。そこでここでは、石黒²³⁾、²⁴⁾あるいは坂元¹⁴⁾に従って以下の方法により数値計算を行うこととした。

結果のみを示すと以下ようになる。

- ① 適当な u および $\mathbf{x}$ の初期値 $\mathbf{x}_0$ を与えて、以下の式(53)により、与えられた u に対応する $\mathbf{x}$ の推定値 $\tilde{\mathbf{x}}$ を算定する。

$$J(\mathbf{x}) = \|\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{B}}\|^2 + u^2 \|D\mathbf{x}\|^2 \quad (53)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \quad (54)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 \quad (55)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,K} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2N,1} & \cdots & \alpha_{2N,K} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \mathbf{B} = (\phi_1, \dots, \phi_{2N})^t \\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ E(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \exp(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(x_K) \end{pmatrix} \\ F(\mathbf{x}) = (\exp(x_1), \dots, \exp(x_K))^t \end{array} \right\} \quad (56)$$

であり、 $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムである。計算手順は、式(53)～(55)で $\mathbf{x}$ の初期値 $\mathbf{x}_0$ を与え、式(53)に最小自乗法を適用して $\mathbf{x}_1$ を算出する。次に $\mathbf{x}_1$ を式(53)～式(55)の $\mathbf{x}_0$ に置き換えて、 $\mathbf{x}_2$

を算出する。この演算を繰り返し、適当な収束条件を満たす解 $\hat{\mathbf{x}}$ を求め、これを与えられた u^2 に対する推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ とすれよい。

- ② ①で得られた結果を用いて、次式(57)により、与えられた u に対応する A B I C を算出する。

$$A B I C = 2N \ln(2\pi) + 2N + 2N \ln(\hat{\sigma}^2)$$

ここに、

$$-K \ln(u^2) + \ln\{\det(\hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} + u^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D})\} \quad (57)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2N} \{\|\hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{B}}\|^2 + u^2 \|\mathbf{D} \hat{\mathbf{x}}\|^2\} \quad (58)$$

である。また、 $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ は①で収束解 $\hat{\mathbf{x}}$ を算出する際に用いられた式(54)、(55)の $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\tilde{\mathbf{B}}$ である。

- ③ u の値を種々に変えて、①、②の計算を繰り返す。

- ④ ①～③の計算結果の内、最小の A B I C を与える $\hat{u}^2$ 、 $\hat{\sigma}^2$ および $\hat{\mathbf{x}}$ を最適な推定値とする。

なお、式(53)の繰り返し計算の初期値 $\mathbf{x}_0$ は、一般には、 $\mathbf{x}_0 = \{\ln(1/2\pi), \dots\}$ として計算した。また、式(53)の繰り返し計算の収束基準としては $n-1$ ステップ目の繰り返し計算で得られた推定値 $\mathbf{x}_{n-1}$ と、 n ステップ目の推定値 $\mathbf{x}_n$ の差の標準偏差 σ_{en} が $|\sigma_{en}| \leq 10^{-3}$ となったときに収束したと見なして推定値を算出した。

超パラメータ u^2 の決定は正確には式(57)の A B I C を最小にする非線形最適化によらなければならない。しかしながら、いまの場合、これは困難であり、また u^2 の推定を目的にする限り式(57)を厳密に最小にする必要はない。したがって、ここでは、 u の与え方として格子探索法を用いることとし、

$$u = a b^m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (59)$$

として、 a 、 b に適当な値を代入し、 m を変えることにより、種々の u の値を用いて上記の計算を実施した。

数値計算法の詳細については文献12)を参照されたい。

(5) BDMに関する考察

BDMは、クロススペクトルの推定誤差の影響を考慮した方法であり、任意の3成分以上の観測データが与えられた場合に適用可能な方法である。しかしながら、二方向波浪の方向スペクトルに対しては4成分以上の観測波動量が必要である。この場合、BDMは既往の推定法に比べて最も高い推定精度を有しており、またクロススペクトルの推定誤差の影響を受けにくく安定した推定値が得られる。

BDMの推定理論の定式化においては、モデル分布として波浪の線形性を考慮して、自由度の大きい、波のエネルギーの離散分布的な構造を想定した。さらにそれらの離散的なエネルギー分布が方向角に対しては滑らかな連続関数であるという期待を事前分布として想定し、推定理論の定式化を行った。モデル分布は極めて多くの未知パラメータから構成されるが、事前分布によりそれらのパラメータは少数の超パラメータにより支配される。このようなアプローチは、一見複雑に見える物理現象も、実際には単純な法則により支配されているという物理現象に対する一般的な認識に合致しており、対象としている物理現象が実際にそのようなものであれば、ベイズ型モデルを用いた方向スペクトル推定法は物理的には自然な形の推定法であるといえよう。

3. 3 拡張最尤法 (EMLM) による方向スペクトルの推定

(1) EMLMの計算法¹⁰⁾

EMLMは磯部らより開発された方向スペクトル推定法であり、Capon⁹⁾により開発された最尤法 (MLM) を水面変動以外に、水粒子速度や水面傾斜などの任意の波動量の組み合わせから成る観測データに適用可能な形に拡張したものである。

EMLMの波数・周波数スペクトルの推定式は次式で与えられる。

$$\hat{S}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\kappa}{\sum_m \sum_n \Phi_{mn}^{-1}(\omega) H_m^*(\mathbf{k}, \omega) H_n(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)\}} \quad (60)$$

ここに、 $\Phi_{mn}^{-1}(\omega)$ は $\Phi_{mn}(\omega)$ から構成される行列 $\Phi(\omega)$ の逆行列の mn 成分である。また、 κ は比例定数であり、式(8)の正規化条件を満足するように決められる。

EMLMは計算が簡便であるばかりでなく、分解能および汎用性の面で優れた推定法であり既に現地波浪データ解析に広く適用されている。

(2) EMLMの実用上の2、3の工夫

EMLMを用いて方向スペクトル解析する場合、特定の条件下では推定値が発散する場合がある。これは、方向スペクトルを推定する際に、必要以上に過剰な情報を与えた場合や、方向分布関数上に0となる領域が存在する場合に発生するが多い。特に、現地観測データにEMLMを適用する場合には、方向スペクトル形状や観測機器の配置、観測波動量の組み合わせにもよるが、4成分程度のまでの独立な波動量が与えられる場合には安定した推定値が得られるが、それ以上の波動量を情報として与えても、概して推定精度は向上せず、むしろ不安定な推定値が得られることが多い。したがって、現地観測データを解析する場合には、事前に数値シミュレーションにより、当該波浪観測条件を対象としてEMLMによる方向スペクトル推定値の特性を把握しておくことが望ましい。

方向分布関数に0が含まれることが予想される場合には、以下のようにしてクロススペクトルに定数を付加し、方向スペクトル解析すればよい。

式(11)の両辺を波浪の周波数スペクトルで除せば、

$$\frac{\Phi_{mn}(f)}{S(f)} = \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) [\cos\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} - i \sin\{k(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\}] G(\theta|f) d\theta \quad (61)$$

となり、各周波数ごとに方向分布関数 $G(\theta|f)$ を推定するための基礎式となる。方向分布関数 $G(\theta|f)$ は方向角に関して積分すれば1になる性質を有している。したがって、方向分布関数の全エネルギー (=1) の一定割合 α (例えば1%程度) を一様なノイズ成分とし、 $\varepsilon(\theta) = \alpha / 2\pi$ を式(61)の $G(\theta|f)$ の代わりに代入して $\Phi_{mn}(f)$ を数値積分によって計算し、これを現地観測により得られたクロススペクトルの推定値に付加して方向スペクトル解析すればよい。このような方法により、性質の明かな一様なノイズを付加して安定な方向スペクトルが推定できるので、後で方向スペクトルの解析結果を解釈する際に都合がよい。この方法はMEPやBDMの繰り返し計算回数を減じ、効率的に収束解を求めるのにも有効である。

なお、上記のような処理により非負の方向スペクトルが推定される場合でも、EMLMの方向スペクトルにはエネルギーピーク近傍で振動が生じる場合がある。これは、方向分布関数の逆数上では微細な、有限桁までしか計算し得ない電子計算機上での誤差が、その逆数である方向分布関数では拡大されて現われるためである。この場合、方向分布関数の対数変換値 $\log G(\theta|f)$ をFourier解析し、そのFourier成分の低周波数側からのエネルギーの累積値が95~99%程度までの周波数成分を用い、高周波数成分を除去すれば、このような振動をある程度抑えることができる場合がある。

3. 4 各推定法の比較

磯部らにより導入された数値シミュレーション法¹⁰⁾を利用して3. 1~3. 3で述べた各推定法の推定精度の検討を行った。すなわち、ここでは方向スペクトルは周波数スペクトルと方向分布関数の積で表されることから、任意の周波数 f に着目したとして、方向角 θ に関する分布のみについて検討した。数値シミュレーションの具体的手順は以下の通りである。

① 検討対象とする方向分布関数を次式で与える。

$$G(\theta) = \sum_i \alpha_i \cos^{2S_i} \left(\frac{\theta - \theta_i}{2} \right) \quad (62)$$

2つの波群から構成されるような双峰型の方方向分布関数を対象とする場合には、式(62)の α_i 、 S_i 、 θ_i の値を変えた2種類の方方向分布関数を重ね合わせて与えることとする。

② 式(62)で与えた方向分布関数をもとに、式(11)により任意地点の任意波動量間のクロススペクトルを計算する。

③ ②で得られたクロススペクトルをもとに3. 1～3. 3で述べた方法により方向分布関数の推定を行い、真の方方向分布関数(式(62))と比較する。

図-1は同一地点で水面変動 η 、水面勾配 η_x および η_y を計測した場合の各推定法による方向分布関数の推定結果を示したものである。図-1中のTRUEは式(62)で与えた真の方方向分布関数、LHMはパラメータ法一種であるLonguet-Higginsらの方法⁷⁾により推定した方向分布関数である。図-1に見られるように、既往のLHMに比べてMEPやEMLMは分解能が高く、特にMEPでは図-1(c)、(d)に見られるように、エネルギーの小さな第2ピークも識別し得ることが分かる¹¹⁾。

図-2の下段は、それぞれ図-2の上段に示す3種類の観測条件で方向スペクトルを観測した場合の、BDMとEMLMによる方向スペクトルの推定結果を示したものである。図-2中の (η) や (η_x, η_y) はそれぞれ水面変動 η や水面勾配 η_x 、 η_y をそれぞれの測点で計測することを意味している。また、ここでは各計測器間の最短距離 D を対象とする波浪の波長の0.2倍として計算している。図-2(b)、(c)に見られるように、BDMでは4つ以上の波動量を観測する場合には極めて高精度に方向スペクトルを推定し得ることが分かる。なお、図-2(a)でBDMの推定精度が低下している原因は、3つの観測波動量から2方向波浪の方方向分布関数を推定する場合には、2方向波浪が有する未知要素の大きさに比して得られる情報が少ないため、統計的な意味で方向分布関数を推定しにくいためである。図-1で示したMEPの場合には、3成分の波動量から2方向波浪を識別し得たが、これはMEPでは式(16)で与えられる独立な方程式の数とMEPの推定式に含まれる未知パラメータの数が等しく、統計的な推定法となっていないためである。3つの波動量を用いて一方向波浪を対象とした別の試算によれば、BDMで推定される方向分布関数は妥当な推定値を示していることから、BDMの適用に際しては、現象の複雑さに応じて必要な規模の観測を実施する必要がある。しかしながら、4つ以上の波動量から二方向波浪の方方向分布関数を推定する場合には、BDMは他の既往の方法に比べて最も優れた推定法であるといえる¹²⁾。

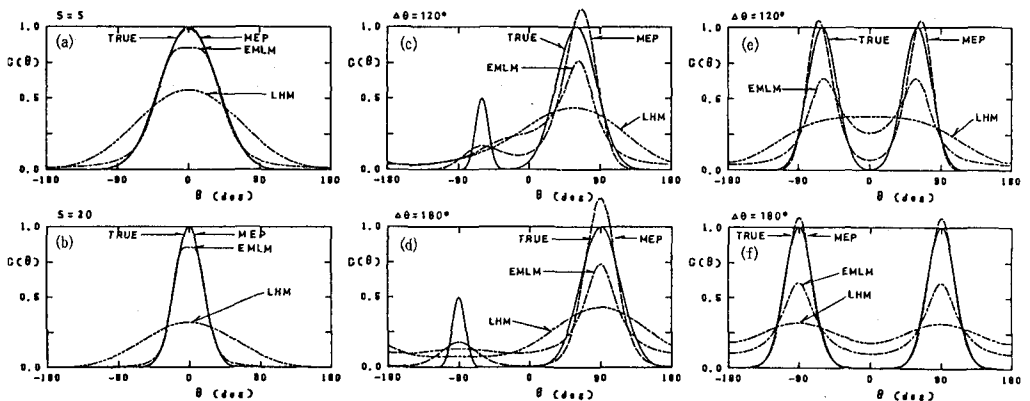


図-1 方向スペクトル推定法 (MEP, EMLM, LHM) の推定精度の比較

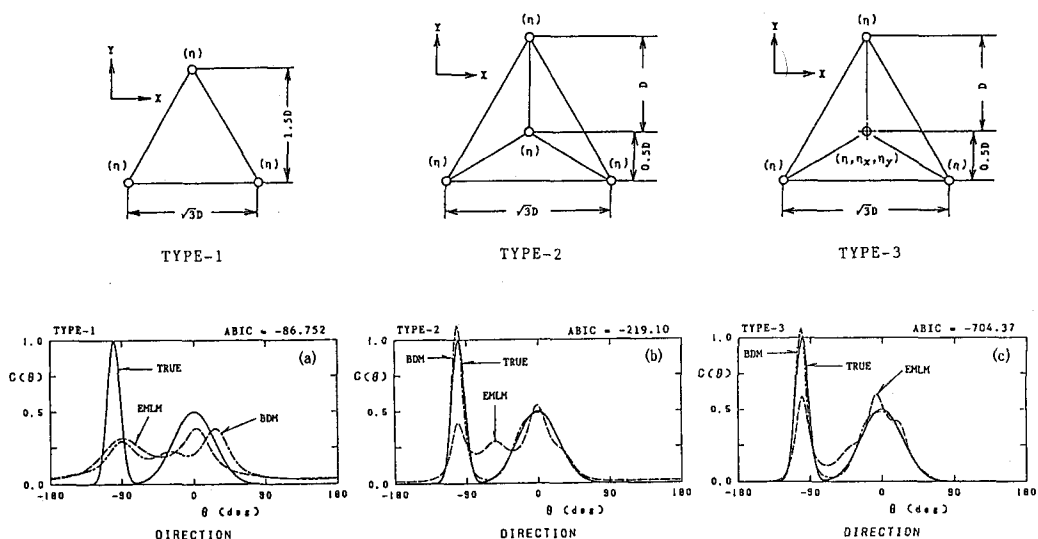


図-2 方向スペクトル推定法 (BDM, EMLM) の推定精度の比較
(上段: 方向スペクトル観測アレイ, 下段: 方向スペクトル推定結果)

4. 方向スペクトルの現地観測例

(1) 方向スペクトルの標準形

方向スペクトルは式(6)のように、一般に周波数スペクトル $S(f)$ と方向分布関数 $G(\theta|f)$ の積で表される。周波数スペクトルについては非常に多くの観測記録が解析されており、その特性が比較的良好に分かっている。例えば、代表的な風波の周波数スペクトルの標準形として次式がある。

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^2 T_{1/3} (T_{1/3} f)^{-5} \exp \{-1.03 (T_{1/3} f)^{-4}\} \quad (63)$$

ここに、 $H_{1/3}$ は有義波高、 $T_{1/3}$ は有義波周期である。式(63)はBretschneiderの提案式²⁵⁾を光易が係数を修正して提案²⁶⁾したものであり、Bretschneider-光易スペクトルと呼ばれている¹⁾。

このほか、北海の波浪共同観測計画 (J O N S W A P) の成果に基づいてHasselmannらが提案²⁷⁾したものを合田が修正し¹⁾、式(64)のように波高と周期をパラメータにして表示した近似式として次式がある。

$$S(f) = \alpha H_{1/3}^2 T_p^{-4} f^{-5} \exp \{-1.25 (T_p f)^{-4}\} \gamma \exp \{-(T_p f - 1)^2 / 2 \sigma^2\} \quad (64)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx \frac{0.0624}{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}} \\ \sigma &= \begin{cases} \sigma_a & : f \leq f_p \\ \sigma_b & : f \geq f_p \end{cases} \\ \gamma &= 1 \sim 7 \text{ (平均 3.3)}, \sigma_a \approx 0.07, \sigma_b \approx 0.09 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

である。なお、 f_p はスペクトルのピーク周波数、 T_p はその逆数であり、有義波周期とは次式のような関係がある。

$$T_p \approx 1.05 T_{1/3} \quad (66)$$

この他にも様々な周波数スペクトルの標準形が提案されている。

式(63)は風波の十分に発達した状態のスペクトル形として、式(64)は発達過程の風波のスペクトル形として提案されたものである。このため、式(63)は波浪推算における極限スペクトル形として標準的に用いられている他、解析的に取り扱い易いこともあって、わが国では設計スペクトルとしても標準的に採用されている。しかしながら、わが国沿岸では低気圧の進行速度が速いこともあってか、式(63)のような十分に発達した幅の広いスペクトルが出現することはまれであり、式(64)で近似できそうな尖鋭なものが多い。

方向分布関数については、波向観測が困難なこともあり、不十分な情報しか得られていない。このため、周波数スペクトルのような標準形を定めることは難しい。しかしながら、光易らはクローバーリーフ型ブイ式波浪計を用いた綿密な観測結果に基づいて、方向分布関数の標準形として次式を提案している²⁹⁾。

$$G(\theta|f) = G_0 \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (67)$$

ここに、 G_0 は式(7)の正規化条件を満たすための定数であり、

$$G_0 = \left[\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \right]^{-1} \quad (68)$$

で算出される。もし、 $\theta_{min} = -\pi$ 、 $\theta_{max} = \pi$ であるならば、 G_0 は次式となる。

$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2S-1} \frac{\Gamma^2(S+1)}{\Gamma(2S+1)} \quad (69)$$

ただし、 $\Gamma(\quad)$ はGamma関数である。また、 S は波のエネルギーの伝播する方向集中度を表わすパラメータであり、光易らは S の最大値 S_{max} を主パラメータとして次式を提案している²⁹⁾。

$$S = \begin{cases} S_{max} (f/f_p)^5 & : f \leq f_p \\ S_{max} (f/f_p)^{-2.5} & : f \geq f_p \end{cases} \quad (70)$$

なお、合田と鈴木²⁹⁾ は S_{max} と波形勾配 H_0/L_0 の関係を示す図表を作成し、波浪条件と S_{max} の関係として次のような値を提案している。

- | | | | |
|-----------------|---|----------------|------|
| I) 風波 | : | $S_{max} = 10$ | |
| II) 減衰距離の短いうねり | : | $S_{max} = 25$ | |
| | | (波形勾配が比較的大) | (71) |
| III) 減衰距離の長いうねり | : | $S_{max} = 75$ | |
| | | (波形勾配が小) | |

ただし、式(71)に示す関係は沖波に対するものである。

現地観測データの解析結果によれば、各周波数ごとのエネルギーの平均的な伝播方向がほぼ同一方向の風波の方向分布関数は、特に周波数スペクトルのピーク周波数よりも高周波数側で式(70)の標準形によく一致する特性を示す。なお、方向集中度パラメータ S の最大値はスペクトルのピーク周波数ではなく、やや低周波数側に現れることが報告されている³⁰⁾。

また、式(71)の関係は、合田がその著書¹⁾の中で「方向スペクトルの観測がいろいろ行われ、その性質が詳しく分かるようになるまでは、 S_{max} として次のような値を用いるのがよいと思われる」として暫定的に与えた指標である。しかしながら、これまでの解析結果からは、式(71)の指標は沖波の風波やうねりの特性を代表する指標として妥当な値と思われる。

(2) 沖波の多様な方向スペクトルの出現特性

沿岸の比較的水深の浅い海域では、陸部による遮蔽や屈折等の影響により、年間を通してほぼ同じ方向にピークを有する方向スペクトルが観測される場合が多い。しかしながら、沖波の方向スペクトルの出現特性

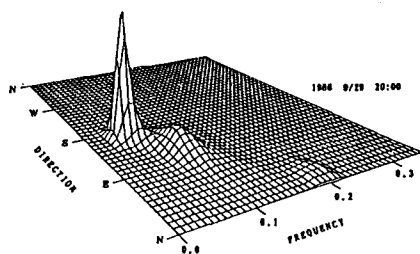


図-3 いわき沖で観測された方向スペクトルの解析例

は、気象擾乱の種類、規模、コース等に依存して変わり、様々な形状の方向スペクトルが出現する。

図-3は図-4に示す「いわき沖波浪観測システム」(水深150m)で観測されたデータをもとにBDMで解析した方向スペクトルの一例を示したものである³¹⁾。低周波数側のピークはうねりであり、高周波数側のピークは風波である。図-5は図-3と同じデータを用いて算出された方向集中度パラメータ S を周波数 f に対してプロットしたものである。図-5に見られるように、うねりは S_{max} が75程度、風波は S_{max} が10程度であり、風波の周波数領域の S の特性はピーク周波数よりも高周波数側で光易型方向関数によく一致している。この例に見られるように、沖波の方向スペクトルは沿岸域で観測される方向スペクトルと異なり、複数のピークを有する方向スペクトルが出現する場合が多く、季節により特徴的な出現特性を示す。

図-6はBDMで解析されたいわき沖の方向スペクトルを周波数に関して積分し、方向角に関して32方位に分割した方位別エネルギー分布の月平均値を示したものである³²⁾。図-6に見られるようにいわき沖では季節によりエネルギーの卓越する方向が変化し、2月や4月の例に見られるように明瞭な2つのピークを示す場合もある。特に4月の場合には、2つのピークのエネルギー密度の比は0.88程度であり、第2ピークは無視できない。

このように、沖波の方向スペクトルの出現特性は我々の認識している沿岸域の方向スペクトルの出現特性とはやや異なっており、今後の海洋開発を進めていく上で、その出現特性を調査し把握しておく必要がある。

5. 新しい方向スペクトル観測機器の開発

方向スペクトルを観測する機器としてはこれまでも種々のものが開発され、実用に供されているが、簡易な施設により方向スペクトルを精度良く定常的に観測し得る計器にはいまだ満足すべきものがない。しかしながら、最近、超音波のドップラー効果を応用して水中の水粒子速度を測定する機能を用いた波向計の開

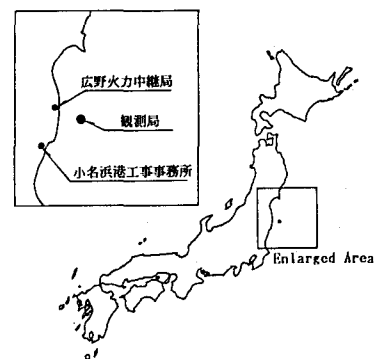
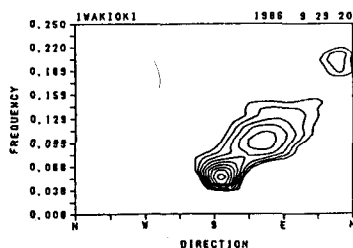


図-4 いわき沖波浪観測システムの位置図

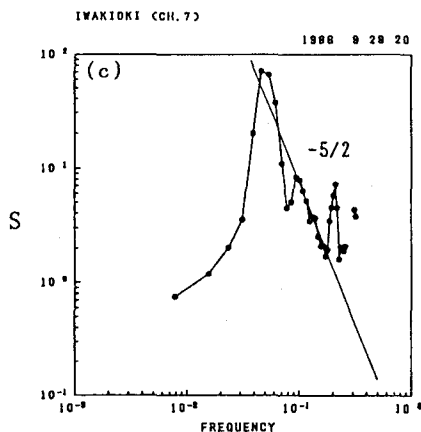


図-5 方向集中度パラメータ S の周波数特性

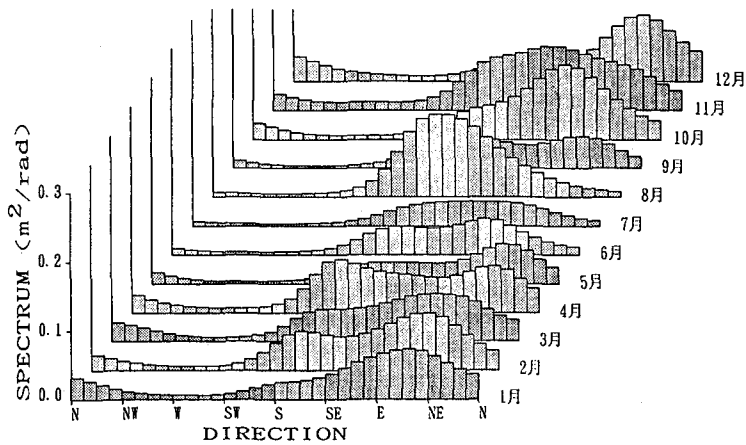


図-6 方位別エネルギー分布の月平均値 (1989年～1990年)

発が進められている³³⁾。図-7はこの「水中ドップラー式波向計」の実験機の測定概念を示したものである。図-7に示されるように、実験機ではセンサー中央部の超音波送受波器により水面変動を測定するとともに、鉛直軸より角度を 30° 傾けて平面座標XY軸上の4方向に発射された超音波パルスの反射音のドップラー・シフトから海面下所定の水深層内の平均的な水粒子速度を測定する。計測部ではこの2つの機能による5方向の測定を時分割方式により短時間間隔で繰り返して行い、これを水面変動と水粒子速度の時系列データに変換して出力する。演算部は、計測部で得られたデータをもとに、波高・周期・波向に関する代表値、あるいは方向スペクトルの演算を行い、その結果を測定データとして出力する。

本実験機は釜石港沖合い水深35mの地点に設置され、4回、延べ120観測に及ぶ実海域実験によりその適用性が確認されている。図-8は実海域実験で得られたデータをEMLMにより解析した一例を示したものである。釜石湾の湾口は東方に開いており、妥当な方向から方向集中度の高い波浪が来襲していることが明確に示されている。

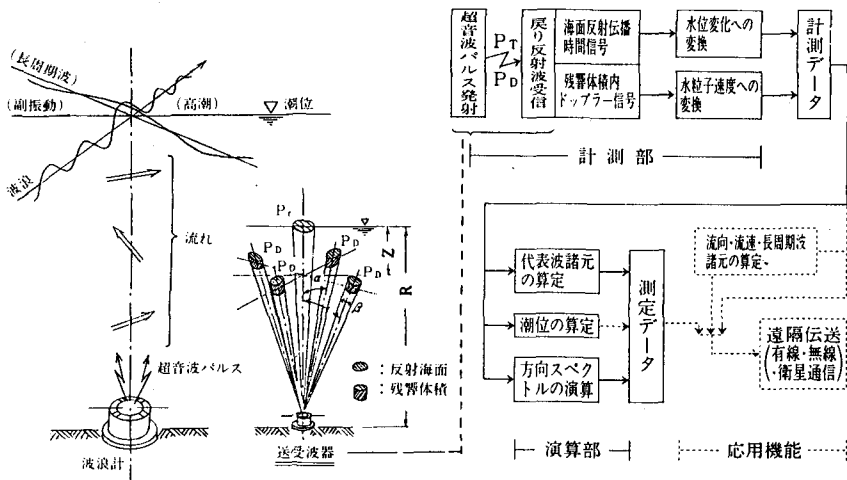


図-7 水中ドップラー式波向計の測定概念

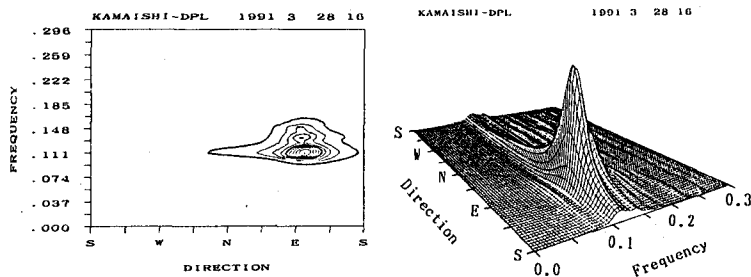


図-8 水中ドップラー式波向計により観測された方向スペクトルの解析例

6. おわりに

港湾・海岸工学上の諸問題において方向スペクトルに関する知識が不可欠であることは言うまでもない。しかしながら、方向スペクトル観測の困難さのために、いまなお不十分な情報が蓄積されておらず、方向スペクトルに関する調査・研究は今後精力的に取り組まなければならない重要な課題の一つである。本稿では、方向スペクトルに関して主として著者らのこれまでの研究を中心として述べたが、いささか内容に片寄りがあることを反省している。また、ここで述べた以外にも、例えば方向スペクトル観測を実施する上で重要な観測機器の最適配置の問題等、紹介できなかった項目が多々ある。これらについては1. で述べた書籍等^{1), 2), 3)}を参照して頂きたい。本稿で紹介した方向スペクトル推定法や観測機器が今後の方向スペクトルに関する調査・研究に少しでもお役に立てばと願っている。

なお、本稿で用いた方向スペクトルは運輸省第二港湾建設局により観測されたデータを解析したものである。また、方向スペクトル解析に際しては、港湾技術研究所海象調査研究室の浅井正研究官の助力を得た。これら関係各位の方々に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 合田良実：港湾構造物の耐波設計－波浪工学への序説－、鹿島出版会、210p.、1977.
- 2) 合田良実：海岸・港湾調査法、土木学会編、新体系土木工学80、技報堂出版、251p.、1986.
- 3) 本間仁・堀川清司：海岸環境工学、東京大学出版会、pp. 506～524、補章A 方向スペクトルの推定理論、1985.
- 4) 磯部雅彦・近藤浩右：入・反射波の共存場における方向スペクトルの推定法、第30回海岸工学講演会論文集、pp. 44～48、1983.
- 5) 橋本典明・小舟浩治：ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定－入・反射波共存場を対象として－、港湾技術研究所報告、第26巻、第4号、pp. 3～33、1987.
- 6) Barber, N F. : The directional resolving power of an array of wave detectors, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, Inc., pp. 137～150, 1961
- 7) Longuet-Higgins, M. S., D. E. Cartwright and N. D. Smith : Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall Inc., New Jersey, pp. 111～136, 1963.
- 8) Panicker, N. N. and Borgman, L. E. : Enhancement of directional wave spectrum estimate, Proc. 14th Int. Coastal Eng. Conf., Copenhagen, pp. 258～279, 1974.
- 9) Capon, J. : High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis, Proc. IEEE, Vol. 57, pp. 1480～1418, 1969.

- 10) 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司：方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張、第31回海岸工学講演会論文集、pp.173~177、1984.
- 11) 橋本典明・小舟浩治：最大エントロピー原理(MEP)を用いた方向スペクトルの推定、港湾技術研究所報告、第24巻、第3号、pp.123~145、1985.
- 12) 橋本典明：ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定、港湾技術研究所報告、第26巻、第2号、pp.97~125、1987.
- 13) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学、共立出版株式会社、236p.、1983.
- 14) 坂元慶行：カテゴリカルデータのモデル分析、共立出版株式会社、221p.、1985.
- 15) 瀧澤英一：情報の理論と演習、廣川書店、293p.、1966.
- 16) 斎藤慶一：確率と確率過程、サイエンス社、142p.、1974.
- 17) 赤池弘次：エントロピーを巡る混乱、数理科学、No.259、サイエンス社、pp.53~57、1985.
- 18) 磯部雅彦・古市耕輔：不規則波に対する統計量の変動に関する理論的考察、第33回海岸工学講演会論文集、pp.159~163 1986.
- 19) Bendat, J.S. and A.G. Piersol: Random Data Analysis and Measurement Procedures, Second edition, John Wiley & Sons, 566p., 1986.
- 20) 繁舩算男：ベイズ統計入門、東京大学出版会、225p.、1985.
- 21) 林知己夫・鈴木達三・赤池弘次：統計学特論、放送大学教材、日本放送出版協会、236p.、1986.
- 22) Akaike, H.: Likelihood and Bayes procedure, Bayesian Statistics (Bernardo, J.M., De Groot, M. H., Lindley, D.U. and Smith, A.F.M. eds.) University Press, Valencia, pp.143~166, 1980
- 23) 石黒真木夫・荒畑恵美子：ベイズ型スプライン回帰、統計数理研究所彙報、第30巻、第1号、pp.29~36、1982.
- 24) 石黒真木夫：複雑すぎる現象をどう捉えるか —大規模なパラメトリックモデル—、統計数理、No.2、pp.251~256、1985.
- 25) Bretschneider, C.L.: Significant waves and wave spectrum, Ocean Industry, Feb., pp.40~46, 1968.
- 26) 光易恒：風波のスペクトルの発達(2) —有限な吹送距離における風波のスペクトルの形について—、第17回海岸工学講演会論文集、pp.1~7、1970.
- 27) Hasselman, K. et al.: Measurement of windwave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Deutsche Hydr. Zeit, Reihe A (8°), No.12, 1973.
- 28) Mitsuyasu, H et al.: Observation of the directional spectrum of ocean waves using a clover leaf buoy, Jour. Physical Oceanography, Vol.5, pp.750~760, 1975.
- 29) 合田良実・鈴木康正：光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算、港湾技研資料、No.230、45p.、1975.
- 30) Hasselman, D.E., M. Dunckel and J.A. Ewing: Directional Wave Spectra Observed during JONSWAP 1973, Jour. Physical Oceanography, Vol.10, pp.1264~1280, 1980.
- 31) 橋本典明・小舟浩治・亀山豊：現地観測データを用いた方向スペクトル推定法に関する検討、港湾技術研究所報告、第27巻、第2号、pp.59~94、1988.
- 32) 永井紀彦・橋本典明・浅井正・菅原邦彦・久高将信：いわき沖で観測された方向スペクトルの出現特性、海岸工学論文集、第39巻、1992(印刷中).
- 33) 高山知司・橋本典明・永井紀彦・高橋智晴・佐々木弘：水中ドップラー式波向計(海底設置式波浪計)の開発について、海岸工学論文集、第39巻、1992(印刷中).