

有限要素法による水理解析

Finite Element Methods in Hydraulic Problems

富 所 五 郎

Goro TOMIDOKORO

1. はじめに

流れ解析に有限要素法が応用され始めてから既に20年以上経過しようとしている。この間、有限要素法の応用範囲はポテンシャルフローから拡散、津波、湖流、開水路流へ、線形問題から非線形問題へ、一次元問題から二次元・三次元問題へ、定常問題から非定常問題へと広がり、たくさんの研究報告と、その解説^{1), 2)}がなされている。

また、水理解析に関する有限要素法は、本研修会においても既に川原により”水理解析と有限要素法”と題して³⁾紹介されており、またこれに関する邦文の著書も、数は少ないが解説的なものから専門的なものまで含め出版されている^{4), 5), 6)}。このため、有限要素法による水理解析に関する解説はもはや不必要であるとも考えられる。しかし、これらの報告や著書では、実際に数値計算を行うさいに問題となる各種の物理定数の算定法、境界条件の設定、数値振動の抑制などの説明が少ない。

そこでここでは、合流部の段波、開水路の三次元流れと拡散、湖のセイシュの固有周期を解析例としてとり上げ、有限要素法に合った解析モデルの導出や上述の問題を中心にして解説することにする。

2. 有限要素法の基礎

1.で述べたように有限要素法は、今や一般的な数値解析手法ではあるが、ここでは、後での説明の都合上、有限要素法の基本的な手順とその簡単な紹介を行う。

2.1 有限要素法の基本的な手順

水理現象を記述する微分方程式の未知変数は連続であるため、このままでは計算機で扱えない。このため、これらの未知量変数を解析領域内の独立した点における離散量に置き換えて解析することが必要となる。この離散化手法、つまり数値解析法として有限要素法がある。これは基本的には以下に示す手順に従って未知変数の値が決定される。

1) 解析領域を所定の有限要素に分割する。

一次元解析には線要素が、二次元要素には三角形要素が用いられることが多い。

2) 要素内で未知変数の近似関数を決める。

要素内での未知変数を節点のそれらと決められた関数(形状関数)の積を用いて近似する。この関数は、普通線形の多項式が用いられる場合が多い。

3) 個々の要素に対する要素方程式を作る

近似関数を現象を支配する微分方程式に代入すると残差が生ずるが、この残差と重み関数を直交させることにより要素方程式が得られる。この重み関数の選び方に選点法、モーメント法、最小二乗法、Galerkin 法があるが、非線形微分方程式に適用可能な、重み関数として形状関数を用いる Galerkin 法が最も一般的に用いられている。

4) 個々の要素方程式を重ね合わせて全体方程式を作る。

要素方程式の各項を個々の要素について求め、重み関数に従って加え合わせ全体方程式を得る。

得られた全体方程式は、通常は連立方程式となるが、これを境界条件等を加味して解いて、各々の節点等の未知変数の値を決める。必要ならば既知となった未知変数を用いて、他の物理量を計算する。

以上の手順において注意すべきことは、要素方程式は解析領域に要素が一つしか存在しない場合には数学的に正しいが、多数存在する場合は正しくない。これは、ある節点の重み関数は、この節点を共有する全要素に共通して用いられるためである。換言すると、全体方程式は成立しても、この方程式から個々の要素に対する要素方程式は導けない。また、要素方程式が各要素毎に成立すると、同一節点等で複数の解が得られ、解析物理量が連続とする条件に反することになる。

しかし以上の手順は、数学的には厳密さに欠けるものの、計算機プログラムの都合上、慣用的に上述のように表わされている。

2.2 Galerkin 有限要素法⁶⁾

ここでは、Galerkin 有限要素法を、次の二次元問題を取り上げて説明する。

$$\frac{\partial}{\partial x}(D_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y \frac{\partial T}{\partial y}) + q = 0 \quad (2-1)$$

Galerkin 法は重み付き残差法の一手法で、先ず未知変数 \$T\$ を、総和規約を用いて

$$T = N_i \cdot T_i \quad (2-2)$$

で近似する。ここに、\$i=1, 2, \dots, n\$、\$T_i, N_i\$ はそれぞれ節点

\$i\$ における \$T\$、補間関数、\$n\$ は全節点数、\$q\$ は定数である。ここで補間関数は形状関数ともいわれ、重み付き残差法では解析領域全体で定義された関数を用いるのに対して、有限要素法では \$i\$ 節点を含む要素内で定義される局所関数（図2-1の斜線部内では値を持ち、他の要素では零の関数）を用いる。このような局所関数を選ぶことにより、最終的に得られる全体方程式を行列形式で表した式は、零成分が多く、しかも節点番号付けに依っては対角近くに零でない成分の集中する、高精度かつ解き易い連立方程式となる。

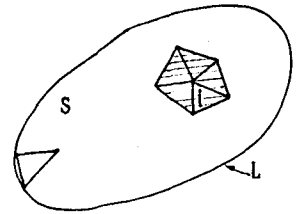


図2-1 解析領域

重み付き残差法においての節点未知変数値 \$T_i\$ は、近似関数を式(2-1)に代入した時生ずる残差と重み関数を解析領域内で直交化させることにより、決定される。Galerkin 法では重み関数として形状関数を用いるので、重み付き残差方程式は

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(D_x \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j) + q \right\} \cdot dS = 0 \quad (2-3)$$

である、ここに、\$i=1, 2, \dots, n\$ で、近似関数の添え字は重み関数のそれと区別するため \$j\$ に変えている。ここで、部分積分により上式は次のように変形される。

$$\int_S \left\{ D_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + D_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j \right\} - N_i \cdot q \cdot dS - \int_L N_i \cdot \left\{ D_x \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j n_x + D_y \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j n_y \right\} \cdot dL = 0 \quad (2-4)$$

ここに、\$n_x, n_y\$ は解析境界に立てた外向き単位法線ベクトルの \$x, y\$ 成分で、これらの項を含む線積分は解析境界のみで行えば良い。

上式の積分を全節点について行くと全体方程式が得られる。しかし、計算機プログラム上からは、各節点毎にその節点を含む要素で積分を行うことは、手続きが複雑である上に、要素の引用回数も多くなり計算時間もかかる。そこで 2.1 で述べたように、積分は要素毎に実施される。この場合、上式の添え字 \$i, j\$ は、例えば三角形一次要素の頂点を \$i, j, k\$ とすると、\$i=i, j, k, j=i, j, k\$ となり、上式は要素方程式となる。

3. 合流部の段波

ここでは合流部における段波の二次元数値解析を行う。有限要素法は差分法などに比し、不規則な境界を忠実に表現でき、境界条件も入れ易いという特徴を持ち、拡散問題や潮流解析などの分野ばかりでなく河川の不定流に対しても用いられている⁷⁾。この方法の欠点は、計算時間が長いことであるが、ここではこれを一次元要素と二次元要素の併用による節点数の減少と質量行列の集中化などにより解消する。また数値解の安定性は、人工粘性項の導入や平滑化によるのではなく運動量拡散項を考慮して達成する。最後に数値解析結果を模型実験結果と比較し、この数値実験法の妥当性を検討する。

3.1 基礎方程式⁸⁾

二次元の不定流の基礎方程式は、図3-1において z 方向に流速を一定とすると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I_x - S_x) + A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = g(I_y - S_y) + A_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad (3-3)$$

が得られる。ここに、 x 軸は x 方向の平均河床勾配 I_x に平行に、 y 軸は y 方向の平均河床勾配 I_y に平行に水底付近にとり、 z 軸は xy 平面に直角に上方を正としている。また、 u, v はそれぞれ x, y 方向の流速成分、 t は時間、 h は水深、 g は重力加速度、 A_h 水平渦動粘性係数である。また、 S_x, S_y は x, y 方向の摩擦勾配で Manning 式より

$$S_x = \frac{n^2 u \sqrt{(u^2 + v^2)}}{h^{4/3}}, \quad S_y = \frac{n^2 v \sqrt{(u^2 + v^2)}}{h^{4/3}} \quad (3-4)$$

である。ここに、 n は Manning の粗度係数である。

一次元の不定流に対する基礎式は上式で v, y を含む全ての項を除き

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I_x - S_x) + A_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0 \quad (3-6)$$

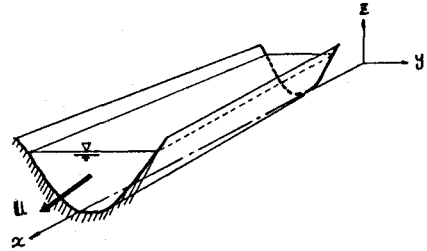


図3-1 座標の定義

となる。式(3-1)から(3-6)の誘導においてなされたいくつかの仮定は、流速が z 方向にはば一様とみなせれば妥当なものであるが、一様でない場合は誤差が大きくなり上式は用いることができなくなる。このような時は何らかの形で z 方向の流速分布を考慮した解析が必要となる。

3.2 有限要素法による基礎式の離散化

まず、Galerkin 有限要素法を用いて二次元不定流の基礎式の空間変数に対する離散化を行うために、それぞれの変数の近似関数を、総和規約を用いて

$$u = N_i \cdot u_i, \quad v = N_i \cdot v_i, \quad h = N_i \cdot h_i \quad (i=i, j, k) \quad (3-7)$$

などとする。ここに、 N_i は三角形一次要素の形状関数、 i, j, k はその頂点である。つぎに式(3-7)を代入した式(3-1)から(3-3)に、重み関数 N_i をかけ要素内で積分すると、単一要素の場合

$$\left. \begin{aligned} M_{i,j} \cdot \dot{u}_j + R_{i,j,k} \cdot u_j u_k + Q_{i,j,k} \cdot u_j v_k + E1_{i,j} \cdot h_j &= T_i \cdot I_x - g M_{i,j} \cdot S_{xj} + G_{i,j} \cdot u_j - H_{i,j} \cdot u_j \\ M_{i,j} \cdot \dot{v}_j + R_{i,j,k} \cdot v_j u_k + Q_{i,j,k} \cdot v_j v_k + E2_{i,j} \cdot h_j &= T_i \cdot I_y - g M_{i,j} \cdot S_{yj} + G_{i,j} \cdot v_j - H_{i,j} \cdot v_j \\ M_{i,j} \cdot \dot{h}_j + K1_{i,j,k} \cdot u_j h_k + K2_{i,j,k} \cdot v_j h_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

である。ここに、 $i=i, j, k$, $(\cdot)$ は時間微分を意味する。各係数は文献8)を参照されたい。要素が多数

存在する場合は、式(3-8)の各項を全ての要素について求め、これらを重み関数に従って重ね合わせれば、二次元不定流の基礎式の空間変数に対する離散化方程式が得られる。

つぎに、一次元不定流の空間変数に対する離散化に対しても形状関数を N_i とすると、二次元不定流の場合と同様にして式(3-5)、(3-6)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} \cdot \dot{u}_j + R_{ijk} \cdot u_j u_k + E_{ij} \cdot h_j &= T_i \cdot I_x - g \cdot M_{ij} \cdot S_{xi} + G_{ij} \cdot u_j - H_{ij} \cdot u_j \\ M_{ij} \cdot \dot{h}_j + K_{ijk} \cdot u_j h_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

ここに、 i, j, k , $(\cdot)$ は時間微分を意味する。各係数は文献8)を参照されたい。

また、時間変数に対しては two-step Lax-Wendroff法⁹⁾を用いて離散化を行う。

3.3 数値解析に伴う諸問題の解決法

(a) 質量行列の集中化¹⁰⁾

式(3-8)または式(3-9)の左辺の時間微分項以外は全て右辺に移行し、要素全体について重ね合わせると、 $[M] \cdot d\{V\}/dt = \{F\}$ となる。ここに $[M]$ は M_{ij} を成分とする正方行列、 V は u_i, v_i, h_i の未知変数ベクトル、 F は V の関数ベクトルである。この式は、時間変数に対する離散化後には連立方程式となり、これを解くには、質量行列 $[M]$ の逆行列を求めねばならない。このため、計算時間が大変かかることになる。そこで、ここでは計算時間を節約するために、質量行列の集中化なる方法を用いる。これは近似的に連立方程式の解を求める方法で、行列の各行成分をその行の対角成分に加え合わせ、その他の行列成分はすべて零にするものである。これにより、逆行列を求めずに解が得られる。近似解の精度は、対角成分の値が大きいほど良くなる。一般に、質量行列はそのようになっているので、ある程度の精度が望める。精度については4.4(b)の結果で述べる。

(b) 一次元・二次元要素の併用とその接合⁹⁾

ここでは計算時間をさらに短縮するため、一次元要素と二次元要素の併用を行う。これは、流れの物理量の断面方向の変化の激しい合流部附近は二次元解析を行い、これ以外の変化の無視できる区域では一次元解析しようとするものである。これにより、解析領域全体に二次元メッシュを組むよりも節点数を大幅に減少でき、また必要データ数も少なく、計算時間の短縮が可能となる。しかし、この時一次元要素と二次元要素の接合が問題となるが、ここではつぎのように行った。

例えば、図3-2のように一次元要素に二次元要素の接点 i, j, k が接するとする。ここに点線は $m-1$, m の断面を四等分点の対応する点を結んだものである。この時一次元要素の右の点 m の一次元要素の寄与は、二次元要素の節点 i, j, k に点線で区切る面積に比例して分配する。この計算で m の未知量の値としては、接する二次元要素の点 i, j, k の未知量の値を点線で区切る面積で加重平均したものとする。こうすると二次元要素に接する一次元要素の節点の未知量は式(3-9)に未知量として入れなくてもよいことになる。ここでは一次元要素に接する二次元要素の節点は全て3ヶであるが、これ以外の数の場合も同様に処理してよい。

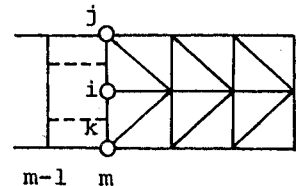


図3-2 一次元・二次元要素の接合部

(c) 渦動粘性係数

従来、衝撃波面の形成を含むような非線形波動現象の数値解析を行う場合、あらかじめスキームに粘性項に相当するものを含ませておき、粘性係数を小さくすることにより、発生する衝撃波の幅も十分に小さくなり、実用上不連続とみなせる解が得られた。しかしこれは粘性係数の値をどの程度にするかなどの問題が多い。一方 式(3-1)、(3-2)、(3-5)の運動量拡散項は、それ自体散逸効果を持っており、新たに散逸効果を導入しなくとも、衝撃波問題を取り扱える。渦動粘性係数の値としては $A_n = Ku$

u_*h とする。ここに u_* は摩擦速度で $u_* = g h I$ と Manning の等流公式より $u_* = n \sqrt{g(u^2 + v^2)} / h^{1/6}$ と近似する。これを代入して

$$A_h = K n \sqrt{g(u^2 + v^2)} \cdot h^{5/6} \tag{3-10}$$

となる。K は定数で普通開水路では $K \approx 6.0$ としているが、段波の波先の附近では上下の混合が激しいのでこれより大きくする必要があるかも知れない。段波が、その波先付近の渦動粘性係数の値によりどのように変化するかは、文献8)を参照されたい。

(d) 流量補正

ここでは、壁面に垂直な流速は全て零としたが、図3-3に示す合流部の隅角点 a, b ではこの拘束条件を入れることができない。このため、図に示す流速成分により ①, ②, ③, ④各要素に流入が生ずるが、実際は壁からの流入はないので何らかの形でこれを補正しなければならない。この一方法として、各流速成分による流入と逆の流出を各要素に与え連続式の補正を行ってみる。この補正により連続条件がどの程度満足されるか検証のため、ある時刻 t の適合度 $Mc(t)$ を

$$Mc(t) = \{ \int_0^t Q \cdot dt - \int_S M \cdot ds \} / \int_0^t Q \cdot dt \tag{3-11}$$

とする。ここに右辺の分子の第1項は解析領域に流入する流量、第2項は時刻 t における定常状態からの解析領域内における流体の体積増加量を示す。

図3-4 は解析結果の一部であり、流量の補正により連続条件はほぼ満足される。しかしこの方法は単に連続式の補正を行ったのみで、運動方程式については何も行ってない。両方の式を満足させるには a, b 点付近の要素を小さくし、壁からの流入を実質的に零としてしまうことである。しかしこの方法は要素数、節点数を増し莫大な計算時間を費し、実際には不可能である。

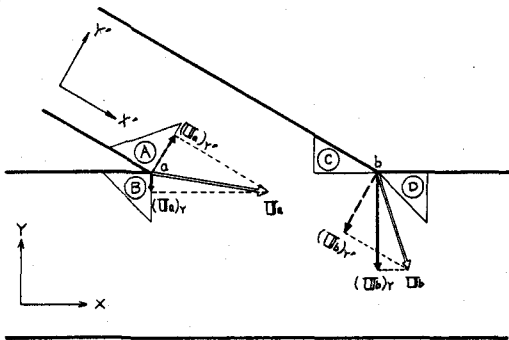


図3-3 合流部

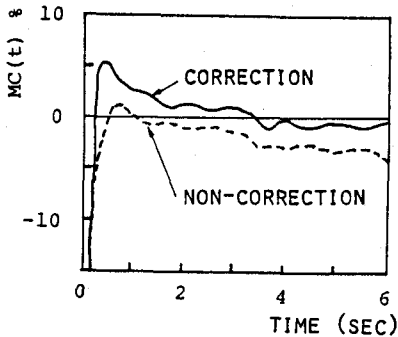


図3-4 連続条件の適合度

3.4 模型実験結果との比較

(a) 実験水路と有限要素メッシュ

実験水路は幅 30cm、長さ 5m、路床こう配 1/200 の支水路が 30° の角度で幅 50cm、長さ 14m、路床こう配 1/300 の主水路の上流より 6m の位置に合流する水路である。粗度は幅 1.5cm、高さ 1cm の木片を流れ方向に 6.25cm の間隔に水路床に敷いてつけたが、検定して得られた Manning 粗度係数は 0.025 である。段波は支水路上流にもうけた貯水池の水位調整と支水路出口の水門により発

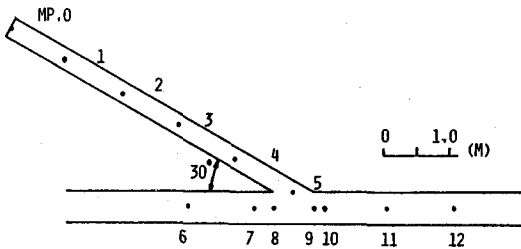


図3-5 水位の測定点

生させ、その波高を図3-5に示す地点で波高計を用いて測定した。

図3-6 に解析に用いる有限要素メッシュを示す。ここで一次元要素数は 77, 二次元要素数 264, 総節点数 257 であり、白丸点は 3・3(b)で述べた一次元要素の節点を示す。座標軸は主水路、支水路で別々のものを用いており、図の黒丸点は主水路の節点としている。したがって支水路のこの節点に対する寄与は、支水路の座標で計算したものを座標変換したものとなる。

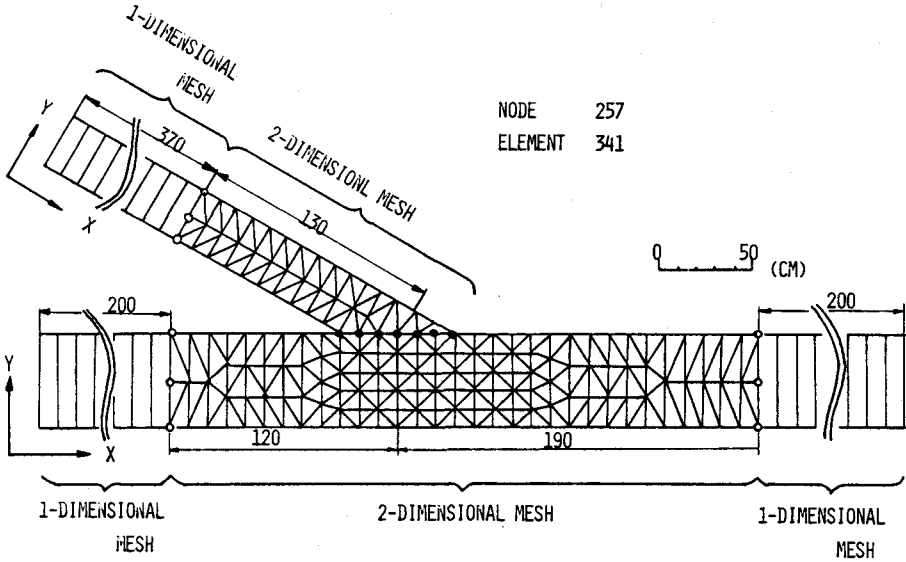


図3-6 有限要素メッシュ

(b) 実験結果との比較

数値計算の境界条件としては、壁面上の節点の、壁に垂直方向の流速を、合流部の隅角点を除く全ての点で零とした。さらに水位の境界条件としては、定常状態の流れを求めた後、実験で得られた MP=0 の水位変化を与えた。図3-7に、初期条件が MP=1 の水深 6cm, 主水路流速 20cm/s, 支水路流速零の場合の実験値と計算値の波高変化を示す。

図よりどの測定点においても、両方の波高変化の傾向は似ているが、計算値の方が波高が高く、波の立ち上がりが早くなっている。これは、この実験の段波の

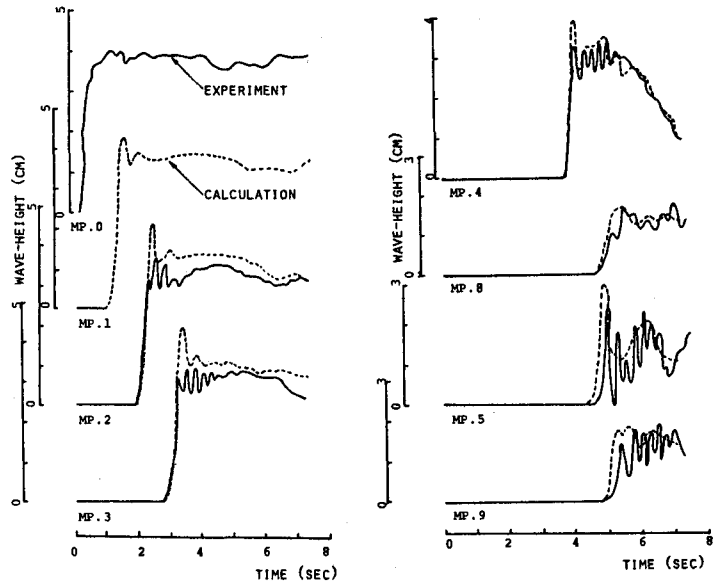


図3-7 水位変化

相対波高（段波の波高と全水深の比）は 0.4ほどで、碎波により徐々に波高が減衰するものであるが、数値計算では碎波条件が入ってないためと、波高が実験値より高いので波の伝播速度が早くなっている。

るためと思われる。図には示さないが、初期条件が $MP=1$ の水深 9cm, 主水路流速 20cm/s, 支水路流速零の場合は、図3-7に比し相対波高がほぼ 0.25と低く、砕波による減衰がほとんどないために、実験値と計算値の波高、立ち上がり時刻ともほぼ一致する結果を得ている。

4. 開水路の三次元流れと拡散¹⁰⁾

ここでは、開水路の流れと拡散の三次元数値解析に、水平方向の区分的多項式と鉛直方向の余弦関数の積を形状関数として用いて、基礎式を空間変数について離散化する Galerkin 有限要素法について述べる。まず、解析解の得られる簡単なモデルである長方形断面開水路の等流とこの流れによる拡散解析に適用して、本解析モデルの妥当性を検討する。次に、3.の合流部を有する開水路の流れと拡散解析に適用して、本解析モデルの妥当性と有効性を検討する。

4.1 基礎方程式

本節では、開水路の流れを支配する基礎方程式及びその流れ場における拡散、混合現象を支配する乱流拡散方程式を示し、解析を行うために必要な基礎方程式を誘導する。

(a) 流れの基礎方程式¹¹⁾

開水路の流れの基礎式は、次のような Reynolds の運動方程式と、非圧縮性流体の連続式である。

• Reynolds の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u + w \frac{\partial u}{\partial z} = g I_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + D \cdot u \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v + w \frac{\partial v}{\partial z} = g I_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + D \cdot v \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + L \cdot w + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + D \cdot w \quad (4-3)$$

• 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4-4)$$

ただし、

$$L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial}{\partial z})$$

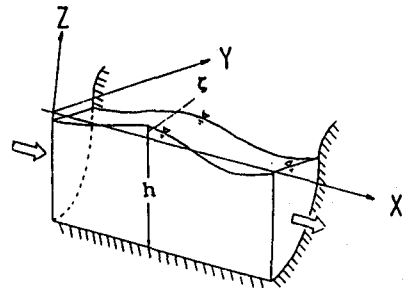


図4-1 座標の定義

ここに、 x 軸は x 方向の平均勾配 I_x に平行に、 y 軸は y 方向の平均勾配 I_y に平行に水面付近にとり、また、 z 軸は xy 平面に直角に上方を正としている。また、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速成分、 t は時間、 ρ は水の密度、 P は圧力、 g は重力加速度、 A_h, A_v はそれぞれ水平、鉛直渦動粘性係数である（図4-1参照）。

式(4-3)は、一般の開水路の場合では w は u, v に比べて小さいために、左辺と右辺の第三項を無視でき、 z 方向に $z=z$ から z (z は xy 面から自由水面までの高さ) まで積分し、 $z=z$ で $P=P_a=0$ とすると、 $P = \rho g(-z+z)$ となる。つまり圧力は静水圧分布する。

次に、式(4-4)を水底から水面の範囲で z 方向に積分して、水面と水底の運動学的条件¹²⁾を用い、水底が時間的に変化しない、つまり $\partial(-h)/\partial t=0$ とすると次式が得られる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz = 0 \quad (4-5)$$

また、式(4-4)を水底から $z=z$ の範囲で z 方向に積分し、前述と同様に水底の運動学的条件および Leibnitz の定理を用いると $w(z)$ が得られる。得られた $w(z)$ と静水圧分布式を式(4-1), (4-2)に代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} = g l_x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + D \cdot u \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} = g l_y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + D \cdot v \quad (4-7)$$

となる。式(4-5)～(4-7)は、 u 、 v 、 ζ を未知量とする開水路の流れの基礎方程式である。なお、 z 方向の流速成分 w も、 u 、 v が既知量となれば、式(4-6)の左辺の括弧内より求めることができる。

(b) 乱流拡散方程式¹⁰⁾

乱流の拡散、混合現象を支配する方程式は、Fick の乱流拡散方程式に $w(z)$ 式を代入した

$$\frac{\partial C}{\partial t} + L \cdot C - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial C}{\partial z} = R \cdot C - \frac{K'}{\rho} C + \frac{Q}{\rho} \quad (4-8)$$

ただし、

$$R = \frac{\partial}{\partial x} (D_h \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (D_h \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (D_v \frac{\partial}{\partial z})$$

である¹⁰⁾。ここに、 C は拡散物質濃度、 K' は物質の減衰定数、 Q は単位体積当りの物質流入量、 D_h 、 D_v はそれぞれ水平、鉛直乱流拡散係数である。但し、上式を解くに当たっては、次の仮定を設ける。

- 1) 流体の密度は、物質に関係なく一定である。
- 2) 乱流拡散係数は、座標軸方向の値のみである。
- 3) 流れは定常とする。

ここでは、上述の仮定3)を設けることにより、先ず (a)で述べた流れの基礎方程式の非定常解析を行い、その収束解を定常解として拡散解析に用いて解析を進める。

4.2 基礎方程式の離散化

ここでは、4.1 で求めた基礎方程式の離散化を行う。先ず、流れの基礎方程式については、空間変数に対しては、重み付き残差法的一种である Galerkin 法を用いて離散化し、時間変数に対しては、陽的差分法的一种である two-step Lax-Wendroff法を用いて離散化する。次に、乱流拡散方程式については、流れの基礎方程式と同様に Galerkin を用いて空間変数について離散化し、時間変数に対しては、陰的差分法的一种である Crank-Nicholson 法等の離散化法の検討を行う。

(a) 流れの基礎方程式の離散化

まず、流れの基礎方程式(4-5)～(4-7)の空間変数に対する離散化を行うために、図4-2 の三角柱要素内で、水平方向の三角形一次要素の形状関数 N_i と図4-3 の鉛直方向の余弦関数との積である三次元形状関数を用いる。総和規約を用いると近似関数は、

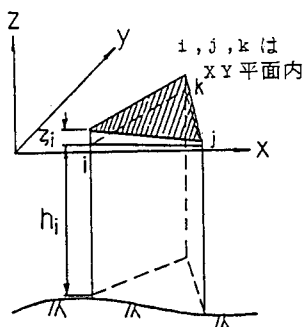


図4-2 有限要素

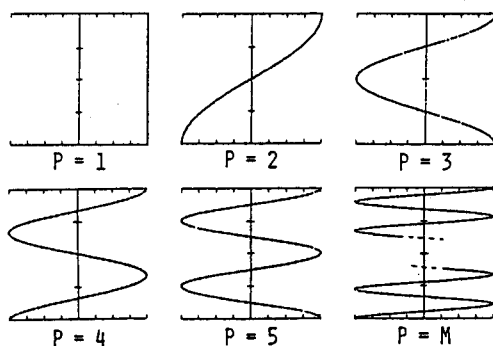


図4-3 鉛直形状関数

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos(B_p z') \cdot u_{pi} \\ v &= N_i \cdot \cos(B_p z') \cdot v_{pi} \\ z &= N_i \cdot z_i \end{aligned} \right\} B_p = \frac{p-1}{d} \pi, (p=1, 2, \dots, m) \quad (i=i, j, k) \quad (4-9)$$

である。ここに、 $d=h+z$, $z'=z-z$, m は鉛直方向の形状関数の展開項数で、この数を大きくすることにより、鉛直方向の流速分布の近似度を上げることができる。また、 i, j, k は三角形一次要素の頂点、 N_i はその形状関数である。

式(4-9)で定義した近似関数を代入した運動方程式(4-6), (4-7)には重み関数として $N_i \cdot \cos(B_p z')$ を、連続式(4-5)には N_i をかけ、重み関数の定義域内で積分すると、単一要素の場合、

$$M_{pqij} \cdot \dot{u}_{qj} + (RX_{pqrij} \cdot u_{qj} + RY_{pqrij} \cdot v_{qj}) \cdot u_{rk} \\ = g \cdot I_x \cdot D_{pi} - g \cdot EX_{pij} \cdot z_j + (KX_{pqij} + KY_{pqij} + KZ_{pqij}) \cdot u_{qj} + FX_{pi} \quad (4-10)$$

$$M_{pqij} \cdot \dot{v}_{qj} + (RX_{pqrij} \cdot u_{qj} + RY_{pqrij} \cdot v_{qj}) \cdot v_{rk} \\ = g \cdot I_y \cdot D_{pi} - g \cdot EY_{pij} \cdot z_j + (KX_{pqij} + KY_{pqij} + KZ_{pqij}) \cdot v_{qj} + FY_{pi} \quad (4-11)$$

$$M_{ij} \cdot \dot{z}_j + CX_{qij} \cdot u_{qj} + CY_{qij} \cdot v_{qj} = 0 \quad (4-12)$$

$$(q=1, 2, \dots, m, r=1, 2, \dots, m, j=i, j, k, k=i, j, k)$$

となる。ここに、 u_{qj}, v_{qj}, z_j の上付き($\cdot$)は時間微分を示し、 $p=1, 2, \dots, m$, $i=i, j, k$ である。以上の式は、 u_{qj}, v_{qj}, z_j を未知量とする連立常微分方程式である。各係数は文献10)を参照されたい。要素が多数存在する場合には、上式の各項を各要素ごとに求め、重み関数にしたがって重ね合わせると、上式と同様の式が得られる。

またここでは、時間積分法として陽的時間積分法の一つである two-step Lax-Wendroff法を用いる。

(b) 拡散方程式の離散化

まず、乱流拡散の基礎方程式(4-8)の空間変数に対する離散化は、流れの基礎方程式の離散化と同様に Galerkin 有限要素法を用いて行う。但し、4・1で述べたように、式(4-8)の x, y 方向の流速成分は、流れの解析に依って得た定常解を、近似式(4-9)で与えるものとする。また、濃度 C は流れの解析に用いたものと同様な形状関数、つまり水平方向の三角形一次要素の形状関数と鉛直方向の余弦関数との積である関数を用いて離散化する。総和規約を用いると近似関数は、

$$C = N_i \cdot \cos(B_{p'} z') \cdot C_{p' i}, \quad B_{p'} = \frac{p'-1}{d} \pi, (p'=1, 2, \dots, n, i=i, j, k) \quad (4-13)$$

ここに、 n は濃度の展開項数である。

式(4-8)の濃度 C には上式を、流速 u, v には式(4-9)で定義した近似関数を代入し、重み関数として $N_i \cdot \cos(B_{p'} z')$ を掛け、重み関数の定義域内で積分すると、単一要素の場合、

$$M'_{p'q'ij} \cdot \dot{C}_{q'j} + (RX'_{p'q'rij} \cdot u_{rk} + RY'_{p'q'rij} \cdot v_{rk}) \cdot C_{q'j} \\ = (KX'_{p'q'ij} + KY'_{p'q'ij} + KZ'_{p'q'ij} + RA'_{p'q'ij}) \cdot C_{q'j} + F_{p' i} \quad (4-14) \\ (q'=1, 2, \dots, n, r=1, 2, \dots, m, j=i, j, k, k=i, j, k)$$

ここに、 $C_{q'j}$ の上付き($\cdot$)は時間微分を示し、 n は展開項数、 $p'=1, 2, \dots, n$, $i=i, j, k$ である。要素が多数存在する場合は、上式の各項を各要素についても求め、重み関数に従って重ね合わせると、上式と同様の式が得られる。

式(4-14)も種々の時間積分法を用いて離散化されるが、ここでは、two-step Lax-wendroff 法と Crank-Nicholson 法の比較、検討を行う。

4・3 流れの数値解析について

ここでは、流れの解析に用いる渦動粘性係数等の定数の算定方法を示し、また、数値計算上の問題

点とその解決法をのべる。

(a) 諸係数の算定法

渦動粘性係数は、本来は乱流モデルなどから算定すべきであるが、ここでは計算時間の都合上、式(3-10)の定数 K を水平渦動粘性係数の場合は $K=6.0$ 、鉛直渦動粘性係数の場合には $K=0.068$ とする。

底面摩擦は式(3-4)より算定される摩擦勾配に ρgh をかけて求める。また壁面摩擦についても底面摩擦の場合と同様に考えて、壁面を有する有限要素の壁面の一边にのみ摩擦を作用させる。

(b) 数値解析に伴う諸問題の解決法

ここでは、3.で述べた質量行列の集中化と隅角部における流量補正に加え、上流境界値の変更と未知変数に数値フィルターをかけるが、以下にこれらの説明を行う。

境界値の変更：

数値解析に必要な境界条件の数は、理論的に定まる数と必ずしも一致しない。例えば、常流の一次元解析の場合、理論的には下流の水深と流速が決まれば上流の流れの特性は定まるはずである。しかし、下流の水深と流速の2つの境界条件のみでは、数値解析の場合、発散してしまう。これは上流の流入量が計算誤差によって少しずつ変化し一定とならないためである。そこで、上流の流速と水深も境界条件にに入れて計算すると、上流境界付近で場所的な振動が現れる。この原因は上流の境界値に無理があるためである。しかし、予め最適な上流境界値を知る手だてもない。以上のような理由により、ここでは、下流境界条件を水深と流速、上流境界値を流量とし、上流境界の水深と流速は規定した流量を満足する範囲内で自由に変動させることにする。具体的には、図4-4に示すように、上流境界の水位をこの点とこの下流の点の平均値とし、流速は得られた水位に従い流量を満足するよう調整する。この境界値の変更は一定時間間隔で行う。

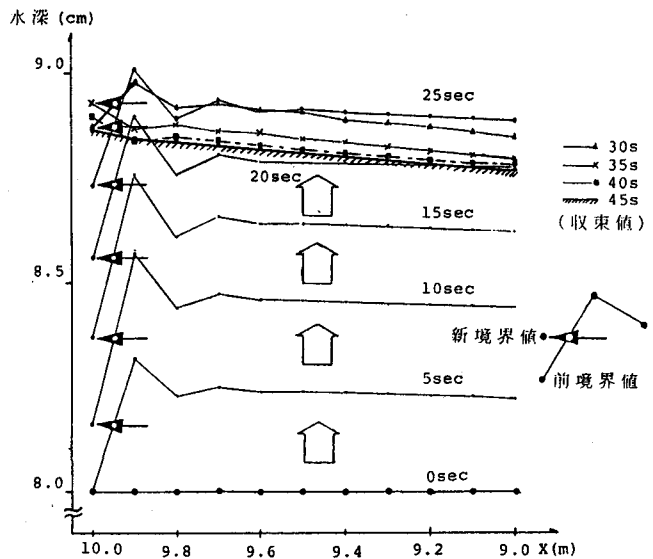


図4-4 上流境界値の変更

フィルターの作用：

水平渦動粘性項を考慮しても得られる解には場所的な数値振動が現れる。そこで以下に説明するフィルターを作用させて数値振動を抑制した。フィルターは、ある節点 k の変数値を v_k とし、フィルター作用後の値を $\bar{v}_k$ とすると、

$$\bar{v}_k = (v_k + v_{k,m}) / 2 \quad (4-15)$$

とするものである。ここに、 $v_{k,m}$ は節点 k を共有する要素の節点 k を除く他の節点値の平均である。

また、非定常計算による定常解析の場合、領域内の初期ボリュームと収束値のボリュームとは同一とは限らないし、収束値は予測できない。しかし、流入量と流出量を同一とした場合、いくら計算しても、計算誤差を除いて、ボリュームは変化しない。このとき、フィルターを作用させることによ

て、ボリュームはフィルター作用ごとに漸次変化し、最適なボリュームとなる。これがフィルターによる解析領域内のボリューム調整作用である。但し、フィルターも一定時間間隔でかける。

(c) 二次元等流

この解析モデルを解析解の得られる二次元等流に適用する。A_vを一定として座標原点を底面に移し、鉛直平均流速を u_m とすると

$$u = u_m + \frac{g I_x}{6 A_v} \{h^2 - 3(h-z)^2\}$$

となる¹¹⁾。表4-1は u_m=0.5m/s, I_x=0.001, h=0.1m, n=0.0136 としたときの解析解と幅 50cm, 長さ10m の水路に節点数 123, 要素数 160, のメッシュを組み、展開項数 mを変えた場合の数値解である。両者は、底面を除くと良い一致を示している。

表4-1 鉛直流速分布

Relative depth	Analytical solution	Velocity(m/s)			
		m=2	m=4	m=6	m=8
1.0	0.577	0.594	0.579	0.578	0.577
0.9	0.574	0.590	0.574	0.573	0.573
0.8	0.568	0.576	0.564	0.565	0.567
0.7	0.556	0.555	0.551	0.556	0.556
0.6	0.540	0.529	0.539	0.541	0.539
0.5	0.519	0.500	0.523	0.517	0.520
0.4	0.494	0.471	0.499	0.493	0.494
0.3	0.464	0.445	0.463	0.467	0.463
0.2	0.429	0.424	0.422	0.430	0.432
0.1	0.390	0.410	0.388	0.385	0.387
0.0	0.347	0.406	0.375	0.364	0.360

4.4 拡散の数値解析について

ここでは乱流拡散係数の算定法を示し、次に Crank-Nicholson 法と two-step Lax-Wendroff 法を一次元拡散モデルに適用して比較、検討する。

(a) 拡散係数の算定法

拡散係数も渦動粘性係数と同様に、本来は乱流モデル等より算定すべきであるが、ここでも計算時間の都合上、鉛直拡散係数 D_v は鉛直渦動粘性係数と等価と考えて、式(3-10)で K=0.068 とおく。次に、水平拡散係数 D_h は Richardson の経験式、

$$D_h = 0.01 \cdot \ell^{4/3} \quad (4-16)$$

を用いて算定する¹³⁾。ここで、ℓ は拡散現象のスケールであるが、本解析のような有限要素法では、ℓ はメッシュ一辺の長さと考えられる。

(b) Crank-Nicholson 法と two-step Lax-Wendroff 法の比較、検討

一般に、拡散問題に関しては陰的時間積分法の一つである Crank-Nicholson 法が広く用いられている。陰的な時間積分法は、解の安定性に優れ、精度もよいと言われている。しかし、連立方程式を解くために大きな計算機容量が必要である。一方、陽的な時間積分法は前述の行列の集中化法を用いると連立方程式を解かなくてもよく、計算機容量も相対的に少なく済む。この反面、どの程度の精度が達成されるのか推定できず、時間刻み幅を小さくしなければならないため、計算時間の短縮にならないなどの短所がある。そこで、Crank-Nicholson 法と two-step Lax-Wendroff法で集中化法を用いたもの (lump) 及び、用いなかったもの (no lump)を解析解の得られる簡単な一次元モデルに適用して解の精度、計算時間などの点で比較、検討する。

ここでは三次元モデルを対象としているが、解析解が求まるのは一次元問題であるので、長さ 402 m, 幅 12m, 一様水深 2mの長方形水路のモデルを考え、三次元モデルを一次元化する。現象を一次元化するために、y 方向の流速を全て零とし、y 方向の拡散係数 D_y を大きくして、拡散濃度分布が y 方向に一様になるようにする。さらに、式(4-13)において展開項数 m=1 とすることによって、x方向の流速成分 u の鉛直分布を一様とする (図4-3参照)。以上により、解析解と数値解の比較が可能となるが流れは定常で、流速の異なる二ケースについて行う。

時間刻み幅 Δt は、試算的にいろいろと変えて、解の安定する範囲内の最大のものを用いたが、

Crank-Nicholson 法に対する two-step Lax-Wendroff法の質量行列の集中化を用いた方法と集中化を用いない方法の時間刻み幅は、それぞれ約 $1/5, 1/25$ であった。

図4-5は一例として、解析解¹⁴⁾と上述の三種類の数値解をプロットしたものである。図よりCrank-Nicholson 法による数値解と行列の集中化を用いていない two-step Lax-Wendroff法による数値解は厳密解に非常に良く一致している。しかし、集中化を用いた数値解は解析解とかなりの相違がある。特に、濃度 C のピーク点以後の地点での違いが著しい。この現象は図には示さなかったが、陽的時間積分法の代表的な手法の Rung-Kutta 法を用いても現れている。これにより、拡散解析問題には質量行列の集中化法を用いた two-step Lax-Wendroff は適さないと思われる。

次に、計算時間はプログラムの最適化などの問題を含んでいるため、一概にどちらが短いとは断定できないが、Crank-Nicholson 法と集中化を用いる two-step Lax-Wendroff法はほぼ同じ計算時間で、集中化を用いた two-step Lax-Wendroff法のそれは5倍ほどである。以上より、少し大きな計算機容量を要するが計算精度、計算時間から判断すると Crank-Nicholson法が優れていると思われる。

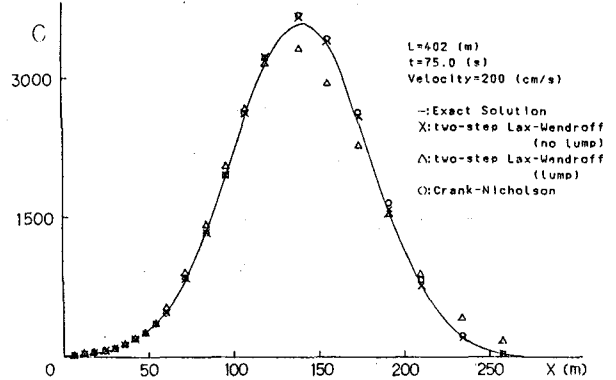


図4-5 解析解と数値解

4.5 合流部の流れと拡散

初めに、合流部の流れの解析を行い、数値解と実験値の比較、検討を行う。また、流れの解析によって得られた収束解を定常解としてもちいて、拡散、混合現象の数値予測を行う。

ここで用いるモデルは、3.で述べた合流部を有する開水路で、解析メッシュも図3-6の一次元メッシュ領域を全て二次元メッシュとしたものである。

(a) 流れの数値解析

解析条件は、総流量 $0.016 \text{ m}^3/\text{s}$ 、主水路の流量 $0.0103 \text{ m}^3/\text{s}$ 、支水路の流量 $0.0057 \text{ m}^3/\text{s}$ 、下流端の水深 10.3 cm である。また有限要素メッシュは節点数 496、要素数 707で、境界条件は主水路下流端の水深 $h_b=10.3 \text{ cm}$ 、主水路下流端の流速 $v_b=30.9 \text{ cm/s}$ 、鉛直方向の近似関数の展開項数を2とする。時間刻み幅 Δt は、長波が要素を横切る最小時間以下として $\Delta t=0.05 \text{ s}$ とし、4.3(b)で説明したフィルターと境界値の変更を $4 \text{ s}(0.05 \times 80)$ 毎にしている。

図4-6は合流部の水深変化である。実験値に対して数値解の法が 3 mm ほど高く、多少の場所的振動を起こしているものの、全体的にはほぼ一致している。次に、水平流速分布の一部を図4-7に示す。数値解と実験値とを比較すると、合流前及び、合流部中心付近では、流向、流速共に一致しているが、合流部を過ぎた当りでは、実験値の方が数値解よりも流速は大きくなっている。

(b) 拡散の数値解析

解析条件は、支水路から処理水が主水路に流れ込む場合を想定して、支路上流端から濃度 $C=10.0$ を持った放流水を流入する。また、流れ場は(a)で得られた収束解を用いて定常であると仮定して解析する。更に、放流した処理水以外の物質の流入はないものとし、 $Q=0.0$ 、減衰定数も水中で物質が化学反応を起こしたりして物質の量が増減することがないとして $K'=0.0$ とする。次に、境界条件は、支路上流端の濃度 $C=10.0$ とする。時間刻み幅 Δt は、流れが要素を横切る最小時間以下とし

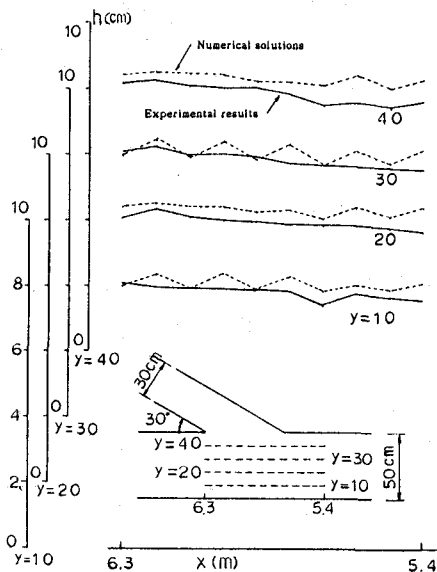


図4-6 水深の変化

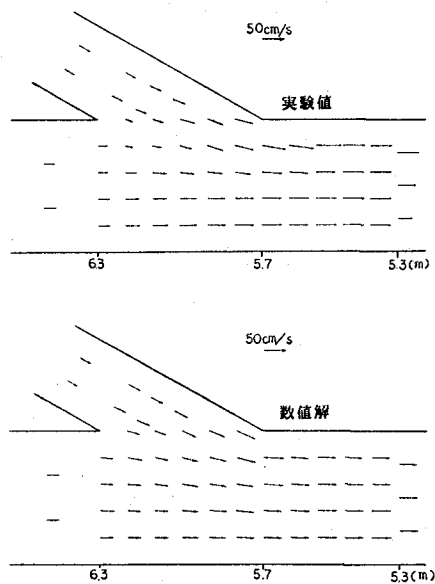


図4-7 水平方向の流速分布（水面下 2.5cm）

て $\Delta t = 0.25s$ とする。尚、拡散の鉛直方向の近似関数の展開項数も2とする。

非定常計算による鉛直平均濃度を図4-8,9 に示す。鉛直平均濃度のみを示したのは、鉛直方向の濃度の変化がほとんど見られなかったからである。この理由としては、流速は水面と水底付近で約25%も変化しているが、水深が平均約 8cmと浅く瞬時にして拡散物質が鉛直方向に拡がってしまい、流速の差による変化はあらわれなかったものと推察される。図4-8 では拡散物質は合流部に到達し始め、主水路の流れの影響を受けて左岸の外隅点方向に流向を変えた支水路の流れとともに拡がっている。また、図4-9では合流部付近にのみ濃度変化があり、3.5m より下流では一定濃度となっている。

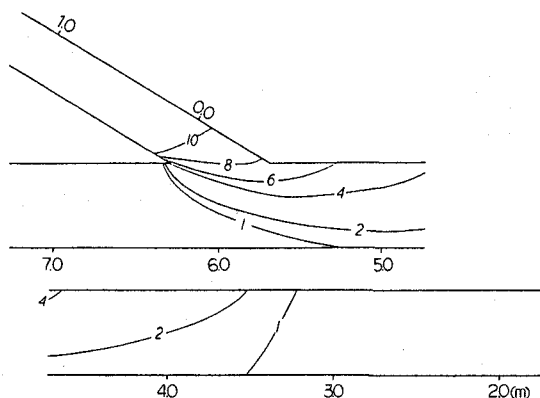


図4-8 鉛直平均濃度分布 ($t=20s$)

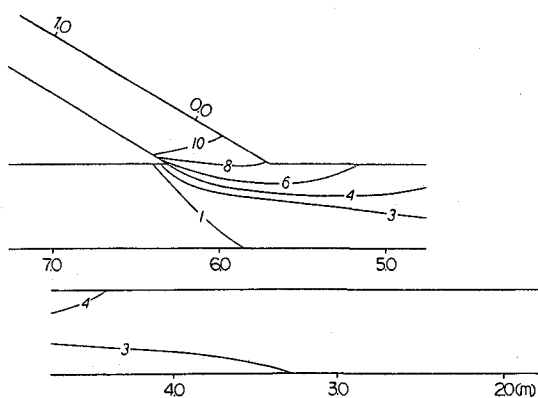


図4-9 鉛直平均濃度分布（定常状態）

5. 湖のセイシュの固有周期¹⁵⁾

現在、多くのセイシュの固有周期の数値モデルが提案されている。このうち、一層状態におけるセイシュの固有周期については、非線形項・粘性項などを除いた Reynolds 運動方程式と連続式から導け

る二次元の波動方程式を、有限要素法に依って定式化し、固有値問題に帰着させる方法¹⁶⁾が提案されており、複雑な湖岸・湖盆形状の湖に適用可能である。しかし、二層状態に対するこのような数値モデルはない。そこで、本研究では上記の方法を発展させ、複雑な湖岸・湖盆形状の湖の二層状態に適用可能なセイシュの固有周期の数値モデルを求め、その妥当性の検討を、解析解の得られるモデル湖と諏訪湖と野尻湖における現地観測の結果を用いて行う。

5.1 セイシュの固有周期の数値モデル

(a) セイシュの基礎式

図5-1に示すように、上層で ρ_1 、下層で ρ_2 と密度を一定とした二成層流の静水面に x, y 軸を、これに直角に上方に z 軸をとり、上層・下層に対して非線形項と粘性項を無視して運動方程式をたてる。この時湖などの閉鎖水域において、代表水平長 L は代表水深 D に比し極めて大きく、鉛直方向の運動方程式には静力学的平衡が仮定でき、積分すると、圧力は上層で $p = \rho_1 g(z - z)$ 、下層で $p = \rho_1 g(z + d) + \rho_2 g(-d - z)$ となる。これらの式を代入した x, y 方向の運動方程式を z 方向に各層内で積分する。さらに、上・下層に対する連続式も z 方向に各層内で積分し、水面や内部境界面の運動学的条件を用いる。この時、基礎方程式は¹⁷⁾、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + g \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + g \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (\text{運動方程式}) \\ \frac{\partial(z+d')}{\partial t} + d \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &= 0 \quad (\text{連続式}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{上層}) \quad (5-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + g \left\{ \varepsilon \frac{\partial(z+d')}{\partial x} - \frac{\partial d'}{\partial x} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + g \left\{ \varepsilon \frac{\partial(z+d')}{\partial y} - \frac{\partial d'}{\partial y} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{運動方程式})$$

$$\frac{\partial(-d')}{\partial t} + (h-d) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{連続式}) \quad (\text{下層}) \quad (5-2)$$

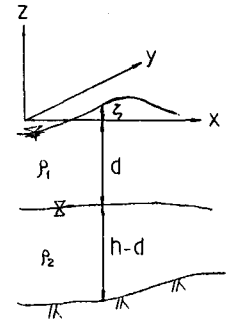


図5-1 座標の定義

となる。ここに、 u_1, v_1 、と u_2, v_2 はそれぞれ上・下層の平均流速の x, y 成分、 $\varepsilon = \rho_1 / \rho_2$ である。また、 $d = \bar{d} + d'$ とし、 $\bar{d} \gg z, \bar{d} \gg d'$ と仮定している。

次に、式(5-1)より u_1, v_1 を、式(5-2)より u_2, v_2 を消去すると

$$\frac{\partial^2(z+d')}{\partial t^2} - g \bar{d} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5-3)$$

$$\frac{\partial^2(-d')}{\partial t^2} - g(h-\bar{d}) \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 d'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d'}{\partial y^2} \right) \right\} = 0 \quad (5-4)$$

となる。さらに、上式を加え合わせると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - g \bar{d} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - g(h-\bar{d}) \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - (1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 d'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d'}{\partial y^2} \right) \right\} = 0 \quad (5-5)$$

ここで、式(5-4)、(5-5)が二層状態にあるセイシュを支配する波動方程式である。次に、時間微分項を消去するために、 $z(x, y, t) = \beta(x, y) \cos(\sigma t)$ 、 $d'(x, y, t) = \gamma(x, y) \cos(\sigma t)$ とおき、式(5-5)、(5-4)に代入すると、

$$-\lambda^2 \beta - \{ (h-\bar{d}) \varepsilon + \bar{d} \} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + (h-\bar{d})(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5-6)$$

$$\lambda^2 \gamma - (h-\bar{d}) \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + (h-\bar{d})(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5-7)$$

が得られる。ここに、 $\lambda^2 = \sigma^2 / g$ であり、 $\sigma = 2\pi / T$ (T は振動周期)である。

(b) 基礎式の有限要素法による離散化¹⁶⁾

次に、式 (5-6), (5-7) に β , γ の近似関数として $\beta = N_i \cdot \beta_i$, $\gamma = N_i \cdot \gamma_i$, ($i=i, j, k$) を代入して、重み関数として N_i を掛けて要素内で積分する。ここに、総和規約を用いており、 $N_i = N_i(x, y)$ は形状関数で、ここでは三角形一次要素のそれを用いる。また、 i, j, k は三角形の頂点である。積分内の二階の微分項は、多少の変形後 Green-Gauss の定理を用いて一階に下げ、岸の法線方向の流速を零とする境界条件を入れると、式 (5-6), (5-7) は、単一要素の場合

$$\lambda^2 \cdot \left[\int_{\Omega} N_i N_j ds \right] \cdot \beta_j = \int_{\Omega} [- \{ (h-d) \varepsilon + d \} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds] \cdot \beta_j + \int_{\Gamma} [(h-d)(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds] \cdot \gamma_j \quad (5-8)$$

$$\lambda^2 \cdot \left[\int_{\Omega} N_i N_j ds \right] \cdot \gamma_j = \int_{\Omega} [(h-d) \varepsilon \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds] \cdot \beta_j - \int_{\Gamma} [(h-d)(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) ds] \cdot \gamma_j \quad (5-9)$$

となる。ここに、 $i=i, j, k$ である。要素が多数存在する場合は、上式の各項を各要素について求め、重み関数に従って重ね合わせると、全体的な離散化式が得られる。行列形式で表すと

$$\lambda^2 \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (5-10)$$

となり、一般的な固有値問題に帰着される。ここに、 M_{11} , M_{22} , K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} は、それぞれ式 (5-8), (5-9) の対応する β_j , γ_j の係数の括弧内を要素とする行列、 0 は要素の全てが零である行列、また β , γ はそれぞれ β_j , γ_j を要素とする列ベクトルである。上式の固有値の計算には、右辺の行列が非対称であるので、対称になるように式を変形することにより、標準的なサブルーチンの利用が可能となる。

(c) 解析解の得られるモデル湖での数値モデルの検討と浅水域の取扱い

数値モデルの妥当性は、先ず解析解の得られる $\varepsilon = \rho_1 / \rho_2 = 0.99 / 1.00$, 幅 100m, 長さ 5000m で、水深 20.0m, 内部境界面までの水深 10.0m と一定とした細長い長方形湖に適用して検討した。この場合の内部セイシュの固有周期の解析解は、二層界面波モデル¹⁸⁾を用いると $T = 14286s, 7143s, \dots$ であるが、これらは数値解のそれと良い一致を示した。

なお、このモデルでは二層状態に対する表面セイシュの固有周期も求められる。このため、下層厚を極端に薄くし（本研究では 10cm）、かつ $\rho_1 = \rho_2$ とおくことにより一層状態に対しても解析可能である。実際に、このような取扱いをした上述のモデルの数値解は、一層状態の解析解 $T = 2L / (gh)^{1/2} = 714s, \dots$ に一致した。これは、上述の取扱いにより、式 (5-8) は実質的に全水深を上層としたことになっているし、また式 (5-9) の右辺は零に近く、つまり固有周期が非常に大きく得られ、これ等の値を無視すれば良いためである。

つぎに、内部面が水底に達しない水深の浅水域の取扱いも、上述の理由から図 5-2 に示すように、浅水域では層厚の小さい下層を水底に考え、この層の密度を上層と等しいとおけば良い。

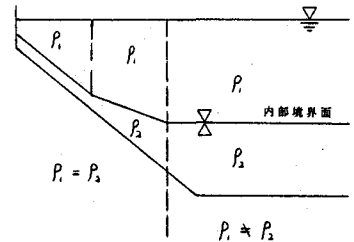


図 5-2 浅水域の取扱い

5.2 諏訪湖と野尻湖のセイシュの振動周期

観測結果の振動周期を表5-1に示す。

諏訪湖の水面セイシュの固有周期の数値解は、平均湖水位の差は小さいので、これを無視すると 1 335s, 915s, 797s, 700s, … であり、順位1 の観測値は、諏訪湖を水深 4.0m, 4.2km*3.0kmの長方形湖と近似した時の長軸方向の第一モードの固有振動周期 134 表5-1 水面振動の観測値(s) 1s に近く、第一モードの固有周期であると考えられる。

また、野尻湖の水面セイシュの固有周期の数値解は 487s, 3 62s, 287s, … であり、順位1 では両者はよい一致を、また順位2 でもかなり近い値を示している。なお、観測結果は一層状態と二層状態ある場合両方を含んでいるが、結果に違いがみられない。これは、二層状態として解析した水面セイシュの固有周期の数値解も、一層状態のそれらとほぼ同値となっているためである。

	月 日	順位 1	順位 2
諏訪湖	10/22	1370	694
	11/17	1351	746
野尻湖	8/6	476	345
	8/29	470	346
	9/26	500	333
	9/26	490	333
	10/21	479	352
	11/25	490	355

表5-2 内部セイシュの周期 (分)

表5-2 は変水層の水温の振動周期の観測値と内部セイシュの固有周期の計算値である。ここで観測値は、最大周期の値を数値解の値に近い順位のところに示している。また数値計算には、観測で変水層の位置に大きな差は見られなかったので内部境界面の位置を 10.3mに固定し、上・下層でそれぞれの平均水温を求め、これらに対応する密度を用いている。対応する観測値と計算値は、一部に多少の誤差が見られるものの、ほぼ一致している。この誤差の原因は、内部境界面の位置、上・下層の平均水温の決定誤差、内部セイシュの振幅が小さかったことなどによるものと考えられる。

	月 日	順位 1	順位 2
観測値	8/26	238	
	8/27		187
	9/8	250	
	9/9	208	
	9/13		189
	9/14		172
	9/16	286	
	9/18	286	
計算値	8/26	236	170
	8/27	238	171
	9/8	245	177
	9/9	245	177
	9/13	258	186
	9/14	258	186
	9/16	257	185
	9/18	255	184

複雑な湖岸・湖盆形状の閉鎖水域の二層状態における内部セイシュの固有周期の新しい数値モデルは、解析解や観測値等から検討してほぼ妥当なものである。

6. おわりに

ここでは、合流部の段波、開水路の三次元流れと拡散、湖のセイシュの固有周期を解析例としてとり上げ、有限要素法に合った解析モデルの導出や、実際に数値計算を行う際に問題となる各種の物理量の算定法、境界条件の設定、数値振動の抑制などを中心にして解説した。

ここで後者の諸課題には、前者の解析モデルが微妙に関係しつつも、計算手法や計算機プログラムのいわばノウハウに属する部分もあり、詳しいことは論文に書きにくい面も少なくない。しかし、数値解析法が水理現象の解明に一般的に用いられる現在においては、もっと積極的にこれらの諸課題について明らかにする必要があると思える。

最後に、本文の仕上げに協力下さいました信州大学工学部社会開発工学科水工研究室の皆さんに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) S. Shen; Finite-Element Methods in Fluid Mechanics, Ann. Rev. Fluid Mech., pp.421-445, 1977

- 2) O.C.Zienkiewicz, R.Loehner, K.Morgan and S.Nakazawa; Finite Elements in Fluid Mechanics-A Decade of Progress, Finite Elements in Fluids, Vol. 5, pp.1-26, 1984.
- 3) 川原睦人; 水理解析と有限要素法, 1977年度(第13回)水工学に関する夏期研修会講義集, pp.A-2-1~A-2-12, 1977.
- 4) 大西和栄, 林健次, 遠山洋, 二之宮弘; パソコンによる流れ解析, 朝倉書店, pp.1-237, 1986.
- 5) 川原睦人; 有限要素法流体解析, 日科技連出版社, pp.1-290, 1985.
- 6) 林武久; 非構造分野における有限要素法の基礎, 昭晃堂, pp.1-167, 1981.
- 7) R.L.Cooley and S.A.Moin; Finite Element Solution of Saint-Venant Equations, Proc. of ASCE, HY6, pp.759-775, 1976.
- 8) 荒木正夫・富所五郎・高木茂知; FEMによる合流部段波の数値実験法, 信州大学工学部紀要, 第46号, pp.111-124, 1979.
- 9) 川原睦人・大森俊介; 平均型2段階ラックスウエンドロップ有限要素法について, 第32回土木学会年次学術講演会概要集-II, pp.259-260, 1977.
- 10) 荒木正夫・富所五郎・松岡保正・寒川典昭; 開水路の三次元流れの水理解析法に関する研究, 昭和59・60年度科学研究費補助金(一般研究(C))研究成果報告集, pp.1-59, 1986.
- 11) 富所五郎・荒木正夫・吉田宏司; 開水路の流れの三次元数値解析法, 第29回水理講演会論文集, pp.727-732, 1985.
- 12) 例えば, 椿東一郎; 水理学 I, 森北出版, pp.41-42, 1973.
- 13) 玉井伸行き; 密度流の水理, 技報堂出版, pp.44-47, 1980.
- 14) L.A.Loziuk, J.C.Anderson and T.Belytschko; Transient Hydrothermal Analysis of Small Lakes, Proc. of ASCE, P02, pp.1983-1997, 1973.
- 15) 富所五郎・赤堀安宏; 諏訪湖と野尻湖のセイシュの固有周期とその数値モデル, 水工論文集, 第35巻, pp.615-620, 1991.
- 16) T.Taylor, B.S.Patil and O.C.Zienkiewicz; Harbour Oscillation; A Numerical Treatment for Undamped Natural Modes, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol 43, pp.141-155, 1969.
- 17) 古本勝弘・武政剛弘・一ノ瀬和雄・藤川佳彦; 風による水温成層湖水の内部静振, 第29回水理講演会論文集, pp.389-394, 1985.
- 18) 平田健正・村岡浩爾; 中禅寺湖の水温成層と内部波, 国立公害研究所研究報告, 第69号, pp.5~35, 1984.