球体に作用する波力

Wave Forces Acting on a Sphere

岩田　好一朗
Koichiro IWATA

1．緒言

近年，沿岸海域の多目的利用や海洋性レクリェーションが強調されるにともない，沿岸海域構造物に対して，（ｉ）“波をいかに効率よく低減させるか”という波浪制御の面からの要請以外に，（ii）“波をいかに上手に利用できるか”という波浪利用面からの要請，さらに（iii）海水交換性に富み，海にやさしいこと，（iv）親水性に富んでいること，（ｖ）景観面で優れていることなどの要請もされるようになってきた．このため，このような要請に答えるために，今後，沿岸海域構造物の多種多様化がかなり進むものと予想される．

本小論では，海域構造物の一形式である球状構造物の中核をなす球体を取り挙げ，球体に作用する波力について記述することとする．球体に作用する波力については，本研修会で今まで一度も講義されていないが，球体は，(1)等方性を持つ水圧に対して強度の面で最も有利であり，海中備蓄タンクのような構造物として利点が大きい，(2)浮遊式構造物の係留索に作用する衝撃力の緩和用の中間ブイや動揺低減用ブイとして使用されていること，(3)捨石傾堤や基礎捨石マウンドの被覆捨石の耐波安定重量は，捨石と同じ重量の球体に置換して決定することがあることなど，工学面でかなり重要な役割を持っている．さらに，今後の沿岸域のウォーターフロントの開発にともない，球体を使う構造物の構築も予想される．

本論では，没水状態にある球体に作用する波力の発生機構，波力の特性，波力の算定法に関する現時点での知見と問題点について，筆者らの研究成果を中心にして[1)~6)]，以下記述していくこととする．

2．作用波力

作用波力は，その発生機構から，回折波力，慣性力，抗力と揚力に分類できる．回折波力は，球体の直径が入射波長に比べて大きくて，波の変形が無視できない場合に支配的な波力であって，水の粘性や渦の剝離による影響はほとんどなく，したがってポテンシャル理論で精度高く推算可能であある．一方，球体の直径が入射波長に比べて極めて小さく，波の変形が無視できる場合は，慣性力，抗力と揚力が支配的な波力の成分となる．慣性力はポテンシャル流でも存在する力であるため，ポテンシャル理論による取り扱いは可能であるが，実際には渦の形成，渦の剝離などの影響により，球体周りの流況は，ポテンシャル流とは異なるため，その特性は水理実験で明らかにしなければならない．抗力は，球表面での形成渦，球の背面での流線の剝離，渦の吐き出しなどにより，球の前後で圧力が非対称になるために作用する波力で，ポテンシャル流では存在しない力である．このため，水理実験などによりその特性を明らかにする必要がある．揚力は，流線の剝離，渦の吐き出しなどによる流れと直角方向の圧力の非対称性により作用する波力であり，抗力同様，水理実験でその特性を明らかにしなければならない．

3．ポテンシャル理論

3．1　無限流体域の一様流れに設置された場合

無限流体域の一様流中に固定された球体に作用する流体力は理論的に計算できる[7]．図－1に示すように，直径D（半径をaとする；$D=2a$）の不透過性の球体が流体中に固定され，球体の中心が座標軸の原点と一致するものとする．一様流速Uを持つ流れの方向がx軸と一致するものとする．また，直交座標系として（x，y，z），極座標系として（r，θ，ϕ）を採用する．なお，y軸はx軸と直交する水平軸，z軸は鉛直軸，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，θは天頂角，ϕは経角である．

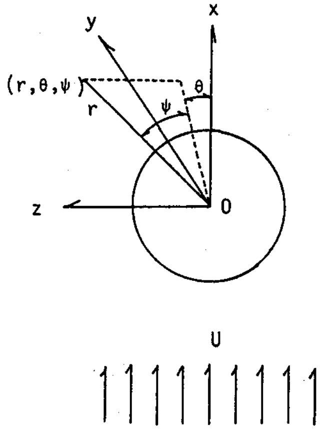
極座標系表示によるラプラス方程式は式(1)となる．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)=0 \quad (1)$$

この式(1)を満たし，球体の表面での運動学的条件（$\partial\Phi/\partial r=0$ at $r=D/2$），と遠方条件（$r\rightarrow\infty$につれて流速がUになる）を満たす流れの速度ポテンシャル$\Phi(r,\theta,\phi)$は，次式で与えられる．

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\Phi(r,\theta)=U\left(r+\frac{D^3}{16r^2}\right)\cos\theta \quad (2)$$

すなわち，ϕに依存しない．式(2)の第1項は，球体が存在しないときの一様流速Uの速度ポテンシャルであり，第2項は球が存在するために生じる項で，球の中心に湧き出し点を持つ2重湧き出しによる流れの速度ポテンシャルに対応している．



図－1　座標系の説明

球体表面の流速$V(\theta)$は，$\Phi(r,\theta)$の空間微分より，次式で与えられる．

$$V(\theta)_{r=D/2}=\left|\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right|_{r=D/2}=\frac{3}{2}U\sin\theta \quad (3)$$

また，球体表面の圧力$P_{r=D/2}$は，非定常ベルヌーイ方程式により与えられ，質量力を無視すれば，

$$P_{r=D/2}=-\rho\frac{\partial U}{\partial t}\left[\left(r+\frac{D^3}{16r^2}\right)_{r=D/2}\right]\cos\theta-\frac{\rho}{2}[V(\theta)_{r=D/2}]^2+\rho F(t)$$

$$=-\rho\left(\frac{3}{4}D\cos\theta\right)\frac{\partial U}{\partial t}-\rho\left(\frac{9}{8}U^2\sin^2\theta\right)+\rho F(t) \quad (4)$$

となる．ここで，ρは流体の密度，$F(t)$はベルヌーイ定数である．式(4)を，球体表面全体にわたって積分すれば，球体に作用する流体力が求まる．いま，球体に作用する流体力のx方向，y方向とz方向の成分を，それぞれF_X，F_Y，F_Zとすると，F_X，F_YとF_Zは次式で定義される．

$$F_X=-\iint_S P_{r=D/2}n_X dS,\ F_Y=-\iint_S P_{r=D/2}n_Y dS,\ F_Z=-\iint_S P_{r=D/2}n_Z dS \quad (5)$$

ここで，dSは面素片，n_X，n_Y，n_Zはそれぞれ面素片dSの法線のx，y，z方向余弦である．$dS=(D/2)^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$，$n_X=(\cos\theta)$，$n_Y=(\sin\theta\sin\phi)$，$n_Z=(\sin\theta\cos\phi)$となるので，これらを，式(4)ともども式(5)に代入し，$\theta=0\sim\pi$，$\phi=0\sim2\pi$にわたって積分すると，

$$F_X=\rho\left(\frac{1}{4}\pi D^3\right)\frac{\partial U}{\partial t},\qquad F_Y=0,\qquad F_Z=0 \quad (6)$$

となる．すなわち，F_Y と F_Z は共に0となり力が作用しないことが判明する．また，流れ方向の F_X については，Uが定常であれば，$\partial U/\partial t=0$ となり，一様定常流中に固定された球体に流体力が作用しないことになり，有名なダランベールのパラドックスが出現する．一方，流れが非定常の場合には，$\partial U/\partial t \neq 0$ なので，F_X は0にならず，x 方向に力が作用することになる．式(6)によれば，F_X は，

$$F_X=\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)M\right\}\frac{\partial U}{\partial t},\quad M=\rho\left(\frac{1}{6}\pi D^3\right) \tag{7}$$

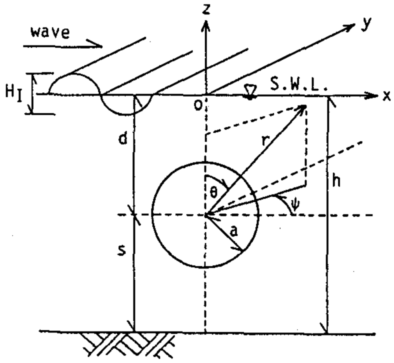
に書き直すことができる．Mは，球全体を流体で置き換えた質量であり，式(7)は，ニュートンの第2法則と類似の表示式である．$(1+1/2)=3/2$ は流体で置き換えた質量Mを定数倍する係数に相当し，慣性力係数という．この慣性力係数（本論では C_M と記述する）は，一様流Uの圧力勾配による係数1と物体と流れの干渉により生じる係数，すなわち付加質量係数と呼ばれる値1/2の和の1.5で与えられる．なお，不透過性の球体が静水中を加速運動する場合は，慣性力係数は0.5となる．

3．2　波動場に設置された場合

波動場に没水状態で固定された球体に作用する波力を理論的に取り扱った研究はあるが[8), 9)]，それらはいずれも，境界条件を完全に満たしていない近似的な取り扱いに終始しており，線形理論の範囲内でも，厳密解は誘導されていなく，今後に課された大きな研究課題となっている．筆者らは[3), 5)]，ハイブリッド法と湧き出し分布法を使って作用波力を計算し，その特性を明らかにしたが，以下湧き出し分布法による計算の概略とその結果について記述する．

(a) 速度ポテンシャル表示

流体は，非圧縮で非粘性とし，波動は非回転運動とする．図－2に示すように，一定水深 h の水域に，直径Dの球体が水中に固定されており，球体の中心位置は水表面から d の距離にあるものとする．すなわち，$(x, y, z)=(0, 0, -d)$ が球体の中心位置とする．ここで，(x, y, z) は直角座標系とし，x 軸は入射波の進行方向に平行な水平軸，y 軸は入射波の進行方向と直行する水平軸，z 軸は静水面を原点とし鉛直上向きを正とする鉛直軸である．



図－2　記号と座標系

いま，この水域に波高H，角周波数$\sigma(=2\pi/T$，Tは波の周期）の微小振幅波がxの負の方向から入射してくるものとする．球体の存在により入射波が変形するため，波と球体の共存場の速度ポテンシャルΦは入射波の速度ポテンシャル $\Phi_I(=\phi_I e^{-i\sigma t})$ と回折波の速度ポテンシャル $\Phi_D(=\phi_D e^{-i\sigma t})$ の和として与えられる．なお，座標系として極座標 (r, θ, ψ) を採用するものとする．但し，原点を球の中心にとる．

$$\Phi=\Phi_I+\Phi_D=\{\phi_I(r,\theta,\psi)+\phi_D(r,\theta,\psi)\}e^{-i\sigma t} \tag{8}$$

ここで，$i=\sqrt{-1}$ である．$\phi_I(r, \theta, \psi)$ は次式で与えられるので，後は $\phi_D(r, \theta, \psi)$ を決定すればよいことになる．

$$\phi_I=\frac{gH}{2\sigma}\frac{\cosh k(s+r\cos\theta)}{\cosh kh}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m i^m J_m(kr\sin\theta)\cos m\psi \tag{9}$$

ここで，Hは波高，gは重力加速度，sは水底からの球体中心までの距離，ϵ_m はNeumann数（$m=0$ の

時は $\epsilon_m = 1$, $m \neq 0$ の時は $\epsilon_m = 2$) である. ϕ_D は, 球体表面上の点 (R, Θ, Ψ) に配置された強さ $f(R, \Theta, \Psi)$ の湧き出しの速度ポテンシャルの和として与えられる.

$$\phi_D(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi}\int_S f(R, \Theta, \Psi)\, G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi)\, dS \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}
G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi) &= q\cosh k(s + r\cos\theta)\cosh k(s + R\cos\Theta)\, H_0^{(1)}(kQ) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos k_n(s + r\cos\theta)\cos k_n(s + R\cos\Theta)\, K_0(k_n Q) \\
Q &= \sqrt{(r\sin\theta)^2 + (R\sin\Theta)^2 - 2rR\sin\theta\sin\Theta\cos(\phi - \Psi)} \\
q &= \frac{2\pi i(k^2 - \sigma^4/g^2)}{(k^2 - \sigma^4/g^2)h + \sigma^2/g}, \quad q_n = \frac{4(k_n^2 + \sigma^4/g^2)}{(k_n^2 + \sigma^4/g^2)h - \sigma^2/g}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ここに, $G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi)$ は Green 関数[10] であり, $H_0^{(1)}$ と K_0 はそれぞれ 0 次の第 1 種 Hankel 関数と第 2 種変形 Bessel 関数である. また, g は重力加速度, k と k_n は波数で, 次式を満たす固有値である.

$$\sigma^2/g = k\tanh kh = -k_n \tan k_n h \tag{12}$$

Green 関数は, 連続式, 自由表面と底面, および無限遠方の境界条件を満たしているので, 後は球体表面での不透過条件を満たすように湧き出し分布関数 $f(R, \Theta, \Psi)$ を決めるとよい. すなわち,

$$\frac{\partial}{\partial r}(\phi_I + \phi_D) = 0 \qquad at \quad r = D/2 \tag{13}$$

(b) 湧き出し分布関数 f の決定

Green関数 $G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi)$ は $Q = 0$ で特異点を持つため, 式(10)と式(11)を式(14)に代入して, 特異点周りの積分を先に行うと, 次式となる.

$$-\frac{1}{2}f(D/2, \theta, \phi) + \frac{1}{4\pi}\int_S f(D/2, \Theta, \Psi)\frac{\partial G(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Psi)}{\partial r}dS(D/2, \Theta, \Psi) = -\frac{\partial \phi_I}{\partial r} \quad at\ r = D/2 \tag{14}$$

球体は軸対称性物体なので, 湧き出し分布関数 f はつぎのようにフーリエ級数展開される.

$$f(D/2, \Theta, \Psi) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}\cos m\Psi \tag{15}$$

ここで, $f^{(m)}$ は f の m 次のフーリエ係数である。また, Green 関数も ($\phi - \Psi$) の対称性を考慮すると, 次のように展開できる.

$$\begin{aligned}
&G(r, \theta, \phi, D/2, \Theta, \Psi) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\left\{q\cosh k(s + r\cos\theta)\cosh k(s + a\cos\Theta)\cdot\begin{bmatrix}H_m^{(1)}(kr\sin\theta)J_m(ka\sin\Theta) \\ H_m^{(1)}(ka\sin\Theta)J_m(kr\sin\theta)\end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty}q_n\right. \\
&\left.\times\cos k_n(s + r\cos\theta)\cos k_n(s + a\cos\Theta)\cdot\begin{bmatrix}K_m(k_n r\sin\theta)I_m(k_n a\sin\Theta) \\ K_m(k_n a\sin\Theta)I_m(k_n r\sin\theta)\end{bmatrix}\right\}\cos m(\phi - \Psi)
\end{aligned} \tag{16}$$

ここに, $H_m^{(1)}$ は m 次の第 1 種 Hankel 関数, J_m は Bessel 関数, K_m は第 2 種変形 Bessel 関数, I_m は第 1 種変形 Bessel 関数, ϵ_m は Neumann 数, 添字 m は m 次の量を示す. また [ ] 内の値については, $|r\sin\theta| > |a\sin\Theta|$ のときは上側の値を, $|r\sin\theta| < |a\sin\Theta|$ のときは下側の値を採用する. $|r\sin\theta| = |a\sin\Theta|$ のときは, (i) 上段と下段の値の平均値を採用するか, あるいは, (ii) $\partial G/\partial r$ の式として, 式(11)を直接数値的にフーリエ級数展開した次式を採用して計算をすすめる.

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \sum_{m=0}^{\infty} G^{(m)}(r, \theta, \Theta)\cos m(\phi - \Psi) \tag{17}$$

式(17)と $dS=a^2\sin\Theta d\Theta d\Psi$ を式(15)に代入して，球体全表面にわたって積分すると，各フーリエ成分ごとに θ だけに依存する方程式が求まる．このため，球全表面を $x-y$ 平面に平行な面でリング状に分割すれば，各リングに対して離散化された方程式が得られ，これらを解くと湧き出し分布関数が決定される．湧き出し分布関数 f が求まると，ϕ_D は式(11)から求まる．したがって，非定常ベルヌーイ式から決定される圧力 $P(D/2,\ \Theta,\ \Psi\ ;\ t)$ を使って，次式により波進行方向の波力 F_X と鉛直方向の波力 F_Z を計算することができる．

$$\left.\begin{aligned} F_X &= -\rho\int\int_S P(a,\ \Theta,\ \Psi\ ;\ t)\, n_X dS = -Re\left\{i\rho\sigma\int\int_S(\phi_I+\phi_D)\, n_X dS e^{-i\sigma t}\right\} \\ F_Z &= -\rho\int\int_S P(a,\ \Theta,\ \Psi\ ;\ t)\, n_Z dS = -Re\left\{i\rho\sigma\int\int_S(\phi_I+\phi_D)\, n_Z dS e^{-i\sigma t}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

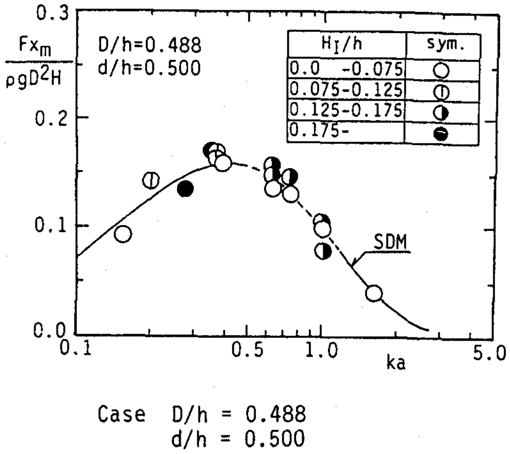
ここで，$Re\{\ \}$ は $\{\ \}$ の実数部，n_X と n_Z はそれぞれ，面素片 $dS(=a^2\sin\Theta d\Theta d\Psi)$ の法線の x と z 方向の方向余弦である．なお，圧力 $P(D/2,\ \Theta,\ \Psi\ ;\ t)$ は y に対して同一の値となるので，y 方向の波力 F_Y は 0 となり，波力は作用しないことになる．

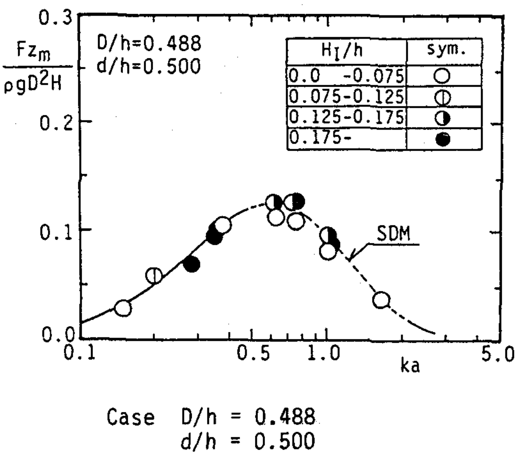
(C) 波力の特性

図－3 は，無次元化された x 方向の最大波力 $F_{Xm}/\rho gD^2H$ と z 方向の最大波力 $F_{Zm}/\rho gD^2H$ と ka の関係を示した一例である．なお，図中の計算値は，球体表面の分割幅を $\pi a/40$，減衰定常数の項数については15項まで採用して求められたものである．同図にも示されているように，計算値は実験結果とよく一致しており，本論の手法の妥当性が確認される．さらに，本計算手法は微小振幅波理論に基づいているが，没水球体上で砕ける直前の有限振幅波に対して適用しても，充分な精度が得られることが認められる[11]．

つぎに，次式で定義される有効慣性力係数 C_{IX}，C_{IZ} の特性について述べる．

$$C_{IX}=F_{Xm}\Big/\left\{\rho\pi D^3\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big/6\right\},\quad C_{IZ}=F_{Zm}\Big/\left\{\rho\pi D^3\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\Big/6\right\} \tag{19}$$





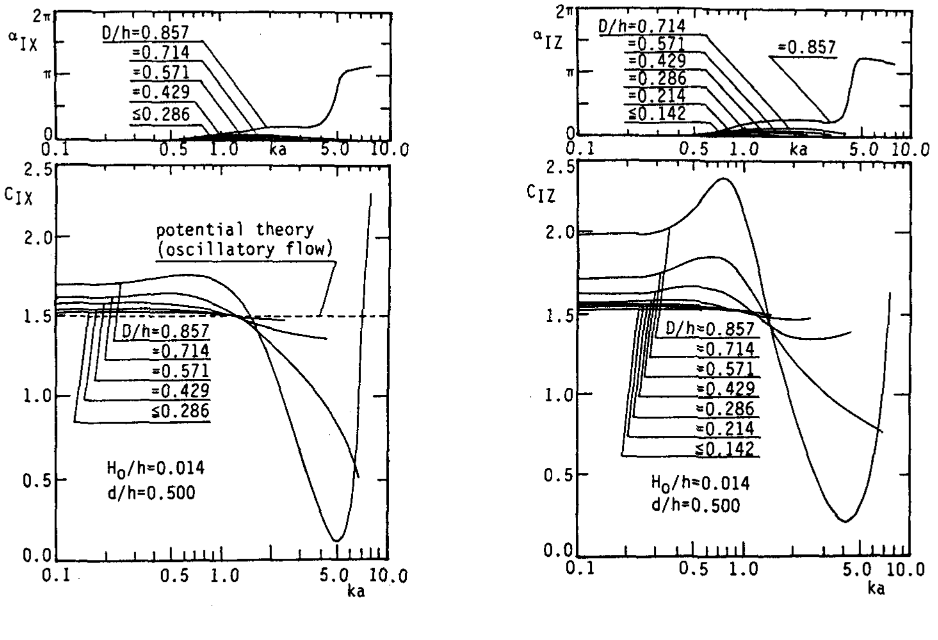
図－3 $F_{Xm}/\rho gD^2H$ と $F_{Zm}/\rho gD^2H$ と ka の関係（実験値と計算値の比較）

ここで，u と w はそれぞれ球の中心の位置における水粒子速度の x と z 方向成分である．x 方向の有効慣性力係数 C_{IX} と z 方向の有効性慣性力係数 C_{IZ} は，既述した一様ポテンシャル流における値1.5のような一定値にならず，ka，D/h と d/h により変化する（図－4参照）．また，$d/h = 0.5$ の場合を示した図－4からも認められるように，C_{IX} と C_{IZ} は D/h により変化するが，その変化の度合は C_{IX} より C_{IZ} の方が大きい．これは，水粒子の鉛直方向の流速と加速度が水平方向のそれらよりも水深方向に大きく変化するためである．さらに，$ka < 1$ のように，球体の直径 $(2a)$ に比して波長が大きくなる場合，球体の直径・水深比 D/h が $D/h = 0.429$，0.571，0.714 と大きくなり，球体が自由水面と水底に接近するにともない，C_{IX} と C_{IZ} は1.5より順次大きくなり，図－4に示す $D/h = 0.714$ の場合に最大で，$C_{Ix} \cong 1.65$，$C_{Iz} \cong 1.85$ となる．このように，自由表面と水底の2つの境界が存在する水域に球体が設置される場合の有効慣性力係数 C_{IX} と C_{IZ} は，境界のない無限水域における非定常な一様ポテンシャル流れにおける値の1.5とは異なるので注意しなければならない．

(d) 回折波理論の適用範囲

球体の直径 (D) が入射波長 (L) に比して小さくなると，球体の表面に渦が形成されたり，形成された渦が剥離したりするために，流体の粘性や渦の効果を考慮していない上述のポテンシャル理論では，作用波力を正確に評価できなくなる．鉛直円柱の場合には，$D/L < 0.2$ の場合には，回折波理論を適用できないことが指摘されている[12]．このため，没水球体の場合についても，回折波理論の適用範囲を明確にしておく必要がある．

筆者ら[3]は，回折波力係数† の大きさと，全体の作用波力と入射波のみによる波力の位相差に着目し，x と z 方向波力 F_X と F_Z を下記のように表示した．



図－4　C_{IX} と C_{IZ} と ka の関係（$H/h = 0.014$ で $d/h = 0.5$ の時）

† 付加質量係数に相当する係数で，回折波力のみによる係数である．F_{DX}，F_{DZ} をそれぞれ回折波のみによる回折波力の x と z 方向成分，$\partial u/\partial t$ と $\partial w/\partial t$ をそれぞれ球体の中心点での水粒子の加速度の x 方向と z 方向成分とすると，x 方向の回折波力係数 C_{AX} と z 方向の回折波力係数 C_{AZ} は次式で定義される．

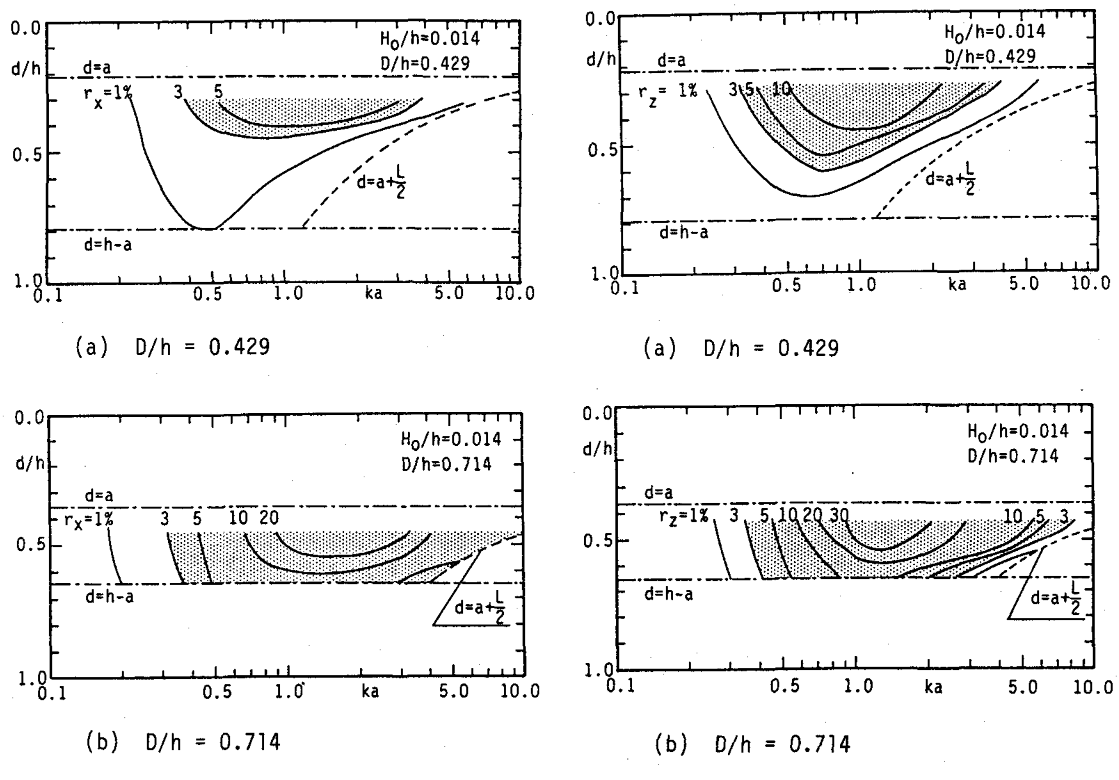
$$C_{AX} = F_{DX}/\{\rho\pi D^3 (\partial u/\partial t)/6\},\quad C_{AZ} = F_{DZ}/\{\rho\pi D^3 (\partial w/\partial t)/6\} \tag{20}$$

$$F_X = F_{Xm}\sin(\sigma t + \alpha_{IX}) = F_{IXm}\sin\sigma t + F_{Dxm}\sin(\sigma t + \alpha_{AX})$$
$$= (F_{IXm} + F_{DXm}\cos\alpha_{AX})\sin\sigma t + F_{DXm}\sin\alpha_{AX}\cos\sigma t \qquad (21)$$
$$F_Z = -F_{Zm}\sin(\sigma t + \alpha_{IZ})$$
$$= -(F_{IZm} + F_{DZm}\cos\alpha_{AZ})\cos\sigma t + F_{DZm}\sin\alpha_{AZ}\sin\sigma t \qquad (22)$$

なお，上式で，下付き添字 I は入射波，D は回折波，m は最大値，x は x 方向成分，z は z 方向成分を示し，α_A は入射波の波力に対する回折波の波力の位相差である．式(21)と式(22)の右辺第 2 項は，回折波力と入射波の波力の位相差により作用する見掛けの抗力に相当する．このため，第 1 項の係数に対する第 2 項の係数の比

$$r_X = \frac{F_{DXm}\sin\alpha_{AX}}{F_{IXm} + F_{DXm}\cos\alpha_{AX}}, \quad r_Z = \frac{F_{DZm}\sin\alpha_{AZ}}{F_{IZm} + F_{DZm}\cos\alpha_{AZ}} \qquad (23)$$

を波の回折の度合を示す指標として採用し，$r_X > 0.03$，$r_Z > 0.03$ を回折波理論を必要とする範囲として与えた．これは，$r_X > 0.03$ と $r_Z > 0.03$ は球体周りの波高の変化が入射波の波高の 5 %に相当する値であるため，工学的な見地より，この値で回折現象がほぼ無視できると考えてよいと判断したためである．このようにして決定された回折波理論による計算が必要な領域の数例が図－5 に示されている．図－5 からも認められるように，回折波理論を使って波力の算定を必要とする範囲は，球径と射波長の比 D/L だ



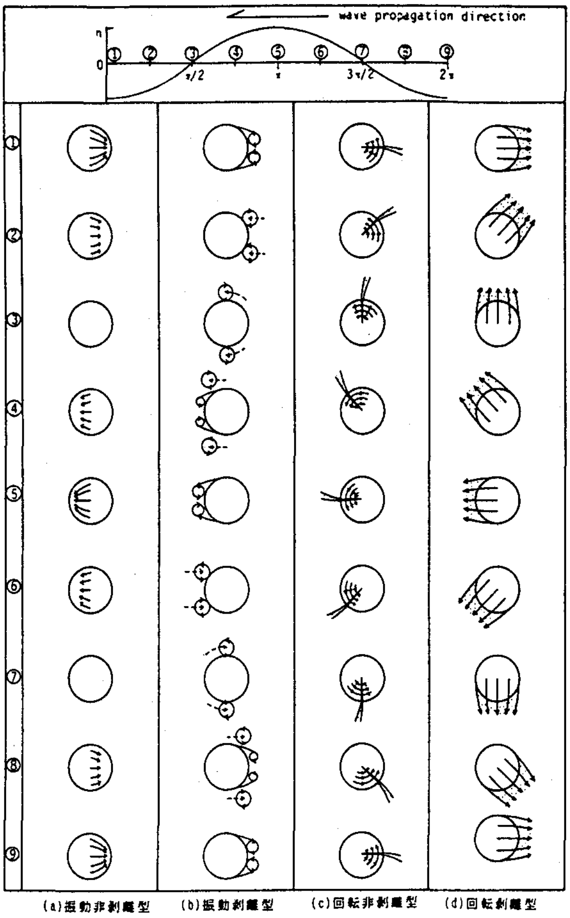
図－5 r_X，r_Z と ka，d/h の関係と回折波現論の適用領域（$H/h = 0.014$ の場合）

けでなく，球径と水深比 D/h, 相対設置位置 d/h によっても支配され，D/h が大きいほど，あるいは d/h が小さいほど広くなる．また，ka が大きい場合でも，球体の設置位置が深く，水粒子の運動が小さくなると，回折波の影響は無視できるようになる．

4．球体周りの渦形成と渦の吐き出し

4．1　球体周りの流況

球体の直径が波長に比べて充分小さくて，波力の算定に回折波理論の適用が困難な場合の球体周りの流況は，振動流中におかれた球体周りの流況[13]のように，水平方向の往復運動が卓越する“振動パターン”と静水中を球体が回転する時の流況[14]に類似する“回転パターン”とに大別される．そして，この2つのパターンは，流線の剝離の有無により，剝離型と非剝離型に分類されるために，図－6に示すような振動非剝離型，振動剝離型，回転非剝離型と回転剝離型の4つのタイプとなる．



図－6　球体周りの流況の時間変化の概念図

“振動パターン”と“回転パターン”は，水粒子速度の鉛直方向振幅 w_m と水平方向振幅 u_m の比 w_m/u_m で，次式のように分類される．

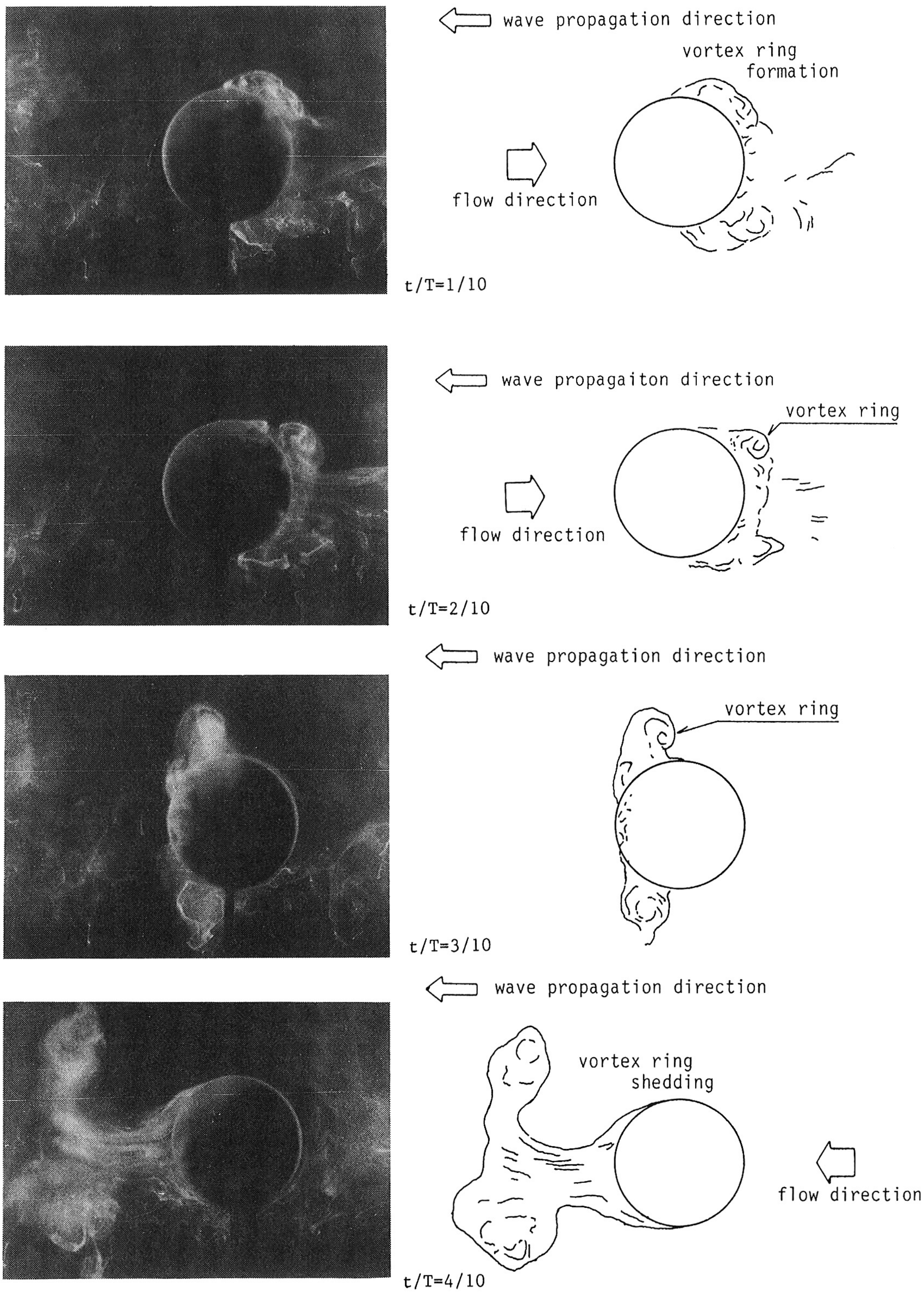
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{w_m}{u_m} > \dfrac{1}{2} \cdots\cdots \text{“回転パターン”} \\[2ex] \dfrac{w_m}{u_m} < \dfrac{1}{3} \cdots\cdots \text{“移動パターン”} \end{array}\right\} \qquad (24)$$

また，流線の剝離の有無は，レイノルズ数 $Re = u_m D/\nu$（ν は動粘性係数）と Keulegam-Carpenter 数[15]（以後 KC 数と略称する）$KC = u_m T/D$ で規定される．

$$Re \geqq 5.7 \times 10^5 \times (KC)^{-3} \qquad \text{(流線の剝離が発生する)} \qquad (25)$$

4．2　流線の剝離と渦の吐き出し

流れのパターンにより，流線の剝離と渦の吐き出しが異なる．まず，“振動パターン”について述べる．KC 数が3～4より小さい時は，球体表面に沿う流れは層流状態であり，流線の剝離はなく，Jenkins-Inman[16]の観測結果と同じである．KC 数が3～4より大きくなると，層流剪断層が形成され，これが KC 数の増加につれて成長し，KC 数が4～7の値になると，層流状態の剝離が発生するようになる[6]．KC が7～10になると，表－1にも記されているように，乱流剝離が起り，渦環（Vortex ring）が形成され，半周期ごとに吐き出されていく．図－7は，渦環の形成と吐き出しの状況を示した一例である．流れの後方で形成された渦環（図－7(a)）が，順次波の進行方向に移動し，（図－7(c)），そして球体から吐



図－7　渦環の形成と吐き出し（平面図）
($KC = 19.8,\ D/h = 0.056,\ h/gT^2 = 0.011,\ d/h = 0.889$)

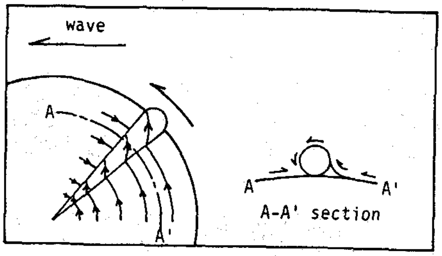
き出されていく（図－7(d)）．この渦環はむろん3次元の構造を持っているが，*U*字管内の振動流により生じる渦環[13]と似ている．*KC*数が10より大きくなると渦環が充分発達し，吐き出された渦は，すぐ消えないで，次の渦の吐き出しがあるまで残留するようになる．更に*KC*数が20～30より大きくなると，後流は発達するが，乱れは大きく不安定になり振動するようになる．

一方，“回転パターン”の場合は，表－1にも示されているように，*KC*数が3程度までは，流れが層流状態で流線の剥離は起らない．*KC*数が3～5になると，球表面に渦糸（Vortex filament）が形成される．すなわち，渦糸は，図－8に示されているように，前方からの流線が後方からの流線にもぐり込むようにして形成され，渦糸を形成する流線はらせん状になる．*KC*数が大きくなるにつれて，前方と後方の淀み点近くで渦糸は乱れ始め，*KC*数が5～7になると流線の剥離が起る．更に*KC*数が大きくなるにつれて後流域が乱れ始め，*KC*数が10以上になると，球表面で渦糸は形成されることなく，球背面で流線の剥離が生じる．剥離域は，時間とともに球表面を回転するが，剥離域は非常に乱れているので，振動剥離型のように渦環（Vortex ring）は形成されない．

このように，球体まわりの流れ，渦の形成や吐き出しの特性が判明したが，こういった特性を数値解析などの手法を使って定量的に評価していくことが今後の課題の一つである．

KC	Oscillating pattern	Rotating pattern
	no separation	no separation
3		
4		vortex filament
5	laminar separation	
7		·turbulent separation
	·turbulent separation ·developing vortex ring	·developing turbulent wake region
10		
	fully developed vortex ring	fully developed turbulent wake region

表－1　*KC*と球体周囲の流況の関係



図－8　渦系の概念図

5．モリソン式

5－1　モリソン式の適用範囲

球体の直径が入射波長に比べて小さく，上記のように，球体周囲の渦が形成されるようになると，既述のポテンシャル理論を使って作用波力を算定できなくなる．このような場合，直円柱に対してモリソンら[17]により提案された式，いわゆるモリソン式を適用して，波力の算定を行なう．没水球体の場合，球体に作用する波力ベクトル$\boldsymbol{F}$は，次式で与えられる．

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{8}C_D\rho\pi D^2\boldsymbol{V}|\boldsymbol{V}|+\frac{1}{6}C_M\rho\pi D^3\dot{\boldsymbol{V}} \qquad (26)$$

ここで，C_Dは抗力係数，C_Mは慣性力係数，$\boldsymbol{V}$は流速ベクトル，ρは流体の密度，Dは球の直径，また上つきドット（·）は時間に関する微分を示す．式(26)より，x方向（波の進行方向）の成分波力F_Xとz方向（鉛直方向）の成分波力F_Zは，それぞれ式(27)と式(28)で与えられる．

$$Fx = \frac{1}{8} C_{DX} \rho \pi D^2 u \sqrt{u^2 + w^2} + \frac{1}{6} C_{MX} \rho \pi D^3 \dot{u} \tag{27}$$

$$Fz = \frac{1}{8} C_{DZ} \rho \pi D^2 w \sqrt{u^2 + w^2} + \frac{1}{6} C_{MZ} \rho \pi D^3 \dot{w} \tag{28}$$

ここに，u と w は，それぞれ水粒子速度 V の x と z 方向成分，C_{DX} と C_{DZ} は，それぞれ x と z 方向の抗力係数，C_{MX} と C_{MZ} は，それぞれ x と z 方向の慣性力係数，$\dot{u}$ と $\dot{w}$ は，それぞれ水粒子の加速度 $\dot{V}$ の x と z 方向成分である．C_{DX}，C_{DM}，C_{MX} と C_{MZ} は先験的に与えられないので，水理実験により決定しなければならない．

モリソン式は，直立円柱に作用する波力算定式として提案されているので，三次元物体である没水球体に作用する波力の算定式として適用できない場合がある．著者ら[1)] の広範囲な実験によれば，x方向波力 Fx については，波の谷が通過するとき，球体の一部が自由表面からでる場合を除いて，没水状態であれば，設置位置に関係なくモリソン式は適用可能であった．一方，z 方向波力 F_z については，設置位置によっては，波力の時間波形が，（i）不規則になる場合，（ii）2倍周波成分が卓越する場合などがあり，モリソン式の適用範囲はかなり限定されることが判明した．この Fz へのモリソン式の適用範囲は，h/gT^2，d/h，D/h と w_mT/D により変化する．図－9は $D/h = 0.091$ の場合のモリソン式の適用範囲と適用できない範囲を示したものである．図中に示した $w_m/u_m = 1/3$ より小さい範囲ではモリソン式はほとんど適用できないことがわかる．これは，図示していない $D/h = 0.036$ と $D/h = 0.014$ の場合も同じであった．このことより，流況が“振動パターン”になるとモリソン式は適用できなることが判明する．モリソン式が適用できなく原因として，揚力の影響，境界の近接効果（Proximity effect）などがあるが，これについては後述する．

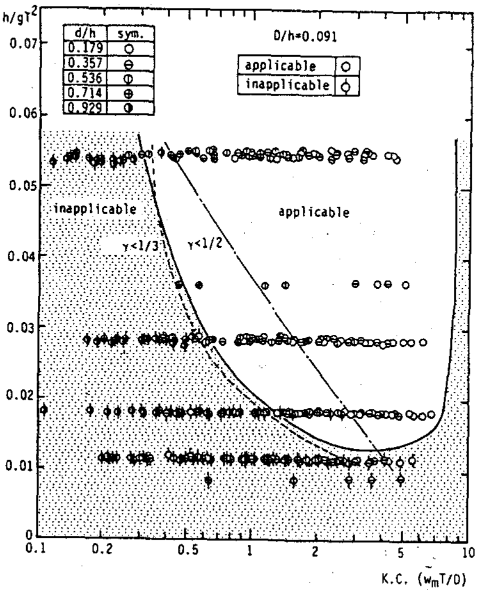
5．2　慣性力係数

C_{MX} は KC 数が10以下の範囲では，h/gT^2，d/h，D/h に関係なく KC 数の増加に伴ない少しずつ増加する．KC 数が10以上になると，d/h により C_{MX} は変化し，実験値はばらつくが，その平均値は図－10に示すような曲線で与えられる．なお，図－10は $0.014 < D/h < 0.091$，と $0.011 < h/gT^2 < 0.054$ に対して得られている．

C_{MZ} は，C_{MX} と比べて，KC 数に伴なう変化は若干大きいこと，h/gT^2 により値が変ることが特徴的であるが，値自体は C_{MX} と大差がない．C_{MZ} の実験値は多小ばらつくが，その平均値は図－11で与えられる．図－11も図－10と同様，$0.014 < D/h < 0.091$ に対するものである．

5．3　抗力係数

X方向の抗力係数 C_{DX} は，KC 数（u_mT/D），h/gT^2 により変化するものの，支配的な量は KC 数（u_mT/D）と h/gT^2 であり，図－12に示すような実験曲線となる．KC 数が20以上になると，一定値に近づくが，KC 数が20以下の場合は h/gT^2 の値により，C_{DX} の値は異なる．KC 数が10以上になると，流況パターンに関係なく，球体背後に後流域が発達するので，球の前後での圧力差がか



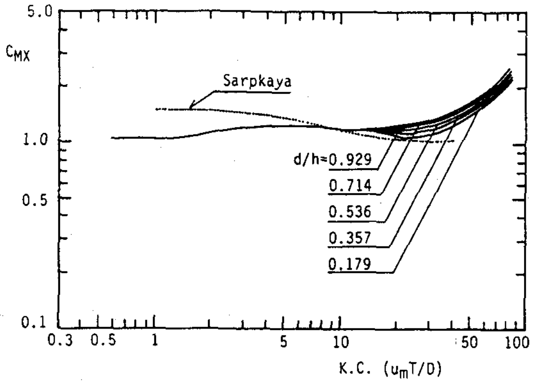
図－9　モリソン式の適用範囲（F_Z の場合）

なり大きくなり，これが抗力の支配的要因となる．KC数が10以下では，球表面での流れの剝離はあまり顕著でなく，球表面での粘性抵抗力が抗力の支配的要因となる．粘性抵抗力は，球表面での流速分布に大きく支配されるので，“回転パターン”と“振動パターン”では粘性抵抗力に差が生じる．KC数が小さくなると，レイノルズ数（u_mD/ν；ν＝動粘性係数）も，h/gT^2，d/hとD/hが同じ値ならば，小さくなり，流体の粘性の影響が大きく，このため流況を支配するh/gT^2によりC_{DX}に差がでてくることになる．

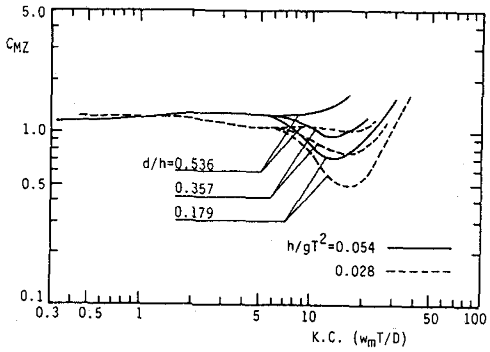
次に，z方向の抗力係数とKC数（w_mT/D）の関係を図−13に示す．モリソン式が使えない波力に対する値を除いているため，C_{DZ}の実験値が少ないが，一般にはC_{DX}とよく似た傾向を示す．

5．3　最大波力の特性

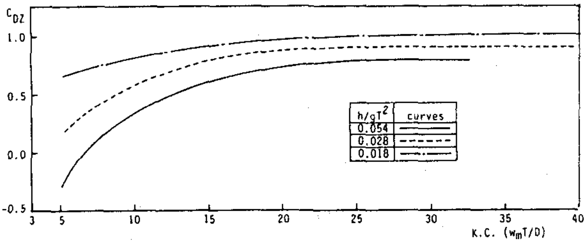
x 方向の無次元最大波力$Fxm/\rho(u\sqrt{u^2+w^2})_mD^2$と$KC$数$(u_mT/D)$の関係を



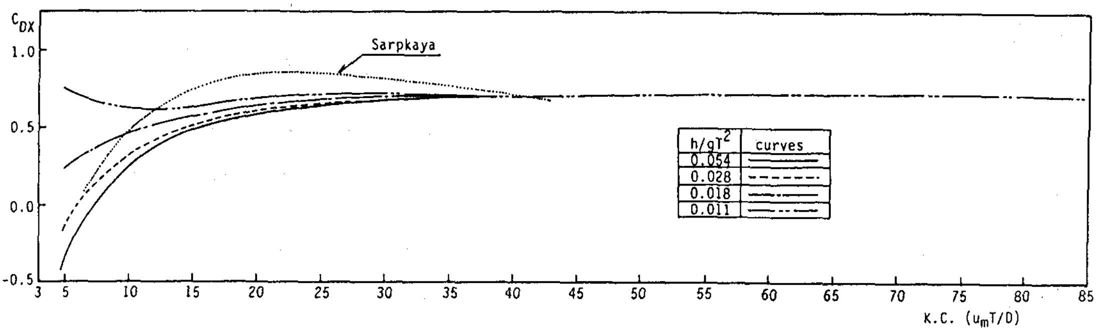
図−10　C_{MX}とKC数の関係（実験曲線）



図−11　C_{MZ}とKC数の関係（実験曲線）



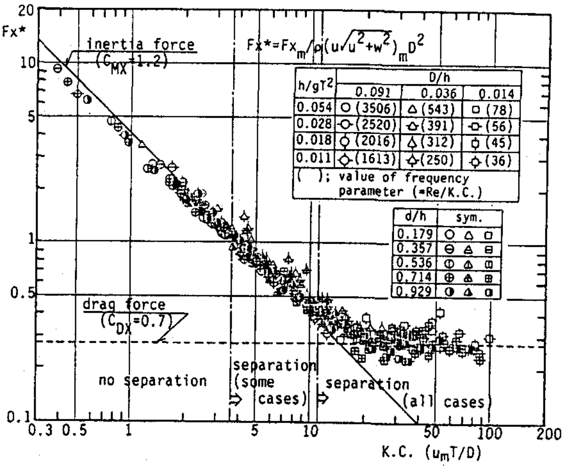
図−13　C_{DZ}とKC数の関係（実験曲線）



図−12　C_{DX}とKC数の関係（実験曲線）

図－14に示す．なお，$(u\sqrt{u^2+w^2})_m$ は $(u\sqrt{u^2+w^2})$ の最大値である．同図によれば，無次元最大波力は，剥離のないKC数が4以下では，KC数の－1乗に比例して減少し，剥離が始まるKC数が4あたりから減少度合が若干緩やかになる．KC数が10を越えて，剥離が起るようになると，無次元最大波力は一定値に漸近してゆき，KC数が20以上になると，ほぼ一定値になる傾向が認められる．

無次元最大波力がKC数の－1乗に比例する範囲では，波力の最大値は，流速に比例するため，慣性力が支配的となる．一方，KC数が20以上のように，KC数の変化によらず，無次元最大波力が一定となる範囲では，波力の最大値は流速の自乗に比例することになり，抗力が支配的となる．図－14には，$C_{MX}=1.2$ に対する慣性力と $C_{DX}=0.7$ に対する抗力の計算値が示されているが，KC数が10以下では慣性力が，KC数が20以上では抗力が実験値とよく一致している．



図－14 $F_{xm}/\rho(u\sqrt{u^2+w^2})_m D^2$ とKC数の関係

z方向の無次元最大波力は，x方向の値に比べてかなり大きくばらつく．このうち，モリソン式の適用が可能な範囲の値のみに着目すれば，x方向の値より変動は若干大きいものの，KC数，d/h，D/h と h/gT^2 の変化にともなうz方向の無次元最大波力の変動の基本特性は，図－14に示すようなx方向の無次元最大波力のそれと大差はない[1]．

6．Boundary Proximity Effect

球体が境界に近接して設置される場合は，境界の存在により球体周りの流速場が境界から離れている場合に比べて変化するので，作用波力も変化することになる．本小論では，底面に近接して設置される場合と自由表面に近接して設置される場合に分けて記述する．

6．1　底面に近接して設置される場合

底面近傍に設置された球体に作用する波力の時間波形は，図－15に示すように，大きく3つに分類される．波一周期内に極大値と極小値を1組もつ単峰型波形はx方向成分波力 F_x と z方向成分波力 F_Z に認められ，モリソン式で波力の推算が可能である．波一周期内に極大値と極小値を2組もつ双峰型波形と不規則な時間変動をし，極大値と極小値の数も変化する不規則波型波形は F_Z のみに出現する波力であり，このような波力をモリソン式では推算できない．なお，この単峰型波形，双峰型波形と不規則波型波形の出現領域は，D/h，KC数，w_m/u_m の関数として著者ら[4]により与えられている．

双峰型波形のうち，一波ごとの波形の変化が少く規則的な波力（図－15のT－1型波形）は，球体が底面に接近すると球体の上側の流速に比べ下側の流速が速くなり，このため球体の上下で圧力が非対称になることに帰因する力により生じる．この力は，ポテンシャル流れでも作用する力であり，ポテンシャル的な波力とでも称すべきである．双峰型波力でも一波ごとに極値が異なる場合（図－15のT－2型波形）や不規則波型波力は，波力の時間変動が不規則なことから，球体表面での粘性抵抗力，渦の発生による圧力の非対称性による波力成分が，底面の近接の影響により上下非対称になるために生じるものと考えられる．

(a) 波力の算定式

上述の作用波力のうち，T－1型波力の算定式について記述する．T－1型波力は，ポテンシャル流れにおいてでも生起する波力成分を含んでいる．このT－1型波力の特色は，基本周波数成分の波力以外に，2倍周波数成分と鉛直下向きの定常成分の波力が含まれていることである．そこで，著者らは，Lambの理論[18]を拡張し，水平方向流速uが卓越する場合の底面近傍に設置された球体に作用する鉛直方向の流体力の表示式を誘導し，この力をモリソン式に加えることにより，次式の算定式を提案した．

$$F_Z = \frac{1}{8} C_{DZ}\rho\pi D^2 w\sqrt{u^2+w^2} + \frac{1}{6} C_{MZ}\rho\pi D^2 \dot{w} - \alpha\left(\frac{1}{6}\rho\pi D^3 C_1 \overline{u}^2\right) - \beta\left\{\frac{1}{6}\rho\pi D^3 C_1 (u^2 - \overline{u}^2)\right\}, \tag{29}$$

$$C_1 = 9D^3/512\delta_B^4 \tag{30}$$

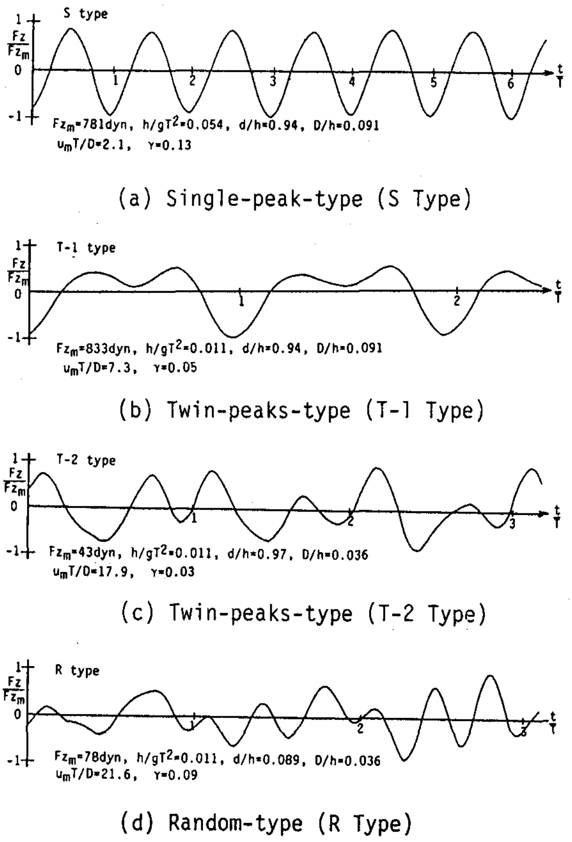
なお，式(29)で，右辺第3項は定常流成分を第4項は2倍周波成分を表わしている．また，上つきバー（$\overline{\ }$）は波一周期平均を，δ_Bは水底から球体の中心までの鉛直距離，α，βは係数である．

式(29)による計算波力と実測波力の時間波形の比較の一例を図－16に示す．同図にも示されているように，計算波力と実測波力はよく一致しており，式(29)の妥当性が検証される．ただし，δ_B/Dが1.5より大きい範囲では，定常流成分と2倍周波数成分の波力は小さくなるので，式(29)の適用範囲は，$0.5 \leqq \delta_B/D \leqq 1.5$である．

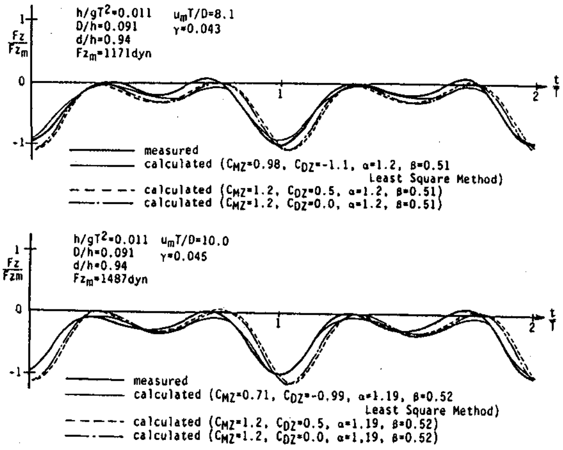
また，図－16からも判明するように，式(29)の第1項の抗力項の波力による寄与分が小さいので，第1項を削除した式（図－16中の－・－・－の計算値に対応する）でも充分精度高く波力の算定はできる．

(b) 波力係数

式(29)の抗力係数C_{DZ}と慣性力係数C_{MZ}としては，境界の近接の影響のない範囲の値（図－

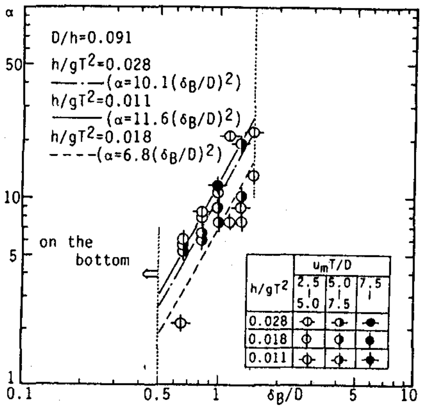


図－15 底面近傍における波力の時間波形

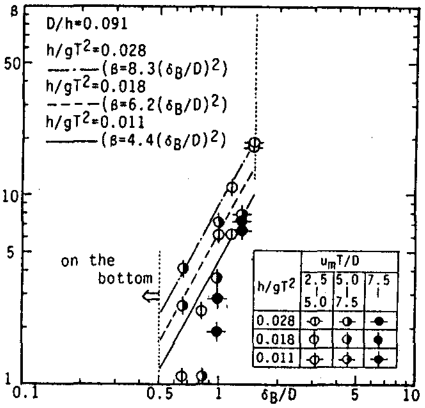


図－16 計算波力と実測波力の比較

11と図－13）を採用することができる．一方，定常流成分と2倍周波数成分に対する波力係数α，βは，δ_B/Dとh/gT^2により大きく支配され，著者らの実験によれば，それぞれ図－17と図－18で与えられる．



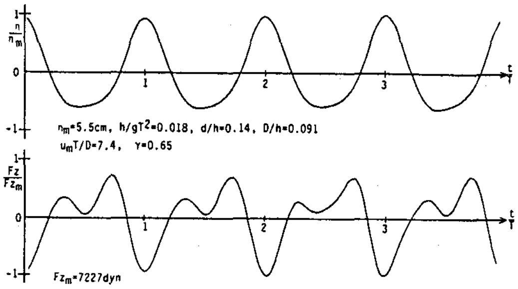
図－17　αとδ_B/Dの関係



図－18　βとδ_B/Dの関係

6．2　自由表面近傍に設置された場合

自由表面近傍に設置された球体に作用する鉛直方向波力は，（i）単峰型波力，（ii）双峰型波力の2つに大別される．単峰型波力は，慣性力および抗力が卓越した場合に発生する波力である．一方，双峰型波力は，図－19に一例を示すように，波の谷の位相で，自由表面の接近効果により，鉛直下向きの波力が作用するために第2の極小値が現われる波力波形である．これは，球体の上部に波谷が接近すると，球体と波面の干渉により，球体の真上にハンプ（水面の盛り上り）が形成されるためであり，この水塊は同心円状に球体から拡散していく．この双峰型波力は，図－20に示すように$\delta_F/D < 0.5$で$w_m/u_m < 0.7$の場合に形成される．なおδ_Fは波谷から球体の中心までの鉛直距離である．



図－19　自由表面近傍における双峰型波形の例

(a) 波力の算定式

双峰型波力は，主に基本周波数成分と2倍周波成分の波力により構成される．この2倍周波数成分波力(F_{Z2})は次のような特性を持っている．すなわち，球体の浮力($\rho\pi gD^3/6$)で無次元化された2倍周波数成分波力$F^*_{Z2} = F_{Z2}/(\rho\pi gD^3/6)$は，水理実験によれば，$(\delta_F/D)$の－3乗に比例し，また水平方向の水粒子速度の2乗に比例する．すなわち，

$$F^*_{Z2} \propto (\delta_F/D)^{-3} \qquad (31) \qquad\qquad F^*_{Z2} \propto u^2 \qquad (32)$$

この式(31)と式(32)の関係は，水平方向の一様流中の自由表面近傍に設置された球体に作用する流体力の理論解[19]の結果と類似している．波の場合，自由表面が球体に最も接近する波の谷の位相では水平方向の水粒子速度のみであるため，*Kim*[19]の取り扱った一様流における理論と一致したのであろう．そこで，この効果を考慮して，自由表面の近接効果を含む波力（双峰型波力）の算定式として，著者らは次式を提案した．

$$F_Z = \frac{1}{8} C_{DZ}\rho\pi D^2 w\sqrt{u^2+w^2} + \frac{1}{6} C_{MZ}\rho\pi D^3 \dot{w} - \frac{1}{32} C_F\rho\pi D^2 u^2 \left(\frac{D}{\eta+d}\right)^3 \tag{33}$$

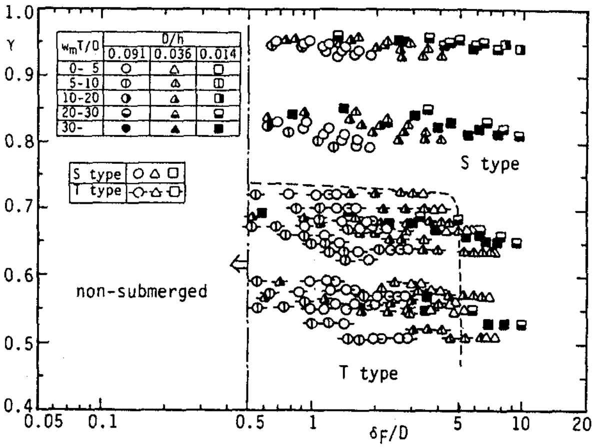
ここで，C_{DZ} は抗力係数，C_{MZ} は慣性力係数，C_F は揚力係数，η は自由水面，d は静水面から球体の中心までの鉛直距離である．

図－21は，式(33)を使って計算した計算波力と実現波力の比較をした一例である．同図に示すように，計算値と実測値は，波の谷の位相で若干差異は認められるものの，計算値は双峰型波形の実測波形とほぼ一致しており，両者の相関係数は 0.9 以上であった．

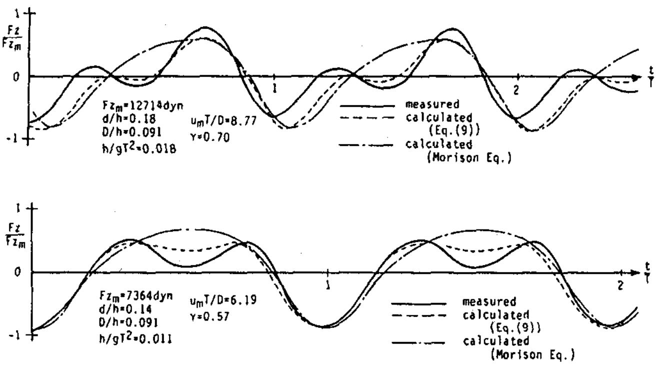
(b) 波力係数

式(33)中の抗力係数 C_{DZ} と慣性力係数 C_Z としては，境界の影響のない場合の値（図－11と図－13）をそのまま採用してよい．一方，揚力係数 C_F であるが，数多くの実験結果に基づいてその特性を検討した所，δ_F/D と h/gT^2 により大きく支配されることが判明し，その平均値は，図－22に示されているように，次式で定式化される．

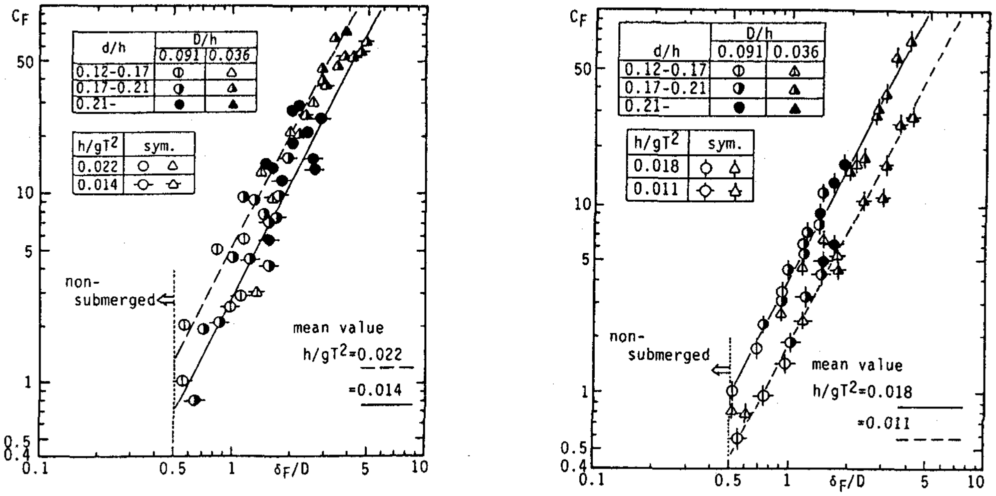
$$\begin{aligned} C_F &= 5.2\,(\delta_F/D)^2 \quad (h/gT^2 = 0.022) \\ &= 4.4\,(\delta_F/D)^2 \quad (h/gT^2 = 0.018) \\ &= 2.8\,(\delta_F/D)^2 \quad (h/gT^2 = 0.014) \\ &= 1.8\,(\delta_F/D)^2 \quad (h/gT^2 = 0.011) \end{aligned} \tag{34}$$



図－20　自由表面近傍における双峰型波力の発生領域



図－21　計算波力と実測波力の比較



(a) $h/gT^2=0.022$ と 0.014 の場合　　(b) $h/gT^2=0.018$ と 0.011 の場合

図－22　C_F と $\delta_F/D(=(d+\eta)/D)$ の関係

7．あとがき

本小論では，没水状態にある球体に作用する波力を取りあげて，数値解析と水理実験に基づいて，現時点での知見と問題点について記述してきた．ここで取り扱ったのは，作用波力のうちでも，波進行方向に作用する波力と鉛直方向に作用する波力である．また，作用波としては規則波のみを対象とした．作用波力としては，波進行方向と直交する横方向力（Transverse-force）があるが[20),21)]，本小論では言及していない．この横方向力については解明すべき問題があり，今後の研究課題の一つである．現地の波は不規則波である．不規則波による没水球体に作用する波力の発生機構，波力の基本特性の解明，波力の算定法の確立などを取り組むべき問題もある．これについては，研究がなされているが[22),23)]，解明すべき問題も残っており，今後の更なる研究が必要である．

没水球体に作用する波力は，本学土木工学教室の水谷法美助教授と共同で研究を進めている課題であり，本小論の取りまとめに際して同君の協力を得た．ここに記して謝意を表する次第である．

参考文献

1）岩田好一朗・水谷法美：没水球体に作用する波力の特性に関する研究，土木学会論文集，第405号／II－11，pp. 215.-224，1989.

2）Iwata, K. and N. Mizutani：Experimental study on wave force acting on submerged sphere, Proc. OMAE, ASME, pp. 145-152, 1989.

3）岩田好一朗・水谷法美．都築克嘉：没水球体に作用する回折波力の数値解析，土木学会論文集，第411号／II-12，pp. 187-196，1989.

4）岩田好一朗・水谷法美・川角伸彦：没水球体に作用する鉛直方向波力に及ぼす Boundary Proximity の効果，土木学会論文集，第417号／II-13，pp. 219-228，1990.

5）水谷法美・岩田好一朗・松岡滋治：球状構造物に作用する回折波力，海岸工学論文集，第37巻，pp. 679-683，1990.

6) Iwata, K. and N. Mizutani : Vortex formation and shedding around a submerged sphere under wave action, Proc. 1st Pacific/Asia Offshore Mechanics Symp., Vol. 2. pp. 205-212, 1990.
7) 河野二夫：海岸水理学，森林出版，276 P., 1980.
8) Chakrabarti, S.K. : Wave force on submerged objects of symmetry, J. Waterways, Harbor and Coastal Div., Proc. ASCE, Vol. 99, No. WW2, pp. 147～164, 1973.
9) Havelock, T.H. : The wave force on a submerged body moving under waves, Quart. Trans. of Naval Arch,. January, and in The Collected Papers of Sir Thomas Havelock on Hydrodynamics, ONR/ACR-103, pp. 590～596, 1954.
10) John, F. : On the motion of floating bodies, II, Common Pure Appl. Math,. Vol. 13, pp. 45～101, 1950.
11) Mizutani, N., K. Iwata and S. Matsuoka : Diffration force acting on a spherical structure and wave diffraction, Coastal Eng. in Japan, 1991 (in press).
12) MacCamy, R.C. and R.A., Fucks : Wave force on piles ; a diffraction theory, Beach Erosion Board, Tech. Memo., No. 69, pp. 1～7, 1954.
13) 中村昭・池田駿介・大八木崇：正弦振動流中におかれた球に作用する流体力（続報），第30回海岸工学講演会論文集，pp. 381～384，1983.
14) Kohama, Y. and R., Kobayashi : Boundary-layer transition and the behavior of spiral vortices on rotating sphere, J. Fluid Mech., Vol. 137, pp. 153-164, 1983.
15) Keulegan, G.M. and L.H., Carpenter : Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid, J. Res. Nat. Bur. Stand., Vol. 60, No. 5, pp. 423-440, May, 1958.
16) Jenkins, S.A. and D.L., Inman : Forces on a sphere under liner progressive waves, Proc. 15th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 2413-2428, 1976.
17) Morison, J.R., M.P., O'Brien, J.W., Johnson, and S.A., Schaaf : The wave force exerted by surface wave on piles, Petroleum Trans., AIME, Vol. 189, pp. 149～157, 1950.
18) Lamb, S.H.（今井　功・橋本英典訳）：流体力学１，東京図書，266p., 1978.
19) Kim, W.D. : Nonliner free-surface effect on a submerged sphere, J. Hydronautice, Vol. 3, No. 1, pp. 29～37, 1969.
20) 岩田好一朗・水谷法美・原　基久：没水球体に作用する揚力の特性に関する実験的研究，海岸工学論文集，第36巻，pp. 719-723，1989.
21) 水谷法美・岩田好一朗・小林　誠：没水球体に作用する揚力の出現確率特性，海岸工学論文集，第38巻，1991（印刷中）.
22) 岩田好一朗・水谷法美・都築克嘉：没水球体に作用する不規則波力の特性，土木工学論文集，第411号／II-12，pp. 207-216，1989.
23) 岩田好一朗・水谷法美・原　基久：時系列特性を考慮した不規則波の予測手法―没水球体の場合，海岸工学論文集，第37巻，pp. 684-688，1990.