

河川における物質混合とその解析

Transverse and Longitudinal Mixing in Rivers

綾 史 郎

Shirou AYA

1. はじめに

本講義では河川流を対象として、流体運動とそれに伴う物質の流下方向、水路幅方向の混合（拡散／分散）に関する理論と解析法について述べるとともに、具体的な解析例を紹介する。対象とする物質は、主として溶解性の、濃度が十分小さく、その存在が流体運動に影響を与えないと仮定されるもの（passive material）である。具体的には、濁度、SS、BOD、DO等の各種の河川水質指標や希薄な化学物質の濃度を考えればよい。

物質混合の課題は流体力学における運動量、熱、質量を対象とする輸送現象論の一つとしてとして広く理学、工学、農学等の自然科学の諸分野で古くから研究されている課題であるが、応用される場も様々であり、それぞれに個性ある発展を遂げてきている。すなわち、基本解析原理は流体力学におけるそれと全く同一（流体に関する質量、運動量、エネルギーの保存則および拡散物質の保存則）であるが、解析法は我々の対象とする河川流特有の性質によって、流体力学の他の応用の分野、例えば、機械工学や化学工学におけるものとは趣を異にしている。河川の流れは一方向的であり、その空間的拡がりは流れ方向に一番大きく、ついで水路幅方向であり、水深方向には極めて小さい。水路幅、水深は空間的に非一様であり、しかも、蛇行や分合流を含むのが通常であり、あたかも素人の作った”手延べきし麵”か、”フェトチーネ”のような形をしており、河口域の様な密度流現象が見られる所を除いては、水深方向の非一様性が小さいものと仮定し得る。これを開水路の中心付近に投入された物質の混合を例に考察すると、以下のようなものである。水路幅、水深は空間的に非一様であるが、その長さスケールをそれぞれ B 、 H とし、水路幅方向の分散係数を D_l 、水深方向のそれを D_v とすると、水路幅、水深方向の混合の時間スケール t_l 、 t_v は次のようである。

$$t_l = \left(\frac{B}{2}\right)^2 / D_l \quad (1.1a)$$

$$t_v = H^2 / D_v \quad (1.1b)$$

したがって、二つの時間スケールの比を取ると

$$t_r = \frac{t_l}{t_v} = \frac{1}{4} \left(\frac{B}{H}\right)^2 \left(\frac{D_v}{D_l}\right) \quad (1.2)$$

通常の河川では、 $B \approx 10^1 \sim 10^2$ m、 $H \approx 10^0$ m のオーダーであり、水路幅、水深方向の分散係数のオーダーはともに $\theta = D/u_* H \approx 10^{-1}$ であるから、 t_l/t_v は $10^2 \sim 10^3$ となり、河川に投入された混合物質の濃度は、水深方向に比較して、水路幅方向にはその $10^2 \sim 10^3$ の時間で一様化すると考えてよい。また、流速係数 $U/u_* \approx 10$ と仮定して、水深方向の混合に要する流下距離 L_v を計算すると $L_v/H = (1/\theta)(U/u_*) \approx 10^2$ 程度であるのに対して、水路幅方向のそれは $B/H = 10^2$ と仮定して $L_l/B = (1/\theta)(U/u_*)(B/H) \approx 10^4$ と計算される（もう少し厳密に計算すれば、 $L_v/H \approx 50$ 、 $L_l/B \approx 500$ である）。すなわち、水深方向には濃度分布は投入後すぐ一様化するのに対して、水路幅方向にはなかなか混合が進まず、濃度分布の一様化には水深方向のその $10 \sim 10^2$ 倍のオーダーの流下距離を要することが分かる。

実験水路に瞬間面源として投入された分散雲の発達過程を模式的に示せば Fig. 1.1 のようであり、(a) はトレーサー投入直後の様な濃度分布を、(b) は水路床および側壁の影響による3次元的な流速分布により、トレーサーが移流により引き延ばされてできた、3次元的な歪んだ濃度分布を示している。広幅の長方形断面水路では水路中央部では2次元的な流速分布が成立しており、中央部付近では濃度分布は幅方向には一様な部分

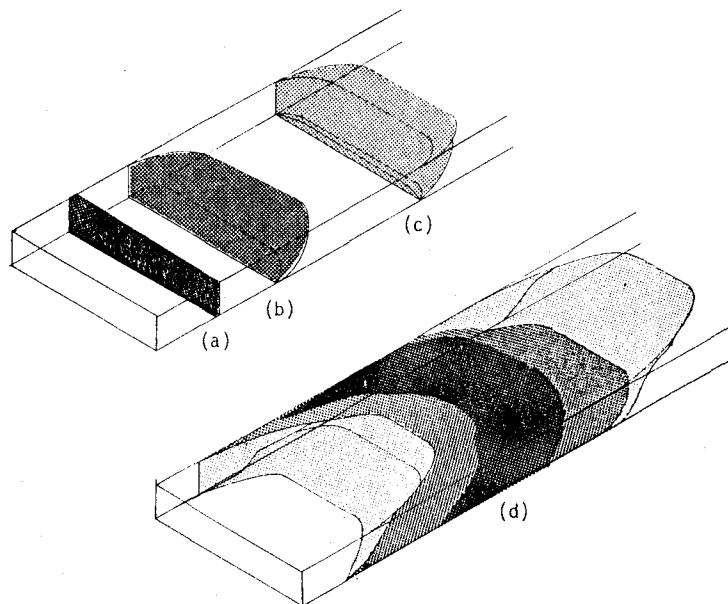


Fig. 1.1 瞬間面源投入された物質の混合過程.

が生じている。(c) 流下が進むと、水路幅に比べて水深が小さいため水深方向の乱流拡散により、水深方向の濃度の一様化がまず進行する。(d) しかし、さらに流下が進むと、(c) で観測された水路中央部付近の水路幅方向の一様な濃度部分も水路幅方向の流速分布の非一様性により消滅し、分散雲の大部分で、水深方向には一様であるが、水路幅方向にのみ非一様な濃度分布が形成される。その後、横方向の乱流拡散により水路幅方向の濃度分布の一様化が極めて緩やかに進行する。後述する Taylor の Lagrange 的拡散理論で示される分散雲の統計的分散が線形となる領域は、(d) に相当するものと考えられる。

従来より河川水理学においては前述した河川流の空間的スケールの特性より、主として流下方向の変化に興味を持たれ、流下方向の一次元解析が慣用であった。物質混合の課題で言えば一次元移流分散理論である。しかし、一次元移流分散理論によって得られる数学モデルは簡単ではあるが、その厳密な導出とその過程における多くの仮定の理解は必ずしも容易ではなく、このことが河川における混合現象の理解を困難にさせている理由の一つとも考えられる。

本講義では現象の理解のしやすさに重点を置き、まず流体中の物質混合の基礎として乱流拡散と分散について説明する。ついで、それらが河川における物質混合の課題に如何に応用されているかを、3次元の流体運動と物質拡散の基礎式から出発し、2次元平面モデル、1次元モデルによる解析により説明する。

2. 乱流拡散現象とその理論

流体運動の解析法には、空間に何等かの固定座標系を設定し、その座標位置における流体の流速、圧力、密度、濃度等を座標位置と時間の関数として記述、解析する Euler 的解析法と、ある流体塊の時々刻々の位置を追跡し、流体塊の位置、流速、濃度を流体塊の最初的位置と時間の関数として記述する Lagrange 的解析法がある。拡散量の解析にあたってはこの二つの方法が適用可能である。Lagrange 的解析法は通常の流体運動の解析では使われることは希であるが、混合現象の解析では流体塊／粒子の散らばりを問題とするからより本質的である。ここでは、Euler 的解析法による拡散現象の定式化と Lagrange 的解析法による拡散理論について

て述べる。基礎的な事項なので要点のみを概説することとし、式の展開等の詳細は文末の参考書を参照されたい。

2.1. Euler の乱流拡散方程式

拡散量 c として何らかの水質指標の単位体積当りの濃度（次元は ML^{-3} 、或は相対濃度を考えて無次元）を考え、 c の x_i 軸方向の単位面積、単位時間当りの輸送量（flux）を

$$q_i = u_i c - D_m \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

とすると、拡散量の保存則は一般の流体運動に関する質量保存則の誘導と同様にして、以下のように導かれる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial u_1 c}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2 c}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3 c}{\partial x_3} = D_m \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2} \right\} \quad (2.2)$$

ここに、 u_i : 流速ベクトルの x_i 軸成分、 D_m : 分子拡散係数、 x_i : デカルト座標系 ($i = 1, 2, 3$)、 t : 時間であり、(2.1) 式では c の輸送形態としては、流れによる移流型の輸送 $u_i c$ と分子運動による勾配型の輸送 $-D_m \partial c / \partial x_i$ を考えている。(2.2) 式を Fick の拡散方程式という。通常我々が扱うのは乱流であるから、乱流解析において Navier-Stokes の方程式より Reynolds 方程式を得たのと同様に、速度成分 u_i と濃度 c を平均値（平均化の方法としては時間平均、体積平均、統計的平均のいづれでもよい）とそれからの偏差の和として、次のように分解して

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (2.3)$$

$$c = \bar{c} + c' \quad (2.4)$$

のように示し、これらを(2.2)式に代入したのち、平均をとると次のように書き改められる。

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_1 \bar{c}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2 \bar{c}}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3 \bar{c}}{\partial x_3} = \frac{\partial (-\bar{u}_1' \bar{c}')}{\partial x_1} + \frac{\partial (-\bar{u}_2' \bar{c}')}{\partial x_2} + \frac{\partial (-\bar{u}_3' \bar{c}')}{\partial x_3} \quad (2.5)$$

ただし、(2.5) 式では分子拡散による輸送を小さいものとして無視している。運動量方程式の平均化において、Reynolds 応力項 $\bar{u}_i' \bar{u}_j'$ が生じたのと同様に、(2.5) 式においては $\bar{u}_i' \bar{c}'$ が生じている。(2.5) 式を閉じることができないのは運動量輸送の場合と同様であって、通常分子拡散との類推より、

$$-\bar{u}_i' \bar{c}' = \epsilon_{ij} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

と書く。ここに、 ϵ_{ij} は乱流拡散係数テンソルであり、9 個の成分を持っている。乱流拡散係数テンソルの主軸と座標軸が一致するものとすれば、(2.6) 式はより簡単に、

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_i \quad (i = j) \quad (2.7a) \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.7b)$$

と書かれる。したがって、(2.5) 式は次の様に書き表すことができ、

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_1 \bar{c}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2 \bar{c}}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3 \bar{c}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\epsilon_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\epsilon_2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\epsilon_3 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \right) \quad (2.8)$$

これを乱流拡散方程式と呼ぶ。

2.2. 乱流拡散係数

(2.5) 式においては Reynolds flux $\bar{u}_i' \bar{c}'$ が未知量であったが、(2.8) 式では乱流拡散係数 ϵ_i が未知量であって状況に変化はない。乱流拡散係数をその定義式(2.6)に従って実験的に計測することは極めて困難であって、運動量輸送における渦動粘性係数 ν_t との相似性を仮定して、

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\epsilon} \quad (2.9)$$

とおき, Pr_t の関数形を別途定めることが多い。ここに, Pr_t は乱流 Prandtl 数であって, 乱流運動による運動量輸送と質量輸送の比を表している。熱輸送の場合は, 同様に乱流 Schmit 数 $Sc_t = \nu_t / \varepsilon_{Ht}$ が定義される。現在では, $k - \varepsilon$ モデル等の乱流モデルを用いて渦動粘性係数を定め, 乱流 Prandtl 数の関数として乱流拡散係数を定めることも広く行われている。また, 乱流拡散係数の次元は $L^2 T^{-1}$ であるから, 代表流速 U , 代表長 L , 代表時間 T を用いて,

$$\varepsilon_t = \theta U L \quad (2.10a)$$

$$\varepsilon_t = \theta' U^2 T \quad (2.10b)$$

と表現し, θ, θ' を別途定めることもよく行われる。 U として乱れ強さを, L として混合距離をとれば (2.10a) 式は Prandtl-Karman の運動量輸送における混合距離理論による, また, T として後述の Lagrange の積分時間スケールをとれば (2.10b) 式は Taylor の拡散理論による乱流拡散係数に対応する。

対数則の成立する 2 次元流れにおいて, 混合距離理論から渦動粘性係数を定め, $Pr_t = 1$ を仮定 (Reynolds Analogy) すると, 水深方向の乱流拡散係数は

$$\frac{\varepsilon_3}{h u_*} = \frac{\nu_t}{h u_*} = \kappa \frac{x_3}{h} \left(1 - \frac{x_3}{h}\right) \quad (2.11)$$

となる。ここに, κ : Karman 定数, h : 水深, u_* : 摩擦速度である。(2.11) 式の成立は Jobson-Sayre (1970) によって浮遊砂の濃度分布を測定することにより確認されている。なお, (2.11) 式では代表流速として摩擦速度 u_* を, 代表長として水深 h を用いて乱流拡散係数の無次元化が行われている。また, 水表面における水路幅方向の乱流拡散係数として $\varepsilon_{s2}/hu_* \approx 0.2$ (細田, 1990), 流下方向の乱流拡散係数として $\varepsilon_{s1}/hu_* \approx 0.5 \sim 0.7$ (Engelund, 1969, Iwasa-Imamoto, 1969) が報告されている。

2.3 移流拡散方程式の解

以下では, 移流と拡散 (分散) を表す (2.8) 式において流速 U と拡散 (分散) 係数 D を一定とした簡単な場合についてその解析解をあげておく。

(1) 一次元問題

a. 条件: $x = 0, t = 0$ において質量 M の物質投入があった場合,
基礎方程式:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

解: 周知の Gauss 分布を与える解であって, 分散雲の中心は $x = Ut$ で移流し, 分散雲の広がり (統計的分散) は $\sigma^2 = 2Dt$ であたえられる。

$$C(x, t) = \frac{M}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x - Ut)^2}{4Dt}\right\} \quad (2.13)$$

b. 条件: $t = 0$ で $C(t; x) = f(x)$ の初期濃度分布が与えられる場合,
解:

$$C(x; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') \exp\left\{-\frac{(x' - Ut)^2}{4Dt}\right\} dx' \quad (2.14)$$

c. 条件: $t = 0$ で $C(0; x) = 0, x = 0$ で $C(t; x) = \phi(t)$ ($t \geq 0$) の上流端境界濃度が観測された場合,
解:

$$C(t; x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \phi(t - t') \exp\left\{-\frac{(x - Ut')^2}{4Dt'}\right\} \frac{1}{t'^{3/2}} dt' \quad (x \geq 0) \quad (2.15)$$

(2) 二次元問題

a. 条件: $x = 0, t = 0$ において質量 M の物質投入があった場合,

基礎方程式:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x_1} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} \quad (2.16)$$

解: 2次元の Gauss 分布を与える解であって,

$$C(x, t) = \frac{M}{4\pi\sqrt{D_1 t}\sqrt{D_2 t}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - Ut)^2}{4D_1 t} - \frac{x_2^2}{4D_2 t}\right\} \quad (2.17)$$

b. 条件: $x = 0$ において, $t \geq 0$ で単位時間あたり質量 $\dot{m}$ の物質の連続投入があった場合の定常解,

基礎方程式

$$U \frac{\partial C}{\partial x_1} = D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} \quad (2.18)$$

解:

$$C(x_1, x_2) = \frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}} \exp\left(\frac{Ux_1}{D_1}\right) K_0\left[\frac{U}{2D_1}\sqrt{x_1^2 + \frac{D_2}{D_1}x_2^2}\right] \quad (x_1 \geq 0) \quad (2.19)$$

ここに, K_0 : 0 次の変形 Bessel 関数である.

2.4 Taylor の乱流拡散理論 -One Particle Analysis-

乱流拡散の理論的取り扱い, Taylor(1921) により一つの流体粒子を Lagrange 的に追跡し, 粒子位置の時間的変化を統計的に扱うことにより始められた. 古典的なランダム歩行 (酔歩) によるモデル化と異なり, 乱流運動という連続した運動による拡散の理論である. 一様で定常な乱流場 (簡単には, $\overline{u_1} = \text{Const.}$, $\overline{u_2} = \overline{u_3} = 0$ の流れ場を考えればよい, ただし, 乱れは 3 方向に存在する) に固定された一点 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ から $t = 0$ に放出された粒子の t 時間後の粒子位置 $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ について考える. 粒子位置は

$$\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \int_0^t \mathbf{v}_L(\mathbf{a}, t') dt' + \mathbf{a} \quad (2.20)$$

と書かれる. ここに, $\mathbf{v}_L(\mathbf{a}, t)$ は $t = 0$ に $\mathbf{X} = \mathbf{a}$ を出発した流体粒子の t 時間後の速度 (Lagrange 的速度) である. 簡単のために, 平均流に垂直な x_2 軸方向の粒子位置 X_2 についてのみ考えると,

$$X_2(\mathbf{a}, t) = \int_0^t v_{L2}(\mathbf{a}, t') dt' + a_2 \quad (2.21)$$

であって, 変位の平均は $a_2 = 0$ を仮定して

$$[X_2] = \int_0^t [v_{L2}(\mathbf{a}, t')] dt' = 0 \quad (2.22)$$

となる. ここに, $[\]$ は, 多くの粒子の放出による試行の平均を示している. したがって, 変位の 2 乗平均は平均値まわりの分散 (以下, 後述のせん断流中に置ける物質濃度の分散 (シアー拡散) との混同を避けるため, 統計的分散と呼ぶ) を与え,

$$\sigma_2^2 \equiv [X_2'^2(\mathbf{a}, t)] = \int_0^t \int_0^t [v_{L2}(\mathbf{a}, t') v_{L2}(\mathbf{a}, t'')] dt' dt'' \quad (2.23)$$

で示される. ここで, Lagrange の相関関数 B_L , 相関係数 R_L を

$$B_L(\tau) \equiv [v_{L2}(t) v_{L2}(t + \tau)] \quad (2.24)$$

$$R_L(\tau) \equiv B_L(\tau) / [v_{L2}^2] \quad (2.25)$$

で定義すると, (2.23) 式は, 次のようになる.

$$[X_2'^2(\mathbf{a}, t)] = 2 \int_0^t (t - \tau) B_L(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

拡散係数を

$$D_{L2} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma_2^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [X_2'^2(a, t)] \quad (2.27)$$

で定義すれば (2.26) 式より,

$$D_{L2} = \int_0^t B_L(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

と計算される.

Taylor の連続運動に基づく乱流拡散理論は以上のものであるが, R_L の関数形を定めることは大変困難なことであって, 実験的に計測することも大変難しい. $t = 0$ の時は定義により $R_L(0) = 0$, また $t \rightarrow \infty$ の時は直観的に $R_L(\infty) = 0$ (時刻の差が大きくなると, 速度の相関はなくなる) とすることができる. この様な関係を満足する関数形として, しばしば,

$$R_L(\tau) = \exp(-\tau/T_L) \quad (2.29)$$

が仮定される. 中間の時間における R_L の関数形が少々曖昧でも統計的分散は R_L の 2 回積分で, 拡散係数は 1 回積分で与えられるから結果に大きな差はでない. すなわち,

$$\sigma_2^2(t) = [X_2'^2(a, t)] = 2[v_{L2}^2]T_L^2 \left\{ \exp\left(-\frac{t}{T_L}\right) + \frac{t}{T_L} - 1 \right\} \quad (2.30)$$

であって, $t \ll T_L$ のときは

$$[X_2'^2] = [v_{L2}^2]t^2 \quad (2.31a) \quad D_{L2} = [v_{L2}^2]t \quad (2.31b)$$

また, $t > (3 \sim 6)T_L$ のときは

$$[X_2'^2] = 2[v_{L2}^2]T_L t = 2D_{L2}t \quad (2.32a) \quad D_{L2} = [v_{L2}^2]T_L \quad (2.32b)$$

となる. ここに, T_L は

$$T_L \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (2.33)$$

で定義され, Lagrange の積分時間スケールと呼ばれる粒子速度の相関が継続する目安の時間をあたえる量である.

相関係数はスペクトルとフーリエ変換で結び付いているから, 若干の計算により t の小さいときはすべての振動数の乱流成分が拡散に影響するが, 時間が経過して拡散が進むと, 小さい渦は拡散に関与しなくなり, 大きなスケールの渦がのみが拡散に影響することが分かる.

Taylor の乱流拡散理論は流体粒子位置の統計的平均の分布 (濃度分布) に関して, その 2 次モーメント (統計的分散) についてのみ言及しており, その関数形については何ら触れていないが, 濃度分布の関数形が Gauss 分布であれば分布は平均値と統計的分散のみによって記述される. また, 確率論の中心極限定理によれば, 確率変数の密度関数がいかなる分布形であっても独立でさえあれば, その和の密度関数は Gauss 分布に収束するから, 十分長い経過時間の後は濃度分布は Gauss 分布で記述されることが期待される.

Lagrange 的解析法によるもう一つの重要な結果として Richardson の相対拡散理論がある. Taylor の理論が一つの流体粒子の拡散を考えたのに対し, Richardson の理論は二つの流体粒子の相対的距離の分散 $[l^2]$ の時間変化を扱っている (Two Particle Analysis). 結果だけを記すと,

$t \rightarrow 0$ で,

$$[l^2] = l_0^2 + [v_r^2(0)]t^2 \quad (2.34)$$

$t \rightarrow \infty$

$$[l^2] = 4D_{L2}t \quad (2.35)$$

$t_c \ll t \ll T$ で

$$[l^2] = l_0^2 + c_2 \epsilon t^3 \simeq c_2 \epsilon t^3 \quad (2.36)$$

$$D_L \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [l^2] = c_1 \epsilon^{1/3} \left(\sqrt{[l^2]} \right)^{4/3} \quad (\eta \ll \sqrt{[l^2]} \ll L) \quad (2.37)$$

(2.37) 式は拡散係数が拡散場のスケールの4/3乗に比例することを示しており、これをRichardsonの4/3乗則という。Richardsonはこの法則を大気中における異なったスケールの拡散現象から経験的に求めたが、Kolmogoroffの乱流理論からも導かれる。また、海洋における染料の拡散実験からもほぼ成立することが認められている。

3. 移流分散—せん断流中の物質混合—

3.1 分散とは

単純な物質混合の例として、無限の長さを有する一様で一定の流速 $u_1 = U$ と一定の拡散係数 $\epsilon_{1,2}$ を持つ一方向的な流れ場中の原点 $x = 0$ において、 $t = 0$ に質量 M の拡散物質が瞬間的に投入された場合の濃度分布 $\bar{c}$ を考える。その解は既に2.3(2)a. に示されており、

$$\bar{c}(x_1, x_2, t) = \frac{M}{4\pi\sqrt{\epsilon_1 t}\sqrt{\epsilon_2 t}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - Ut)^2}{4\epsilon_1 t} - \frac{x_2^2}{4\epsilon_2 t}\right\} \quad (3.1)$$

である。すなわち、拡散雲の中心は $x = (Ut, 0)$ にあって、その分布は周知の2次元 Gauss 分布である。濃度の2次の中心積率は、

$$\sigma_{11}^2 = 2\epsilon_1 t \quad (3.2)$$

$$\sigma_{22}^2 = 2\epsilon_2 t \quad (3.3)$$

となり、各々拡散係数の2倍に比例して、時間の経過とともに混合／拡散していく。

次に、速度として、 $u_1 = \Gamma x_2$, $u_2 = u_3 = 0$ で表されるように x_1 方向の流速が x_2 方向に直線的な分布をもつ一方向的な2次元の流れ場を考える。前の例題と同様な初期、境界条件のもとにおける解を求める (Novikov, 1958) と

$$\bar{c}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t \sqrt{(\epsilon_1 + \Gamma^2 \epsilon_2 t^2 / 12) \epsilon_2}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \Gamma x_2 t / 2)^2}{4\epsilon_1 t + \Gamma^2 \epsilon_2 t^3 / 3} - \frac{x_2^2}{4\epsilon_2 t}\right\} \quad (3.4)$$

となる。この時、濃度の2次中心積率は

$$\sigma_{11}^2 = \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \bar{c} dx_1 dx_2 = \frac{2}{3} \Gamma^2 \epsilon_2 t^3 + 2\epsilon_1 t \quad (3.5a)$$

$$\sigma_{22}^2 = \int \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 \bar{c} dx_1 dx_2 = 2\epsilon_2 t \quad (3.5b)$$

$$\sigma_{12}^2 = \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \bar{c} dx_1 dx_2 = \Gamma \epsilon_2 t \quad (3.5c)$$

となる。(3.5a) 式より、せん断流中における拡散雲の x_1 軸方向の統計的分散は、 x_1 軸方向の拡散によるもの： $2\epsilon_1 t$ と、流速分布の非一様性と x_2 軸方向の拡散の相互作用によるもの： $2\Gamma^2 \epsilon_2 t^3 / 3$ の和から成り立っていることがわかる。(3.5a) 式は

$$\sigma_{11}^2 = \frac{2}{3} \Gamma^2 \epsilon_2 t (t^2 + 3\epsilon_1 / \Gamma^2 \epsilon_2) \quad (3.6)$$

と変形されるから、 $t \gg \sqrt{3\epsilon_1 / \Gamma^2 \epsilon_2}$ のとき、

$$\sigma_{11}^2 \approx \frac{2}{3} \Gamma^2 \epsilon_2 t^3 \quad (3.7)$$

となり、統計的分散は t の3乗に比例して、非常に大きくなることが知れる。拡散雲は、Fig. 3.1 に見られように、 $x_1 - x_2$ 平面上で楕円型をしており、 t が大きくなるとともにその長軸は x_1 軸方向への傾きを強め、 x_1 軸

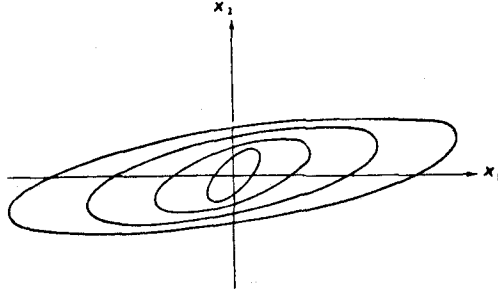


Fig. 3.1 境界のないせん断乱流場における混合過程.

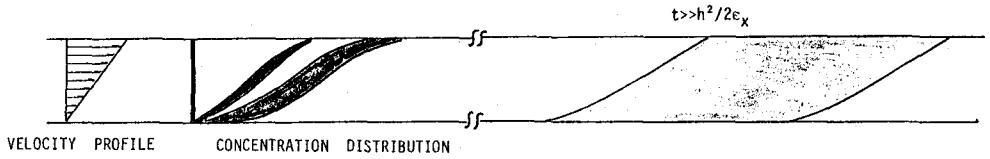


Fig. 3.2 Couette 流における混合過程.

方向に著しく伸張していく。すなわち、流下方向の統計的分散は流速分布の非一様性と平均流に垂直な方向の拡散により生じている。さらに、この場合 $\varepsilon_1 = 0$ であっても x_1 軸方向に分散が生じることも分かる。拡散係数（後述の意味からは、分散係数）を(2.27)式の定義に従って計算すると

$$D = \varepsilon_1 + \Gamma^2 \varepsilon_2 t^2 \quad (3.8)$$

次に、前例題と異なり、流れ場が水深 h に限定されている場合を考える(Saffman, 1962)。 u_1 の分布を $u_1 = 2Ux_2/h$ とすると、濃度の2次中心積率と分散係数は、 $t \gg h^2/2\varepsilon_1$ で

$$\sigma_{11}^2 = 2 \left\{ \varepsilon_1 + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dx_3}{\varepsilon_3} \int_0^{x_3} (u_1 - U)^2 dx'_3 \right\} t \quad (3.9)$$

$$D = \varepsilon_1 + \frac{U^2 h^2}{30 \varepsilon_3} \quad (3.10)$$

と求められる。この場合も統計的分散と分散係数について、前例題の境界の無い場合と同様なことが言えるが、異なる点は分散係数が定数となること、および ε_3 に反比例する形になることである。これらは境界のある場合と無い場合で、流速分布の非一様性による移流輸送とそれに直角方向の拡散輸送の効果の表れかたが異なるためである。このように流速が非一様な分布を持つときは、一様な分布を持つときに比較して全く異なった機構により、拡散雲の流下方向の統計的分散の増大が生じている。すなわち、非一様な流速分布にともなう移流輸送による混合物質の引き伸ばしとこれに直交する拡散による分散雲の統計的分散の増大である。開水路流れにおけるその様子は既にFig.1.1に示した。せん断流中に於けるこのような混合機構を乱流拡散(turbulent diffusion)と区別して、シアード散、移流拡散、移流分散、或は単に分散(dispersion)という。分散型の物質混合の特性は開水路流のように流れ場が有界の場合、3.2で示されるように断面平均濃度の混合と密接に関係し

ていること (Fischer, 1966) であり, また濃度分布は必ずしも Gauss 分布とはならないこと (島田, 1980) である。すなわち, 統計的分散の成長は Taylor の理論あるいは (3.10) 式から明らかにように線形ではあっても, 濃度分布は Gauss 分布ではなく, Gauss 分布への収束は極めて遅い (Aya, 1991)。

3.2 2次元せん断場における縦分散係数と横分散係数

(1) 縦分散係数

3.1 で述べたような今日移流分散 (縦分散) として理解されている現象は Taylor (1953) により, 円管路層流中の流下方向の分散雲の広がりが, 分子拡散係数により予測されるものよりもはるかに大きいこととして, 発見, 解析された。Taylor の解析以後様々な流れに対して, 流体粒子の運動を追跡する Lagrange 的解析法 (Batchelor-Townsend, 1956), 乱流拡散方程式を基礎とする Euler 的解析法, あるいはこれにモーメント変換を施した式を用いて拡散雲のモーメントの解析を行うモーメント法 (Arise, 1956) 等の方法により, 各種のせん断流中における流下方向の混合現象の解析が行われた。

ここでは, 対数則を有する 2 次元流れ場に Taylor の解析法を適用した Elder (1956) の例題を, Fischer (1966) の解釈を適用して説明する。乱流拡散方程式 (2.5) を水深方向に路床 z_b から水面 ζ まで積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \bar{c} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \bar{u}_1 \bar{c} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int \bar{u}_2 \bar{c} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int \epsilon_{1i} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} dx_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int \epsilon_{2i} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} dx_3 \right) \quad (3.11)$$

また, 連続方程式

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.12)$$

も同様に積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta - z_b) + \frac{\partial}{\partial x_1} \int \bar{u}_1 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int \bar{u}_2 dx_3 = 0 \quad (3.13)$$

となる。変数を

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{u}_i^{x_3}(x_1, x_3, t) + u_{i23}''(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.14)$$

$$\bar{c}(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{c}^{x_3}(x_1, x_3, t) + c_{23}''(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.15)$$

のように, 水深平均量 $\bar{a}^{x_3}$ とそれからの偏差 a_{23}'' に分解して, (3.11) 式に代入, 整理すると

$$\frac{\partial \bar{c}^{x_3} h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}^{x_3} \bar{u}_1^{x_3} h}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{c}^{x_3} \bar{u}_2^{x_3} h}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ h (D_{2t11} + D_{2v11}) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ h (D_{2t3i} + D_{2v3i}) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_i} \right\} \quad (3.16)$$

となる。ここに,

$$-\int u_{123}'' c_{23}'' dx_3 \equiv h D_{2v11} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \quad (3.17a)$$

$$-\int u_{223}'' c_{23}'' dx_3 \equiv h D_{2v21} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_i} \quad (3.17b)$$

$$\int \epsilon_{1i} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} dx_3 \equiv h D_{2t11} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \quad (3.18a)$$

$$\int \epsilon_{2i} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} dx_3 \equiv h D_{2t21} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_i} \quad (3.18b)$$

である。同様に, 連続式 (3.13) は

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_1^{x_3} h}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2^{x_3} h}{\partial x_2} = 0 \quad (3.19)$$

となる。実験室の長方形一様断面水路の中央付近にみられるような定常で, 一方向的な x_1 軸 (流下) 方向, x_2 軸 (水路幅) 方向に一樣な 2 次元のせん断乱流中における濃度場を考えると, (3.16) 式は

$$\frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial t} + \bar{u}_1^{x_3} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (D_{2t11} + D_{2v11}) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ (D_{2t22} + D_{2v22}) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_2} \right\} \quad (3.20)$$

となる。さらに, 濃度場も x_2 軸方向に一樣と仮定すると

$$\frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial t} + \bar{u}_1^{x_3} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (D_{2t11} + D_{2v11}) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \right\} \quad (3.21)$$

を得る。また、乱流拡散方程式において $\bar{u}_3 \approx 0$, $\bar{c}(x_1, x_2, x_3, t) \approx \bar{c}(x_1, x_3, t)$ を仮定すると、

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\varepsilon_{33} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3} \right) \quad (3.22)$$

連続式は $\partial \bar{u}_1 / \partial x_1 = 0$ と近似される。運動方程式としては、Reynolds 方程式を用いる代わりに平均流速分布を次のように対数則で与える。

$$\frac{u_{123}''}{u_*} = \frac{\bar{u}_1(x_3) - \bar{u}_1^{x_3}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{x_3}{h} + 1 \right) \quad (3.23)$$

このとき、(3.14), (3.15) 式は

$$\bar{u}_1(x_3) = \bar{u}_1^{x_3} + u_{123}''(x_3) \quad (3.14')$$

$$\bar{c}(x_1, x_3, t) = \bar{c}^{x_3}(x_1, t) + c_{23}''(x_1, x_3, t) \quad (3.15')$$

(3.14'), (3.15') 式を (3.22) 式に代入し、(3.21) 式を引くと濃度偏差 c_{23}'' の方程式が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_{23}''}{\partial t} + \bar{u}_1^{x_3} \frac{\partial c_{23}''}{\partial x_1} + u_{123}'' \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} + \left\{ u_{123}'' \frac{\partial c_{23}''}{\partial x_1} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int u_{123}'' c_{23}'' dx_2 \right) \right\} + \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(D_{211} \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} \right) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon_{11} \frac{\partial c_{23}''}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(D_{211} \frac{\partial c_{23}''}{\partial x_1} \right) \right\} + \\ & \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\varepsilon_{33} \frac{\partial c_{23}''}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$\tau = t$, $\xi = x_1 - \bar{u}_1^{x_3} t$, $\zeta = x_3/h$ により座標変換したのち、若干の仮定を行うと (3.24) 式より

$$\frac{\partial c_{23}''}{\partial \tau} + u_{123}''(\zeta) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial \xi} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\varepsilon_{33} \frac{\partial c_{23}''}{\partial \zeta} \right) \quad (3.25)$$

を得る。さらに、 $\frac{\partial c_{23}''}{\partial \tau} \approx 0$, $\frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial \xi} = \text{Const.}$ を仮定して、 $\frac{\partial c_{23}''}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \frac{\partial c_{23}''}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0$ の条件で c_{23}'' を求めると、

$$c_{23}''(\zeta) \frac{\partial \bar{c}^{x_3}}{\partial x_1} = h^2 \int_0^\zeta \frac{d\zeta'}{\varepsilon_{33}} \int_0^{\zeta'} u_{123}''(\zeta'') d\zeta'' \quad (3.26)$$

を得、水深平均濃度からの偏差の分布が求まる。Fischer(1966) は実験により (3.26) 式を検証している。定義式 (3.17a) より、(3.26) 式を用いて D_{2v11} を計算すると、

$$D_{2v11} = h^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\varepsilon_{33}} \left\{ \int_0^\zeta u_{123}'' d\zeta' \right\}^2 \quad (3.27)$$

を得る。流速分布として (3.23) 式、 ε_{33} として (2.11) 式を用いて (3.27) 式を計算すると

$$D_{2v11} = \frac{0.404}{\kappa^3} h u_* = 5.86 h u_* \quad (\kappa = 0.4) \quad (3.28)$$

となる。 D_{2t11} として (2.11) 式を水深平均した結果 $D_{2t11} = \frac{\kappa}{6} h u_*$ を用いると、

$$D_{211} = D_{2t11} + D_{2v11} = 5.93 h u_* \quad (3.29)$$

となる。これが Elder(1959) の結果である。

(2) 横分散係数

横分散係数については縦分散係数ほど簡単には扱えないが、最近の研究成果は細田(1990)にくわしい。実験的には、Elder(1956), Okoye(1970), Lau-Krishnappan(1977), 岩佐・細田・野口(1982), Webel-Schatzmann(1984)

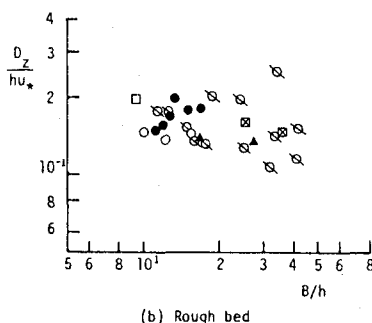
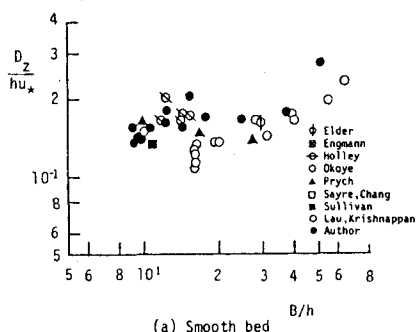


Fig. 3.3 横分散係数 D_{22}/hu_* と水路幅/水深比 B/h の関係 ($B/h > 9$) (細田 (1990) による)。

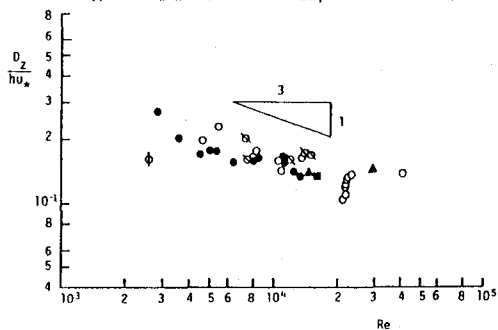


Fig. 3.4 滑面水路における横分散係数と Reynolds 数の関係 ($B/h > 9$)。

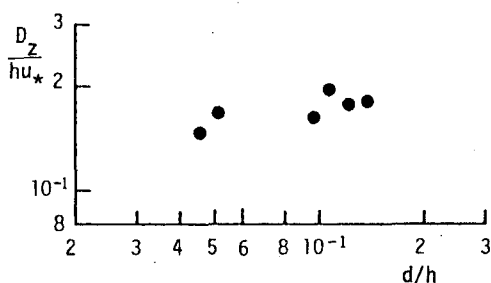


Fig. 3.5 粗面水路における横分散係数と 相対粗度高の関係 ($B/h > 9$)。

をはじめとする多くの研究者によって、水路中央の一点より連続源としてトレーサを放出し、ブリュームの拡散幅を計測することにより横分散係数が求められている。すなわち、(3.20) 式をモーメント変換することにより得られる

$$\sigma_{22}^2 = \frac{2D_{222}}{U}x \quad (3.30)$$

より、横分散係数 $D_{22} \equiv D_{2t22} + D_{2v22}$ を定めることができる。(従来、"横方向乱流拡散係数"として扱われることが多いようであったが、この様な計測法では水深平均された濃度の水路幅方向の広がりを計測しており、前述のことから本文では"横方向分散係数"ということにする。) D_{22}/hu_* の水理量に対する依存性については、水路幅/水深比 B/h 、流速係数 U/u_* 等に関する依存性が検討されているが、細田 (1990) によりまとめられた結果を Fig. 3.3 ~ 3.5 に示した。これより、

$$D_{22}/hu_* \approx 0.1 \sim 0.2 \quad (3.31)$$

の値となることわかる。

なお、2次元平面流れにおいて座標軸と分散係数テンソルの主軸が一致しない場合、流れの主方向とそれに垂直な方向をテンソルの主軸として、上記の結果を用いると以下のように書かれる。

$$\begin{pmatrix} D_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta D_L + \sin^2\theta D_T & \sin\theta \cos\theta (D_L - D_T) \\ \sin\theta \cos\theta (D_L - D_T) & \sin^2\theta D_L + \cos^2\theta D_T \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

ここに、 D_L : 縦分散係数、 D_T : 横分散係数、 θ : デカルト座標と拡散/分散の主軸のなす角である。上記の結果を用いると、 $D_L = 5.93hu_*$ 、 $D_T \approx 0.2hu_*$ である。

3.3 河川流における分散—次元縦分散係数—

(1) 次元縦分散係数理論

1. で述べたように、河川における水理解析は通常流下方向の一次元解析によって行われる。用いられる基礎方程式は良く知られているように、3次元のエネルギー方程式、連続方程式を体積分し、その極限を取ることににより求められる(Iwasa, 1976)。拡散量に関する1次元方程式も同様であって、3次元の乱流拡散方程式を体積分しその極限を取ることににより、周知の移流分散方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC) + \frac{\partial}{\partial x_1}(AVC) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(AD_E \frac{\partial C}{\partial x_1} \right) + C'q + F(C) \quad (3.33)$$

ここに、 V : 断面平均流速、 A : 流積、 C : 断面平均濃度、 D_E : (1次元/縦) 移流分散係数、 C' : 横流入出水の濃度、 q : 単位長さ当りの横流入出流量、 $F(C)$: 生成消滅項であって各種の反応、沈降、巻き上げ等の潤いあるいは水表面からの物質の流出入、 x_1 : 流れ方向座標、 t : 時間である。上式中、移流分散係数は

$$D_E \equiv D_{Et} + D_{Evl} \quad (3.34)$$

$$\int_A \varepsilon_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} dx_2 dx_3 = AD_{Et} \frac{\partial C}{\partial x_1}, \quad \int_A (\bar{u}_1 - V)(\bar{c} - C) dx_2 dx_3 = -AD_{Evl} \frac{\partial C}{\partial x_1} \quad (3.35)$$

で定義され、 D_{Evl} は1次元解析法において慣用のエネルギー係数 α 、運動量係数 β と同様の意義を持つものであるが、 α 、 β が平均流速 V そのものと関連付けられているのに対して、移流分散係数は断面平均濃度の勾配 $\partial C / \partial x_1$ と関連付けられている。

Fischer(1966)は濃度分布の水深方向の一様性を仮定するとともに、水路幅方向の流速分布の非一様性に注目して、Taylor-Elderの解析法を河川流へ適用し、

$$D_F = \frac{1}{A} \int_{b_l}^{b_r} \frac{dx_2}{D_{222}h} \left\{ \int_{b_l}^{x_2} \{(\bar{u}_1^{x_3} - V)h\} dx_2' \right\}^2 \quad (3.36)$$

を求めた。ここに、 B : 水路幅 ($= b_r - b_l$)、 D_{222} : 横分散係数である。Fischerの研究以降、様々な断面形状の水路や蛇行水路の分散係数が理論的、実験的に検討されてきた。また、河川における分散係数の実測や整理が、Godfrey-Frederick(1970)、Nordin-Sabol(1974)、McQuivey-Keefer(1974)らによって行われた。その結果、(3.36)式により河川の分散係数の予測はほぼ実用的には可能なことが確認された。しかし、長方形断面水路の分散係数を実験水路で計測するとElderの式(3.29)よりはるかに大きい値しか観測されず、長方形断面水路の分散係数の予測や、Elderの理論とFischerの理論との結び付きについては不明のままであった。ここでは、Iwasa-Aya(1991)によるLagrange的解析法およびEuler的解析法を用いた検討結果について述べる。

a. Lagrange的解析法

2.4で述べたTaylorの一樣乱流場における乱流拡散理論を流れ方向に一樣なせん断乱流中における移流分散現象に適用する。この時、流れ方向のLagrange的乱れ速度 v'_1 、乱れ強さの2乗 $[v'^2]$ 、自己相関関数 $B_L(\tau)$ は、次のように書かれる。

$$v'_1(a, t) = v_1(a, t) - V = v'_t(a, t) + v'_v(a, t) + v'_l(a, t) \quad (3.37)$$

$$[v'^2] = [v_t'^2] + [v_v'^2] + [v_l'^2] \quad (3.38)$$

$$B_L = \sum_{i,j} B_{Li,j}(\tau) \quad (i, j = t, v, l), \quad B_{Li,j}(\tau) = [v'_i(t)v'_j(t+\tau)] \quad (3.39)$$

ここに、 v'_1 : 流体粒子の流下方向のLagrange的乱れ、 v'_t : 流下方向のEuler的乱れ成分、 v'_v : 流下方向流速の流速分布の水深方向の非一様性に基づく乱れ成分、 v'_l : 流下方向流速の流速分布の水路幅方向の非一様性に基づく

く乱れ成分である。Lagrange 的数値実験結果 (Iwasa-Aya, 1985) によると、自己相関関数 $B_L(\tau)$ の 9 成分のうち、次の 3 成分が卓越し、

$$B_L(\tau) \approx B_{Ltt}(\tau) + B_{Lvv}(\tau) + B_{Lli}(\tau) \quad (3.40)$$

$B_L(\tau)$ は、

$$B_L(\tau) = [v_t'^2] \exp(-\tau/T_t) + [v_v'^2] \exp(-\tau/T_v) + [v_l'^2] \exp(-\tau/T_l) \quad (3.41)$$

で近似される。この時、積分時間スケール T_{SL} は次のように書かれる。

$$T_{SL} = \frac{[v_t'^2]}{[v_t'^2]} T_t + \frac{[v_v'^2]}{[v_v'^2]} T_v + \frac{[v_l'^2]}{[v_l'^2]} T_l \quad (3.42)$$

従って、Taylor の乱流拡散理論の適用により移流分散係数 (乱流拡散係数) は次のように導かれる。

$$D_L = [v_t'^2] T_{SL} = [v_t'^2] T_t + [v_v'^2] T_v + [v_l'^2] T_l = D_{Lt} + D_{Lv} + D_{Li} \quad (3.43)$$

また、上式中の Lagrange 的特性量は次式によって Euler 的特性量と結び付けられる。

$$[v_t'^2] = \frac{1}{A} \int_A u_1'^2 dA \quad (3.44a) \quad [v_v'^2] = \frac{1}{A} \int_A u_{123}''^2 dA \quad (3.44b) \quad [v_l'^2] = \frac{1}{B} \int_{b_l}^{b_r} (\bar{u}_1^{x_3} - V)^2 dx_2 \quad (3.44c)$$

$$T_t = 0.72h/u_* \quad (3.45a) \quad T_v = \frac{1}{14.8} \frac{h^2}{\theta_3 h u_*} \quad (3.45b) \quad T_l = \frac{1}{14.8} \frac{(B/2)^2}{\theta_2 h u_*} \quad (3.45c)$$

ここに、 u_1' : 流下方向の Euler 的乱れ、 θ_2 : 水路幅方向の無次元乱流拡散係数、 θ_3 : 水深方向の無次元乱流拡散係数、 T_t : Euler 的乱れの積分時間スケール、 T_v : 水深方向の混合時間スケール、 T_l : 水路幅方向の混合時間スケールであり、 u_{23}'' および $\bar{u}_1^{x_3}$ は、それぞれ次式で定義される (Fig. 3.6 参照)。

$$\bar{u}_1^{x_3} \equiv \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} \bar{u}_1 dx_3 \quad (3.46)$$

$$u_{123}'' \equiv \bar{u}_1 - \bar{u}_1^{x_3} \quad (3.47)$$

(3.43) 式右辺の第 1 項は流下方向の Euler 的乱れによる項であり、第 2 項は流下方向流速の分布の水深方向の非一様性に基づく項であり、第 3 項は流下方向流速の分布の水路幅方向の非一様性に基づく項である。(3.43) 式によると移流分散係数およびその 3 成分は、各々乱れ強さの 2 乗と特性時間スケールの積で表現されており、水深或は水路幅方向の乱れ強さ (或は、速度分布の非一様性) が小さいからといってそのどちらかの効果を無視することは、必ずしも適当でないことが分かる。

b. Euler 的解析法

a. 述べたことから、Taylor-Elder-Fischer の解析法を開水路に適用するにあたっては、水深方向、水路幅方向の流速分布の非一様性を共に考慮しなければならないことがわかる。平面 2 次元モデルにおける移流分散方程式を水路幅方向にもう一度積分すると、一次元の移流分散方程式を得ることができるが、その結果、一次元移流分散係数は Lagrange 的解析法により得られたと同様に 3 項の和として次式の様に表現される。

$$D_E = D_{Et} + D_{Ev} + D_{El} \quad (3.48a)$$

$$D_{Et} \equiv \frac{1}{A} \int_A \varepsilon_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} dA / \frac{\partial C}{\partial x_1} \simeq 1.0 h u_* \quad (3.48b)$$

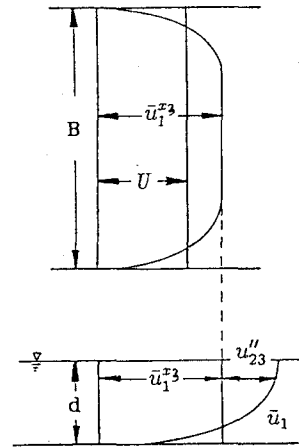


Fig. 3.6 平均流速分布と変数の定義。

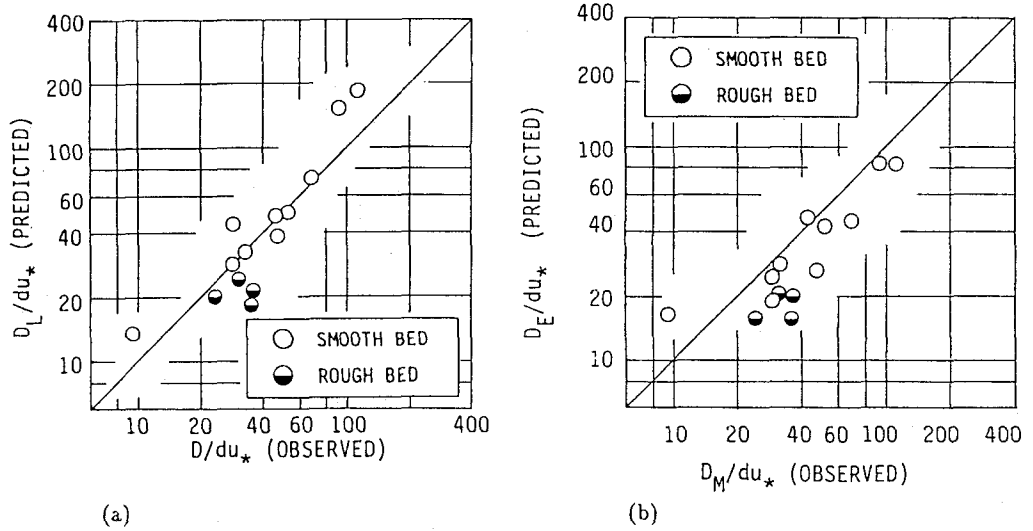


Fig. 3.7 実験水路における移流分散係数と計算値 (a)Lagrange 的解析法, (b)Euler 的解析法.

$$D_{Ev} \equiv \frac{1}{A} \int_A h D_{211} \frac{\partial \bar{c}^{x3}}{\partial x_2} dA / \frac{\partial C}{\partial x_1} \approx \frac{0.404}{\kappa^3} h u_* \quad (3.48c)$$

$$D_{Et} \equiv -\frac{1}{A} \int_A (\bar{u}_1^{x3} - V)(\bar{c}^{x3} - C) dA / \frac{\partial C}{\partial x_1} = \frac{1}{A} \int_{b_l}^{b_r} \frac{dx_2}{h D_{222}} \left[\int_{b_l}^{x_2} (\bar{u}_1^{x3} - V) h dx_2' \right]^2 \quad (3.48d)$$

(3.48a) 式の意味は、第1項が流下方向の乱流拡散係数の断面平均値、第2項が水深方向の流速分布の非一様性に基づく移流分散係数の水路幅方向の平均値であり、第3項が水路幅方向の流速分布の非一様性に基づく移流分散係数である。従って、流速分布が水路幅方向に一樣な場合は Elder の、水深方向に一樣な場合は Fischer の結果に一致する。

c. 実験的検証

Fig. 3.7(a) は岩佐・綾・葉師寺(1984)の実験で得られた移流分散係数と Lagrange 的解析法による (3.43) 式の移流分散係数を比較したものである。横方向乱流拡散係数は計測されていないので、 $\theta_2 = 0.2$ と仮定し、 $D_{Lt}/hu_* = 1.0$ 、 $D_{Lv}/hu_* = 10.0$ と仮定されている。滑面水路、粗面水路の両者において計算値は観測値とよい一致をしている。また、Fig. 3.7(b) は実験で得られた移流分散係数と Euler 的解析法による (3.48a) 式の移流分散係数を比較したものである。横方向分散係数は $D_{222}/hu_* = 0.2$ 、 $D_{Et}/hu_* = 1.0$ 、 $D_{Ev}/hu_* = 10.0$ と Fig. 3.7(a) と同様に仮定されている。計算値は観測値よりやや小さい値を与えているが、観測値の精度を考えると滑面水路、粗面水路の両者において計算値は観測値と一致しているものとしてよい。

流速分布の3次元的測定や横方向乱流拡散係数の測定は手間のかかることであり、より直接的に平均的水理量との関係が得られれば、分散係数の推定に便利である。岩佐・綾・葉師寺の結果を次元解析した結果が Fig. 3.8 に示されている。後出の (3.50) 式、(3.52) 式に示されるように、開水路流れの分散係数の主要成分である D_{Lt} 、 D_{Et} は速度係数、水路幅/水深比の関数となるが、観測された分散係数も速度係数、水路幅/水深比の関数として、

$$\frac{D}{du_*} = 0.38 \left(\frac{B}{d} \right)^{1.002} \left(\frac{V}{u_*} \right) \quad (3.49)$$

とすることができる。

(2) 広幅水路・河川における分散係数

a. 理論式

一般の実験室内水路、或は河川流においては、水路幅/水深比が大きいことが特徴であるが、Lagrange 的解

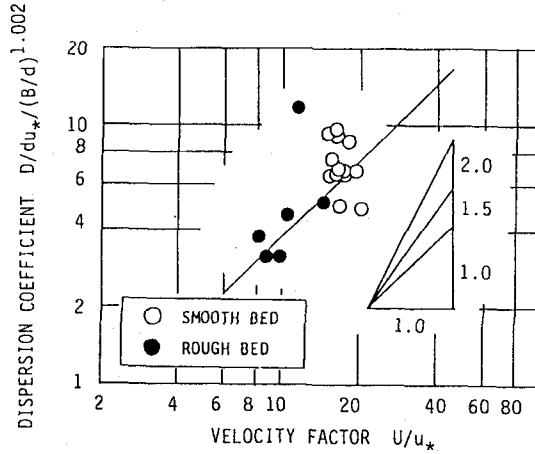


Fig. 3.8 長方形断面水路における分散係数の次元解析結果

析法による結果の第3項を無次元化すると、以下の式を得る。

$$\frac{D_{Li}}{hu_*} = \frac{1}{14.8} [v_l^2] \frac{(B/2)^2}{\theta_2 hu_*} / hu_* = \frac{1}{59.2\theta_2} J_{Al} \left(\frac{V}{u_*} \right)^2 \left(\frac{B}{h} \right)^2 \quad (3.50)$$

ここに、 J_{Al} は次式で定義される水深平均流速の流速分布の水路幅方向の非一様性を表すパラメータであって、

$$J_{Al} \equiv \frac{1}{BV^2} \int_{b_l}^{b_r} (\bar{u}_1^2 - V^2) dx_2 \quad (B = b_r - b_l) \quad (3.51)$$

ある。一方、Euler 的解析法による結果の第3項を無次元化すると、

$$\frac{D_{El}}{hu_*} = \frac{I_A}{\theta_2} \left(\frac{V}{u_*} \right)^2 \left(\frac{B}{h} \right)^2 \quad (3.52)$$

となる。ここに、 I_A は J_{Al} と同じく、水深平均流速の流速分布の水路幅方向の非一様性を表すパラメータであって、次式で定義される。

$$I_A \equiv \frac{1}{B^3 V^2} \int_{b_l}^{b_r} \left[\int_0^{x_2} (\bar{u}_1^2 - V^2) dx_2' \right]^2 dx_2 \quad (3.53)$$

従って、広幅の水路においては、(3.43) 式、(3.48a) 式の第3項が卓越するものと考えられ、このような流れにおける分散係数の推定式として、(3.50) 式あるいは(3.52) 式の適用が可能と考えられる。すなわち、Fishcer の(3.36) 式は広幅の水路において乱流拡散の効果および水深方向の流速分布の非一様性の効果が無視できるとき適用可能と考えられる。

(3.50) 式、(3.52) 式で示されるように、水路幅方向の流速分布の非一様性に起因する移流分散は、速度係数 V/u_* 、水路幅／水深比 B/d 、および水深平均流速の流速分布の水路幅方向の非一様性を表すパラメータ J_{Al} 、あるいは I_A の積として表現される。 J_{Al} 、 I_A は水路の形状に関係するから定数ではなく、広幅の長方形断面水路では B/d が大きくなるにつれて減少する。

b. 分散係数の観測結果

a. の理論的研究は流下方向に一樣な直線の長方形断面の水路を念頭においたものであった。我々の主たる興味の対象は河川における移流分散係数の予測であり、種々の断面形状、法線形状を有する室内実験水路や、多くの河川において移流分散係数の測定が行われてきている。しかし、それらの多くは短い流下距離において測定されたものであったり、濃度の点測定しか行われていないものであったりして、取り扱いには慎重であらね

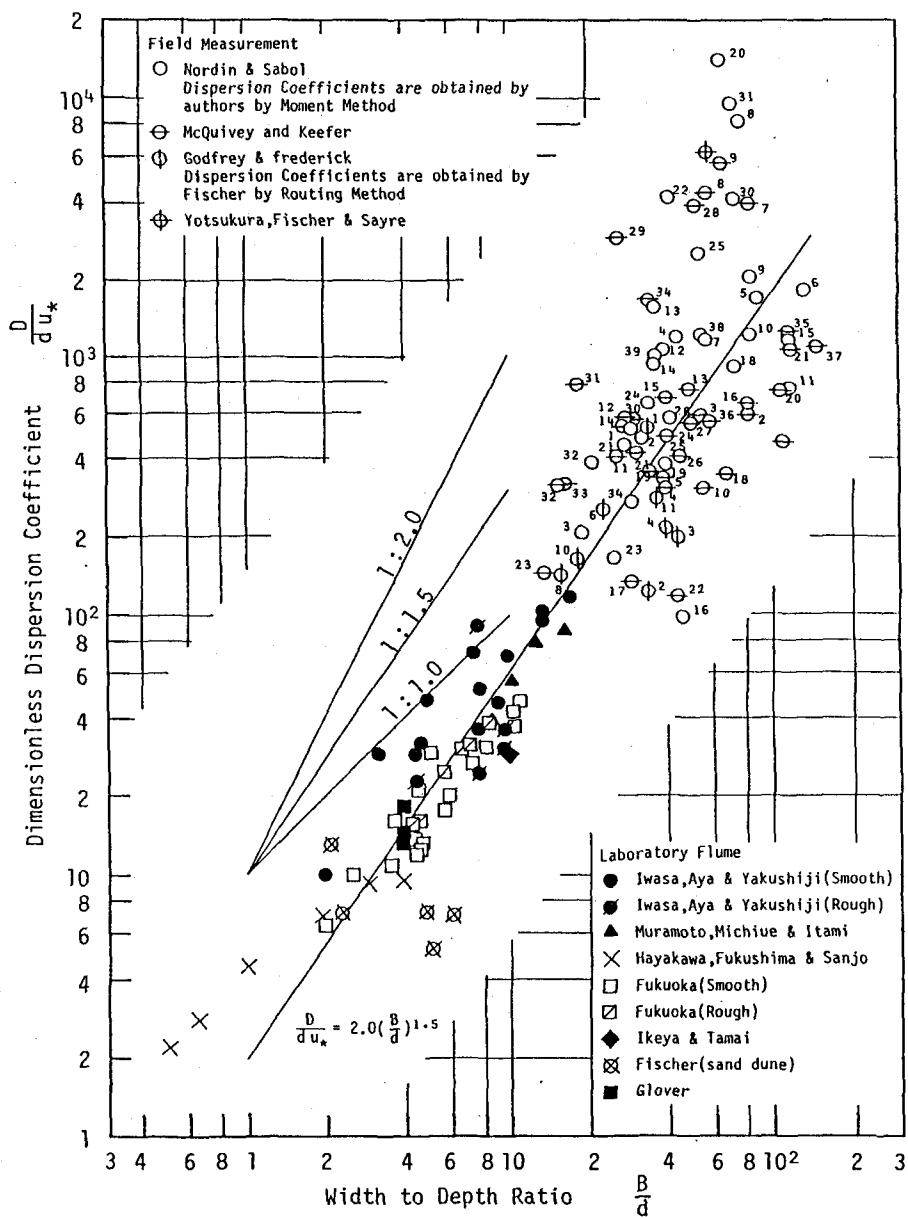


Fig. 3.9 実験水路・河川における分散係数の次元解析結果.

ばならない。ここでは、室内（外）実験データ 62 例、河川における観測データ 79 例（Fischer(1968), 道上・村本・伊丹(1978), 岩佐・綾・薬師寺(1984), 早川・福島・三条(1984), Glover(1964), Fukuoka-Sayre(1973), 池谷・玉井(1984), Godfrey-Frederick(1970), Yotsukura-Fischer-Sayre(1970), Nordin-Sabol(1974), McQuivey-Keefer(1974)）を用いて、移流分散係数の水路断面形状、法線形状、水路幅／水深比、流速係数等に対する依存性を検討した結果(Iwasa-Aya, 1991)を述べる。

移流分散係数の値は用いた算出法に依存し、平均的水理量の算出法にも依存するから、精度の高い議論は困難であって、Fig. 3.9 に無次元分散係数と水路幅／水深比の関係のみを示した。同図より、以下のことが結論される。

1. 実験水路、河川流における無次元移流分散係数は水路幅／水深比に強く依存する。
2. 水路幅／水深比の小さい実験水路におけるものを除いて、ややばらつきはあるものの、実験水路と河川における移流分散係数は共に、

$$\frac{D}{hu_*} = 2.0 \left(\frac{B}{h} \right)^{1.5} \quad (3.54)$$

で表すことができる。

3. 直線水路における岩佐ら、道上ら、早川らの実験結果と蛇行水路における Fukuoka-Sayre, 池谷・玉井の実験結果を比較すると、蛇行の影響は必ずしも大きくない。
4. 滑面水路、粗面水路において実験した筆者ら、Fukuoka-Sayre の実験結果を比較すると路床粗度の影響は大きくはない。

本文では触れることが出来なかったが、河川／開水路の分散現象と関連してよく論じられる分散雲の濃度波形や、死水域モデルとの関係等については著者の別報(Aya, 1991)を参照されたい。

4. 平面 2 次元モデルによる横分散の解析

1. で述べたように河川流では水深方向には濃度分布は投入後すぐ一様化するのに対して、水路幅方向にはなかなか混合が進まない。従って、流下距離の小さい間は水深方向の濃度分布の非一様性が小さい（が、水路幅方向の濃度分布の非一様性は大きい）ものとして、平面 2 次元モデル（一般的にはデカルト座標系で記述された水平方向の運動量の保存を示す 2 本の運動方程式、連続式、拡散量の保存式の 4 本の偏微分方程式）を連立し、定められた初期、境界条件のもとで差分法、或は有限要素法により離散化して数値解析される。希薄溶液を対象としているので、通常は運動方程式と連続式より流れを計算し、得られた流速、水深等を用いて濃度の保存式を解く。

河川の幅は流下方向に拡大／縮小し、流路も蛇行や分合流部を含むから、解析対象水域は平面的に複雑な幾何形状をしていることが多く、デカルト座標系とは異なった座標系を用いて解析した方が都合がよい場合もある。このような特性を組み入れたモデルに Yotsukura ら (1976) の提案する流管モデルがある。また、近年では電子計算機と計算流体力学の進歩により、流路の幾何学的形状をうまく表現する座標系（BFC: Body Fitted Coordinate System）として数値的に生成された一般曲線座標系や直交曲線座標系座標系を用いて平面 2 次元流れの基礎方程式を記述し、解析する方法が河川における流れと混合の解析においても実用化しつつある。通常のデカルト座標系による有限差分法、有限要素法（重み付き残差法）を用いた解析法は既に一般化されており、本シリーズでも既に取り上げられているので、以下では流管モデルならびに一般曲線座標系を用いた物質混合の解析法について述べることにする。

4.1. 数学モデルと境界条件

(1) デカルト座標系における基礎方程式系

平面2次元モデルは3次元の Reynolds 方程式, 連続方程式, 乱流拡散方程式を静水圧分布を仮定して水深方向に積分して, あるいは積分した結果を水深で除することによって得られる水深平均流速と水深および水深平均濃度を記述する数学モデルにより解析される. 連続式, 乱流拡散方程式については, 3.2 において平面2次元の数学モデルとともに示したので, ここでは Reynolds 方程式のみを記す.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_3}{\partial x_3} = F_i - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\tau}_{i1}}{\partial x_1} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\tau}_{i2}}{\partial x_2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\tau}_{i3}}{\partial x_3} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

ここに, $\bar{u}_i$: x_i 軸方向の平均流速, $\bar{p}$: 平均圧力, $\bar{\rho}$: 水の平均密度, F_i : x_i 軸方向の体積力, $\bar{\tau}_{ij}$: 乱れによる x_j 軸に垂直な面に働く x_i 軸方向のせん断応力, $\bar{\rho}$: 密度, x_i : デカルト座標系 ($i = 1, 2, 3$) であって, x_1, x_2 はそれぞれ水平方向座標, x_3 : 鉛直座標, および t : 時刻である. 但し, 水深方向 ($i = 3$) の方程式は (4.1) 式を簡略化した静水圧分布の式を用いる.

デカルト座標系における x_1, x_2 軸 (水平) 方向の運動方程式, 連続式, 乱流拡散方程式を静水圧分布を仮定して x_3 軸 (鉛直) 方向に水深積分すると, 周知の平面2次元流れの方程式を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} U_i M_1 \\ U_i M_2 \\ U_i h \\ U_i N \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} h \tau'_{1i}/\rho \\ h \tau'_{2i}/\rho \\ 0 \\ h S_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -gh \cdot \partial \zeta / \partial x_1 \\ -gh \cdot \partial \zeta / \partial x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tau'_{1b}/\rho \\ -\tau'_{2b}/\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$U_i \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{u}_i dx_3 / h \quad (h = \zeta - z_b) \quad (4.3) \quad M_i \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{u}_i dx_3 = U_i h \quad (4.4)$$

$$C \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{c} dx_3 / h \quad (4.5) \quad N \equiv \int_{z_b}^{\zeta} \bar{c} dx_3 \quad (4.6)$$

$$\frac{\tau'_{ij}}{\rho} \equiv -\frac{1}{h} \left\{ \int_{z_b}^{\zeta} (\bar{u}_i - \bar{u}_i)(\bar{u}_j - \bar{u}_j) dx_3 + \int_{z_b}^{\zeta} (\bar{u}_i - U_i)(\bar{u}_j - U_j) dx_3 \right\} \quad (4.7a)$$

$$\frac{\tau'_{ij}}{\rho} \equiv \nu' \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.7b)$$

$$\frac{\tau_{ib}}{\rho} \approx \frac{gn^2 M_i \sqrt{M_1^2 + M_2^2}}{h^{7/3}} \quad (4.8)$$

$$S_i \equiv -\frac{1}{h} \left\{ \int_{z_b}^{\zeta} (\bar{c} - \bar{c})(\bar{u}_j - \bar{u}_j) dx_3 + \int_{z_b}^{\zeta} (\bar{c} - C)(\bar{u}_j - U_j) dx_3 \right\} \quad (4.9)$$

$$S_i \equiv D_{ij} \partial C / \partial x_j \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} D_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta D_L + \sin^2 \theta D_T & \sin \theta \cos \theta (D_L - D_T) \\ \sin \theta \cos \theta (D_L - D_T) & \sin^2 \theta D_L + \cos^2 \theta D_T \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

ここに, U_i : 水深平均流速ベクトルの x_i 軸方向成分, M_i : 運動量束ベクトルの x_i 軸方向成分, h : 水深 ($= \zeta - z_b$), ζ : 水位, z_b : 水路床高さ, C : 水深平均濃度, N : 水質束, τ'_{ij} : x_j 軸に垂直な面に働く x_i 軸方向のせん断応力であって, ここでは乱れによる Reynolds 応力の水深平均と平均流速が水深方向に非一様に分布することに起因する分散作用による応力との和としている. ν' : 分散粘性係数 (渦動粘性と分散粘性の和), τ_{ib} : 底面に

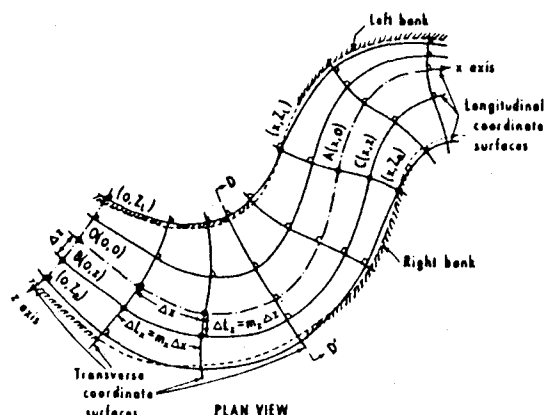


Fig. 4.2 流管モデルにおける座標系
(四倉・中村(1988)による)。

を得る。

流管モデルの最大の特色の一つは(4.17)式において、新座標系上での分散係数に相当する $D \equiv g_\xi h^2 U_\xi e_\xi$ の項を無次元化して定数とおくことにより、容易に解析解が得られることであって、Fig. 4.3 に示されるように解析解と実測濃度分布の適用性は極めて高い。流管モデルは米国はもとより、多くの河川における横分散解析に用いられており、我が国でも中川、江戸川(大島・松元, 1976)へ適用されたのをはじめ、最近では淀川の横分散解析(李・八木・末石, 1987)に用いられ、その適用性が確かめられている。

流管モデルの河川への応用上の問題は流れ方向の水深平均流速の分布を如何に定めるかであって、実測の流速分布を用いる方法(大島・松元, 1976, Luk, 1991)や Manning 公式を2次元流へ適用する方法(李・八木・末石, 1987)がある。後述の様な数値解法も有力な手段の一つと考えられる。流管モデルの詳細と河川における種々の水質解析への応用については四倉・中村(1988)に詳しい。

4.3 一般曲線座標系による解析

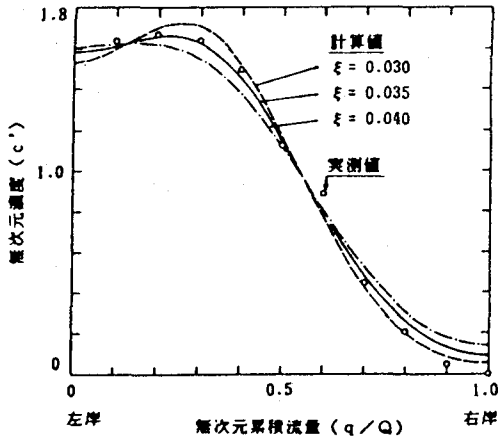
(1) 数学モデル

(4.2)式を従属変数 M_1, M_2, ζ, N はデカルト座標系におけるもののままとし、独立変数 x_i のみを Viviani(1974)に従って、座標変換

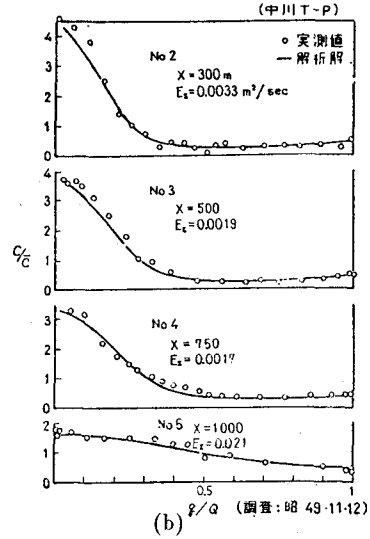
$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2) \quad (4.18)$$

によって、一般曲線座標系 ξ_i に改めると以下の式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ h \\ N \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} U^i M_1 \\ U^i M_2 \\ U^i h \\ U^i N \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} h \tau^{11} / \rho \\ h \tau^{12} / \rho \\ 0 \\ h S^i \end{pmatrix} + \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -gh \cdot \partial \xi_i / \partial x_1 \cdot \partial \zeta / \partial \xi_i \\ -gh \cdot \partial \xi_i / \partial x_2 \cdot \partial \zeta / \partial \xi_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -\tau_{1b} / \rho \\ -\tau_{2b} / \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$



(a)



(b)

Fig. 4.3 流管モデルによる解析解と実測濃度分布

(a) シエナゴ河 (Yotsukura et al(1988) による),

(b) 中川 (大島・松元(1974) による) .

(4.19) 式の第 1, 第 2 式は各々 x_1, x_2 軸方向の運動量保存式であり, 第 3 式は連続方程式, 第 4 式は拡散量に関する移流分散方程式である. また, 左辺第 1 項は局所的時間変化項, 第 2 項は移流項であり, 右辺第 1 項は運動量, 拡散量に関して乱流輸送と水深積分に伴って生じる移流分散輸送を示しており, 第 2 項, 第 3 項は, 運動量に関して各々圧力項, 底面摩擦項である. なお, 以下では一般曲線座標 ξ_i の方向は, 水路長方向に ξ_1 , 河幅方向に ξ_2 とするものとし, 境界近傍において座標系の直交性を仮定する. また, J は座標変換に関する Transformation Jacobian であって, 次式で定義される.

$$J \equiv \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (4.20)$$

U^i は水深平均流速ベクトルの反変ベクトル成分であり, U_i と U^i の関係および, τ_{ij} と τ^{ij} の関係は

$$U^i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} U_j \quad (4.21)$$

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \tau'_{ik} \quad (4.22a)$$

$$\frac{\tau'_{ij}}{\rho} = \nu' \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_j}{\partial \xi_k} \right) \quad (4.22b)$$

となる. S^j は勾配輸送型水質フラックスベクトルの反変ベクトル成分であるから, 水深平均濃度 C の一般曲線座標系上における勾配との関係は

$$S^i = D^{ij} \frac{\partial C}{\partial \xi_j} \quad (4.23)$$

$$D^{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} D_{kl} \quad (4.24)$$

となる.

(2) 境界条件

運動量，連続方程式については，閉（陸）境界において，

$$M_1 = M_2 = 0 \quad (4.25)$$

であり，開（水）境界に対しては水位或は運動量束が指定される．水位は水路幅方向にはほぼ一様としてよい．流量観測値より運動量束ベクトル分布を推定するには以下の方法を用いる．境界近傍において座標系は直交するから，運動量束ベクトルのデカルト座標系成分 M_i は反変ベクトル成分 M^i を用いて，

$$M_i = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} M^1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} M^2 \quad (4.26)$$

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2) \quad (4.27)$$

により変換される．水路幅方向の運動量束 M^2 は零と仮定し，流下方向の運動量束（流束） M^1 は観測流量を水深により案分することにより，

$$M_j^1 = Q h_j^{5/3} / \sum_{i=1}^n h_i^{5/3} \quad (4.28)$$

となる．拡散量については，閉境界において拡散量の輸送がないものとする（4.25）式を用いて

$$\frac{\partial C}{\partial \xi_i} = 0 \quad (4.29)$$

である．開境界においては，濃度分布 C_b が指定されるものとする

$$N = C_b h \quad (4.30)$$

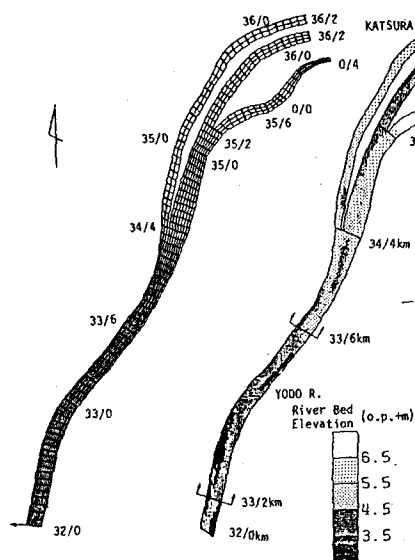
となる．

(3) 淀川三川合流部における横分散の数値解析

淀川水系 32.0km を下流端境界とし，合流部下流での水路幅を約 100m とする水路長約 4.0km の合流部を含む淀川低水路部分における流れと分散の解析を行った．河川測量図よりこの領域を流れ（ ξ_1 軸）方向に 168 分割，水路幅（ ξ_2 軸）方向に合流部下流部で 20 分割し，概ね流れ方向に 25m，横断方向に 5m 程度の四辺形からなる格子網を生成した (Fig.4.4(a))．河床高の分布は Fig.4.4(b) に示されるように非一様であって，木津川が宇治川に合流する 35.2km 断面から桂川が宇治川に合流して淀川となる 34.4km 断面の合流部では，左岸側に沿って河床の低い部分がみられ，34.6km 断面付近には河床の高い部分がある．また，34.4km 断面下流の淀川では低河床の部分が流下方向に水路中央，水路左岸側，右岸側，左岸側，右岸側と交互に続いている．

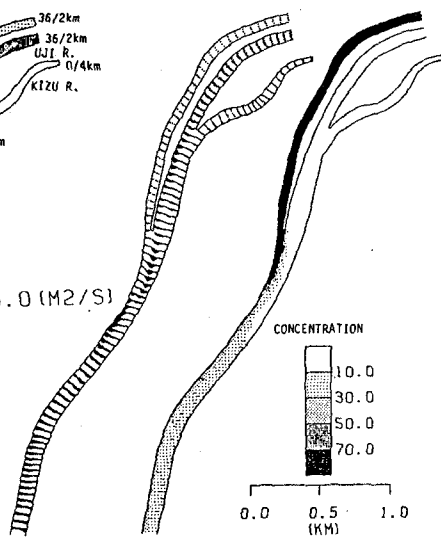
数値解法としては，水位，濃度の定義点をセルの中心に，流束定義点を四隅に（流束定義点をセルの中心に，水位・濃度定義点を四隅に）配置し，局所的時間変化項は Adams-Bashforth 法により，移流項は Donor-Cell 法により，せん断応力，分散項については中央差分の考え方になって離散化し，圧力項については境界上の 4 点の水位を用いて近似する（岩佐・綾・井上，1989）．なお，以下の計算ではパラメーター値として，Manning の粗度係数 $n = 0.02$ ，分散粘性係数 $\nu' = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ ，縦分散係数 $D_L = 5.93 h u_*$ ，横分散係数 $D_T = 0.2 h u_*$ を用い，また計算時間間隔 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ を用いている．渇水流量時を対象とした計算例を Fig.4.5 に示した．

渇水時を対象として計算された定常状態の運動量束ベクトルの分布が河床高さの等高線とともに Fig. 4.6 に示されている．同図より，運動量束ベクトルの分布からは流れは河床地形に対応して流量の最も大きい宇治川からの流れが宇治川右岸に沿って合流部を貫流するが，木津川からの流れは 35.2km 断面下流で速やかに宇治川に流入し，その後が続く河床の高い領域を取り巻くように流下した後，34.4km 断面下流で桂川からの流れが流入した後，淀川本川中央部に流下していることが分かる．同じ流況下における木津川，桂川からのケイ酸（ SiO_2 ）が宇治川に合流し，横方向に分散混合しながら淀川を流下していく分散過程を定常解として示したの



(a) Generated grid (b) Topography of the study area

Fig. 4.4 淀川合流部の格子網と河床高



(a) Momentum flux vector (b) Spreading distributions of tracer

Fig. 4.5 運動量束ベクトルと桂川からの物質分散 (濁水流量時)

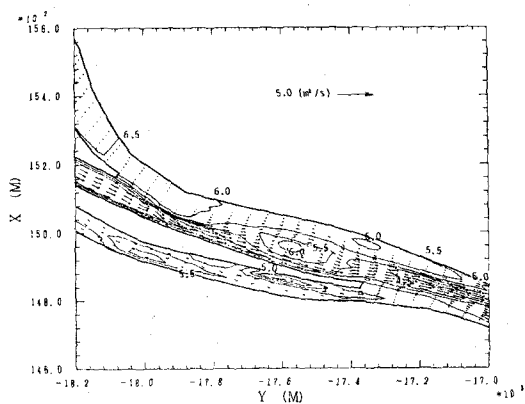


Fig.4.6 合流部の運動量束ベクトルの分布と河床地形の拡大図

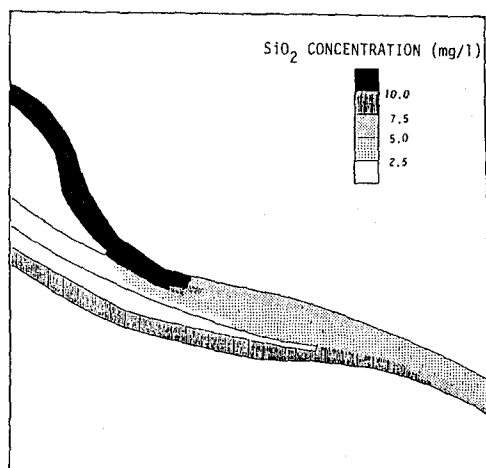


Fig. 4.7 合流部におけるケイ酸の混合.

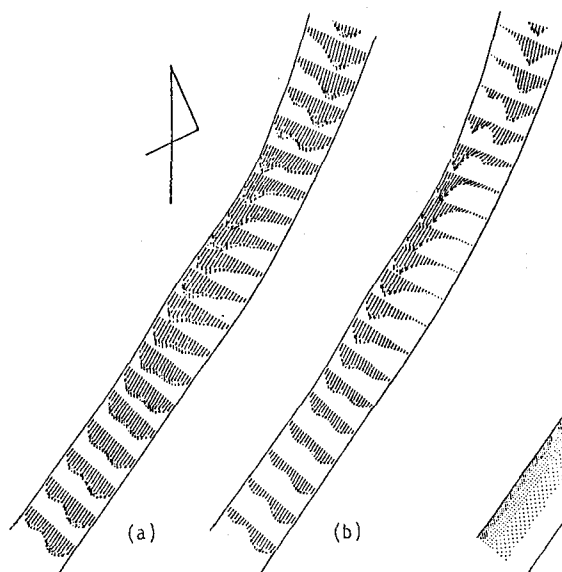


Fig. 4.8 合流部下流における運動量束ベクトル分布
(a) 年平均流量時, (b) 洪水流量時.

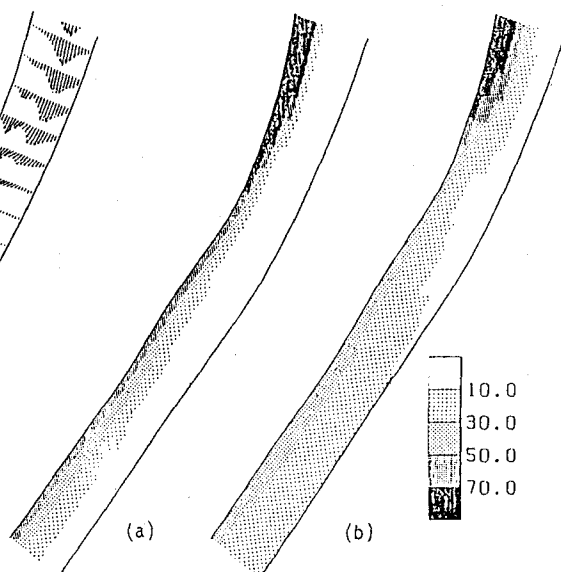


Fig. 4.9 合流部下流における桂川河川水の分散
(a) 年平均流量時, (b) 洪水流量時.

が Fig.4.7 である。最初の合流部及びその直下における混合分散過程は前述した運動量束ベクトルの分布に対応して比較的速い。しかし、34.4km 断面の合流部下流では後述するように流れは低河床部に集中して滞筋を形成し、桂川からのケイ酸は淀川本川左岸側に沿って横方向の分散幅を拡げ、また狭めつつ流下していく様子が示されている。

また、年平均流量、洪水流量という2種の流況下における計算結果より、33.0～34.0km 区間の運動量束ベクトルの分布を Fig. 4.8(a), (b) に、対応する流況下における桂川からの河川水の分散状況を Fig. 4.9(a), (b) に拡大して示した。運動量束ベクトルはほぼ河岸に沿って流下方向を向いており流れは一方向的であるが、洪水流量時には運動量束ベクトルの分布は横断方向に著しく偏倚し、しかもその流下方向の変化が大きい。年平均流量時には運動量束ベクトルの分布はやはり横断方向、流下方向に非一様であるものの洪水流量時ほど著しいものではない。これは、低流量時の方が流れは河床地形の影響を受けやすいためである。Fig.4.9(a), (b) より年平均流量時には横分散はあまり進まず左岸側に沿って桂川からの河川水が流下していくのに対し、洪水流量時には横分散が促進され34.0km 断面ではほぼ河幅一杯に広がっていることが分かる。これは運動量束ベクトルの分布図に見られるように小流量時の方が運動量束ベクトルの横断分布の流下方向変化が大きいいため、これに伴って生じる横断方向の移流作用が小流量時の方が大きくなり、物質の横分散がこの横方向の移流により促進されるためである。

Fig.4.10 は、水路幅 25.0cm の直線水路に長さ 75.0cm、幅 5.0cm、深さ 1.0cm の凹部を互い違いに水路床に配置し、左岸側 (Fig.4.10(a)～(c))、及び水路中央部 (Fig.4.10(d)) から、連続的にトレーサーを点源放させた時のトレーサーの分散状況を示したものである (Iwasa-Aya-Takahashi, 1990)。平坦路床の場合と異なり流れは水路内で蛇行し、横分散幅も流下距離が大きくなるにつれて、拡大、縮小していることが分かる。

以上の結果にみられるように、河床高が水路幅方向、流下方向に非一様な河川流では、流れの平面分布は河床形状の影響を強く受け、物質の水平分散も流れの移流作用によるものが支配的となり、河床形状、流況により大きく変化する。

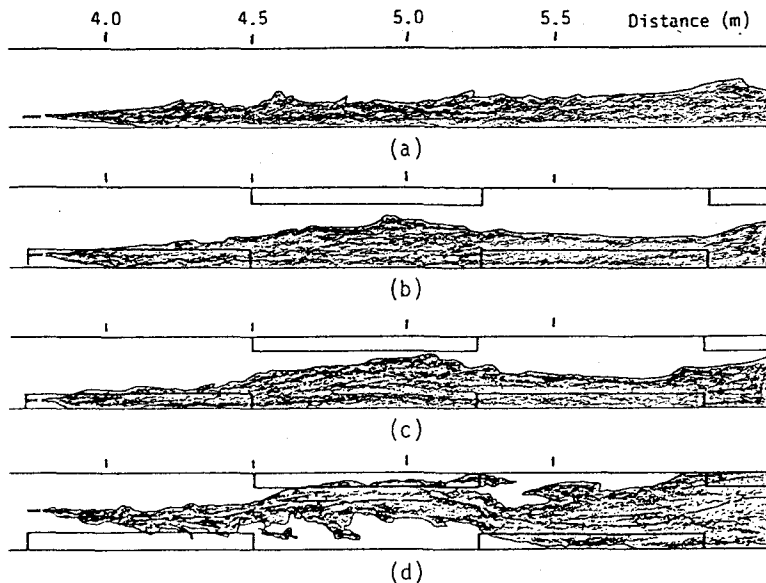


Fig. 4.10 水路床に凹凸のある実験水路におけるトレーサ実験結果
(a) $Q=0.239$ l/s, (b) $Q=0.536$ l/s, (c) $Q=0.263$ l/s, (d) $Q=0.263$ l/s.

5. おわりに

水域における物質混合を話題にすると、とかく拡散/分散(係数)という話になりがちである。本講義でも分散係数理論が中心になってしまった。しかし、分散係数の導出過程や河川における横拡散解析の例に見られたように、実際の物質混合で支配的なのは流動であって、流れを現地水域の地形、環境、境界条件という複雑な条件下で如何に正確に、また、詳細に(或は逆に粗く)解くかということが物質混合の解析においてもますます重要な課題となっている。コンピュータと数値解析技術の発展に期待するところである。とはいえ、実際の河川における水質データを扱うと、単純な完全混合モデルを用いても物質収支はおろか水収支さえ満足に取れないことはよく経験することである。物質混合の理論や解析技術が進歩しても、観測や現地データの収集の重要性は変わらない。本講義では完全混合モデルや一次元モデルを用いた物質輸送/混合解析については触れなかったが、これは時間と紙面の都合による。ダム放流水の水質、濁度、水温等の解析や水路幅の小さい中小河川流では一次元解析のほうが都合がよい場合も多い。混合の理論的扱いはともかく、実用上問題となる境界での収支の取り扱いや数値解法についても意外と課題は多く、研究が進められている。

本講義の内容は、筆者が京都大学在職中に行った研究を中心にまとめたものである。御指導を賜った岩佐義明名誉教授、井上和也教授に深く感謝致します。横分散係数に関する項は細田 尚講師の研究結果から引用させて頂いた。同大学河川工学研究室に在籍した大学院生、学生諸君とは共同研究者として解析・実験を行うとともに、図面の作成等で多くのお手伝いを頂いた。記して謝意を表する。

参 考 文 献

参 考 書

- 大久保明：海洋乱流／拡散，“海洋物理 I”，海洋科学基礎講座 1，東海大学出版会，1970。
日野幹雄：乱れと乱流拡散，“流体力学”，理工学基礎講座 16，朝倉書店，1974。
椿東一郎：乱流拡散と移流分散，“水理学 II”，基礎土木工学全書 7，森北出版，1974。
国司秀明：海洋における物質の分散，“海洋物理学 II”，海洋学講座 2，寺本俊彦編，東京大学出版会，1976。
玉井伸行：拡散と分散，“密度流の水理”，新体系土木工学 22，技報堂出版，1980。
大西行雄：乱流拡散と密度流，“土木技術者のためのデータ処理と確率統計マニュアル水理編”，土木学会関西支部，1982。
Mornin, A.S. and Yaglom, A. M.: Statistical Fluid Mechanics, MIT Press, 1971.
(邦訳：統計流体力学(山田 豊一訳)，文一総合出版，1976)
Tennekes, H. and Lumly J. L.: A First Course in Turbulence, MIT Press, 1972.
Fischer, H. B. et al: Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press, 1979.

縦分散／横分散／移流分散

1. Taylor, G.I.(1921): Proc. London Mathematical Society, Series 2-20, 196-211.
2. Taylor, G.I.(1953): Proc. Royal Society of London, Series A, Vol.219, 186-203.
3. Taylor, G.I.(1954): Proc. Royal Society of London, Series A, Vol.223, 446-468.
4. Elder, J.W.(1956): J. Fluid Mechanics, Vol.5, 544-560.
5. Aris, R.(1956): Proc. Royal Society of London, 67-77.
6. Novikov(1958): (from Statistical Fluid Mechanics by Mornin, A.S. and Yaglom, A.M., MIT Press)
7. Saffman (1962): Quart. J. Royal Met. Society, Vol.88, No. 378, 382-393.
8. Glover, R. E. (1964): Professional Paper, 433-B, U.S.G.S..
9. Fischer, H.B.(1966): Report No. KH-R-12, California Institute of Technology.
10. Fischer, H.B.(1968): J. Sanitary Eng. Division, Proc. ASCE, Vol.94, No.SA5, 927-943.
11. Iwasa, Y. and Imamoto, H.(1969): Proc. 13th IAHR Congress, 109-118.
12. Engelund, F.(1969): J. Hydraulic Division, Proc. ASCE, Vol.95, No. HY4, 1149-1162.
13. Yotsukura, N. et al (1970): Water-Supply Paper 1899, U.S.G.S..
14. Jobson, and Sayre, W. W. (1970):
15. Godfrey, R.G. and Frederick, B.J. (1970): Open File Report, U.S.G.S.
16. Okoye, J. K. (1970): Report No. KH-R-23, California Institute of Technology.
17. Fukuoka, S. and Sayre W.W.(1973): J. Hydraulic Division, Proc. ASCE, Vol.99, No.HY1, 195-217.
18. Nordin, C.F. and Sabol, G.V.C. (1974): Water Resources Investigation, 20-74, U.S.G.S..
19. McQuivey, R.S. and Keefer, T. N. (1974): J. Envi. Div., Proc. ASCE, Vol.100, No.EE4, 997-1010.
20. Iwasa, Y.(1976): Proc. Int. Sym. on Unsteady Flow in Open Channels, BHRA-IAHR, D2.13-14.
21. Yotukura, N. (1977): J. Research U.S.G.S., Vol. 5, No. 3, 277-284.
22. 道上正規・村本嘉雄・伊丹正規(1978)：第 2 2 回水理講演会論文集、125-130。
23. 島田 晋(1980)：第 24 回水理講演会論文集、1-6。
24. 浅野富夫(1980)：開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究。
25. 岩佐義朗・細田 尚・野口 好夫(1982)：京都大学防災研究所年報、Vol.25, B-2, 557-572.
26. 岩佐義朗・綾 史郎・葉師寺公文(1984)：京都大学防災研究所年報、Vol.26, B-2, 445-460.

27. 早川典生・福島裕介・三条健二(1984): 土木学会論文集、No.342,179-185.
28. 池谷 毅・玉井信行(1984): 第28回水理講演会論文集、277 - 282 .
29. Webel, G. and Schatzmann, M.(1984): J. Hydraulic Eng., Vol.110, No.4, 423-435.
30. Iwasa, Y. and Aya S. (1985): Proc. 21 IAHR Congress, Vol. 2, 180-185
31. 細田 尚(1990): 開水路流れにおける乱流拡散機構に関する水理学的研究.
32. Aya, Shirou(1991): Longitudinal and Transverse Mixing in Open-Channel Flows.
33. Iwasa, Y. and Aya, S.(1991): "Environmental Hydraulics I", 505-510, Balkema.
34. Asai, K., Fujisaki, K. and Awaya, Y.(1991): "Environmental Hydraulics I", 493-498, Balkema.

流管モデル

1. Yotukura, N. and Sayre, W.W. (1976): Water Resources Research, AGU, Vol. 12, No.4, 695-704.
2. 大島吉雄・松元賢市(1976): 土木技術資料, 18-2, 9-14 .
3. 李 適宇・八木俊策・末石富太郎(1987): 第31回水理講演会論文集, 311-316 .
4. 四倉信弘・中村俊六(1988): 土木学会論文集, 第399号, 95-93 .
5. Luk, G. K. (1991): "Environmental Hydraulics-I", 453-458, Balkema.

一般曲線座標系による横分散解析

1. Viviani, H.(1974): La Recherche Aerospatiale, No.1, 65-66.
2. 岩佐義朗・綾 史郎・井上智夫(1989): 京都大学防災研究所年報, 第32号B-2, 669-687.
3. Iwasa, Y., Aya, S. and Takahashi, T.(1990): Proc. Int'l Conf. on Physical Modeling of Transport and Dispersion, 12B.7-12B.12.
4. Iwasa, Y. and Aya, S.(1992): Bull. D.P.R.I., Kyoto Univ., Vol.41 Part 3, No.359, 129-175.