

確率論の海岸工学への応用

Applications of Stochastic Methods to Coastal Engineering

水 村 和 正

Kazumasa MIZUMURA

序

海岸工学上発生する問題を解決するためには、大きく分けて、実験的と数値的の2つの方法がある。しかし、最近では人件費の上昇、水理模型実験の限界、計算機の計算速度の増加、計算コストの低下、personal computerの普及等より、数値的解析に比重が高まってきた。数値的解析は大きく分類すると、決定論的と確率論的となる。前者は主に、微分方程式を解くことに帰着するが、後者は確率または確率過程論より導かれた理論を用いたり乱数を用いて不確実性を表し、これを十分回数繰り返すことによって現実の現象を simulate する。本講では、Kalman Filter, Pattern Recognition, Monte Carlo 法を中心にしていかに、海岸工学の諸分野に適用可能になるかを著者の研究結果を中心に述べてみたい。

1. Kalman Filter の応用

1.1 Kalman Filter とは

現象の予測を短時間に、合理的に行うには、Kalman Filter を用いることが多い。本節では、この簡単な理論を説明し、応用について言及する。一般に、最適予測とは統計的に予測誤差を最小化することを意味する。Filtering は現時点での状態ベクトル (state vector) の予測であり、予測 (prediction) は未来の状態を求めるものである。予測値 (estimate) $\underline{x}$ は測定値ベクトル $\underline{z}$ にもとづいて計算される。最小分散予測 (minimum variance estimate) の誤差分散 (error variance) は常に他のいかなる不偏予測よりも小さいか又は等しい。つぎに、観測ベクトル $\underline{z}$ (次元 ℓ) は状態ベクトル $\underline{x}$ (次元 n) と雑音との和で表される。すなわち、観測系はつぎのようにモデル化される。

$$\underline{z} = H \underline{x} + \underline{v} \quad (1)$$

ここで、 H は $\ell \times n$ の行列、 $\underline{v}$ は次元 ℓ のベクトルを示す。最小自乗予測は観測値と予測値との差の2乗を最小にすることより、つぎの量を最小化する。

$$J = (\underline{z} - H\underline{x})^T (\underline{z} - H\underline{x}) \quad (2)$$

したがって、 $\partial J / \partial \underline{\hat{x}} = 0$ より

$$\underline{\hat{x}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{z} \quad (3)$$

が求まる。もし、式(2)に重み項を導入すると

$$J = (\underline{z} - H\underline{\hat{x}})^T R^{-1} (\underline{z} - H\underline{\hat{x}}) \quad (4)$$

となる。ここで、 R は $\ell \times \ell$ 次元の対称正値重み行列で、これを最小化することによって

$$\underline{\hat{x}} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{z} \quad (5)$$

が得られる。以上の計算では確率的要素は含まれていない。他の方法はベイズ予測 (Bayesian Estimation) であり、ここでは $\underline{x}$ と $\underline{z}$ に統計的な要素が含まれている。事後条件付確率密度関数 (a posteriori conditional density function) $p(\underline{x}|\underline{z})$ はベイズの定理より

$$p(\underline{x}|\underline{z}) = \frac{p(\underline{z}|\underline{x}) p(\underline{x})}{p(\underline{z})} \quad (6)$$

となる。ここで、 $p(\underline{x})$ = 事前確率密度関数、 $p(\underline{z})$ = 観測値の確率密度関数、 $p(\underline{z}|\underline{x})$ = $\underline{z}$ の条件付き確率密度関数である。もくてきが $\underline{\hat{x}} = \underline{x}$ の確率を最大にすることならば、解 $\underline{x}$ は $p(\underline{x}|\underline{z})$ のモードで与えられる。しかし、一般的な最小分散ベイズ予測はつぎのコスト関数を最小化することによって求まる。すなわち、

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (\underline{\hat{x}} - \underline{x})^T S (\underline{\hat{x}} - \underline{x}) p(\underline{x}|\underline{z}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (7)$$

ここで、行列 S は半正定である。 $\partial J / \partial \underline{x} = 0$ とおくと

$$\underline{\hat{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \underline{x} p(\underline{x}|\underline{z}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = E[\underline{x}|\underline{z}] \quad (8)$$

これは条件的平均予測 (conditional mean estimate) である。

$$\underline{\hat{x}} = (P_0^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \underline{z} \quad (9)$$

ここで、行列 P_0 は $\underline{x}$ の事前共分散を示す。したがって、式 (9) は P_0^{-1} の型で $\underline{x}$ の事前情報を含んでいることになる。Kalman は Wiener 問題を状態空間を利用して、条件付き分布と期待値の点で Gauss-Markov 数列に対して解いたのである。

1・2 線形離散化フィルタ (linear discrete filter) .

本節では線形不偏最小誤差のアルゴリズムを考えよう。このアルゴリズムはつぎのように記述される。

すなわち、システムモデルはつぎの線形ベクトル差分方程式で表示できる。

$$\underline{x}(k+1) = \phi(k+1, k) \underline{x}(k) + \underline{w}(k) \quad (10)$$

ここで、 $\underline{w}$ は平均値が 0 である白色雑音であり、共分散行列は

$$\text{cov}[\underline{w}(k), \underline{w}(j)] = V_w(k) \delta(k-j) \quad (11)$$

上式で δ はクロネッカーの記号である。また、観測モデルはつぎの線形関係で与えられる。

$$\underline{z}(k) = H(k) \underline{x}(k) + \underline{v}(k) \quad (12)$$

ここで、 $\underline{v}$ は平均値が 0 の白色雑音で、これの共分散行列は

$$\text{cov}[\underline{v}(k), \underline{v}(j)] = V_v(k) \delta(k-j) \quad (13)$$

2つの白色雑音 $\underline{w}$ と $\underline{v}$ は無相関と仮定する。

$$\text{cov}[\underline{w}(k), \underline{v}(j)] = 0 \quad \text{for all } j, k \quad (14)$$

状態ベクトル $\underline{x}$ の初期値は、平均値が $\underline{\mu}_x(0)$ で分散が $V_x(0)$ の確率変数である。すなわち、

$$\begin{aligned} E[\underline{x}(0)] &= \underline{\mu}_x(0) \\ \text{Var}[\underline{x}(0)] &= V_x(0) \end{aligned} \quad (15)$$

さらに、つぎの条件を付け加える。

$$\text{cov}[\underline{x}(0), \underline{w}(k)] = 0 \quad \text{for all } k \geq 0 \quad (16)$$

観測ベクトル列 $\{\underline{z}(1), \underline{z}(2), \dots, \underline{z}(k)\}$ にもとずいて、状態ベクトル $\underline{x}(j)$ の予測を表すと、 $\underline{x}(j|k)$ となる。したがって、予測誤差はつぎのように定義される。

$$\tilde{\underline{x}}(j|k) = \underline{x}(j) - \hat{\underline{x}}(j|k) \quad (17)$$

与えられた線形観測空間 $\underline{Z}$ に対して、 $\underline{x}$ の線形最小分散予測はベクトル $\underline{x}$ の $\underline{Z}$ への直交射影 $\underline{x} = E\{\underline{x} | \underline{Z}\}$ によって与えられる。もしベクトル $\underline{\beta}$ が $\underline{Z}$ に直交するならば、 $E\{\underline{\beta}^T \underline{\alpha}_i\} = 0$ 、ここで、 $i = 1, 2, \dots, m$ 、 $\{\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \dots, \underline{\alpha}_m\}$ は $\underline{Z}$ の直交基底ベクトルである。したがって、

$$E[\underline{x} | \underline{Z}, \underline{\beta}] = E[\underline{x} | \underline{Z}] + E[\underline{x} | \underline{\beta}] \quad (18)$$

これは、線形最小分散予測の線形性であり、直交斜影の補題とよばれている。もし $\underline{z}(j | j-1)$ が

$$\tilde{z}(j|j-1) \equiv z(j) - H(j) \hat{x}(j|j-1) \quad (19)$$

と定義されるならば、 $\underline{z}(j|j-1)$ は $\underline{z}(j-1)$ に直交する。与えられた $\underline{z}(j-1)$ に対する $\underline{z}(j)$ の最適予測すなわち $H(j) \hat{x}(j|j-1)$ は $\underline{z}(j|j-1)$ を求めるために、 $\underline{z}(j)$ からの差をとることによって決められる。したがって、 $\underline{x}(j+1|j)$ はつぎのように表される。

$$\begin{aligned} \hat{x}(j+1|j) &\equiv E\{\underline{x}(j+1)|\underline{z}(j-1), \underline{z}(j)\} \\ &= E\{\underline{x}(j+1)|\underline{z}(j-1), \tilde{z}(j|j-1)\} \end{aligned}$$

最終的には、 $\underline{z}(j-1)$ と $\underline{z}(j|j-1)$ が直交することから、

$$\hat{x}(j+1|j) = E\{\underline{x}(j+1)|\underline{z}(j-1)\} + E\{\underline{x}(j+1)|\underline{z}(j|j-1)\} \quad (20)$$

また、

$$\begin{aligned} \hat{x}(j+1|j-1) &= E\{\phi(j+1, j)\underline{x}(j) + \underline{w}(j)|\underline{z}(j-1)\} \\ &= \phi(j+1, j)E\{\underline{x}(j)|\underline{z}(j-1)\} + E\{\underline{w}(j)|\underline{z}(j-1)\} \\ &= \phi(j+1, j)\hat{x}(j|j-1) \end{aligned} \quad (21)$$

直交化原理から

$$\begin{aligned} E\{\underline{x}(j+1)|\underline{z}(j|j-1)\} &= E\{\underline{x}(j+1)\underline{z}^T(j|j-1)\}[E\{\tilde{z}(j|j-1) \\ &\quad \times \tilde{z}^T(j|j-1)\}]^{-1} \tilde{z}(j|j-1) \end{aligned} \quad (22)$$

それゆえ、

$$\hat{x}(j+1|j) = \phi(j+1, j)\hat{x}(j|j-1) + K(j+1, j)[\underline{z}(j) - H(j)\hat{x}(j|j-1)] \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} K(j+1, j) &= \phi(j+1, j)\underline{V}_{\underline{x}}(j|j-1)H^T(j) \\ &\quad \times [H(j)\underline{V}_{\underline{x}}(j|j-1)H^T(j) + \underline{V}_{\underline{w}}(j)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\underline{V}_{\underline{x}}(j|j-1) \equiv \text{Var}\{\tilde{x}(j|j-1)\}$$

この共分散行列は定義よりつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \underline{V}_{\underline{X}}(j+1|j) &= \phi(j+1, j) \underline{V}_{\underline{X}}(j|j-1) \phi^T(j+1, j) \\
 &+ V_w(j) - \phi(j+1, j) \underline{V}_{\underline{X}}(j|j-1) H^T(j) \\
 &\times [H(j) \underline{V}_{\underline{X}}(j|j-1) H^T(j) + V_v(j)]^{-1} \\
 &\times H(j) \underline{V}_{\underline{X}}(j|j-1) \phi^T(j+1, j)
 \end{aligned} \quad (24)$$

1・2. 水位と海浜変形の予測

Kalman Filter の水工学分野への応用としては、水文学の流出予測が最初であろう。応用例については文献(16)にくわしい。本節では、本方法をゲートの開閉をともなう感潮河川の水位予測と漂砂による海浜変形に適用する(文献11,12,13,14,15)。前者の対象域は、金沢市郊外の河北潟と日本海を結ぶ大野川である。この河北潟は現在ほぼ2/3が埋め立てられているが、多くの中小河川が流入し、さらに周囲の都市化のために流入水量は年々増加している。放水路をのぞくただひとつの流出河川である大野川には日本海の海水が侵入し、これが河北潟まで到達している。そのため大野川への入り口にはゲートが建設され、湖の水位と水質の調節を行っている。ここでは、カルマンフィルターを用いて、ゲート下流側の水位を予測する。方針としては、長周期の変動は回帰曲線によって、短周期の変動はカルマンフィルターに対応させる。一般に、ゲート下流側の水位 x_k は、潮位 T_k 、湖水位、ゲートの操作 (H_k, d_k) の関数である。これらの変数は、ゲートの種類によって区別される。ゲート下流側の水位と潮位とは、ほぼ線形となり、つぎのような関係が得られる。すなわち、

$$x_k = T_k + 12.0 \quad (25)$$

また、水位変動の長周期成分、短周期成分をそれぞれ $\bar{x}_k, x'_k$ とすると、定義より

$$x_k = \bar{x}_k + x'_k \quad (26)$$

となる。ここで、水位の短周期成分 x'_k をつぎのように表示する。

$$\begin{aligned}
 x'_k &= \alpha_1 x'_{k-1} + \alpha_2 x'_{k-2} + \dots + \alpha_j x'_{k-j} + \beta_1 T_{k-1} + \beta_2 T_{k-2} + \dots + \beta_j T_{k-j} \\
 &+ \gamma_1 H_{k-1} + \gamma_2 H_{k-2} + \dots + \gamma_j H_{k-j} + \delta_1 d_{k-1} + \delta_2 d_{k-2} + \dots + \delta_j d_{k-j}
 \end{aligned} \quad (27)$$

上式中の $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ は定数である。上式を行列で書き直すと、

$$\underline{z}(k) = \underline{M}^T(k-1) \underline{H}(k-1) + \underline{v}(k-1) \quad (28)$$

となる。ここで、 $\underline{z}(k) = x'_k$ 、 $\underline{M}^T(k-1) = (x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-j}, T_{k-1}, T_{k-2}, \dots, T_{k-j}, H_{k-1}, H_{k-2}, \dots, H_{k-j}, d_1, d_2, \dots, d_{k-j})$ 、 $\underline{H}(k-1) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j)^T$ 。

定数パラメータのシステム方程式は

$$\underline{H}(k+1) = \underline{H}(k) + \underline{w}(k) \quad (29)$$

これらの2つの式を観測モデルとシステムモデルとして図-1のカルマンフィルタールゴリズムを適用すると、その結果は図-2のようになる。定数の同定結果は図-3のようになる。したがって、各地点の水位とゲートの状態を観測すれば、ゲート下流側の水位の予測が可能となる。さらに、塩分濃度についての予測は文献13で与えられている。これを用いれば、水位と同時に水質の制御もできることになる。

つぎに、海浜変形の現象を考える(文献14,15)。これは非常に複雑であるために、カルマンフィルタが有効である。変数として水深(y)、沿岸流の流速(v)、波向(D)をとり、前回の水位予測と同じように長周期変動成分と短周期変動成分とに分けるとつぎのようになる。

$$\bar{y} = \bar{y}_n + y'_{n,k} \quad (30a)$$

$$\bar{v} = \bar{v} + v'_k \quad (30b)$$

$$\bar{D}_k = \bar{D} + D'_k \quad (30c)$$

ここで、 k = 時間ステップ、 n = 場所を示す添字。変数の上の $\bar{}$ は長周期変動成分を、 $'$ は短周期変動成分を示す。水深については長周期変動成分は一定とし、短周期変動成分をつぎのように表す。

$$\begin{aligned} y'_{n,k} = & \sum_{i=1}^N (\alpha_{i,1}^n y'_{i,k-1} + \alpha_{i,2}^n y'_{i,k-2} + \dots + \alpha_{i,j}^n y'_{i,k-j}) + \beta_1^n D'_{k-1} + \beta_2^n D'_{k-2} \\ & + \dots + \beta_j^n D'_{k-j} + \gamma_1^n V'_{k-1} + \gamma_2^n V'_{k-2} + \dots + \gamma_j^n V'_{k-j} \\ & + \delta_1^n S_{k-1} + \delta_2^n S_{k-2} + \dots + \delta_j^n S_{k-j} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 S = 入射波の波形勾配、 α 、 β 、 γ 、 δ = 定数。さらに、波向と沿岸流速も同様に、

$$D'_k = \lambda_1 D'_{k-1} + \lambda_2 D'_{k-2} + \dots + \lambda_j D'_{k-j} \quad (32a)$$

$$V'_k = \mu_1 V'_{k-1} + \mu_2 V'_{k-2} + \dots + \mu_j V'_{k-j} \quad (32b)$$

水位予測の場合と同じようにして、これらの方程式よりシステム方程式、観測方程式を作り、カルマンフィルタを適用すると、図-4のようになる。モデルは大変簡単であるが、比較的良好な結果が得られている。以上は点での予測だが、面の予測もスプライン関数等を用いて行われている。

2. パターン認識の応用

2.1 パターン認識の理論

パターン認識の方法は医学の診断(病名の決定等)、郵便の宛名の分類、銀行でのサインのチェック、写真の判定等、種々の分野で用いられてきた。水工学ではやはり水文学の分野で適用されている(文献9)。

M 個のクラス ω_i ($i=1,2,\dots,M$)より成る要素 x を考える。 x がクラス ω_i に属する確率は、

$p(\omega_i | x)$ で与えられる。もし、0類者が、実際 x が ω_i に属しているにもかかわらず、 ω_j に属すると考えた場合、その時の損失は L_{ij} となる。 x は M 個のクラスのどれかに属するのであるから、損失の期待値は

$$r_j(x) = \sum_{i=1}^M L_{ij} p(\omega_i | x) \quad (33)$$

となる。 L_{ij} を損失関数と呼ぶ。 $r_j(x)$ のうち最小となる j が x の帰属するクラスを示すことになる。この損失の期待値を最小にする分類法を Bayes classifier と呼ぶ。つぎの Bayes の公式

$$p(\omega_i | x) = \frac{p(\omega_i) p(x | \omega_i)}{p(x)} \quad (34)$$

を用いると

$$r_j(x) = \frac{1}{p(x)} \sum_{i=1}^M L_{ij} p(x | \omega_i) p(\omega_i) \quad (35)$$

$p(x)$ は共通項なので取り去ると

$$r_j(x) = \sum_{i=1}^M L_{ij} p(x | \omega_i) p(\omega_i) \quad (36)$$

となる。一般に、決定が正しい場合は 0 と考えられるので、損失関数はクロネッカーの記号を用いて

$$L_{ij} = 1 - \delta_{ij} \quad (37)$$

したがって、 $r_j(x) = p(x) - p(x | \omega_j) p(\omega_j)$ となる。

もし $p(x | \omega_i) p(\omega_i) > p(x | \omega_j) p(\omega_j)$ ならば、パターン x は ω_i に属することを示す。決定関数 (Decision function) $d_i(x)$ を

$$d_i(x) = p(x | \omega_i) p(\omega_i) \quad (38)$$

$i = 1, 2, \dots, M$, と定義する。このとき、もしすべての $j \neq i$ に対して $d_i(x) > d_j(x)$ ならば、 x はクラス ω_i に属すると考えられる。もし、 $p(\omega_i) = 1/M$ 一定と考えると、 $p(x | \omega_i)$ が計算できれば決定関数が求まる。つぎに、 $p(x | \omega_i)$ の予測を行う。簡単のために、これを $p(\underline{x})$ と書き、その予測を $\hat{p}(x)$ と書く。予測はつぎの式

$$R = \int_{\underline{x}} u(\underline{x}) [p(\underline{x}) - \hat{p}(\underline{x})]^2 d\underline{x} \quad (39)$$

を最小化して得られる。ここで、 $u(\underline{x})$ は重み関数。 $p(\underline{x})$ の近似を求めるために常数 C_j と基底関数 $\phi_j(\underline{x})$ を用いて下記のように展開する。

$$\hat{p}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^m C_j \phi_j(\underline{x}) \quad (40)$$

これをRの式に代入し、Rが各 C_j について最小になるように（ $\partial R / \partial C_j = 0$ ）すると、

$$\sum_{j=1}^m C_j \int_{\underline{x}} u(\underline{x}) \phi_j(\underline{x}) \phi_k(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\underline{x}} u(\underline{x}) \phi_k(\underline{x}) p(\underline{x}) d\underline{x} \quad (41)$$

右辺は、 $u(\underline{x}) \phi_k(\underline{x})$ の標本平均であるので

$$\int_{\underline{x}} u(\underline{x}) \phi_k(\underline{x}) p(\underline{x}) d\underline{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(\underline{x}_i) \phi_k(\underline{x}_i) \quad (42)$$

と考えることができ、基底関数が正規直交ならば

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_k(\underline{x}_i) \quad (43)$$

となる。したがって、各クラス i に対して p.d.f.は

$$p(\underline{x} | \omega_i) = \sum_{j=1}^m C_{ij} \phi_j(\underline{x}) \quad (44)$$

と書くことができる。また、各係数 C_{ik} は

$$C_{ik} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \phi_k(\underline{x}_{ij}) \quad (45)$$

で求まる。ここで、 N_i はクラス ω_i のパターンの数出、 k は1から m まで変化する。基底関数として一般に、Hermite の多項式を用いる。

2・2 海浜変形の分類

海浜の形状を測量するには多くの予算を必要とするが、これらの資料は波や海浜流の資料と同じように、海浜の実態解明には不可欠である。限られた数の資料から海浜の性状を把握するためには、より客観的なデータの整理が必要である。ここでは、自然海浜の断面形状を5つのタイプに分類したとき、任意の海浜断面形状がどのタイプに属するかをパターン認識の方法によって決定する（文献8）。決定関数は多くのデータより数値的に求まるが、ここでは、各海浜断面形に対応するものを乱数を使って予め作成し（図-5）、これらの近似海浜形より確率密度関数 $p(\underline{x} | \omega)$ の係数 C_{ij} を求める。この simulate された海浜が果たして元の海浜パターンにしているかどうかチェックしたものが図-6である。この目的のために、海浜の断面形は三角関数で近似した。図-7は North Carolina の Outer Banks で12時間毎に測定された海浜断面形に適用した結果である。この海浜変化が海浜変形パターン5タイプのどれに対応するかを決定するのが、 $p(\underline{x} | \omega_i)$ が最大となる Beach Type である。本方法は視覚的判断とよく一致する。

3. モンテカルロ法の応用

3・1 モンテカルロ法

微分方程式を用いて現象を解明する方法に対して、確率過程を利用して現象を解決する手法を Stochastic Method とよぶ。モンテカルロ法は後者の代表であり、不規則現象に関連した問題を解くのに大変便利である。本方法は、不確かな変数等、確率変数と考えてもよい変数がある確率密度関数に従うと考え、計算過程中に多数個発生させて、計算の最後に何らかの確率統計的な処理を行って、解を求める。例えば、確率分布関数が任意関数 $P(x)$ で与えられている場合は、これに従うランダム変数は $[0, 1]$ の間の一様乱数 r よりつぎのように求まる。

$$x_i = P^{-1}(r) \quad (46)$$

となる変数 x_i を計算すればよい。

3・2 海底濁度流

我々のまわりの自然界には種々の密度流が形成される。例えば、気象学の前線の周辺、砂漠の砂嵐、濁水の海や湖への流入、冷温排水の周辺など。本節では、海底斜面上で形成される濁度流の密度分布の計算にモンテカルロ法の random walk model を適用する。我々技術者がこの現象の中で最も知りたいのは流速分布と密度分布である。流速分布形は壁噴流の式を用い、密度分布を決定するための固体粒子の運動はつぎの式で与えられる。

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t (\bar{u}(y) + u') \quad (47a)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t (v' - w) \quad (47b)$$

ここで、 x, y = 固体粒子の座標、 Δt = 時間ステップ、 $\bar{u}(y)$ = 濁度流内の流速分布、 w = 固体粒子の沈降速度、 u', v' = 流れの中の乱れによって誘起されるランダム速度成分で、或る確率密度関数より取り出されるランダム数である。これらの確率関数は

$$p(v') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_v} \exp[-0.5 (\frac{v'}{\sigma_v})^2] \quad (48a)$$

$$p(u') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u (1-r^2)^{1/2}} \exp[- \frac{1}{2(1-r^2)\sigma_u^2} (u' - \frac{r}{C} v')^2] \quad (48b)$$

上式の中で

$$r = \frac{\overline{u'v'}}{\sigma_u \sigma_v} \quad \sigma_v = C\sigma_u \quad u'v' = v \frac{du}{dy} - u_*^2 (1 - \frac{y}{h})$$

定数C, Rは流れの物理的状態より決まる。また, 時間ステップは

$$\Delta t = \frac{h(\Delta y)^2}{Ku_*(h-y)y} \quad (49)$$

で計算される。濁度流部の流速分布としてはつぎの式を用いた。

$$\frac{\bar{u}(y)}{u_{\max}} = 1.48 \left(\frac{y}{b} \right)^{1/7} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{0.68y}{b} \right) \right] \quad (50)$$

ここで, $b =$ 水底から $u_{\max} / 2$ までの海底からの垂直距離。実験と計算の密度分布の比較は図-8で示される。

3・3 防波堤の信頼性

一般に防波堤のタイプとしては, 捨石堤, ケーソン堤, 混成堤の3種があるが, 日本の防波堤は混成堤が圧倒的に多い。日本では混成堤の前面は捨石の代わりにコンクリートブロックを用いて保護している。ここでは, コンクリートブロックの部分(文献 2,3,4,5,6)と混成堤全体(文献 1,7)の信頼性をモンテカルロ法を用いて解析する。

(a) コンクリートブロック部分の信頼性

最近, 日本では産業や技術の発達にともなって, 海洋構造物が大型化し, かなり沖の大水深域に建設されるようになったため, コンクリートブロックのサイズも巨大化し, その重量の決定が構造物の設計条件や経済効率により重要な要素を形成するようになった。コンクリートブロックの大きさは与えられた設計条件を使い, ハドソン公式によって算定される。しかしながら, 本公式は種々の問題点を含んでいる。例えば, 来襲波の周期を考慮しない。これは同じ波高の波でも長周期波の場合に被害が大きくなる現場の観測と異なる。また, 本公式では, 来襲波波高の確率的性質, コンクリートブロック間の安息角, 噛み合い効果, 摩擦係数の影響, 碎波の状況等は K_D 値として含まれており, この値を予め予測しておく必要がある。ここでは, 波による個々のコンクリートブロックの運動に着目し, コンクリートブロック全体の信頼性 (Reliability) または, 危険率 (Risk) を求める方法を考える。波動作用のもとで, コンクリートブロックの運動は滑動 (sliding), 回転 (rocking), 浮上 (lift-up) に分類される。上記の中の回転運動を考えよう。抵抗モーメントを M_R , 滑動モーメントを M_S とおくと,

$$M_R = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} c_1 l W \sin \theta \cos \alpha \quad (51)$$

$$M_S = c_2 [(F_D + F_I) c_1 l \cos \theta + F_L c_1 l \sin \theta] + \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} c_1 l W \cos \theta \sin \alpha \quad (52)$$

ここで, $\rho_s =$ コンクリートの密度, $\rho_w =$ 水の密度, $c_1 l =$ 考えているブロックの重心と他のブロックとの接触点との距離, $W =$ ブロックの重量, $\theta =$ ブロックの安息角, $\alpha =$ 防波堤の斜面勾配,

ε_2 = 回転運動しているブロックに対する波力の遮蔽係数, F_D = 抵抗力, F_I = 慣性力, F_L = 揚力。ブロックの回転運動に対する安定条件は $M_R > M_S$ によって与えられる。滑動と浮上に対しても同じような過程より安定条件が求まる。つぎに、コンクリートブロックの可動性条件を考える。コンクリートブロックの幾何学的配置は、施工方法、波動作用等により変化し、前述した安定条件の位置に常に適合するわけでない。ここでの可動性条件とは、ブロックが前述の安定条件の位置のいずれかに対応すると仮定する。したがって、この可動性条件と安定条件を何らかの方法によって結びつけるために、つぎの仮定を導入する。

- (i) 可動性をもつコンクリートブロックの発生する確率は防波堤斜面上に、空間的に一様に分布する。
- (ii) 一サイクルの波に対して可動性を持つコンクリートブロックの数は k 個である。
- (iii) これらの k 個のブロックが可動性を保持する時間は n_i 波動サイクルである。ここで、 $i = 1, 2, \dots, k$ 。

上記の仮定のうち(ii), (iii)は待ち行列理論におけるサービス問題と同じである。待ち行列理論を転用すると、 k は指数分布、 n_i は Poisson 分布によって与えられる。

$$p(k) = \lambda e^{-\lambda k} \quad (53a)$$

$$p(n_i) = \frac{\exp(-\lambda') \lambda'^{n_i}}{n_i!} \quad (53b)$$

ここで、 λ と λ' はパラメーターであり、実験結果との比較では $\lambda = 1$, $\lambda' = 0.3$ ぐらいが適当である。前述した安定条件は、滑動、回転、浮上に適用でき、 f_R = 抵抗力, f_S = 滑動力, f_w = 重量, f_L = 揚力、と定義し、新しい変数 R_s , R_r , R_l をつぎのように導入する。

$$R_s = f_R - f_S \quad (54a)$$

$$R_r = M_R - M_S \quad (54b)$$

$$R_l = f_w - f_L \quad (54c)$$

安定解析に用いられたパラメーターある確率分布をしているとき、上記の新しい変数もある確率分布を形成する。したがって、危険率 (Risk) はそれぞれ

$$P_s = \int_{-\infty}^0 f_s(R_s) dR_s \quad (55a)$$

$$P_r = \int_{-\infty}^0 f_r(R_r) dR_r \quad (55b)$$

$$P_l = \int_{-\infty}^0 f_l(R_l) dR_l \quad (55c)$$

となり、信頼性は1から危険率を引いたものとなる。もし、これらの3つの運動が各々独立ならば、全体の危険率は確率法則より

$$P_e(i) = P_s + P_r + P_l - P_s P_r - P_r P_l - P_l P_s + P_s P_r P_l \quad (56)$$

となる。さらに、防波堤全体の危険率は防波堤表面を被覆しているコンクリートブロックの数を m とすると

$$P_w = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - P_e(i)] \quad (57)$$

で与えられる。波高の確率分布は Rayleigh 分布を用い、周期に関してはその 2 乗が Rayleigh 分布とした。安定解析中に使用する式に含まれるパラメーターに対しては、測定値や経験にもとずいた適当な確率分布を仮定する。コンクリートブロックに作用する波圧式としては合田式を転用した。具体的に信頼性を求めるためには、実際の防波堤の諸元が与えられなければならない。例として、 $\rho_s / \rho_w = 2.23$, $\cot \alpha = 4/3$, $K_D = 8.3$, $H_s = 4$ m, $T_s = 10$ sec, 水深 = 6 m とするとハドソン (Hudson) 公式よりコンクリートブロックの重量は約 8 トンになる。図-10 は有義波波高を増加させた場合の危険率の変化を示す。予想できるように、有義波波高が増加するにつれて危険率も増加する。図-11 はコンクリートブロックの重量を変化させた場合の危険率の変化を描く。重量が増加するにつれて危険率は減少する。さらに、図-12 は有義波周期を変化させた場合の危険率の変化を示す。周期が増加するにつれて、危険率が増加することがわかる。図-13 は防波堤ののり先水深と危険率との関係を示す。水深が増加すれば、防波堤への来襲波波高が増大するために危険率が増加する。図-14 は防波堤斜面勾配の危険率への影響を示す。本モデルではコンクリートブロック同志の噛み合い効果を見逃しているため、勾配の増大は危険率の増加に結びついている。図-15 は日本における被害を受けたコンクリートブロック堤の被災時の条件で危険率を計算し、その度数分布を示したものである。ハドソン公式によって計算されたコンクリートブロックの重量を用いて危険率を求めるとはほぼ 0.1 から 0.3 の間にあるが、被災時の危険率はかなり散らばっている。つぎに、より信頼性のある防波堤の断面形を考える。現場での観察によると、コンクリートブロックの顕著な移動は堤の水面付近で著しいことが報告されている。また、本モデルによって防波堤の表面に沿って危険率を計算すると図-16 のようになり、現場での観察とよく一致する。防波堤のより望ましい形状として、防波堤の水面付近の防波堤勾配を小さくしたモデルを考える。これは、S 型防波堤と呼ばれ、平衡状態の自然海浜が類似の形状を呈する。これにもとづいて防波堤を考えると図-17 のようになる。ここで、 γ は緩勾配部の斜面の角度を、 z はこの部分の垂直距離を与える。同図には、 $\gamma = 0.329$ radian, $z = 1.65$ m のときの危険率の防波堤斜面に沿う空間分布を示す。図-16 と比較すれば明らかなように、危険率はかなり減少していることから、この形状の工学的価値は十分あると思われる。つぎに 3 種類の z の値に対して、 γ を変化させた時の危険率の変動を図-18 に与える。 z の値の違いによって危険率の変化特性が異なる。これらの結果より防波堤の水面付近の緩勾配部の範囲が広くなれば、防波堤の信頼性は高まる。しかしながら、これは防波堤の断面積を増加させるために、防波堤の建設費を増大させる。なぜならば、概ね、建設費は防波堤の断面積に比例すると考えられる。ここでの議論では、防波堤の維持及び修理に必要な経費は無視する。したがって、防波堤の経済性を考慮するならば、建設費すなわち断面積と信頼性を結びつけて最適性を求める必要がある。そこで、これを示す係数として、仮に最適設計指標とよぶと

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{P_f}{P_{f_0}} + \frac{A}{A_0} \right) \quad (58)$$

が定義できる。ここで、 P_f = S字型防波堤の危険率、 P_{f_0} = 防波堤斜面が一様勾配の時の危険率、 $A = P_f$ に対応する防波堤の断面積、 $A_0 = P_{f_0}$ に対応する防波堤の断面積。最適設計方法として危険率が小さく、かつ建設費の低い断面形を選ぶことにすれば、式(58)の最適設計指標を最小とするようなS字型防波堤の諸元を決定することになる。種々の z および γ の値に対して検討するのであるが、ここでは3種の z の値に対して防波堤断面積の変化を γ に対してプロットすると図-19のようになる。図-20は前図に対応する最適設計指標を示す。種々の値について検討した結果、最適設計指標を最小にする z と γ の組合せは、1.65m、0.329 radianである。このとき、危険率は48%減少し、建設費は18%増加する。建設費が多少増加しても、危険率が減少し、防波堤の被災頻度が減少すれば防波堤の維持管理費も減少し、かなり経済性は高まる。最後の問題は施工の容易さだけである。

(b) 混成堤の信頼性

コンクリートブロックの部分を除く混成堤の破壊モードとしてはつぎの4つが考えられる。

- i. ケーソンの滑動
- ii. ケーソンの転倒
- iii. 捨石部の破壊
- iv. 地盤の崩壊

ここでは、これらの信頼性について検討する(図-21)。ケーソンに作用する波の水平力を H 、揚圧力を U 、ケーソンの重量を W (図-22)、港内側のケーソン底部に関する水平力、揚圧力のモーメントを M_h 、 M_u とする。滑動運動の抵抗力 F_R と滑動力 F_s はそれぞれ

$$F_R = \mu (W - U) \quad (59a)$$

$$F_s = H \quad (59b)$$

となる。ここで、 μ = 静摩擦係数。信頼性関数は

$$Z_s = F_R - F_s \quad (60)$$

である。転倒運動の抵抗モーメント M_s と滑動モーメント M_R はそれぞれ

$$M_s = M_u + M_h \quad (61a)$$

$$M_R = W t \quad (61b)$$

となるので、信頼性関数は

$$Z_0 = M_R - M_s \quad (62)$$

捨石部の破壊は Bishop の円弧法によって検討を加える。円弧に沿う滑動モーメント M_s ' と抵抗モーメント M_R ' は

$$M_s = \sum_{i=1}^n (W_i + u_i) R_o \sin \beta_i \quad (63a)$$

$$M_b = \sum_{i=1}^n \tau_{fi} l_{bi} R_o \quad (63b)$$

ここで、 w_i = i 番目の土片の重量、 u_i = i 番目の土片に作用する外力、 R_o = 円弧滑り面の半径、 β_i = i 番目の土片の円弧滑り面が水平となす角度、 τ_{fi} = i 番目の土片の円弧滑り面に作用する剪断応力、 l_{bi} = i 番目の土片の円弧滑り面の長さ。 i 番目の土片の円弧面に作用する垂直力が N_i ならば、剪断応力は

$$\tau_{fi} = \frac{N_i}{l_{bi}} \tan \phi \quad (64)$$

となる。ここで、 ϕ = 摩擦角。 i 番目の土片の鉛直方向の力の釣り合いより

$$N_i = \frac{W_i + u_i}{\cos \beta_i + \tan \phi \sin \beta_i / F_s} \quad (65)$$

したがって、

$$F_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (W_i + u_i) \sin \beta_i} \sum_{i=1}^n \frac{(W_i + u_i) \tan \phi}{\cos \beta_i + \tan \phi \sin \beta_i / F_s} \quad (66)$$

これより安全率 F_s が求まる。信頼性関数を

$$Z_B = M_R' - M_s' \quad (67)$$

とおくと、 $Z_B > 0$ は $F_s > 1$ に対応する。最後に、ケーソンの端部が地盤に作用して地盤の崩壊が発生することを考える。この信頼性関数は

$$Z_g = \tau - P_e \quad (68)$$

ここで、 τ = 地盤部分の持つ剪断応力、 P_e = ケーソン端部に作用する応力。4つの信頼性関数中には不確定パラメーター μ と λ (波力減衰係数) を含み、前者には正規分布を、後者には一様分布を与えた。来襲波波高は Rayleigh 分布を、周期はそれの2乗が Rayleigh 分布とした。これらを冲で与えて、防波堤の場所までの波の変形を考慮した。以上に述べた4つの破壊モードがそれぞれ独立とすると、全体の危険率はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} P &= P_s + P_o + P_b + P_g \\ &- P_s P_o - P_o P_b - P_b P_g - P_g P_s \\ &+ P_s P_o P_b + P_o P_b P_g + P_b P_g P_s + P_g P_s P_o \end{aligned} \quad (69)$$

ここで、 P_s = 滑動による危険率、 P_o = 転倒による危険率、 P_b = 捨石部斜面破壊の危険率、 P_r = 端し圧による地盤破壊による危険率。つぎに、有義波波高、周期、のり先水深、ケーソン幅、海底勾配を変化させた場合の危険率を示したのが、図-23, 24, 25, 26, 27である。その結果、最も危険率が高いのは端し圧による地盤破壊であり、来襲波の周期も顕著な影響を及ぼす。

4 まとめと考察

最近、海岸工学の諸現象の解析に計算機がかなり重要性を占めるようになった。これは、海岸工学理論の発達が大きく貢献している。本稿では Stochastic Methods (確率過程的方法) を海岸工学の分野にどのように適用してきたかを種々の現象への適用例を含めて解説した。今後、このような方法は水理学、河川工学、水文学、水資源工学においてなされたように、複雑な現象の解析に対して多くの適用例を見出していくだろう。

参考文献

1. 山本方人, 水村和正, 遠藤泰司, 消波工被覆混成堤の信頼性設計, 海岸工学論文集, 36巻, 1989, pp.658-662.
2. Mizumura, K., Yamamoto, M., Endo, T., and Shiraishi, N., "Reliability Analysis of Rubble-Mound Breakwaters," Proc. 21st Int. Conf. on Coastal Eng., Malaga, Spain, 1988.
3. Yamamoto, M., Mizumura, K., Endo, T., and Shiraishi, N., "Reliability-Based Design of Rubble-Mound Breakwaters," Proc. 21st Int. Conf. on Coastal Eng., Malaga, Spain, 1988.
4. Mizumura, K., Yamamoto, M., and Endo, T., "Risk Analysis of Rubble-Mound Breakwaters," Proc. 5th IAHR Conf. on Stochastic Hydraulics, Birmingham, U.K., 1988.
5. Mizumura, K., Yamamoto, M., and Endo, T., "Risk-based Design of Rubble-Mound Breakwater," Proc. 5th IAHR Conf. on Stochastic Hydraulics, Birmingham, U.K., 1988.
6. 運輸省第一港湾建設局, (財)沿岸開発技術研究センター, 新潟港沈埋トンネル情報化施工調査報告書——港湾関連構造物への信頼性設計の適用性——, 1989, pp.171-183.
7. Yamamoto, M., Mizumura, K., Endo, T., and Shiraishi, N., "Reliability Analysis of Composite Breakwaters Protected with Armor Blocks," Proc. 22nd Int. Conf. on Coastal Eng., Delft, 1990.
8. Mizumura, K., "Application of Pattern Recognition to Coastal Profile Change," 1st Int. Conf. on Computer Methods and Water Resources, Morocco, 1988.
9. Mizumura, K., "Application of Pattern Recognition to Rainfall-Runoff Analysis," Madralin Workshop, Warsaw, Poland, 1990.
10. Mizumura, K., "Computer Simulation of Suspended Solid Dispersion in Gravity Current," 1st Int. Conf. on Computer Methods and Water Resources, Morocco, 1988.
11. Mizumura, K., "Prediction of Water Level at the Inlet of the Tidal Lake," Jour. of WW Div., ASCE, Vol.108, No.WW1, Feb. 1982.
12. Mizumura, K., "Prediction of Water Surface Levels in the Tidal Lake," Int. Jour. of Coastal Eng., Elsevier, June 1982.

13. Mizumura, K., "Multipurpose Gate Operation," Proc. of 18th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, 1982.
14. Mizumura, K., "Application of Control Theory to Coastal Process," IAHR, Vol. 7, Aug. 1983.
15. Mizumura, K., "Application of Kalman Filter to Oceanic Data," ASCE, WW Div., Aug. 1984.
16. Chiu, C.L. (Ed.) Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources, Univ. of Pittsburgh.

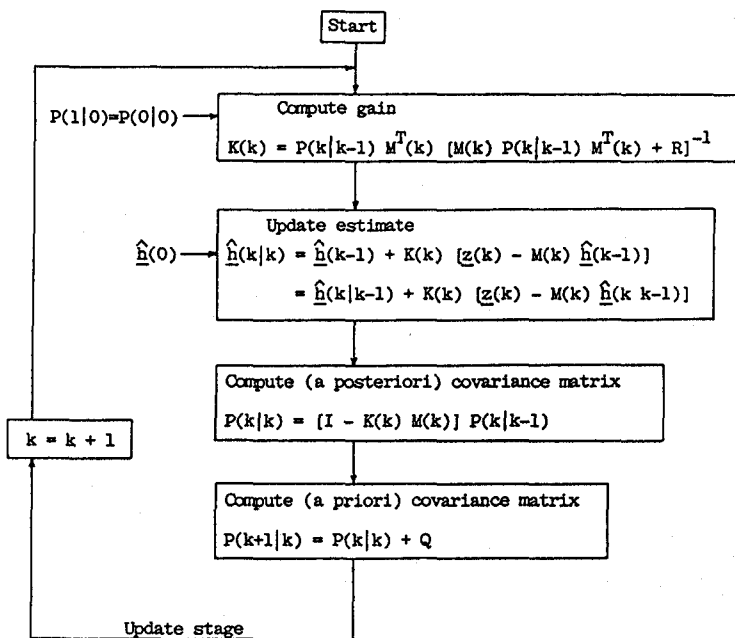


図-1 カルマンフィルターのアルゴリズム

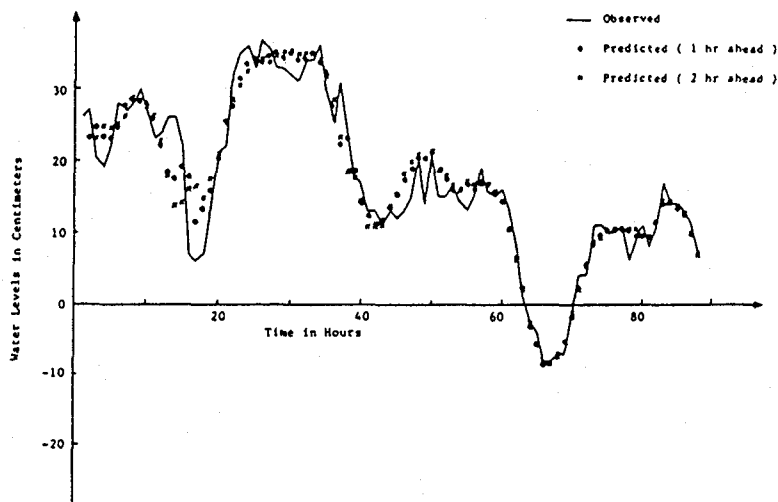


図-2 予測と観測水位の比較

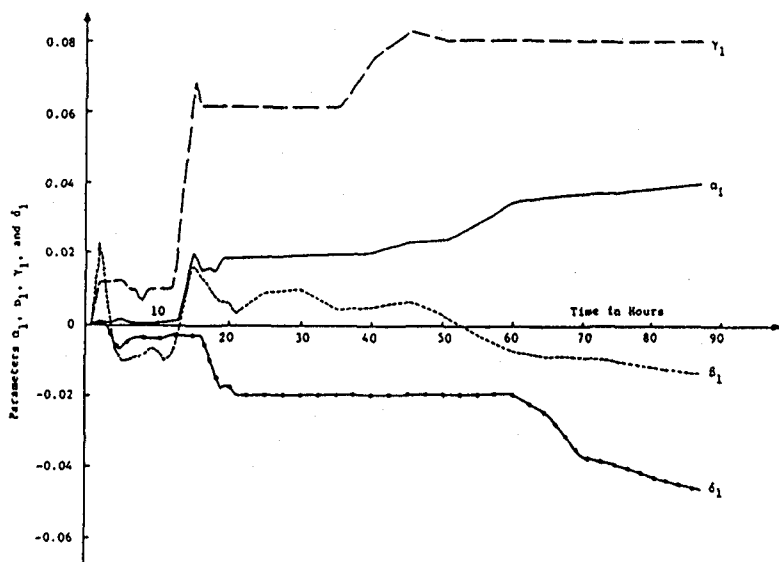


図-3 パラメーターの同定結果

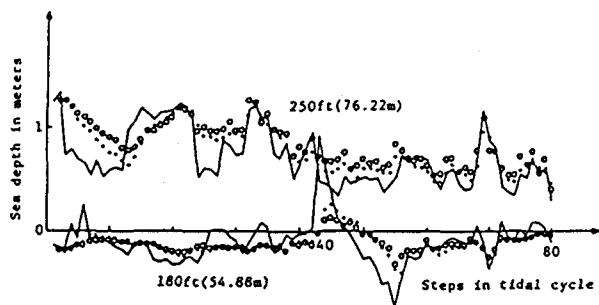
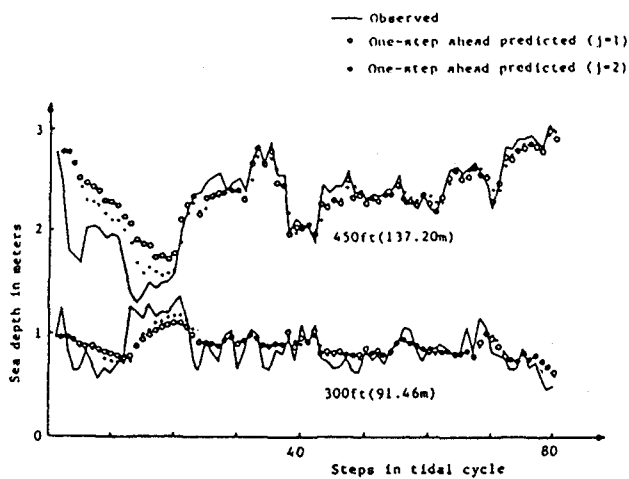


図-4 予測と観測水深との比較

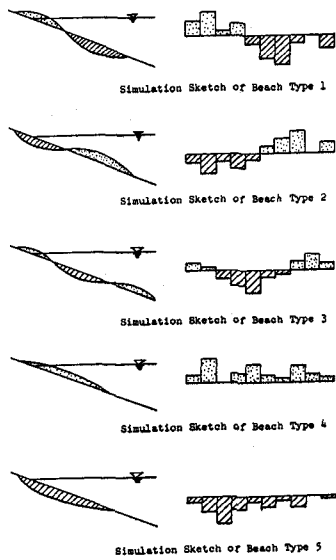


図-5 海浜のシミュレーション方法

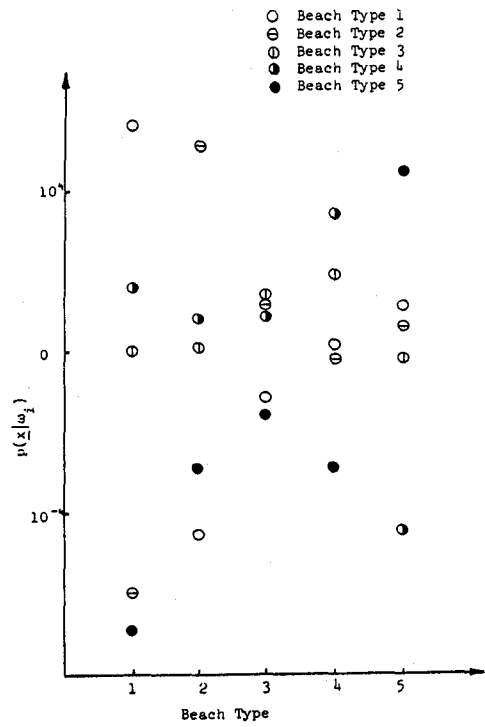


図-6 シミュレートした海浜の beach type

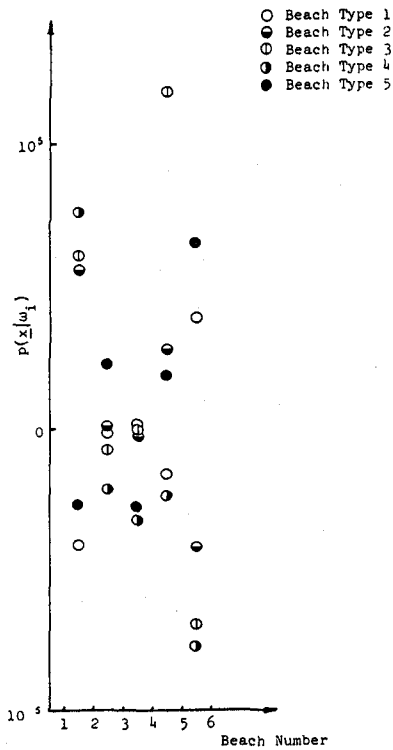


図-7 現地海浜の beach type

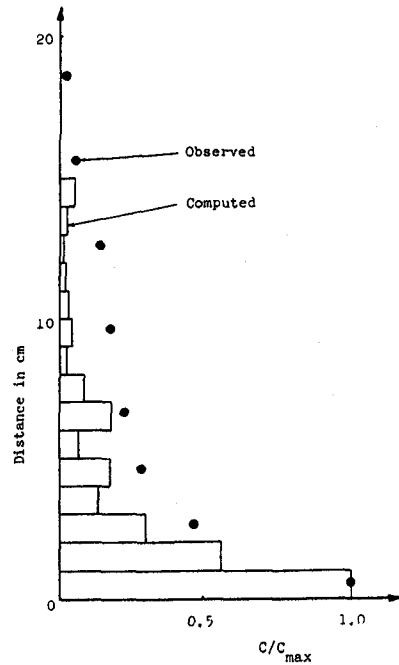


図-8 密度分布の比較

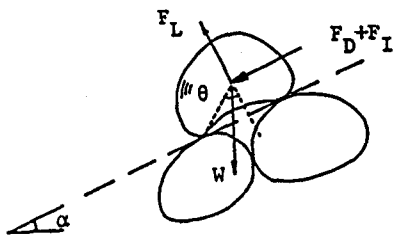


図-9 回転運動

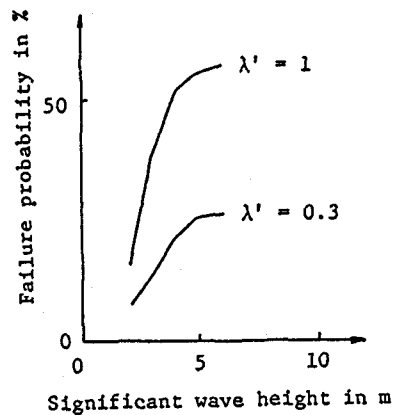


図-10 有義波波高の危険率への影響

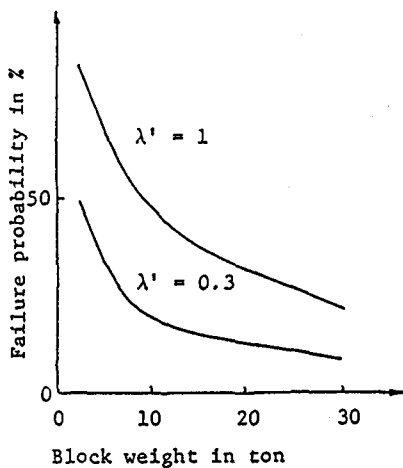


図-11 ブロック重量の危険率への影響

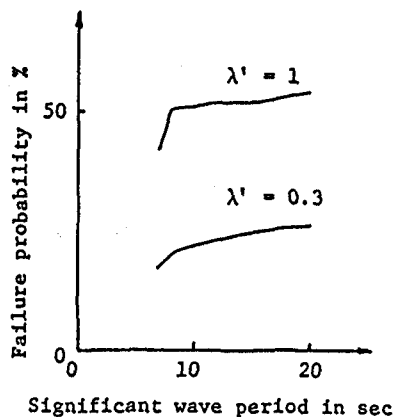


図-12 有義波周期の危険率への影響

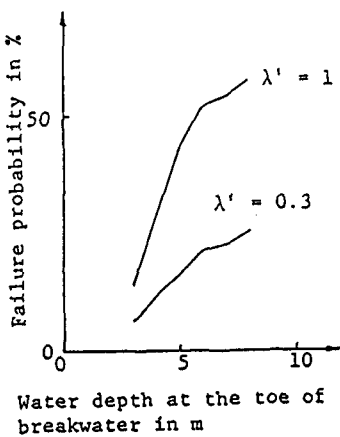


図-13 のり先水深の危険率への影響

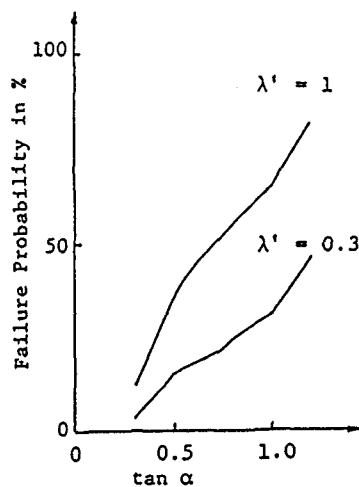


図-14 防波堤斜面勾配の危険率への影響

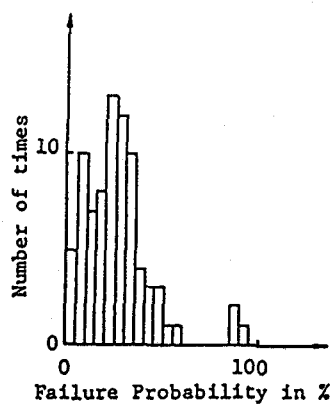


図-15 被災防波堤の危険率

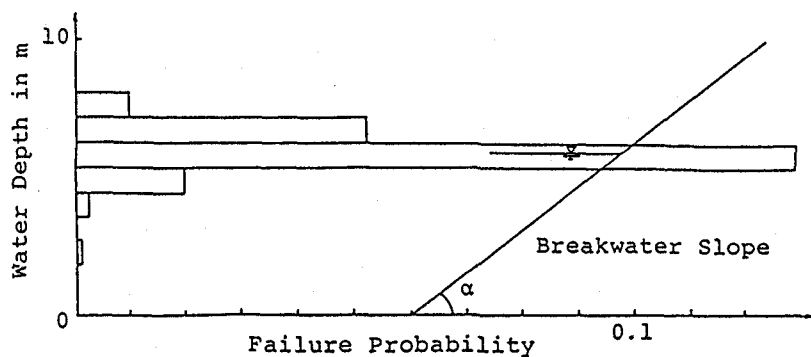


図-16 危険率の斜面分布

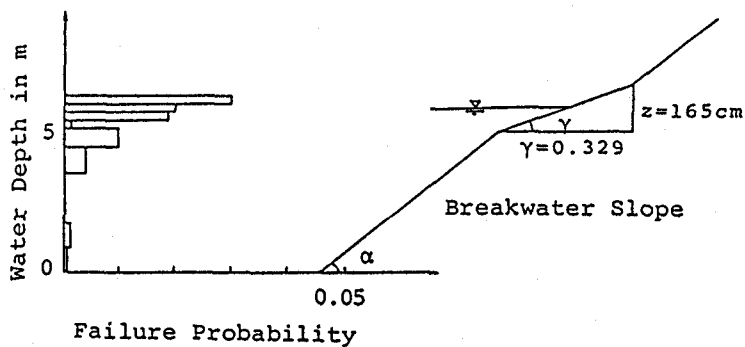


図-17 S字型防波堤と危険率

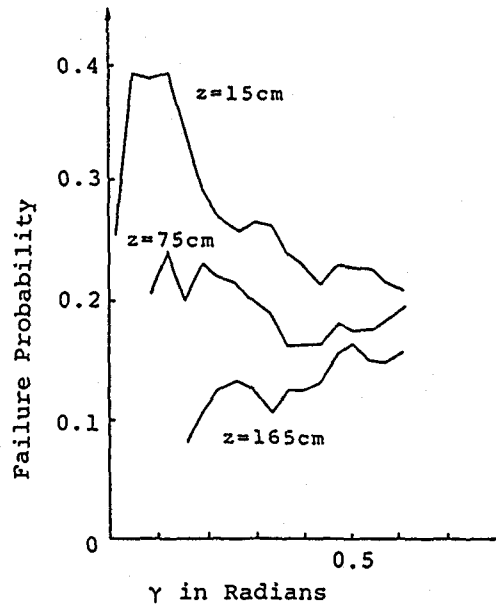


図-18 危険率の変動

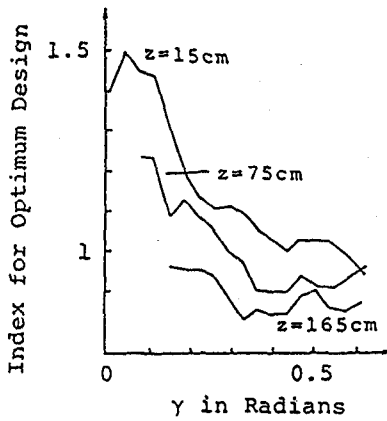


図-19 最適指標の変化

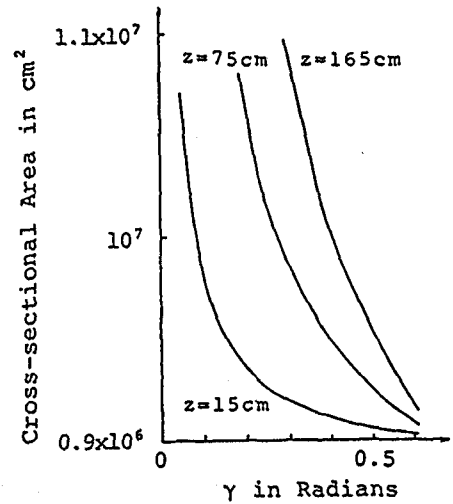


図-20 防波堤の断面積

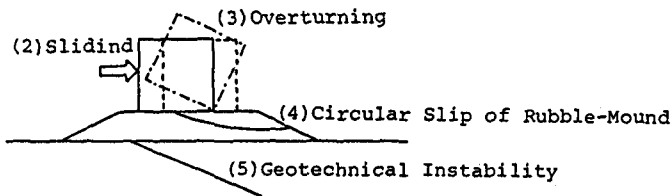


図-21 防波堤破壊の種類

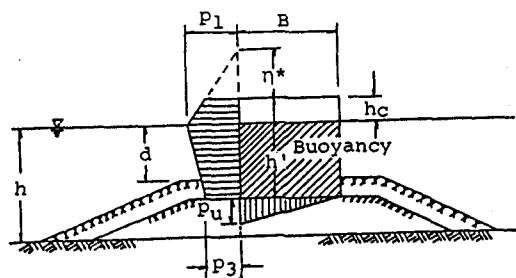


図-22 防波堤に作用する波力

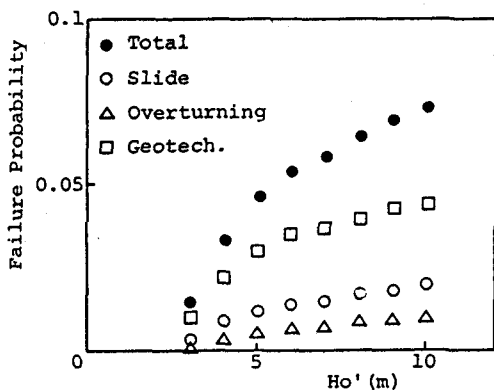


図-23 有義波波高の危険率への影響

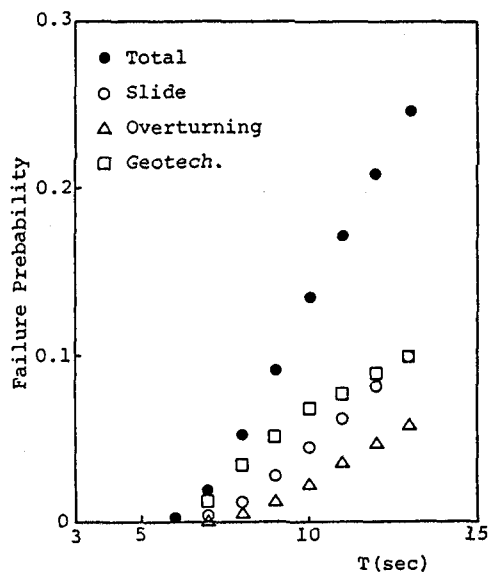


図-24 有義波周期の危険率への影響

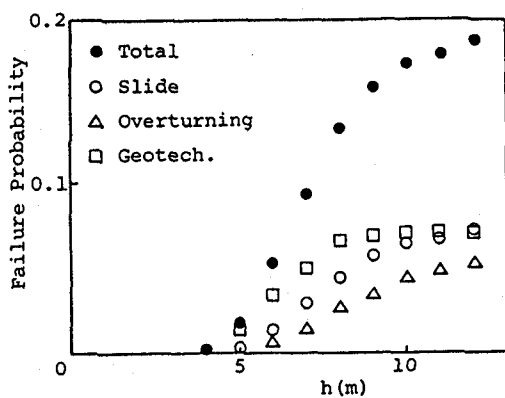


図-25 のり先水深の危険率への影響

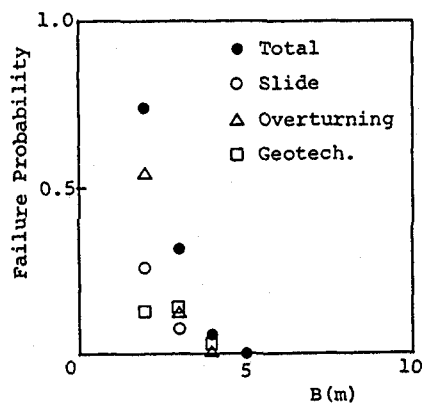


図-26 防波堤天端幅の危険率への影響

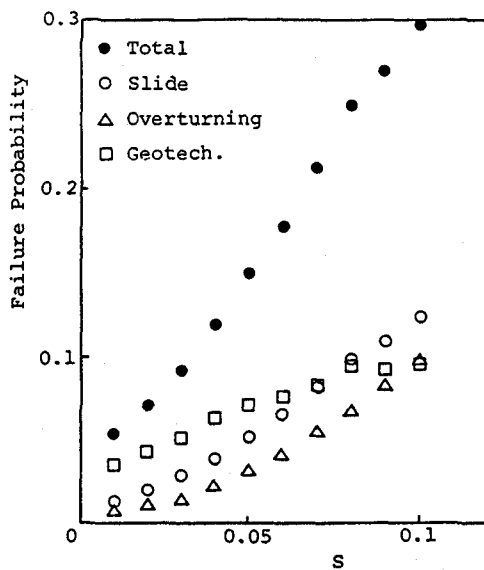


図-27 海底勾配の危険率への影響