ＬＥＳモデルによる乱流解析手法

Analytical Procedures of Turbulent Flow Using Large Eddy Simulation

森 西 洋 平
Youhei MORINISHI

1. 乱流の数値計算

水や空気の運動を代表として、我々は身のまわりでさまざまな流れ現象を観察することができる。これら流体の運動を数学的に記述しようとする場合、モデル方程式として質量の保存則(連続の式)と運動量の保存則(ナビエ・ストークスの方程式)を選ぶ。縮まない流体を考えるとき、これら流体運動の支配方程式は以下のように記述される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (i=1,2,3) \tag{2}$$

上式中、x_i は独立変数、u_i は速度成分、p は圧力、ρは密度(一定値)、νは動粘性係数(一定値)である。繰り返し添え字については縮約規約に従う。この場合、流れ場の従属変数の数は速度３成分および圧力の４つであり、支配方程式の数も４つなので方程式系は閉じており、これらを解くことにより流れ場を表現することができる。しかし 式(2)を眺めてみると、これは強い非線形性を伴った時間依存の偏微分方程式であり、また同時に式(1) も満たさなくてはならず、特別な場合を除いて解析解を得ることは不可能である。そこで解析的な解を得ることはあきらめ、例えば対象とする流れ場を有限の格子点で離散化し、基礎方程式系が格子点上で満たされるよう数値的に解いて流れ場を記述しようとするのが流体の数値解析 (ＣＦＤ, Computational fluid dynamics) である。

ところで、流れ場は一般に無次元数レイノルズ数の大小により、流速が遅くてその分布が滑らかな層流と、大小さまざまな大きさの渦を伴いより複雑な運動を行う乱流とに分けることができる。複雑な乱流の挙動についても基礎方程式系を解くことにより詳細に記述できるとされているが、しかし乱流は細かい渦による乱れの散逸構造が特徴的であり、式(1)と(2) をそのまま数値的に解いて乱流を記述しようとする直接計算法(ＤＮＳ, Direct numerical simulation)では、最小スケールの渦構造まで離散的に表現する必要がある。乱流の最小渦のスケールは次元解析によりオーダーが評価され、レイノルズ数Ｒｅを用いて

$$O\ (Re^{-3/4})$$

の程度と評価される[1]。これより乱流のＤＮＳで行う３次元計算に必要な離散点は

$$O\ (Re^{9/4})$$

となる。これはレイノルズ数がたかだか10^4に対しても各方向に10^3もの離散点が必要となることを意味し、現在最新鋭のスーパーコンピュータを用いたとしても取り扱えるレイノルズ数に限度がある（実際、現在最大規模のＤＮＳでも、平板間乱流という非常に単純な流れ場でさえレイノルズ数が１万のオーダーである）。このため、高レイノルズ数乱流のＣＦＤを行うには、乱れによる散逸構造を記述する物理的なモデル、つまり乱流モデルの導入が必須となる。乱流モデルとしては、アンサンブル平均（時間平均）化操作に基づくレイノルズ平均乱流モデルおよび格子平均化操作に基づくＬＥＳ(Large eddy simulation) とがある。レ

イノルズ平均乱流モデルでは、乱れの影響全てをモデル化する定常数値解析となるのに対し、ＬＥＳでは格子スケール以下の影響のみをモデル化する非定常数値解析となる。

2．アンサンブル平均乱流モデルおよびＬＥＳ

アンサンブル平均乱流モデルでは、平均化操作 <> により、流れ場の変数 $f(x_1,x_2,x_3\ ;t)$ を時間平均値 $\langle f\rangle(x_1,x_2,x_3)$ とそれからのずれの成分 $f'(x_1,x_2,x_3\ ;t)$ とに分解して基礎式系を導出する。

$$f(x_1,x_2,x_3\ ;t)=\langle f\rangle(x_1,x_2,x_3)+f'(x_1,x_2,x_3\ ;t) \qquad (3)$$

$$\langle f\rangle(x_1,x_2,x_3)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(x_1,x_2,x_3\ ;t)\ dt \qquad (4)$$

式(3)を式(1)と(2)に代入しさらに平均化式(4)を行うと次式を得る。

$$\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial(\ \langle u_j\rangle\langle u_i\rangle+\langle u_j'u_i'\rangle\ )}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\langle u_i\rangle}{\partial x_j\partial x_j} \quad (i=1,2,3) \qquad (6)$$

上式の導出では、時間平均化操作式(4)における次の性質を用いている。

$$\langle\langle f\rangle\rangle=\langle f\rangle,\quad \langle\langle f\rangle\langle g\rangle\rangle=\langle f\rangle\langle g\rangle,\quad \langle\langle f\rangle g'\rangle=0 \qquad (7a),(7b),(7c)$$

また

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}\right\rangle=\frac{\partial\langle f\rangle}{\partial x} \quad \text{同様に} \quad \left\langle\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right\rangle=\frac{\partial^n\langle f\rangle}{\partial x^n} \qquad (8a),(8b)$$

式(6)はレイノルズ方程式と呼ばれるが、この式には新たな未知量であるレイノルズ応力 $\langle u_i'u_j'\rangle$ （２次の速度変動相関）が生じてしまい、このままでは式系を閉じさせることができない。さらに式(6)の導出と同様の手順によりレイノルズ応力の輸送方程式を作ってみても、変動量に関してさらに高次の相関量が出現してしまい、数学的に方程式系が閉じることはない。よって、アンサンブル平均化された方程式を閉じさせるためには、乱流モデルの導入が必要となる。代表的なモデルとして０方程式モデル、２方程式(k－ε)モデル、代数応力モデル、応力方程式モデル等が用いられてきている。これら乱流モデルの基礎式系を解くことにより、平均流れ場を得ることができる。実用的には、速度や圧力の平均値が流れ現象を理解する上で重要な場合が多く、このモデルの利用価値は高い。しかし、流れ場の時間的な変化や、乱流渦の構造について表現する事はできない。

一方のＬＥＳでは、空間的なフィルター化操作による粗視化を利用し、流れ場の変数 $f(x_1,x_2,x_3\ ;t)$ を、フィルター化による格子平均成分（ＧＳ, Grid scale） $\overline{f}(x_1,x_2,x_3\ ;t)$ と、それからのずれの成分(ＳＧＳ, Subgrid scale) $f'(x_1,x_2,x_3\ ;t)$ とに分離する。

$$f(x_1,x_2,x_3\ ;t)=\overline{f}(x_1,x_2,x_3\ ;t)+f'(x_1,x_2,x_3\ ;t) \qquad (9)$$

$$\overline{f}(x_1,x_2,x_3\ ;t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{3}G(x_j-x_j')\ f(x_1',x_2',x_3'\ ;t)\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3' \qquad (10)$$

ここで式(10)は、１次元空間フィルター関数 $G(x_j)$ を３方向に課したものとなっている。アンサンブル平

均化操作式(4)の性質式(7)と異なり、一般にフィルター化操作式(10)は次の性質を持っている。

$$\overline{\overline{f}}\neq\overline{f}\ ,\quad \overline{\overline{f}\ \overline{g}}\neq\overline{f}\ \overline{g}\ ,\quad \overline{\overline{f}\,g'}\neq 0 \qquad (11a),(11b),(11c)$$

また、アンサンブル平均化操作での関係式(8) と類似な、次の関係を満たすフィルター関数を仮定することが多い。

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}\quad ,\ 同様に\quad \overline{\frac{\partial^n f}{\partial x^n}}=\frac{\partial^n \overline{f}}{\partial x^n} \qquad (12a),(12b)$$

流れ場の基礎方程式(1)および(2)に式(10)のフィルターを操作し、式(9),(11)および式(12)の関係を用いて整理すれば粗視化された基礎方程式系、つまりGSの連続の式および運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i}=0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{u}_j\overline{u}_i+\tau_{ji})}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j x_j} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned}\tau_{ij}&=\overline{u_i u_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j\\ &=L_{ij}+C_{ij}+R_{ij}\end{aligned} \qquad (15a)$$

$$L_{ij}=\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j \qquad (15b)$$

$$C_{ij}=\overline{\overline{u}_i u_j'}+\overline{\overline{u}_j u_i'} \qquad (15c)$$

$$R_{ij}=\overline{u_i' u_j'} \qquad (15d)$$

ここで、格子で捕らえきれない乱れによる流れ場への影響はSGS応力項 τ_{ij} に現れる。L_{ij} 、C_{ij} および R_{ij} はそれぞれLeonard, cross および Reynolds 項と呼ばれるSGS項である。Leonard項 L_{ij} はフィルター関数 $G(x)$ を特定して二重フィルター操作が行えるならばモデル化なしに評価できる項である。cross 項 C_{ij} はGSとSGS渦との干渉, Reynolds 項 R_{ij} はSGS渦どうしの干渉を表現する項であり、共に u_i' を含むためにモデル化が必要となる。このモデルのことをSGSモデルと呼ぶ。GSの流れ場は、フィルター化された基礎式系式(13)および(14)にSGSモデルを導入して解けば求めることができる。このように、LESは格子スケール以下の影響のみをモデル化する非定常乱流数値解析であるので、乱流場の時間的な変化や、乱流渦の構造についても表現する事ができる。また、アンサンブル平均乱流モデルと比べ、モデル化される部分が少ないぶんだけ精度が良いと言える。

3. フィルター関数

前節の説明では、空間的なフィルター関数式(10)を仮定することによりLESの基礎式の導出を行ったが、ここではLESに用いられるフィルター関数およびその性質について紹介する。

フィルター関数 $G(x)$ としては、一般的に Gaussian、 Sharp cutoff および Top hat フィルターが仮定される[2]。物理空間および波数空間でのこれらのフィルターの形は以下となる。

Gaussian フィルター

$$G(x_i)=\sqrt{\frac{6}{\pi\Delta_i^2}}\ exp\left\{-\frac{6x_i^2}{\Delta_i^2}\right\} \qquad (16a)$$

$$\hat{G}(k_i)=exp\left\{-\frac{(\Delta_i k_i)^2}{24}\right\} \qquad (16b)$$

Sharp cutoff フィルター

$$G(x_i)=2\frac{sin\left\{\frac{\pi x_i}{\Delta_i}\right\}}{\pi x_i} \qquad (17a)$$

$$\hat{G}(k_i)=\begin{cases} 1 & \left(|k_i| \leqq \frac{\pi}{\Delta_i}\right) \\ 0 & \left(|k_i| > \frac{\pi}{\Delta_i}\right) \end{cases} \qquad (17b)$$

Top hat フィルター

$$G(x_i)=\begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & \left(|x_i| \leqq \frac{\Delta_i}{2}\right) \\ 0 & \left(|x_i| > \frac{\Delta_i}{2}\right) \end{cases} \qquad (18a)$$

$$\hat{G}(k_i)=2\frac{sin\left\{\frac{\Delta_i k_i}{2}\right\}}{\Delta_i k_i} \qquad (18b)$$

これらのフィルターは、フィルター化操作が粗視化として働き、Δ_i -> 0 で $\overline{f}=f$ となるように次式が満足されている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,dx=1 \qquad (19)$$

ここで Δ_i は x_i 方向のフィルター幅であり、格子間隔の２倍（$\Delta_i=2\Delta x_i$）に設定されることが多い 。これらのフィルター関数のうち、Gaussian フィルターは実空間および波数空間双方での関数形が正規分布となるものである。 Sharp cutoff フィルターは有限フーリエ級数展開によるフィルター化効果を表現するもので、波数空間での関数形が Top hat 型となる。Top hat フィルターは実空間での関数形がTop hat型となる。また、Top hat フィルターは１階微分に対する２次精度中心差分近似によるフィルター化効果を表現する。例えば、

$$\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3)-f(x_1-\Delta x_1, x_2, x_3)}{2\Delta x_1}=\frac{1}{2\Delta x_1}\Big[f(x_1', x_2', x_3')\Big]_{x_1'=x_1-\Delta x_1}^{x_1'=x_1+\Delta x_1}$$

$$=\frac{1}{2\Delta x_1}\int_{x_1-\Delta x_1}^{x_1+\Delta x_1}\frac{\partial f(x_1', x_2, x_3)}{\partial x_1'}\,dx_1' \qquad (20)$$

これより式(20)に見られる１階微分に対する２次精度中心差分近似のフィルター化効果が式(18)による一次元フィルターの効果に等しいことが分かる。

次に、微分オペレータに対するフィルター化操作、つまり先に仮定した式(12)について考えてみる。変数の微分に一次元フィルターを操作し、積分を部分積分により展開すると次式を得る。

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')\frac{\partial f(x')}{\partial x'}\,dx'$$

$$=\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to-\infty}}\Big[G(x-x')f(x')\Big]_{x'=b}^{x'=a}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'}f(x')\,dx' \tag{21}$$

ここで、フィルター関数 G として $|x|\to\infty$ で急速に零となるものが選ばれるので、式(21) 中 [･] の項は零となる。またフィルター関数 G として偶関数が選ばれると（実際、式(16)～(18)のフィルターは偶関数である)、次式が成立する。

$$\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'}=-\frac{\partial G(x-x')}{\partial x} \tag{22}$$

これより、式(21)の最後の項は

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x-x')}{\partial x'}f(x')\,dx'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G(x-x')}{\partial x}f(x')\,dx'$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')f(x')\,dx' \tag{23}$$

となる。これらより、次の関係式が得られる。

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')\ f(x')\ dx'=\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \tag{24a}$$

さらに、同じ操作を繰り返すことにより次式が得られる。

$$\overline{\frac{\partial^n f}{\partial x^n}}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')\ f(x')\ dx'=\frac{\partial^n \overline{f}}{\partial x^n} \tag{24b}$$

式(24)は式(12)の１次元の場合に相当する。多次元のフィルター化操作に対しても、ガウスの発散定理を用いて式(12)が証明される。以上の手順は、式(12)を満足するフィルター関数の条件を示したことにもなる。なお、不等間隔格子での差分近似に対応するフィルターは式(22)を満足しないので、式(12)は成立しない。

これまでの説明では、フィルター化操作はＬＥＳの基礎式導出のための概念として用いられてきた。またフィルター化された流れ場の変数 $\overline{f}$ と $\overline{p}$ は 式(13)および(14) を解くことにより得られるが、しかし式(15)に見られる Leonard項を正確に評価する場合や後に紹介するＳＧＳモデルの選択によっては、数値計算実行の際にフィルター化操作が必要になることもある。流れ場の周期性が仮定できる場合、フーリエ変換の性質を利用するとフィルター化操作は経済的に実行できる。一次元フィルター化変数 $\overline{f}(x)$ のフィルター化量は、フィルター関数 $G(x)$ を導入して次のように定義される。

$$\overline{\overline{f}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-x')\ \overline{f}(x')\ dx' \tag{25}$$

式(25)はたたみこみ積分であるので、周期性が仮定できる場合にはフーリエ変換により波数空間における積の演算

$$\overline{\overline{\hat{f}}}(k)=\hat{G}(k)\,\hat{\bar{f}}(k) \qquad (26)$$

へと変形できる。さらに式(26)を逆変換することにより $\overline{f}(x)$ を容易に計算できる。

4. 体積平均化および微分フィルター

ＬＥＳにおける格子平均化の概念としては、これまで紹介してきたフィルター化操作以外にも、体積平均化および微分フィルターという概念が提案されている。これらについて以下で紹介する。

4.1　体積平均化

体積平均化のＬＥＳは、物理量の輸送方程式について、注目しているコントロール・ボリューム内の体積平均化操作を行い、Gauss の発散定理を用いて流れ場をＧＳとＳＧＳ成分それぞれに分離する[3]。基礎方程式系より離散化式を構成するため注目するコントロール・ボリュームの体積 $V=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ について、物理量 f の体積平均値 ${}^{v}\overline{f}$ を次のように定義する。

$${}^{v}\overline{f}=\frac{\int_{\Delta x_1}\int_{\Delta x_2}\int_{\Delta x_3} f(x_1',x_2',x_3')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3} \qquad (27)$$

また，${}^{j}\overline{f}$ (j=1,2,3) を物理量 f のコントロール・ボリューム界面 ${}^{j}F=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3/\Delta x_j$ 上での面平均値とする。例えば

$${}^{1}\overline{f}=\frac{1}{\Delta x_2\Delta x_3}\int_{\Delta x_3}\int_{\Delta x_2} f(x_1,x_2',x_3')\,dx_2'\,dx_3' \qquad (28)$$

微分オペレータの体積平均値はベクトル解析の関係式を用いて次のように体積積分値から面積分値による表現へと変換される。例えば

$$\begin{aligned}{}^{v}\overline{\frac{\partial f}{\partial x_1}}&=\frac{1}{\Delta x_1}\left[{}^{1}\overline{f}\left(x_1+\frac{\Delta x_1}{2}\right)-{}^{1}\overline{f}\left(x_1-\frac{\Delta x_1}{2}\right)\right]\\ &\equiv\frac{\delta\,{}^{1}\overline{f}}{\delta x_1} \qquad (29)\end{aligned}$$

上式中の $\delta/\delta x_i$ は通常の差分オペレータに一致する。

基礎式(1)および式(2) に対して式(27)を操作すればＧＳの基礎式を得る。

$$\frac{\delta\,{}^{i}\overline{u_i}}{\delta x_i}=0 \qquad (30)$$

$$\frac{\partial\,{}^{v}\overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\delta\,{}^{j}\overline{u_j}\,{}^{j}\overline{u_i}}{\delta x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\delta\,{}^{i}\overline{p}}{\delta x_i}+\frac{\delta}{\delta x_j}\left[-{}^{j}\overline{u_i'u_j'}+\nu\left({}^{j}\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+{}^{j}\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right)\right] \qquad (31)$$

式(31)中 ${}^{j}\overline{u_i' u_j'}$ は、アンサンブル平均における Reynolds 応力に相当する項で格子スケール以下の運動の影響による ＳＧＳ Reynolds 項であり、以下のように定義される。

$$ {}^{j}\overline{u_i' u_j'} = {}^{j}\overline{u_i u_j} - {}^{j}\overline{u_i}\,{}^{j}\overline{u_j} \qquad (32) $$

体積平均操作による場合、離散化式は体積平均量と面平均量が入り交じり複雑なものとなる。しかしコントロール・ボリューム型離散化手法の利点として輸送量の壁面境界条件に壁面フラックスのみを与えればよいことが挙げられる。このことは人工的壁面境界条件の適用によりＬＥＳの実用化を計る場合非常に有利であると考えられる。式(31)および式(32)を見る限りでは、フィルター化操作で現れる Leonard・cross 応力に相当する項は現れない。しかし実際に数値計算を実行する場合、式中の物理量を離散的に定義された物理量を用いて表現する必要がある。時間進行法により求められる物理量は体積平均値であり、また一般には体積平均値と面平均値とを結びつける厳密な関係式が得られない。式(31)の対流項を変形すると次の様に表現できる。

$$ \frac{\delta\, {}^{j}\overline{u_j}\,{}^{j}\overline{u_i}}{\delta x_j} = \frac{\delta\, {}^{v}\overline{u_j}\,{}^{v}\overline{u_i}}{\delta x_j} + \frac{\delta\, {}^{v}\overline{u_j}\,({}^{j}\overline{u_i} - {}^{v}\overline{u_i})}{\delta x_j} + \frac{\delta\, {}^{v}\overline{u_i}\,({}^{j}\overline{u_j} - {}^{v}\overline{u_j})}{\delta x_j} + \frac{\delta\,({}^{j}\overline{u_j} - {}^{v}\overline{u_j})({}^{j}\overline{u_i} - {}^{v}\overline{u_i})}{\delta x_j} \qquad (33) $$

式(33)の右辺最初の項はそのまま計算できるが、右辺の残りの３項は差分オペレータ $\delta / \delta x_j$ による一次元方向のフィルター効果（Top hat フィルター）を考えれば cross および Reynolds 項に相当する項となり、モデル化が必要となる。 Schumann[3]による計算では以下の近似を行っている。

$$ {}^{j}\overline{u_i}\,{}^{j}\overline{u_j} = {}^{v}\overline{u_i}\,{}^{v}\overline{u_j} \qquad (34) $$

4.2　微分フィルター

微分フィルターは Germano によって提案されたフィルタリングの一種であり、特殊なフィルター関数を用いることによりＳＧＳ項全てが厳密に評価できるものである[4],[5]。等方微分フィルターにおいては、次のフィルター関数を導入する。ここで $\mathbf{x}$ は３次元デカルト空間である。

$$ \overline{f}(\mathbf{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}')\, d^3\mathbf{x}' \qquad (35) $$

等方微分フィルター

$$ G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a^2 |\mathbf{x}|}\, exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|}{a}\right) \qquad (36a) $$

$$ \hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 + a^2 |\mathbf{k}|^2} \qquad (36b) $$

このフィルター関数を用いると、物理量 f がフィルター化量 $\overline{f}$ により次の様に表現できる。

$$f=\overline{f}-a^2\nabla^2\overline{f} \qquad (37)$$

実は、微分フィルターは $\overline{f}$ に関する線形偏微分方程式(37) のグリーン関数 $G(\mathbf{x})$ が Gaussian フィルターと類似の形をしていることを利用したものと言える。このフィルター関数を用いると、式(15)でのＳＧＳ応力項は次の様に表現される。

$$L_{ij}=\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\overline{\overline{u}}_i\overline{\overline{u}}_j=a^2\nabla^2(\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}) \qquad (38a)$$

$$C_{ij}=\overline{\overline{u}_i u_j'}+\overline{\overline{u}_j u_i'}=-a^2(\overline{\overline{u}_i\nabla^2\overline{u}_j+\overline{u}_j\nabla^2\overline{u}_i}) \qquad (38b)$$

$$R_{ij}=\overline{u_i'u_j'}=a^4\,\overline{(\nabla^2\overline{u}_i)(\nabla^2\overline{u}_j)} \qquad (38c)$$

このように、微分フィルターはフィルター関数の特殊な性質により、Leonard、cross および Reynolds項等のＳＧＳ応力項がモデル化せずにＧＳの量のみで表現できる一種のＤＮＳとなることがわかる。しかしながら、この微分フィルターには正則化の効果はなく[6]、ＤＮＳを実行できるほどの格子数を確保しないと計算が発散してしまうことが予想されるのでＬＥＳとしての意味を持たない。さらに今日最も離散化精度の高いスペクトル法を用いたとしても式(17)に対応するフィルターの効果が入ってしまうため、厳密に式(36)を課すことにならない。しかしながらＬＥＳの研究を行う上で微分フィルターは興味深い概念である。

5. SGSモデル

３節で見てきたように、ＬＥＳによる乱流解析では、基礎式系に空間的なフィルターを操作した際に生じるＳＧＳ応力項、つまり Reynolds 項、cross項と、場合によっては Leonard 項に対してのモデル化が必要となる。これら各ＳＧＳ項のモデル化に際し、ＧＳの流れ場がガリレイ不変性を満足するように注意する必要のあることが示されている[7]。ガリレイ不変性とは、次に示す座標の平進性に関する不変則である。

$$x_j,\ t \xrightarrow{\text{ガリレイ変換}} \begin{cases} x_j^* = x_j + V_j\,t + b_j \\ t^* = t \end{cases}$$

ナビエ・ストークスの方程式はガリレイ変換に関して不変であるので、ＬＥＳにおけるＧＳの支配方程式もガリレイ不変でなければならない。式の形としてＧＳの運動方程式(14)は、式(2) のナビエ・ストークス方程式にＳＧＳ応力項が加わったものであるので、式(15)のＳＧＳ応力項にガリレイ変換を行ってみる。

$$L_{ij}^* = L_{ij} - V_i\,\overline{u_j'} - V_j\,\overline{u_i'}$$

$$C_{ij}^* = C_{ij} + V_i\,\overline{u_j'} + V_j\,\overline{u_i'}$$

$$R_{ij}^* = R_{ij}$$

よって

$$L_{ij}^* + C_{ij}^* = L_{ij} + C_{ij}$$

$$\tau_{ij}^* = \tau_{ij}\,.$$

これより、ＧＳの流れ場がガリレイ不変性を満足するためには Leonard 項と cross 項とのモデルの組み合わせに注意が必要であり、この不変性を満たすように双方を同時にモデル化する必要のあることがわかる。なお、Reynolds 項は単独でガリレイ不変である。

ここでは、このような要求を満たすＳＧＳモデルおよび最近提案された新しいＳＧＳモデルのいくつかを

紹介する。

5．1 Deardorff-Smagorinsky モデル

$$R_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}R_{kk}\sim -2\nu_t\overline{S}_{ij} \qquad (39a)$$

$$L_{ij}+C_{ij}\sim 0 \qquad (39b)$$

式(39)はDeardorff[8]による先駆的なＬＥＳ計算に採用されたＳＧＳモデルであるが、このモデルの特徴は式(39a)よりむしろ式(39b)にある。つまり、式(15b)のLeonard項自体はＳＧＳモデルを必要としないが、この項のみを厳密に計算して式(15c)の cross 項をモデル化しなければガリレイ不変性を破ることになる。ただし、対流項に対し２次精度中心差分近似を用いると、式(20)で説明した差分によるフィルター化の影響で部分的に Leonard項を計算してしまうことになり、厳密に式(39b)を用いたことにはならない。Reynolds 項に対しては式(39a)の渦粘性近似を行っている。ν_t はＳＧＳ渦粘性係数で、Smagorinsky によるモデル[9]が用いられている。

$$\nu_t=(C_S\Delta)^2\,|\overline{S}| \qquad (40a)$$

$$\overline{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\ ,\quad |\overline{S}|=(2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2} \qquad (40b),(40c)$$

ここで C_S は式(40)中唯一のモデル定数、Δ $(=(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^{1/3})$ はＳＧＳの長さスケールである。通常式(39a)と式(40)によるＳＧＳ渦粘性型モデルとの組み合わせを Smagorinskyモデルと呼んでいる。C_S の最適値は流れ場の種類により異なり、平均速度勾配の大きい壁乱流等では 0.1、平均速度勾配が零の一様等方性乱流では 0.23、その中間の混合層では 0.15 程度の値が用いられ成功を修めている。また、Smagorinsky モデルをそのまま壁面まで適用することはできないので、通常ＳＧＳの長さスケール Δ に次の Van Driest 型の壁面減衰関数[10]が乗ぜられる。

$$f=1-exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \qquad (41)$$

$$y^+=\frac{u_\tau y}{\nu}\ ,\ u_\tau=\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\ ,\ A^+=25$$

これまでのＬＥＳの応用計算例の多くはＳＧＳモデルとして Smagorinskyモデルを採用しているが、これはこのモデルは計算の容易さや安定性に優れているからであろう。なお、式(39)のＳＧＳモデルを採用したＬＥＳ計算では、フィルター関数を定義する必要がない。

5．2 Bardina-Smagorinsky モデル

$$R_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}R_{kk}\sim -2\nu_t\overline{S}_{ij} \qquad (42a)$$

$$C_{ij}\sim\left(\overline{u}_i\overline{u}_j-\overline{\overline{u}}_i\overline{\overline{u}}_j\right) \qquad (42b)$$

$$L_{ij}\sim\left(\overline{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\overline{u}_i\overline{u}_j\right) \qquad (42c)$$

このモデルは、Leonard項についてはフィルター関数を定義して厳密に計算を行なう。式(42b) は、Scale similality の考えに基づき cross 項 および Reynolds項をモデル化したものであり、Bardinaら[11]によって提案されている。Scale similality モデルとは、ＳＧＳ渦の中で相対的に大きな渦成分の性質はＧＳ渦の中で相対的に小さな渦成分の性質と類似である、という仮定に基づいており、一様な方向に対して適用される。これはフィルター化速度場と二重フィルター化速度場との差により cross 項および Reynolds項を次の様にモデル化するものである。

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{\bar{u}_j u_i'} \\
&= \overline{\left[\bar{\bar{u}}_i + (\bar{u}_i)'\right]\left[\overline{(u_j')} + (u_j')'\right]} + \overline{\left[\bar{\bar{u}}_j + (\bar{u}_j)'\right]\left[\overline{(u_i')} + (u_i')'\right]} \\
&\sim \bar{\bar{u}}_i\ \overline{(u_j')} + \bar{\bar{u}}_j\ \overline{(u_i')} \\
&\sim \bar{\bar{u}}_i\ (\bar{u}_j)' + \bar{\bar{u}}_j\ (\bar{u}_i)' \\
&= \bar{\bar{u}}_i\ (\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_j) + \bar{\bar{u}}_j\ (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)
\end{aligned}
\tag{43a}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= \overline{u_i'\ u_j'} \\
&= \overline{\left[\overline{(u_i')} + (u_i')'\right]\left[\overline{(u_j')} + (u_j')'\right]} \\
&\sim \overline{(u_i')}\ \ \overline{(u_j')} \\
&\sim (\bar{u}_i)'(\bar{u}_j)' \\
&= (\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i)\ (\bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_j)
\end{aligned}
\tag{43b}
$$

これより

$$
C_{ij} + R_{ij} \sim \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \tag{43c}
$$

なお、Scale similarity モデルのみでは消散の効果が足りないので、式(42a)の様に Reynolds 項に対しては Smagorinskyモデルを用い、さらに式(43c)を式(44)の cross項に対するモデル (Bardina モデル)として式(42b)に与えている。

$$
C^{B}_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j \tag{44}
$$

Leonard 項について式(42c)の様に厳密に評価した場合、式(44)(あるいは式(42b))により cross 項をモデル化すればガリレイ不変性は満たされる。なお、このモデルではフィルター関数を定義して式(25)および式(26)で示した手法等により二重フィルタ化量を計算する必要がある。

５.３ Clark-Smagorinsky モデル

$$
R_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} R_{kk} \sim -2\nu_t \bar{S}_{ij} \tag{45a}
$$

$$
L_{ij} + C_{ij} \sim \frac{\Delta^2}{12} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \tag{45b}
$$

このモデルは Clarkら[12] により提案されたＳＧＳモデルであるが、式(45b)は Leonard 項および cross 項に対する Bardina のモデルを Taylor 展開し、２次の項まで取ることにより得られる。以下では説明の簡略化のため一次元で考える。まず、変数 $\bar{u}_i(x')$ を $\bar{u}_i(x)$ のまわりに展開する。

$$
\bar{u}_i(x') = \bar{u}_i(x) + \frac{\partial \bar{u}_i(x)}{\partial x}(x' - x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_i(x)}{\partial x^2}(x' - x)^2 + O(\,|x' - x|^3\,) \tag{46}
$$

これを Leonard 項に代入すると次式を得る。

$$\overline{\overline{u}_i(x)\ \overline{u}_j(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')\ \overline{u}_i(x')\ \overline{u}_j(x')\ dx'$$

$$= \overline{u}_i(x)\ \overline{u}_j(x) + \gamma_1 \left(\overline{u}_i \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} \right)$$

$$+ \gamma_2 \left(\frac{1}{2} \overline{u}_i \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x} + \frac{1}{2} \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x} \right) + \cdots \quad (47)$$

ここで、γ_n はフィルター関数 G のn次のモーメントで、次式で定義される。

$$\gamma_n = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')\ (x-x')^n\ dx' \qquad (48)$$

フィルター関数として式(16),(17),(18)のような偶関数を用いる場合、式(48)のn次モーメントはnが奇数のとき零となり、nが偶数のときのみ値を持つ。これより、Leonard 項の近似式として次式を得る。

$$L_{ij} = \overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \sim \gamma_2 \left(\frac{1}{2} \overline{u}_i \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x} + \frac{1}{2} \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x} \right) \qquad (49)$$

二重フィルター化量についても、式(46)を代入して展開式を得ることができる。

$$\overline{\overline{u}}_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')\ \overline{u}_i(x')\ dx'$$

$$= \overline{u}_i(x) + \gamma_1 \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} + \gamma_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x^2} + \cdots \qquad (50)$$

フィルター関数として偶関数であるものを仮定すると、二重フィルタ化量の近似式が以下のように得られる。

$$\overline{\overline{u}}_i(x) = \overline{u}_i(x) + \gamma_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x^2} + \cdots \qquad (51)$$

式(51)を Bardina モデル式(44)に代入する。

$$C^B_{ij} = \overline{u}_i \overline{u}_j - \overline{\overline{u}}_i \overline{\overline{u}}_j \sim -\frac{1}{2} \gamma_2 \left(\overline{u}_i \frac{\partial^2 \overline{u}_j}{\partial x^2} + \overline{u}_j \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x^2} \right) \qquad (52)$$

式(49)と式(52)とを加えると次式を得る。

$$L_{ij} + C^B_{ij} \sim \gamma_2 \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x} \qquad (53)$$

ここで特に、式(16)の Gaussian および式(18)の Top hatフィルターでは、2次のモーメントは次式で与えられる。

$$\gamma_2 = \frac{\Delta^2}{12} \qquad (54)$$

式(53)を三次元のフィルター化操作に拡張して式(54)を用いれば、式(45b) を得ることができる。以上より、モデル式(45)の性質や適用限界等は式(42)のモデルに準ずると考えられる。また、式(42)と異なり、式(45)のモデルではフィルター関数を定義して二重フィルター化量を計算する必要はない。ただし、式(45b) 導出の過程で式(54)を用いているので、 Gaussian あるいは Top hatフィルターが陰に仮定されている。

5.4 変数係数 Smagorinsky モデル

$$\frac{C_S}{C_{S0}} = 1 - \frac{C_A}{|\overline{S}|^2}\frac{D|\overline{S}|}{Dt} \qquad (55a)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (55b)$$

Smagorinsky モデル式(39a)および式(40)はＬＥＳのＳＧＳモデルとして最も広く使用されているモデルであるが、しかしモデル中唯一の定数 C_S の最適値が流れ場の種類によって異なっており、また未知の流れ場については C_S の最適値を捜さなければならないといった難点がある。Yoshizawa[13]は、流れ場の種類による C_S 値の変化を表現できるモデル式(55)を乱流の統計理論より導出した。このモデル中の定数 C_{S0} と C_A は、理論[14]ではそれぞれ 0.16, 1.8、また森西・小林[15]による数値実験での最適化ではそれぞれ 0.10, 32 と与えられている。

5.5 Dynamic subgrid-scale 渦粘性モデル

二種類のフィルターによるＳＧＳ応力間のアナロジーによりSmagorinsky モデルの定数を自動的に与えようとする Dynamic subgrid-scale 渦粘性モデル[16]が Germano らにより提案されている。このモデルでは、ＧＳ量を定義するためのフィルター $\overline{G}$ に加え、より大きなフィルタ幅を持つテストフィルター $\widetilde{G}$ を用い、二種類のフィルター化量によりＳＧＳ応力を評価する。

$$\overline{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(x-x')f(x')dx' \qquad (56a)$$

$$\widetilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(x-x')f(x')dx' \qquad (56b)$$

まず、式(56a)によるＧＳの支配方程式はこれまでと同様に、式(13),(14)および式(15a)により表現される。次に、$\widetilde{\overline{G}} = \overline{G}\,\widetilde{G}$ によるＧＳの支配方程式は式(57),(58)および(59)となる。

$$\frac{\partial \widetilde{\overline{u}}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (57)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\overline{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\widetilde{\overline{u}}_i\widetilde{\overline{u}}_j + T_{ij})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \widetilde{\overline{p}}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \widetilde{\overline{u}}_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (58)$$

$$T_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\overline{u}}_i\widetilde{\overline{u}}_j \qquad (59)$$

さらに式(15a)と式(59)のＳＧＳ応力 τ_{ij} および T_{ij} それぞれに対し、Smagorinsky タイプ（式(39a)，式(40)）のモデル化を行う。

$$\tau_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}=-2\ C\ \overline{\Delta}^2\ |\overline{S}|\ \overline{S}_{ij} \tag{60a}$$

$$\overline{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right),\qquad |\overline{S}|=(2\ \overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2} \qquad (60b),(60c)$$

$$T_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}T_{kk}=-2\ C\ \widetilde{\overline{\Delta}}^2\ |\widetilde{\overline{S}}|\ \widetilde{\overline{S}}_{ij} \tag{61a}$$

$$\widetilde{\overline{S}}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\overline{u}}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{\overline{u}}_j}{\partial x_i}\right),\qquad |\widetilde{\overline{S}}|=(2\ \widetilde{\overline{S}}_{ij}\widetilde{\overline{S}}_{ij})^{1/2} \qquad (61b),(61c)$$

ここで、次の Resolved turbulent stress $\mathcal{L}_{ij}$ を定義すると、これは式(15a)と式(59)とを結び付ける量であることがわかる。

$$\mathcal{L}_{ij}=\widetilde{\overline{u}_i\overline{u}_j}-\widetilde{\overline{u}}_i\widetilde{\overline{u}}_j=T_{ij}-\widetilde{\tau}_{ij} \tag{62}$$

式(60a)および式(61a)を式(62)に代入すれば次式を得る。

$$\mathcal{L}_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\mathcal{L}_{kk}=-\ 2\ C\ M_{ij} \tag{63a}$$

$$M_{ij}=\widetilde{\overline{\Delta}}^2\ |\widetilde{\overline{S}}|\ \widetilde{\overline{S}}_{ij}-\overline{\Delta}^2\ \widetilde{|\overline{S}|\ \overline{S}_{ij}} \tag{63b}$$

Germano は式(63a)に $\overline{S}_{ij}$ を乗じてスカラー量を作り、モデル定数 C を求めた。

$$C=-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{ij}\ \overline{S}_{ij}}{M_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{64}$$

なお、C の算出方法として、式(63a)の最小二乗近似をとるものが Lilly[17]により提案されている。この場合、C は次式で与えられる。

$$C=-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{ij}M_{ij}}{M_{ij}^2} \tag{65}$$

$\overline{\Delta}$ および $\widetilde{\overline{\Delta}}$ はそれぞれフィルター関数 $\overline{G}$ および $\overline{G}\widetilde{G}$ に対応するフィルター幅である。ここでのモデルは式(60a)および式(64)あるいは式(65)の C により式(15a)のＳＧＳ応力を表現するものであるが、モデルパラメータは２つのフィルター幅の比率のみとなる。C の算定として式(64)を用いる場合、これをそのまま流れ場に適用すると C の値が不定となり易いので、チャンネル乱流等では式(64)の分母および分子それぞれに面平均値を用い、C を壁方向座標の変数として計算されている[16]。このモデルを用いると、ＳＧＳ乱れの Back scatter や乱流への遷移も表現でき、また壁面の漸近挙動も満たされることが報告されている。

５.６ 一方程式モデル

ＬＥＳにおいても、アンサンブル平均モデルで用いられているような輸送方程式モデルがある。以下には

Yoshizawa and Horiuti[18]による一方程式モデルを示す。

$$R_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k_G = -\nu_G\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{66a}$$

$$\nu_G = C_\nu \Delta k_G^{1/2} \tag{66b}$$

$$\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3} \tag{66c}$$

$$\frac{\partial k_G}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial k_G}{\partial x_j} = P_G - \varepsilon_G + D_G \tag{66d}$$

$$P_G=-R_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \tag{66e}$$

$$\varepsilon_G = C_\varepsilon \frac{k_G^{3/2}}{\Delta} \tag{66f}$$

$$D_G = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(C_{kk}\Delta k_G^{1/2}+\nu)\frac{\partial k_G}{\partial x_j}\right] \tag{66g}$$

モデル定数 C_ν , C_ε , C_{kk} にはそれぞれ 0.05, 1, 0.1 が与えられている。このモデルは、ＳＧＳ乱流エネルギ k_G の輸送方程式を解くにもかかわらず、壁乱流等では Smagorinsky モデルと比較して計算結果に著しい改善は見られないことが報告されている。これは、ＳＧＳの長さスケールが依然式(66c) によって決まってしまうことによる。しかし外力や化学反応の影響等がＳＧＳの乱流場において無視できない場合には、式(66)のような輸送方程式型のＳＧＳモデルが有効になると考えられる。なお、Smagorinsky モデルの渦粘性係数（式(40a)）は、 k_G の輸送方程式に局所平衡の条件、つまり $Dk_G/Dt=0$ と $D_G=0$ の条件を課すことにより導出できる。このとき、

$$P_G = \varepsilon_G \tag{67}$$

となるが、式(67)に式(66e),(66f),(66a)および式(66b)の関係を用いて ν_G の式を導き、ν_G と ν_t とを同一視すれば式(40a)が出る。このとき

$$C_S = \left(\frac{C_\nu^3}{C_\varepsilon}\right)^{1/4} \sim 0.10 \tag{68}$$

となる[18]。

6. 基礎方程式の表現方法

流れ場の数値解析を行う場合、まず解くべき基礎式を定めてから適用する座標系で基礎式を書き下し、適当な離散化を行って数値計算を実行することになる。その際、基本的な流れ場については直交座標系を用いれば良いが、複雑形状の流れ場に対する応用問題を考えるとき、一般座標系で記述された基礎式の導入が必要となる。

ここでは、式(39)のＳＧＳモデルを採用したＬＥＳの基礎式系を直交座標系および一般曲線座標系で記述してみる。このとき、運動方程式は渦粘性係数がＳＧＳのものとなるだけで、通常の渦粘性係数を用いた乱流モデルと数式上は変わりがなくなる。この節では、式の簡略化のため、ＧＳの量を示す上付き－は省略する。

6.1 直交座標系

まず、これまでも暗黙のうちに用いてきたデカルト座標系（x_1, x_2, x_3）、（u_1, u_2, u_3） での基礎式を示す。これまでと同様、縮約表示を用いている。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{69a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i - \tau_{ji})}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \tag{69b}$$

$$\tau_{ji} = (\nu + \nu_t)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{69c}$$

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]^{1/2} \tag{69d}$$

$$\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3} \tag{69e}$$

$$P = \frac{p}{\rho} + \frac{2}{3} k_G \tag{69f}$$

ここで、k_G はSGSの乱流エネルギであり、k_G の値が必要があれば式(66b)の ν_G と ν_t とを同一視して次のように評価される。

$$k_G = \frac{\nu_t^2}{(C_\nu \Delta)^2} \tag{70}$$

なお、実際の数値計算では、圧力計算アルゴリズムにより式(69f)の P を直接求められることが多いので、GSの速度場のみに注目する場合、k_G の評価は不用となる。

次に、円筒座標（r, θ, z）、（u_r, u_θ, u_z）における基礎式を示す。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{71a}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r(u_r u_r - \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u_\theta u_r - \tau_{\theta r})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z u_r - \tau_{zr})}{\partial z}$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{(u_\theta u_\theta - \tau_{\theta\theta})}{r} \tag{71b}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r(u_r u_\theta - \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u_\theta u_\theta - \tau_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z u_\theta - \tau_{z\theta})}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{(u_r u_\theta - \tau_{r\theta})}{r} \tag{71c}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial r(u_r u_z - \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (u_\theta u_z - \tau_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial (u_z u_z - \tau_{zz})}{\partial z}$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial z} \tag{71d}$$

$$\tau_{rr} = 2(\nu + \nu_t)\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \tag{71e}$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2(\nu+\nu_t)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right) \tag{71f}$$

$$\tau_{zz} = 2(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \tag{71g}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = (\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \tag{71h}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = (\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{71i}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = (\nu+\nu_t)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \tag{71j}$$

$$\nu_t = (C_S\Delta)^2\left\{2\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)^2\right\}^{1/2} \tag{71k}$$

$$\Delta=(r\Delta r\Delta\theta\Delta z)^{1/3} \tag{71l}$$

6.2　一般曲線座標系

一般曲線座標系における物理量の表記は、基底ベクトルの選び方により定まる[19]、[20]、[21]。デカルト座標系における独立変数および無次元単位基底ベクトルを次のように定める。

独立変数	x^i	または	x_i
無次元単位基底ベクトル	e^i	または	e_i

一般曲線座標での独立変数を　ξ^i　とするとき、これに対応する基底ベクトルが次のように定まる。

自然基底ベクトル　$b_i = \dfrac{\partial x^j}{\partial \xi^i}e_j$　(72a)

双対基底ベクトル　$b^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^j}e^j$　(72b)

ここで、計量テンソル　g^{ij}　、g_{ij}　やクリストッフェル記号 Γ^k_{ij}　およびヤコビアン $\sqrt{g}$ が次式によって記述される。

計量テンソル　$g_{ij} = b_i\cdot b_j$　および　$g^{ij} = b^i\cdot b^j$　(73a),(73b)

クリストッフェル記号　$\Gamma^k_{ij} = \dfrac{1}{2}g^{km}\left(\dfrac{\partial g_{jm}}{\partial x^i}+\dfrac{\partial g_{mi}}{\partial x^j}-\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)$　(74)

ヤコビアン　$\sqrt{g} = \sqrt{det(g_{ij})}$　(75)

先の基底ベクトルを用いると、任意のベクトル量 A は次のように表現される。

$$A = A^ib_i,\quad A = A_ib^i \qquad (76a),(76b)$$

同様に、ベクトルやテンソル量は用いる基底によって反変成分および共変成分として表記される。

反変成分　A^i　,　T^{ij}
共変成分　A_i　,　T_{ij}

さらに、ベクトルおよびテンソル量の共変微分が次のように定義される。

$$\nabla_j A^i = \frac{\partial A^i}{\partial \zeta^j} + A^m \Gamma^i_{mj} \qquad (77a)$$

$$\nabla_j A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \zeta^j} - A_m \Gamma^m_{ij} \qquad (77b)$$

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial \zeta^k} + T^{mj} \Gamma^i_{mk} + T^{im} \Gamma^j_{mk} \qquad (77c)$$

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial \zeta^k} - T_{mj} \Gamma^m_{ik} - T_{im} \Gamma^m_{jk} \qquad (77d)$$

これら反変および共変による表示で注意しなければならないことは、基底ベクトルが無次元基底ベクトル以外のとき、すべてのベクトルおよびテンソル量の成分が本来の物理量と同じ次元や物理的意味を持たないことである（デカルト座標の場合には基底ベクトルは無次元単位基底ベクトルとなっている）。そこで、先の計量テンソルを用いて基底ベクトルを規格化し、次に示す無次元単位基底ベクトルを用いる[19]。

$$b_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} b_i , \quad b^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} b^i \quad \text{（縮約はとらない）} \qquad (78a),(78b)$$

式(76a,b)に対応する任意の物理的ベクトル成分表示は次式で定義される。

$$A = A^{(i)} b_{(i)} , \quad A = A_{(i)} b^{(i)} \qquad (79a),(79b)$$

ここで、

$$A^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}\ A^i , \quad A_{(i)} = \sqrt{g^{ii}}\ A_i \quad \text{（縮約はとらない）} \qquad (80a),(80b)$$

同様にして、物理的な反変および共変成分のテンソル量も定義される。

$$T^{(ij)} = \sqrt{g_{ii} g_{jj}}\ T^{ij} , \quad T_{(ij)} = \sqrt{g^{ii} g^{jj}}\ T_{ij} \quad \text{（縮約はとらない）} \qquad (81a),(81b)$$

これらの物理的成分表示を用いて基礎式を表現すると、変数が本来の次元および物理的意味により表示される。ここでは、物理的反変速度ベクトルを用い、式(69)に対応するＬＥＳの基礎式を書き下す。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \left[\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{ii}}} u^{(i)} \right] = 0 \qquad (82a)$$

$$\frac{\partial u^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left\{ \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{jj}}} \left[u^{(j)} u^{(i)} - \tau^{(ji)} \right] \right\} + \left[u^{(j)} u^{(m)} - \tau^{(jm)} \right] \begin{Bmatrix} i \\ m\ j \end{Bmatrix}$$
$$= -g^{ij} \sqrt{g_{ii}} \frac{\partial P}{\partial \zeta^j} \qquad (82b)$$

$$\tau^{(ij)} = (\nu + \nu_t)\left(g^{(im)} \nabla_{(m)} u^{(j)} + g^{(mj)} \nabla_{(m)} u^{(i)} \right) \qquad (82c)$$

$$\nu_t = (C_S \Delta)^2 \left\{ g_{(im)} \left[g^{(jn)} \nabla_{(n)} u^{(m)} + g^{(mn)} \nabla_{(n)} u^{(j)} \right] \nabla_{(j)} u^{(i)} \right\}^{1/2} \qquad (82d)$$

$$\Delta = \left(\sqrt{g}\, \Delta\zeta^1 \Delta\zeta^2 \Delta\zeta^3 \right)^{1/3} \qquad (82e)$$

$$\nabla_{(j)} u^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \zeta^j} + u^{(m)} \begin{pmatrix} i \\ m\ j \end{pmatrix} \tag{82f}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ m\ j \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{mm} g_{jj}}} \left(\Gamma^i_{mj} - \delta^i_m \frac{g_{mk}}{g_{mm}} \Gamma^k_{mj} \right) \tag{82g}$$

$$g^{(ij)} = \sqrt{g_{ii} g_{jj}}\ g^{ij} \tag{82h}$$

$$g_{(ij)} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \tag{82i}$$

式(82)は直交、非直交に拘らず任意の座標系に対するＬＥＳの基礎式であるが、これをそのまま数値計算に用いるには複雑すぎるかもしれない。上式は有用な座標系（円筒、球、楕円、トーラス座標や座標が関数で与えられる場合等）でのＬＥＳの基礎式導出の公式と考えてもよい。例えば、円筒座標の場合、

独立変数　$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (r, \theta, z)$

計量テンソル　$g_{11} = g_{33} = g^{11} = g^{33} = 1$,　$g_{22} = r^2$,　$g^{22} = \dfrac{1}{r^2}$,　他は 0

クリストッフェル記号　$\Gamma^1_{22} = -r$,　$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \dfrac{1}{r}$, 他は 0

ヤコビアン　$\sqrt{g} = \sqrt{det(g_{ij})} = r$

であるので、これらを式(82)に代入して展開すれば、式(33)が確認できる。もちろん、式(82)は $\nu_t = 0$ とすればナビエ・ストークス方程式の変換公式としても利用できる。

ところで、反変および共変速度成分を用いて基礎式を展開すると方程式が複雑になるのは、基底ベクトルが場所によって異なるからである。基底ベクトルを固定して物理量を表現すると、一般座標系で最も簡単な方程式が展開できる。基底ベクトルとしてデカルト座標系での無次元基底ベクトルを用い、一般曲線座標系での共変微分操作を行うと次式を得る。

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} (\sqrt{g}\ U^i) = 0 \tag{83a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left[\sqrt{g} \left(U^j u_i - \tau_{im} \alpha^{mj} \right) \right] = -\alpha_i{}^j \frac{\partial P}{\partial \zeta^j} \tag{83b}$$

$$\tau_{im} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial \zeta^n} \alpha_m{}^n + \frac{\partial u_m}{\partial \zeta^n} \alpha_i{}^n \right) \tag{83c}$$

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial \zeta^m} \alpha_j{}^m + \frac{\partial u_j}{\partial \zeta^m} \alpha_i{}^m \right) \frac{\partial u_i}{\partial \zeta^n} \alpha_j{}^n \right]^{1/2} \tag{83d}$$

$$U^j = u_i\ \alpha^{ij} \tag{83e}$$

$$\alpha^{ij} = \alpha_i{}^j = \frac{\partial \zeta^j}{\partial x_i} \tag{83f}$$

ここで、$x_i (= x^i)$ 、$u_i\ (= u^i)$ はデカルト座標での独立変数および速度成分で、U^j は反変的な速度となる。一般曲線座標系でのＬＥＳ計算を実行する場合、計算アルゴリズムと座標系との関連を考えなければ、式(82)より式(83)の方が式が簡単な分だけ経済的であると考えられる。

6.3　基礎方程式の保存性

先の節までに紹介してきた様な基礎方程式系は対象とする物理量の保存を表現するものである。数値計算を実行する場合にも、物理量の保存が離散的に満たされていることが望ましい。説明の簡略化のためここではオイラー方程式を対象とすると、次の様な表現が可能である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{84}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{85}$$

各式は対流項の表現が異なっており、それぞれ Advective form および Convective form と呼ばれている。これらは連続の式を用いると等しいものであることがわかる。ところが、これらを離散化した式はもはや等しくはならない。また、Convective form を有限のコントロール・ボリュームにわたって積分すると、境界上のフラックスのみが残り、離散式においても運動量の保存が満たされることが示される。一方 Advective form では、離散式において運動量の保存が満たされず、非保存形式となる。これらより解かるとおり、全ての項に微分演算子がかかる基礎式は保存形式となる。先の一般座標系による基礎式の表示では式(83)が保存形式となる。また、式(82)の反変（あるいは共変）成分による基礎式では座標の曲率による項が加わっており、準保存形式とよばれる。直交座標では、デカルト座標系の基礎式(69)が保存形式、円筒座標の基礎式(71)が準保存形式である。

非圧縮流体の場合には、連続の式を通して運動量保存則が同時にエネルギー保存則も兼ねるので離散式においてもこれを満たすことが望ましいが、ＬＥＳ計算では数値スキームの安定性に関してエネルギーの保存は重要である。エネルギー保存スキームとしては以下の形式が知られている。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{86}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial u_k u_k}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{87}$$

これらはそれぞれ Skew symmetric form (Arakawa form)[22] および Rotational form[23]と呼ばれており、それぞれ２次精度中心差分で離散化するとエネルギー保存スキームとなる。スタガード格子の場合には Williams[24]や Piacsek[25] らの二乗量保存スキームがある。これらは離散的に質量保存則が満たされた場合に運動量およびエネルギ（あるいは二乗量）の保存形となるので、連続の式の離散化と運動方程式の圧力項の離散化との整合性にも注意を払う必要がある。

7. 離散化手法

前節でＬＥＳに用いる基礎式の各座標における展開を行った。これらの式を離散化する手法として、ここではいくつかの空間的離散化手法、および非定常計算のための時間進行法について紹介する。さらに、非圧縮流体解析に用いられる速度－圧力連成アルゴリズム、および初期、境界条件の取扱い手法について、ＬＥＳの数値解析と関連づけて述べる。

7.1　Lagrange 補間に基づく差分・補間

流体差分解析で通常用いられる空間的な差分・補間公式は Lagrange 補間を基にして構成できる。これは、注目する点近傍の N点の離散値により変数を N-1次多項式として表現し、これより補間値や微分値を近似するものとして理解できる。座標軸 x 上の x_i 点（ i = 1 ～ N ）に物理量 $f(x_i)$ が配置されている場合、N 項の Lagrange 多項式近似関数 $f_N(x)$ は次式となる。

$$
\begin{aligned}
f_N(x) = \; & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{N-1})(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_{N-1})(x_1-x_N)} f(x_1) \\
& + \cdots\cdots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_{N-1})(x-x_N)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{N-1})(x_j-x_N)} f(x_j) \\
& + \cdots\cdots \\
& + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{N-2})(x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_2)\cdots(x_N-x_{N-2})(x_N-x_{N-1})} f(x_N)
\end{aligned}
\tag{88}
$$

上式はそのまま不等間隔格子での一般的な補間公式として使える。また、式(88)を微分することにより、不等間隔格子での(N-1)階微分までの差分近似式を構成することができる。

$$
\frac{d^m f(x)}{dx^m} \fallingdotseq \frac{d^m f_N(x)}{dx^m} \qquad (1 \leqq m \leqq N-1) \tag{89}
$$

さらに式(88)を積分することにより、物理量のフィルタ化量の近似公式も導出できる。式(42)や式(63)のＳＧＳモデルを採用する場合に必要な二重フィルタ量 $\overline{\overline{f}}$ （ＧＳ量のフィルタ化）は、式(25)と式(26)による手法以外にも、次の積分によっても評価できる[26]。

$$
\overline{\overline{f}}(x) \fallingdotseq \frac{1}{\Delta}\int_{x-\Delta/2}^{x+\Delta/2} \overline{f}_N(x')\,dx' \tag{90}
$$

式(90)はフィルタ幅Δの top hat フィルタ（式(18)）に対応する。なお、等間隔格子で N=3、フィルタ幅を格子間隔の２倍と設定したとき、中心点での上記積分は Simpsonの積分公式となる。

7.2　等間隔格子での差分近似式

式(88)、式(89)による補間、差分公式は不等間隔格子に対して適用可能なものであるが、ここでは等間隔格子(格子幅 Δx)を用いた場合の差分・補間公式を示す。また近似精度はテイラー展開により評価される。

３点近似式

$$
\left.\frac{df_3}{dx}\right|_{x=x_j} = \frac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2\Delta x} + \frac{1}{6}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x=x_j}\Delta x^2 + \cdots \tag{91}
$$

$$
\left.\frac{d^2 f_3}{dx^2}\right|_{x=x_j} = \frac{f(x_{j+1})-2f(x_j)+f(x_{j-1})}{\Delta x^2} + \frac{1}{12}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_{x=x_j}\Delta x^2 + \cdots \tag{92}
$$

５点近似式

$$
\left.\frac{df_5}{dx}\right|_{x=x_j} = \frac{-f(x_{j+2})+8f(x_{j+1})-8f(x_{j-1})+f(x_{j-2})}{12\Delta x}
$$

$$-\frac{1}{30}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_j}\Delta x^4+\ \cdots \tag{93}$$

$$\frac{d^2 f_5}{dx^2}\bigg|_{x=x_j}=\frac{-f(x_{j+2})+16f(x_{j+1})-30f(x_j)+16f(x_{j-1})-f(x_{j-2})}{12\Delta x^2}$$

$$-\frac{1}{90}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_j}\Delta x^4+\ \cdots \tag{94}$$

$$\frac{d^3 f_5}{dx^3}\bigg|_{x=x_j}=\frac{f(x_{j+2})-2f(x_{j+1})+2f(x_{j-1})-f(x_{j-2})}{2\Delta x^3}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_j}\Delta x^2+\ \cdots \tag{95}$$

$$\frac{d^4 f_5}{dx^4}\bigg|_{x=x_j}=\frac{f(x_{j+2})-4f(x_{j+1})+6f(x_j)-16f(x_{j-1})+f(x_{j-2})}{\Delta x^4}$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\bigg|_{x=x_j}\Delta x^2+\ \cdots \tag{96}$$

２点近似式（中間点の近似）

$$f_2\bigg|_{x=x_{j+1/2}}=\frac{f(x_{j+1})+f(x_j)}{2}+\frac{1}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}\Delta x^2+\ \cdots \tag{97}$$

$$\frac{df_2}{dx}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}=\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{\Delta x}+\frac{1}{24}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}\Delta x^2+\ \cdots \tag{98}$$

４点近似式（中間点の近似）

$$f_4\bigg|_{x=x_{j+1/2}}=\frac{-f(x_{j+2})+9f(x_{j+1})+9f(x_j)-f(x_{j-1})}{16}$$

$$-\frac{3}{128}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}\Delta x^4+\ \cdots \tag{99}$$

$$\frac{df_4}{dx}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}=\frac{-f(x_{j+2})+27f(x_{j+1})-27f(x_j)+f(x_{j-1})}{24\Delta x}$$

$$+\frac{3}{640}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}\Delta x^5+\ \cdots \tag{100}$$

$$\frac{d^2 f_4}{dx^2}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}=\frac{f(x_{j+2})-f(x_{j+1})-f(x_j)+f(x_{j-1})}{2\Delta x^2}$$

$$+\frac{5}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}\Delta x^2+\ \cdots \tag{101}$$

$$\frac{d^3 f_4}{dx^3}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}=\frac{f(x_{j+2})-3f(x_{j+1})+3f(x_j)-f(x_{j-1})}{\Delta x^3}$$

$$+\frac{1}{8}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_{j+1/2}}\Delta x^2+\ \cdots \tag{102}$$

ここで、流体の数値計算安定化のために使用される風上差分について言及しておく。 f の一次元輸送方

程式を等間隔格子で離散化した場合を考える。まず、対流項の Advective form に対する風上差分近似には次式がある。

$$u\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_j} \fallingdotseq u(x_j)\frac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2\Delta x} - \alpha\ |u(x_j)|\ \frac{f(x_{j+1})-2f(x_j)+f(x_{j-1})}{2\Delta x}$$
$$= u(x_j)\frac{df_3(x)}{dx}\bigg|_{x=x_j} - \alpha\ \frac{\Delta x}{2}\ |u(x_j)|\ \frac{d^2 f_3(x)}{dx^2}\bigg|_{x=x_j} \qquad (103)$$

$$u\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_j} \fallingdotseq u(x_j)\frac{-f(x_{j+2})+8f(x_{j+1})-8f(x_{j-1})+f(x_{j-2})}{12\Delta x} + \beta\ |u(x_j)|\ \frac{f(x_{j+2})-4f(x_{j+1})+6f(x_j)-4f(x_{j-1})+f(x_{j-2})}{12\Delta x}$$
$$= u(x_j)\frac{df_5(x)}{dx}\bigg|_{x=x_j} + \beta\ \frac{(\Delta x)^3}{12}\ |u(x_j)|\ \frac{d^4 f_5(x)}{dx^4}\bigg|_{x=x_j} \qquad (104)$$

式(103)は、$\alpha=0$のとき２次精度中心差分、$\alpha\neq 0$のとき１次精度風上差分に対応、式(104)は、$\beta=0$のとき４次精度中心差分、$\beta\neq 0$のとき３次精度風上差分[27]の一般形となる。

次に、対流項の Convective form に対する風上差分では、まずコントロール・ボリュームで積分してフラックスの離散化

$$\frac{d(uf)}{dx}\bigg|_{x=x_j} \fallingdotseq \frac{(uf)|_{x=x_{j+1/2}} - (uf)|_{x=x_{j-1/2}}}{\Delta x} + \frac{1}{24}\ \frac{d^3(uf)}{dx^3}\bigg|_{x=x_j}\Delta x^2 + \cdots \qquad (105)$$

を行い、セル界面上のフラックスに対して次の様に風上化を行う。

$$(uf)\Big|_{x=x_{j+1/2}} \fallingdotseq u(x_{j+1/2})\frac{f(x_{j+1})+f(x_j)}{2} - \gamma\ |u(x_{j+1/2})|\ \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{2}$$
$$= u(x_{j+1/2})f_2(x_{j+1/2}) - \gamma\ \frac{\Delta x}{2}\ |u(x_{j+1/2})|\ \frac{df_2(x)}{dx}\bigg|_{x=x_{j+1/2}} \qquad (106)$$

$$(uf)\Big|_{x=x_{j+1/2}} \fallingdotseq u(x_{j+1/2})\frac{-f(x_{j+2})+9f(x_{j+1})+9f(x_j)-f(x_{j-1})}{16} + \eta\ |u(x_{j+1/2})|\ \frac{f(x_{j+2})-3f(x_{j+1})+3f(x_j)-f(x_{j-1})}{16}$$

$$= u(x_{j+1/2}) f_4(x_{j+1/2}) + \eta \frac{(\Delta x)^3}{16} |u(x_{j+1/2})| \left. \frac{d^3 f_4(x)}{dx^3} \right|_{x=x_{j+1/2}} \tag{107}$$

式(106)は、$\gamma=0$のとき保存形の２次精度中心差分、$\gamma\neq 0$のとき保存形の１次精度風上差分に対応、式(107)は、$\eta\neq 0$ のときＱＵＩＣＫスキーム[28]となる。これら風上差分を用いれば数値的安定性が増し空間的数値振動も抑えられるので、アンサンブル平均モデルによる乱流計算では常に併用される。ＬＥＳでは、ＧＳの量に関しては基礎式の直接計算となるので、散逸的な数値誤差を極力排除するために中心差分を用いることが多い。この場合、対流項には式(86)や式(87)のようなエネルギ保存スキームを用いて計算の発散を抑えながら計算を継続する。しかし、不等間隔格子で高次精度のエネルギ保存スキームは構築が困難であるので、壁の方向については３点公式による差分が用いられる。式(84)の形の Advection form による対流項を用いると高次精度の差分は構成しやすいが、中心差分では計算が不安定になってしまう。計算安定化のため式(103)や式(104)の使用も考えられるが、式(103) は数値誤差が直接数値粘性として働くので、ＬＥＳ計算には適当でない。式(104) は誤差が直接数値粘性として働くことはないが、ＬＥＳ計算における数値誤差としてはまだ大きいと考えられる。最近、式(104) よりさらに差分精度を上げた５次精度風上差分を用いると乱流の直接計算が安定に実行できることが報告されており[29]、ＬＥＳ計算にも利用可能と考えられる。

７．３ Compact 差分スキーム

差分法による微分係数の近似には、前節で紹介した通常の差分近似以外にも、陰的な Compact差分スキームが知られている[30],[31]。等間隔格子(格子幅 Δx)の場合、１階微係数に対する Compactスキームは一般的に以下のように記述される。なお、ここでは、' は微分を意味し、また $f(x_j)$ を f_j で示す。

$$\beta f'_{j-2} + \alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} + \beta f'_{j+2}$$
$$= a \frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\Delta x} + b \frac{f_{j+2}-f_{j-2}}{4\Delta x} + c \frac{f_{j+3}-f_{j-3}}{6\Delta x} \tag{108}$$

各係数a, b, c およびα, β の間の関係は、Taylor 展開を用いて差分の精度に関連して定まる。

２次精度　$a+b+c = 1+2\alpha+2\beta$ (109)

４次精度　$a+2^2b+3^2c = 2\frac{3!}{2!}(\alpha+2^2\beta)$ (110)

６次精度　$a+2^4b+3^4c = 2\frac{5!}{4!}(\alpha+2^4\beta)$ (111)

８次精度　$a+2^6b+3^6c = 2\frac{7!}{6!}(\alpha+2^6\beta)$ (112)

１０次精度　$a+2^8b+3^8c = 2\frac{9!}{8!}(\alpha+2^8\beta)$ (113)

特に、$\beta=0,\ c=0$ の場合、三重対角形の１階微分に対する４次精度差分式の一般形が次の形で得られる。

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = (\alpha+2)\frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{3\Delta x} + (4\alpha-1)\frac{f_{j+2}-f_{j-2}}{12\Delta x} \tag{114}$$

ここで、

$\alpha=0$　　で通常の４次精度中心差分（式(93)）

$$\alpha = \frac{1}{4}$$ で４次精度 Compact スキーム (Pade スキーム)

$$\alpha = \frac{1}{3}$$ で６次精度 Compact スキーム

となる。また、式(114)で $\alpha = \dfrac{5}{14}$ とすると形式的には４次精度であるが、６次精度の $\alpha = \dfrac{1}{3}$ よりも波数的にみて精度がよいことが示されている[30]。

２階微係数に対する Compactスキームも同様にして表現できる。

$$\beta f''_{j-2} + \alpha f''_{j-1} + f''_{j} + \alpha f''_{j+1} + \beta f''_{j+2} = a\frac{f_{j+1}-2f_{j}+f_{j-1}}{\Delta x^2} + b\frac{f_{j+2}-2f_{j}+f_{j-2}}{4\Delta x^2} + c\frac{f_{j+3}-2f_{j}+f_{j-3}}{9\Delta x^2} \tag{115}$$

２次精度 $$a+b+c = 1+2\alpha+2\beta \tag{116}$$

４次精度 $$a+2^2b+3^2c = \frac{4!}{2!}(\alpha+2^2\beta) \tag{117}$$

６次精度 $$a+2^4b+3^4c = \frac{6!}{4!}(\alpha+2^4\beta) \tag{118}$$

８次精度 $$a+2^6b+3^6c = \frac{8!}{6!}(\alpha+2^6\beta) \tag{119}$$

１０次精度 $$a+2^8b+3^8c = \frac{10!}{8!}(\alpha+2^8\beta) \tag{120}$$

$\beta=0,\ c=0$ の場合、三重対角形の２階微分に対する４次精度差分式の一般形が次の形で得られる。

$$\alpha f''_{j-1} + f''_{j} + \alpha f''_{j+1} = 4(1-\alpha)\frac{f_{j+1}-2f_{j}+f_{j-1}}{3\Delta x^2} + (10\alpha-1)\frac{f_{j+2}-2f_{j+2}+f_{j-2}}{12\Delta x^2} \tag{121}$$

ここで、

$\alpha=0$ で通常の４次精度中心差分 (式(94))

$$\alpha = \frac{1}{10}$$ で４次精度 Compact スキーム (Pade スキーム)

$$\alpha = \frac{2}{11}$$ で６次精度 Compact スキーム

となる。また、式(121)で $\alpha = \dfrac{1}{4}$ とすると形式的には４次精度であるが、６次精度の $\alpha = \dfrac{2}{11}$ よりも波数的にみて精度がよいことが示されている[30]。

７.４ 離散フーリェ展開

流れ場に周期的な方向が存在する場合、離散フーリェ展開の性質を利用して微分値を高精度に求めることができる[32]。まず、離散点を次のようにとる。

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \qquad j = 0, \ldots, N-1 \tag{122}$$

上記離散点 x_j 上に複素変数 $f(x_j)$ を配置し、かつ上記区間で変数が周期的であるとき、離散フーリ係数 $\hat{f}_k$ が次式で決定される。

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\, e^{-ikx_j}, \qquad -\frac{N}{2} \leqq k \leqq \frac{N}{2}-1 \tag{123}$$

ここで i は虚数単位である。式(123)に対する逆変換は次式で与えられる。

$$f(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} \hat{f}_k\, e^{ikx_j}, \qquad j = 0, \ldots, N-1 \tag{124}$$

離散フリェ展開に関する式(123)と式(124)は次の直交関係により結び付けられている。

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{ipx_j} = \begin{cases} 1 & for \quad p=Nm, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{125}$$

あるいは

$$\frac{1}{N}\sum_{j=-N/2}^{N/2-1} e^{ipx_j} = \begin{cases} (-1)^p & for \quad p=Nm, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{126}$$

これらを用い、1階および2階の微分係数が次式で近似される。

$$f'(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} (ik)\, \hat{f}_k\, e^{ikx_j}, \qquad j = 0, \ldots, N-1 \tag{127}$$

$$f''(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} (-k^2)\, \hat{f}_k\, e^{ikx_j}, \qquad j = 0, \ldots, N-1 \tag{128}$$

微分係数算出の手順としては、格子点 x_j 上の変数値を用いて式(123)により離散フリェ係数を求めた後、式(125)あるいは式(126)を用いて微分係数が算出される。これらの手順は、高速フーリェ変換（ＦＦＴ）により経済的に実行される。

７.５　時間進行法

ＧＳ流れ場の支配方程式は発展方程式であるので、空間的な離散化と同様、時間項についても離散化を行わなければならない。次の時間発展方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = S(f) \tag{129}$$

式(129)の陽的な離散化手法としては、通常次のものが用いられる。

Euler 陽解法（１次精度）

$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t} = S(f^{n}) \tag{130}$$

Adams-Bashforth 法（２次精度）　$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=\frac{3}{2}S(f^{n})-\frac{1}{2}S(f^{n-1}) \tag{131}$$

また、陰的な離散化手法としては、次のものが知られている。

Euler 陰解法（１次精度）　$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=S(f^{n+1}) \tag{132}$$

Crank-Nicolson 法（２次精度）　$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=\frac{1}{2}[\ S(f^{n+1})+S(f^{n})\ ] \tag{133}$$

ここで、上付き添え字は時間ステップをあらわし、Δt は時間きざみ幅を示す。これら時間進行法に関する時間刻み幅の制限は、陰解法は無条件安定、陽解法では上限値が存在する。ところで、流体解析の運動方程式は線形項と非線形項が混合しており、次式の形をとる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=L(f)+N(f) \tag{134}$$

上式中、$L(f)$ は線形項、$N(f)$ は非線形項を表し、f を速度成分と考えるとそれぞれ粘性項と対流項に対応する。非線形項を陰的に取り扱うことは経済的に非現実的でありまた収束の保証もないのでこれを除外する。さらに各項の誤差精度のバランスを考えると次の時間発展式が考えられる。

陽解法（１次精度）

$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=L(f^{n})+N(f^{n}) \tag{135}$$

陰陽混合法（１次精度）

$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=L(f^{n+1})+N(f^{n}) \tag{136}$$

陽解法（２次精度）

$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=\frac{3}{2}[L(f^{n})+N(f^{n})]-\frac{1}{2}[L(f^{n-1})+N(f^{n-1})] \tag{137}$$

陰陽混合法（２次精度）

$$\frac{f^{n+1}-f^{n}}{\Delta t}=\frac{1}{2}[L(f^{n+1})+L(f^{n})]+\frac{3}{2}N(f^{n})-\frac{1}{2}N(f^{n-1}) \tag{138}$$

ＬＥＳの乱流解析では通常、速度場の時間的な変動に関しては基礎式を直接解くので、十分に細かい時間刻み幅を用いる場合が多い。よって式(135)、式(136)の１次精度スキームでも計算可能ではあるが、できれば２次精度以上のスキームを用いて時間的な精度も確保したい。陽解法に関する時間刻みの制限は、通常対流項に関するものが支配的であり、クーラン数条件によって定められる。この場合、時間ステップあたりの計算量は陽解法が陰解法よりも少なくまたプログラミングも容易なので、クーラン数条件がそれほど厳しくない場合には陽解法（式(135),(137)）が有利である。しかし、壁面上で No-slip条件を課すＬＥＳ計算では、粘性底層内まで十分に格子を配置する必要があり、粘性項による時間刻みの制限が無視できなくなる。このときには、粘性項に対する陰解法の導入（式(136),(138)）が必須となる。

７.６　速度－圧力連成アルゴリズム

非圧縮流体の数値計算では、連続の式に時間微分項が存在せず、また運動方程式中に圧力の勾配項が存在するので、連続の式を満足する速度場を求めると同時に圧力も計算する速度－圧力連成アルゴリズムが必要

となる。このアルゴリズムに関して、基本的にはＬＥＳについても他の流れ場解析手法と同じものが適用可能と考えられる。代表的なものとして、ＭＡＣ[33]法およびＳＩＭＰＬＥ法[33]、[34] が知られている。

ＭＡＣ法およびＳＩＭＰＬＥ法の双方とも、基本的なアルゴリズムでは連続の式と運動方程式中の圧力項との整合性をとるためにスタガード格子系が採用されている。これは、直交座標系たとえばデカルト座標や円筒座標へはそのまま簡単に適用できる。これまでのＬＥＳの適用例を見るとそのほとんどが直交座標系に限られている。これは高次精度の３次元流体解析を一般座標系で行うには計算機能力がまだ十分でないことによる。しかし、ＬＥＳの応用を考えるとき一般座標系の導入は今後必要なステップである。アンサンブル平均乱流モデルによる解析において一般座標系は既に広く適用されており、基本的な解析手法は確立されている。速度ベクトルと応力テンソル量の成分を格子の座標系（式(82)）で定義するか絶対座標系（式(83)）によるかで一般座標系での離散化法は２つに分類できる。前者は基礎式は複雑となるが、スタガード格子系をそのまま適用できる。ただし、式(82)の反変（あるいは共変）成分による表示は準保存形式であり、座標の曲率による疑似体積力の精度が格子の滑らかさに大きく反映されるので、格子生成に特に注意が必要となる。後者は離散化式が一般座標系でも保存形式で得られる利点を持ち、基礎式も前者よりは簡単になるが、スタガード格子系への適用は困難である。最近になって、後者の一般座標系に適用可能なコロケート格子系によるＳＩＭＰＬＥアルゴリズム[35]が提案されている。

ＭＡＣ法は、運動方程式に連続の式の条件を加えて得られる圧力のポアソン方程式を作り、連続の式と運動方程式を解く代わりに、運動方程式と圧力のポアソン式とを解いて流れ場を求めるアルゴリズムである。運動方程式の時間進行については、陽的、陰的双方の時間進行法によるアルゴリズムの構築が可能であり、ＬＥＳ計算での標準的な解法として用いられている。一方のＳＩＭＰＬＥ法は、適当な初期条件より運動方程式を解いた後、運動方程式と連続の式から作られる速度と圧力の補正式を用いて連続の式を満たさせながら計算を進める手法で、基本的に陰解法である。このときアルゴリズムの数値安定性を保証するため、離散式の係数マトリックスの優対角性を確保する必要がある。アンサンブル平均乱流モデルによる乱流解析では、運動方程式の対流項に風上差分を導入してこの条件を満たさせている。しかしＬＥＳによる乱流解析に風上差分を併用すると解の信頼性が失われる危険がある。

７．７　初期・境界条件

ＬＥＳ計算の初期条件としては空間的に乱流構造を含む流れ場が望ましいが一般的にこれを与えることは困難である。よって適当な平均流れ場に一様乱数を加えて用いる場合が多い。最終的に統計的定常な流れ場が必要な複雑形状の流れ場では、アンサンブル平均モデルにより平均流れ場を計算して与えると経済的であろう。また、初期条件として平均速度場に加える乱数の強度が十分でないとＧＳのレイノルズ応力が不十分となり、乱れが減衰して層流化したような解となってしまう。

境界条件としては流入、流出部および壁面等の境界条件を考えなければならない。ＬＥＳでは非定常計算によりＧＳ量を算出するので、流入・流出部についても瞬時ごとのＧＳ値を与えなければならない。対象とする流れ場が近似的に周期的と考えられる場合、これは容易に達成される。流入部が十分発達した乱流と仮定することができ、また多少の計算量の増加が許される場合には、周期的条件により発達した乱流を計算する部分を補助的に設け、この部分で作られる速度場を流入部の値として各時間ステップごとに与えることも考えられる[36]。流出部の境界条件の設定には注意を要する。流出部の境界条件が適当でないとその誤差が流れ場全体に広がり、解の発散へとつながりやすい。流出部境界条件としては、自由流出条件、対流流出条件等の設定が可能であるが、いずれも連続の式との整合性に注意しなければならない。流入あるいは流出部の誤差が原因で解が発散してしまう場合、流入および流出部と注目する部分との距離を十分にとり、流入部、流出部近傍の領域のみに風上差分を用いて解を安定させることも考えられる。

差分格子が十分に取れる場合には壁面境界条件に no-slip条件を採用することが望ましい。しかし現実的

な乱流場のＬＥＳ計算を考える場合、計算機の容量や計算時間の制約により no-slip条件を適用し難い場合も多いと考えられる。この場合、経験的な法則を壁面境界条件に導入することはＬＥＳの応用計算において有効であると考えられる。乱流の数値計算における壁面近傍の平均速度分布としては、壁法則や Spalding 則が仮定されている[37]。

壁法則

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & (y^+ \leqq y^+_c) \\ u^+ = \dfrac{1}{\kappa} \log y^+ + B & (y^+_c < y^+) \end{cases} \tag{139}$$

Spalding 則

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B}\left[e^{\kappa u^+} - 1 - (\kappa u^+) - \frac{(\kappa u^+)^2}{2} - \frac{(\kappa u^+)^3}{6} \right] \tag{140}$$

ここで、 $\kappa = 0.4$ 、$B = 5.5$ 、$y^+_c = 11.635$ である。壁面近傍での速度変動に関連するモデルとしては、Schumann[3]、森西･小林[38] のように壁面摩擦応力の変動値と速度の変動値とが比例するとする近似、また Piomelli[39] らによる壁面乱流構造のモデルを導入したもの等が提案されている。

参考文献

[1] Tennekes, H. & Lumley, J.L., "A FIRST COURSE IN TURBULENCE", The MIT press(1972).
[2] Leonard, A., "ENERGY CASCADE IN LARGE-EDDY SIMULATIONS OF TURBULENT FLUID FLOWS", Adv. Geophys., 18A, pp.238-248(1974).
[3] Schumann, U., "Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli", J. Comput. Phys. 18, pp.376-404(1975).
[4] Germano, M., "Diffrrential filters for the large eddy numerical simulation of turbulent flows", Phys. Fluids 29(6), pp.1755-1757(1986a).
[5] Germano, M., "Diffrrential filters of elliptic type", Phys. Fluids 29(6), pp.1757-1758(1986b).
[6] 水尾勝, "乱流の直接シミュレーション法に関する研究", 東京大学修士論文 (1991).
[7] Speziale, C.G., "Galilean invariance of subgrid-scale stress models in the large-eddy simulation of turbulence", J. Fluid Mech. 156, pp.55-62(1985).
[8] Deardorff, J.W., "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number", J. Fluid Mech. 41, part 2, pp.453-480(1970).
[9] Smagorinsky, J., "General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment". Monthly Weather Review 91, pp.99-164(1963).
[10] Van Driest, E.R., "On Turbulent Flow Near a Wall", J. Aero. Sci. 23 (1956).
[11] Bardina, J., Ferziger, J.H. & Reynolds, W.C., "Improved Subgrid Scale Models for Large Eddy Simulation", AIAA Paper No. 80-1357(1980).
[12] Clark, R.A., Ferziger, J.H. & Reynolds, W.C., "Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow", J. Fluid Mech. 91, part 1, pp.1-16(1979).
[13] Yoshizawa, A., "Subgrid-scale modeling with a variable length scale", Phys. Fluids A1(7), pp.1293-1295 (1989).
[14] Yoshizawa, A., "Eddy-viscosity-type subgrid-scale model with a vaiable Smagorinsky coefficient and its relationship with the one-equation model in large eddy simulation", Phys. Fluids A3(8), pp.2007-2009(1991).

[15] 森西, 小林, "Cs を変数とするスマゴリンスキーモデルの最適化", 機論(B編),57巻540号, pp.2602-2605(1991).
[16] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. & Cabot, W.H., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", Phys. Fluids A3(7), pp.1760-1765(1991).
[17] Lilly, D.K., "A proposed modification of the Germano subgrid-scale eddy viscosity model", Phys. Fluids A4(3), pp.663-635(1992).
[18] Yoshizawa, A. & Horiuti, K., "A Statistically-Derived Subgrid-scale Kinetic Energy Model for the Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows", J. Phys. Soc. Jpn., Vol.54, No.8, pp.2834-2839(1985).
[19] Demirdzic, I., Gosman, A.D., Issa, R.I. & Peric, M., "A CALCULATION PROCEDURE FOR TURBULENT FLOW IN COMPLEX GEOMETRIES", Computers & Fluids 15, No. 3, pp251-273(1987).
[20] Flugge, W., "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Springer-Verlag (1972), (後藤学訳, "テンソル解析と連続体力学", ブレイン図書).
[21] Aris, R., "Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics", Dover Publications, Inc. (1962).
[22] Arakawa, A., "Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow. Part I", J. Comput. Phys. 1, pp.119-143(1966).
[23] Mansour, M.N., Moin, P., Reynolds, W.C. & Ferziger, J.H., "Improved Models for Large Eddy Simulations of Turbulence", Turbulent Shear Flows I, Springer, pp.386-401(1979).
[24] Williams, G.P., "Numerical investigation of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow", J. Fluid Mech. 37, part 4, pp.727-750(1968).
[25] Piacsek, S.A. & Williams, G.P., "Conservation Properties of Convection Difference Schemes", J. Comput. Phys. 6, pp.392-405(1970).
[26] Horiuti, K., "Anisotropic Representation of the Reynolds Stress in Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow", Proc. Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics-NAGOYA, p233-238(1989).
[27] Kawamura, T. & Kuwahara, K., "Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness", AIAA Paper No. 80-1357(1984).
[28] Leonard, B.P., "A STABLE AND ACCURATE CONVECTIVE MODELLING PROCEDURE BASED ON QUADRATIC UPSTREAM INTERPOLATION", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 19, pp59-98(1979).
[29] Rai, M.M. & Moin, P., "Direct Simulation of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes", J. Comput. Phys. 96, pp.15-53(1991).
[30] Lele, S.K., "Compact finite difference scheme with spectral-like resolution", J. Comput. Phys., submitted.
[31] Buell, J.C., "A Hybrid Numerical Method for Three-Dimensional Spatially-Developing Free-Shear Flows", J. Comput. Phys. 95, pp.313-338(1991).
[32] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. & Zang, S.A., "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer(1988).
[33] 棚橋隆彦, "非圧縮粘性流体の過渡流れ (1),(2)", 機械の研究 37-3, pp383-388(1985), 機械の研究 37-4, pp501-506(1985).
[34] Patanker, S.V., "NUMERICAL HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW", McGraw-Hill, pp113-137(1980).
[35] Peric, M., "A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts", PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, Univ. of London (1985).
[36] Morinishi, Y. & Kobayashi, T., "Large Eddy Simulation of Backward Facing Step Flow", Engineering Turbulence Modelling and Experiments, edited by W. Rodi and N. Ganic, pp.279-286(Elsevier, New York, 1990).
[37] Spalding, D.B., "A Single Formula for the "Law of the Wall" ", Trans. ASME, J. Appl. Mech. 28, pp.455-458(1961).
[38] 森西, 小林, "人工的壁面境界条件を用いたＬＥＳの構成およびその評価", 機論(B編),57巻540号, pp.2595-2601(1991).
[39] Piomelli, U., Ferziger, J.H. & Moin, P., "New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows", Phys. Fluids A1(6),pp.1061-1068(1989).