

絵で見る波動理論

A Graphical Wave Hydrodynamics

首藤伸夫

Nobuo SHUTO

1. はじめに

波理論は、数学的に複雑である。数式を追っていると物理的なイメージが何処かに置き去りになり、不明確になってしまう。特に最近、波平均量に関する様々な保存式が実際に使われ、沿岸の水位や流れの計算が行なわれているけれども、どこまで正確な認識の下になされているか、疑わしい点がないでもない。ここでは、なるべく図に描いて問題点や違いなどを明らかにしながら、質量輸送、ラディエーションストレス、wave set-down, wave actionなどの説明を試みた。全体を通じて、Jonssonとその周辺の人々による一連の仕事が大いに参考になった。これによって、行き着く先が予め見えていたからである。

2. 摂動法

2-1. 非線形性の解決

流体の運動を記述するには、運動の式、連続の式、境界条件、初期条件を必要とする。いま、初期値問題ではないとする。非粘性、非圧縮であれば、速度ポテンシャルを使って、次のような式群となる。

連続の式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{-----}(2-1)$$

運動の式

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad \text{-----}(2-2)$$

表面の圧力条件

$$p = 0, \quad z = \eta(x, t) \text{ において.} \quad \text{-----}(2-3)$$

表面波形連続条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w, \quad z = \eta(x, t) \text{ において.} \quad \text{-----}(2-4)$$

底面条件

$$u \frac{\partial h}{\partial x} = w, \quad z = h(x) \text{ において.} \quad \text{-----}(2-5)$$

ここで、 u^2 や $u\eta$ などは、まだ未知である変数の掛け算で、いわゆる、非線形項であるため、解析が難しい。したがって、弱非線形の仮定を持ち込み、小さい量をパラメーターとした級数によって解が与えられるとする解法をとる。展開のパラメーターとして波形勾配を選べば、表面波と呼ばれる解群が得られる。いちばん最初の解が線形表面波である。これを基にして、高次解を求めて行く。水深波長比を基本パラメーターにとるのが長波近似である。この時も、さらに波形勾配をも考慮にいれて解を求めていく。最初の解が線形長波である。ところで、これの延長として第二近似解を求めようとする、永年項が生じ、摂動法が破綻する。摂動の方法を変えなくてはならず、その結果、有限振幅長波の第一近似である浅水理論が得られる。

さて、摂動法とは、次のような事である。いま、展開に使われる微小のパラメーターを ϵ とすると、例えば、圧力 p は

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \varepsilon^4 p_4 + \dots \quad (2-6)$$

のように表わされる。\$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\$などは、各々\$O(1)\$の関数であり、\$\varepsilon\$が掛けられた結果、各項は小さな量になる。この時、

$$p_0 \gg \varepsilon p_1 \gg \varepsilon^2 p_2 \gg \varepsilon^3 p_3 \gg \varepsilon^4 p_4 \dots \quad (2-7)$$

でなければならないことが、暗黙裡に了解されている。

2-2. 未定境界形状の解決

水面においては、圧力は大気圧と等しく、また水粒子が水面を離れるような事はない。前者が水面の力学的条件であり、後者が波形連続の条件である。こうした条件を満たすものが解であるが、条件を設定すべき場所、すなわち波面の位置は、解が得られるまで与えられない。条件を設定できなければ、解は得られないではないか。

この矛盾を解決するためには、既知の場所で、しかも解の波面に近い場所での条件に書き直す。波は水面に生ずる。それ故、波面に近い既知の場所として、波が存在する前の静水面を選ぶのは、ごく自然なことであろう。そのうえ、波が小さいという仮定をすれば、上記の非線形性の解決方法とも矛盾がない。

この静水面と平均水面とは等しくないことに注意して置こう。線形の議論の範囲では問題ないが、二次近似では正確に議論する必要が生ずる。定常流の場合、水が流れ始めると、速度水頭の分だけ平均水面が下がることから想像がつくであろう。波運動のエネルギーに変わった分だけ平均水面が下がってもよい。実はこれが、いわゆる wave set-downである。

テーラー展開を使うのが通常の手法であるから、まず、この意味を水面での圧力条件を使って考えよう。

$$z = \eta(x, t) \text{ 上で, } p(x, z; t) = 0 \quad (2-8)$$

というのが、本来の条件である。これをテ

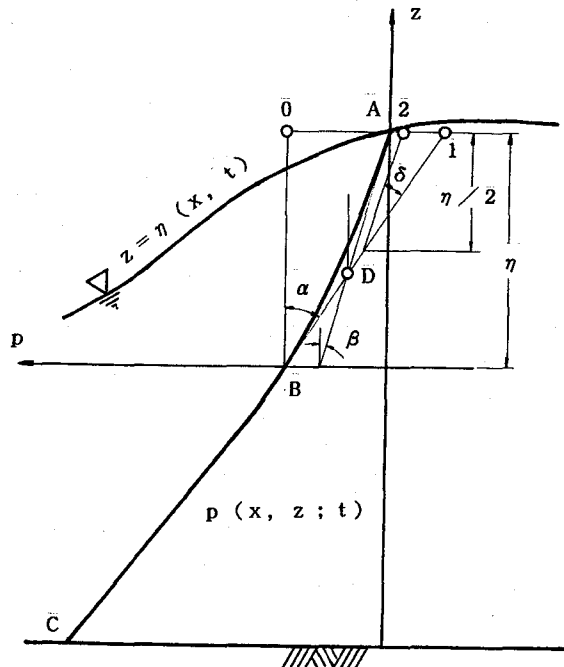
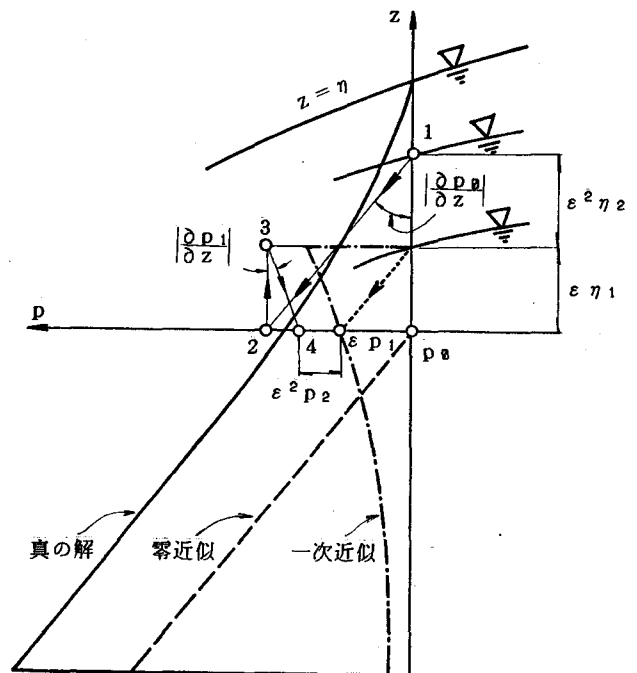


図-1 表面圧力の近似展開



ーラ展開を使って、 $z = 0$ での値を使って書き直す。

$$p(x, \eta; t) = p(x, 0; t) + \eta \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots = 0 \quad \text{-----}(2-9)$$

ここで、微係数も勿論 $z = 0$ の場所で評価している。

図-1を見ながら各項の意味を考えよう。解としての水圧は、線ABCで与えられるような曲線となる。

第1項は、図中のB点であり、零ではない。したがって、この段階で近似を止めると、水表面では図のA0で示すような誤差が残っていることになる。

この誤差を次々と埋めていく。第2項は、静水面での水圧変化の傾きに距離 η を掛けて得られる水圧である。この分の修正を行なうと点1が得られる。水面での誤差はA1で、先ほどよりは小さくなっている。

水圧変化の度合は、静水面位置より上に行くほど小さくなる。静水面での勾配 α で修正したのでは、修正のし過ぎになった。この値と水面での勾配 β の差の分の補正をしよう。

$$\alpha = \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad \beta = \alpha + \eta \frac{\partial \alpha}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha + \delta \quad \text{-----}(2-10)$$

である。A, B2点に引いた接線はD点で交わるが、この近傍である高さ $\eta/2$ の分だけ修正したのが、点1から点2迄の圧力になる。こうして、近似を高めるほど、水面での本来の圧力零であるA点へ近づいて行く。

2-3. 摂動による、表面境界条件の設定

水面形状も水圧も微小パラメーター ϵ で展開する。

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + O(\epsilon^3) \quad \text{-----}(2-11)$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + O(\epsilon^3) \quad \text{-----}(2-12)$$

波運動が ϵ のオーダーである。水圧は波がなくても存在するから $O(\epsilon^0)$ の項から始まっている。

$$\begin{aligned} p(x, \eta; t) &= p(x, 0; t) + \eta \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \dots \\ &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + O(\epsilon^3) \\ &\quad + (\epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots) \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial p_1}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial p_2}{\partial z} + \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 \eta_1^2 + \dots \right) \left(\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} + \epsilon \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + \dots \right) \\ &= p_0 + \epsilon \left(p_1 + \eta_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + \epsilon^2 \left(p_2 + \eta_2 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{2} \eta_1^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} \right) + \dots \\ &= 0 \quad \text{-----}(2-13) \end{aligned}$$

これを満たすには、 ϵ の各オーダーの項がそれぞれで零となれば良い。

p_0 は、波の無いときの水圧である。当然静水圧であり、 $z = 0$ で $p_0 = 0$ となるためには、

$$p_0 = -\rho g z \quad \text{-----}(2-14)$$

となる。図-2で破線で示されているのが第零次近似の水圧である。それが静水面をよぎる点が $z=0$ で $p_0=0$ を満たしている。図中の実線が真の解であるから、静水面の位置でかなりかけ離れた値になっていることが判ろう。これに近づくための補正を次々に行なっていく。

第2項は、 p_1 が鉛直方向にどんな分布形を持つにしろ、 $z = 0$ においては、水面上昇第一近似分 η_1 による静水圧増加と同じ値になることを求めている。図-2の一点鎖線が第一近似の解で、これが静水面をよぎる点は第一近似の波面から静水圧分布として点線のように降ろしてきた圧力と一致するように決定されなくてはならない。

さて、次の段階では、第零近似が直線分布であるから、 p_0 の二階微分の項は省略できて

$$p_2 = -\eta_2 \frac{\partial p_0}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \quad \text{-----}(2-15)$$

が $z=0$ で満たされなくてはならない。図-2から判る通り、静水圧分布(点線)は上に行くほど圧力が減り、

第一次近似（一点鎖線）は逆に増える分布をしている。二次近似の波面の位置である点1から静水圧の傾きで直線を引き静水面と交わる点を点2とする。点2と ϵp_1 点との差が右辺第1項である。ここから上方に一次近似の波面の高さまで上がって点3をさだめ、 ϵp_1 点での圧力の勾配で下にさがると点4が静水面との交点として決まる。こうして $z=0$ での $\epsilon^2 p_2$ の値が設定できた。真の解の静水面での値にかなり近づいた事が判る。

3. 各種基本解の圧力の比較

3-1. 第一近似解

微小振幅表面波の第1近似までの解は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -gz + ag \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) \\ &= g(K\eta_1 - z) \end{aligned} \quad \text{----- (3-1)}$$

ただし、 $\eta_1 = a \cos(\sigma t - kx)$ 、 $K = \cosh k(z+h)/\cosh kh$ （水压係数）である。第2項は、静水圧分布をしていないが、 $z=0$ を代入すればすぐ分かるように、この点では静水圧分布による圧力上昇と一致している。これを基礎にして次々と高次近似の解を求めて行くのが、表面波の摂動解法である。

長波理論でも、第一次近似の段階では(3-1)式に長波としての近似を代入して求めても同じ結果をうる。 kh 、 kz が非常に小さいのであるから、線形長波の圧力分布は

$$p = \rho g(\eta_1 - z) \quad \text{----- (3-2)}$$

で与えられる。

ところが、長波近似の場合、この解を基礎にして高次解を求めようとすると、第2次近似で永年項が生じ、摂動法が破綻する。そこで $z=0$ での展開を諦め、第1近似の水面上昇 η_1 の周りの展開に切り替える。これがいわゆる浅水理論である。解は

$$p = \rho g(\eta_1 - z) \quad \text{----- (3-3)}$$

となって線形長波と全く同形になるが、その意味するところは異なっている。

図-3に、表面波線形解、長波線形解、浅水理論三者の水圧分布形を示す。

図-3 (A)が微小振幅表面波である。破線は波が無いときの水圧で、一点鎖線が波の第1近似によるものを加えた水圧である。右には、第1近似の分だけを拡大して示す。水面では零にならない。ただし、その差は $0(a^2)$ と小さい。本来はこの近似の段階で話をする際、静水面を挟んだ上下 $2a$ の区間において、解の形についての細かな議論するのは妥当ではない。水面での圧力零を $0(a^2)$ として満たす努力をし、残差が $0(a^3)$ となった後に議論しなくてはならない。

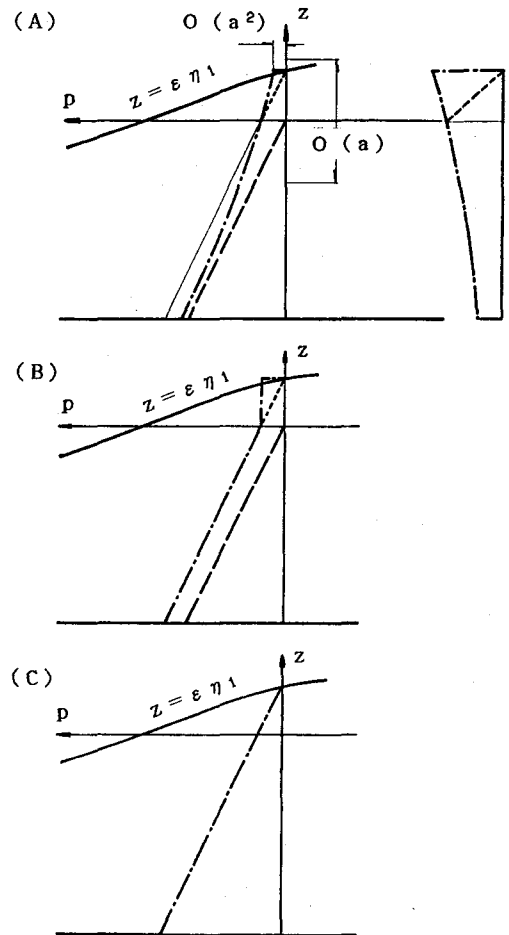


図-3 近似度と圧力。(A)微小振幅表面波、(B)微小振幅長波、(C)浅水理論

どうしても0(a)で水面近くをも議論したい時には、図中の点線のように波面から静水面まで静水圧分布であると仮定した訂正をしなくてはならない。この訂正はごく妥当なことのように見えるが、実は大きな矛盾を含んでいる。そもそも波による圧力の分布形が直線ではなくcoshで与えられるのは、波面が水平面ではなく流線が曲率を持っていることと強く関連している。流線の曲がりは波面に近いほど大きいから、その影響は上部ほど大きい。それにもかかわらず静水圧分布で近似するのであるから、影響の大きい所ほど、その影響を考慮しないことになるからである。

図-3 (B) は線形長波である。これは図-3 (A) の一つの極限であることから、理解できよう。

図-3 (C) が浅水理論の水圧である。ここでは、水面で丁度零になっていて矛盾が無い。そのかわり、水面位置が不明であるという犠牲を払っているのである。

3-2. 表面波の二次近似

さて、一般流Uをも含んだ第二近似までの速度ポテンシャルは次のような形をしている。

$$\begin{aligned} \phi = & -Ux + a \frac{\sigma_r}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\sigma t - kx) + \frac{3a^2 \sigma_r}{8} \frac{\cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} \sin 2(\sigma t - kx) \\ & + U_B x + [\frac{1}{2}(U-U_B)^2 + g\Delta h_w]t \end{aligned} \quad (3-4)$$

= (一般流) + (第一近似の周期解) + (第二近似の倍周波数解)
+ (質量輸送の補正であるxに比例する0(a²)の項)
+ (表面圧力の補正であるtに比例する0(a²)の項)

という組立になっている。平均量の議論を行なうには、二次近似の周期解は実は不要である。平均すると零となるからである。しかし、x, tに比例する二次項は必要となる。xに比例する項は流れであり、時間tに比例する項は圧力の補正あるいは水位の補正である。

また、波形は一次近似までで十分であり、

$$\eta = a \cos(\sigma t - kx) \quad (3-5)$$

と綺麗な正弦波で与えられる。今後の議論には、二次近似の波形は必要ない。

そのほか、必要な関係や表現は次の通りである。

分散関係 (σ, 固定座標での周波数; σ_r, 流れとともに移動する座標での周波数)

$$\sigma_r^2 = (\sigma - kU)^2 = gk \tanh kh \quad (3-6)$$

波速(c, T, 固定座標での波速と周期; c_r, T_r, 移動座標での波速と周期)

$$c = \sigma/k = L/T, \quad c_r = \sigma_r/k = L/T_r \quad (3-7)$$

波エネルギー (単位面積あたり)

$$E = \rho g a^2 / 2 \quad (3-8)$$

などである。また、

$$G = \frac{2kh}{\sinh 2kh} \quad (3-9)$$

とした略記を使用することがある。

例えば、群速度は

$$C_{gr} = c_r [1 + G]/2 \quad (3-10)$$

である。

3-3. 表面圧力の近似度向上

ある時刻における一次近似の水圧分布は図-3 (A) のようになる。ここで水表面での圧力を出してみよう。零にならず、残差Δp_eのあることは判っている。

$$\frac{p}{\rho} = -g\eta + ag \frac{\cosh k(\eta+h)}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) = -g\eta + ag \frac{\cosh kh + k\eta \sinh kh}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx)$$

$$= ag \frac{k\eta \cdot \sinh kh}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) = a^2 g k \cdot \tanh kh \cdot \cos^2(\sigma t - kx) = \frac{\Delta p_0}{\rho} \quad \text{----- (3-11)}$$

である。このように余った項の大きさは $0(a^2)$ であり、線形の範囲で議論している限りでは無視してかまわない。また一見周期的に見える。しかし一周期を通じて平均しても、この項は $1/2 \cdot a^2 g k \cdot \tanh kh$ となり零ではない。したがって表面での圧力条件を満たすためには調整が必要となるが、この時、他の $0(a^2)$ の項をも入れて議論しなくてはならない。

圧力はベルヌーイの関係を使って

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(u^2 + w^2) \quad \text{----- (3-12)}$$

から計算される。 $0(a^2)$ の項として流速の項からの寄与もあることはすぐに判る。

速度ポテンシャルの時間微分の項では $0(a^2)$ まで考えなくてはならないが、流速 u, w そのものは $0(a)$ 迄で十分である。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a \frac{\sigma_r \sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\sigma t - kx) + \frac{3a^2 \sigma_r \sigma}{8} \frac{\cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} \sin 2(\sigma t - kx) + \left[\frac{1}{2}(U - U_0)^2 + g\Delta h_w \right] \quad \text{----- (3-13)}$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -(U - U_0) + a\sigma_r \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t - kx) \quad \text{----- (3-14)}$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -a\sigma_r \frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\sigma t - kx) \quad \text{----- (3-15)}$$

を代入する。流速項の自乗から $\sin, \cos$ の自乗が発生する。これを t, x に関係しない項と倍周波数の項に分離する。その結果、

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -gz + g\Delta h_w - \frac{a^2 g 2kh}{4h \sinh 2kh} \cosh 2k(z+h) + ag \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) + (0(a^2) \text{の倍周波数成分}) \\ &= -gz + g\Delta h_w [1 - \cosh 2k(z+h)] + ag \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) + (0(a^2) \text{の倍周波数成分}) \end{aligned} \quad \text{----- (3-16)}$$

とかける。ここで

$$\Delta h_w = \frac{a^2 2kh}{4h \sinh 2kh} = \frac{a^2}{4h} G = \frac{GE}{2\rho gh} \quad \text{----- (3-17)}$$

と選んである。こう選ぶと、時間に関する平均圧力が、表面で零になるからである。このことを以下に示す。

$z = \eta$ を代入すると、表面での二次近似までの圧力は

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -g\eta + g\Delta h_w [1 - \cosh 2k(\eta+h)] + ag \frac{\cosh k(\eta+h)}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) \\ &= -g\eta + g\Delta h_w [1 - \cosh 2kh] + ag \frac{\cosh kh + k\eta \cdot \sinh kh}{\cosh kh} \cos(\sigma t - kx) \\ &= -g\eta + g\Delta h_w [1 - \cosh 2kh] + ag \cos(\sigma t - kx) + a^2 g k \cdot \tanh kh \cdot \cos^2(\sigma t - kx) \\ &= g\Delta h_w [1 - \cosh 2kh + 4\sinh^2 kh \cdot \cos^2(\sigma t - kx)] \end{aligned} \quad \text{----- (3-18)}$$

となる。瞬間々々には表面で零になってはいないが、一周期または一波長について平均すれば、 $\cos$ の自乗の項は $1/2$ となり、双曲線関数の性質から、時間平均圧力は確かに表面で零となる。

水面付近を除くと、時間的に平均した圧力の鉛直分布は

$$\frac{\bar{p}}{\rho} = -gz + g\Delta h_w [1 - \cosh 2k(z+h)] \quad \text{----- (3-19)}$$

である。

ここまでの経過を振り返ってみよう。一次近似の解は水表面で正の残差があり、時間平均的に圧力零を満たしなかった。そこで、 $0(a^2)$ 迄で平均的に圧力零が満たす方法を探した。高次解を求めるにあたっては、省

略のないベルヌーイの式を使用する。まず、流速の自乗の項を計算したところ、速度水頭の分だけ水位を下げる効果によって調整が行なわれたが、水表面では効きすぎて負の残差が残った。そこで更に補正のために $g\Delta h_w$ を付け加えたのである。

図-4 は平均的な水圧分布（二点鎖線）を示す。破線は第一項で、波が無くとも存在する静水圧である。これに流速からの寄与分である第三項を補正したものが点線である。水面で負の残差を生じ、一次近似の正の残差を加えても足りないため、さらに第二項で与えられる補正を行ない、水位補正という形に表現した。

上式に $z=-h$ を代入するとすぐ判るが、 Δh_w は水底での波の平均速度水頭と全く同じになっている。

ここで、一つだけ記憶して置きたいことがある。水深 h は実は未定であるということである。ここまでの積分などでは、水表面に z 軸の零点を置いて計算しているが、流速が早くなると平均水位が下がるから、場所によって原点の位置が違ふ。水底の位置は不変であるが、測る座標系の方が変化するからである。

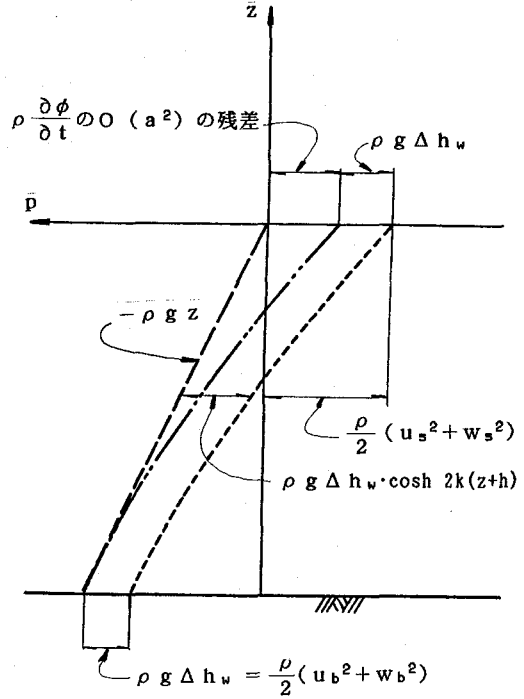


図-4 時間平均圧力の鉛直分布

4. 質量輸送

4-1. 流れの流速分布

いま、流れは鉛直方向には一様分布とすると、その時間的平均値としての分布を描けとわれたら、余りにも簡単すぎて、問題が間違っているのではないかと感じるであろう。しかし、このところから正確に議論していなくては波による質量輸送のイメージは確立しない。

流れだけがあるものとしよう。図-5 (A) のように水底 $z=-h$ から $z=0$ まで U の大きさを持つ。全流量 q は $q=Uh$ で与えられる。これには議論の余地もあるまい。

では波も同時に存在するときの一般流についてはどうであろうか。線形の、単純な正弦波が存在しても、波の谷より下の部分については、一様な分布をすることに変わりがない。

しかし、波の谷より上では事情が

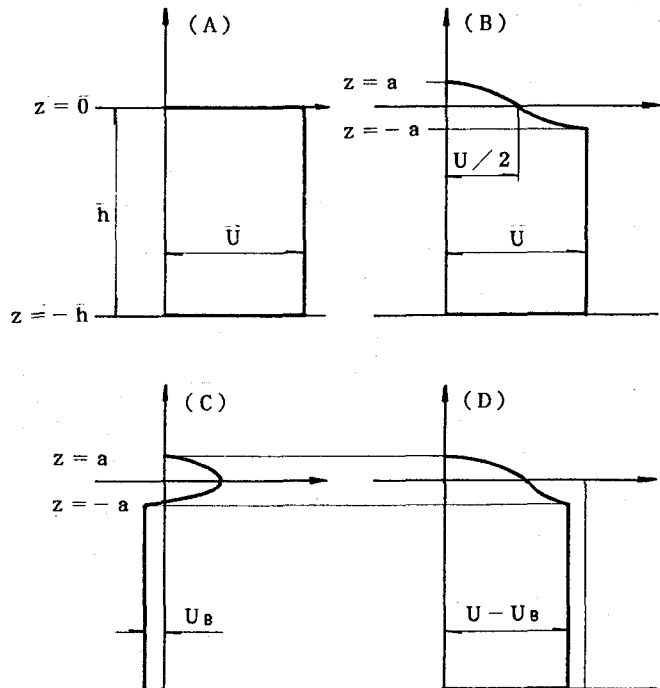


図-5 平均流分布。(A) 流れのみ、(B) 波による流れ分布の変化、(C) 波のみ、(D) 波と流れ。

異なってくる。今、 $x=0$ での時間波形は

$$\eta = a \cos(\sigma t) \quad \text{----- (4-1)}$$

であたえられる。図-6に示すように、 $-a < z_1 < a$ を満たす高さ z_1 の場所では、 $-t_1 < t < t_1$ である時間帯だけ水が流速 U で流れ、その他の時間には水はなく、空気が存在する。従って、平均流速は次のように計算され、 U よりも小さなものとなる。

$$U_{z=z_1} = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} U dt = \frac{U}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{z_1}{a} \right) \quad \text{----- (4-2)}$$

この結果、平均的な流速分布は図-5(B)となる。下方の境界は水底で位置が固定されているのに比べ、上方境界すなわち水面は平均を取る時間内に位置を変えることが原因である。

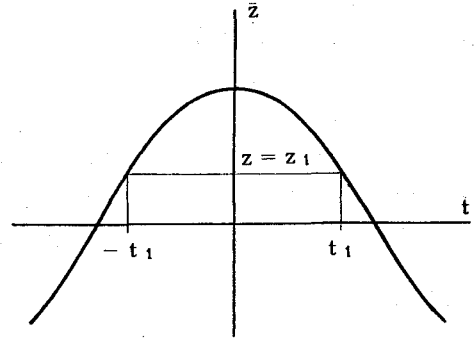


図-6 高さ z_1 と水の存在する時間の関係

4-2. 波のみ存在するときの平均流速分布

波運動の水平流速は、線形である範囲では次式(4-3)のように周期的であるから、「波の谷よりも下であること」と云う条件を満たす位置では、零となる。しかし、波の谷と山の間では、流れに対して考えたように境界の位置の変化を取り入れて計算しなくてはならない。

$x=0$ において水平流速を時間の関数として書くと、

$$u = a\sigma \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t) \quad \text{----- (4-3)}$$

図-6を参照しながら、高さ z_1 を水面がよぎる時間帯($-t_1$ から t_1 まで)について u を平均する。

$$\bar{u}_{z=z_1} = \frac{2}{T} \int_0^{t_1} u dt = \frac{2a\sigma}{T} \frac{\cosh k(z_1+h)}{\sinh kh} \int_0^{t_1} \cos(\sigma t) dt = \frac{2a}{T} \frac{\cosh k(z_1+h)}{\sinh kh} \sin[\cos^{-1}(z_1/a)] \quad \text{----- (4-4)}$$

これを $z_1=-a$ から $z_1=a$ まで集め、密度 ρ をかけると波による質量輸送になる。

$$M = \rho \int_{-a}^a \bar{u} dz_1 = \frac{2a}{T} \frac{\cosh kh}{\sinh kh} \int_{-a}^a \sin[\sin^{-1}\{1-(z_1/a)^2\}^{1/2}] dz_1 = \frac{\rho \pi a^2}{T} \frac{\cosh kh}{\sinh kh} = \frac{\rho \pi a^2 g k}{T \sigma^2} = E/c \quad \text{----- (4-5)}$$

ところで、これだけの水量が本当に常に前方へ運ばれるのであろうか。事情は簡単ではない。境界条件を十分に考慮にいれなければならないのである。

いちばん簡単な例として、長さが有限の水路内で、平衡状態に達したものとしよう。前方へ運ばれる質量輸送を補償する戻り流れが生じ、任意地点の鉛直断面内では、質量輸送総量は零でなくてはならない。戻り流れがどんな鉛直分布を持つのかは判らないが、一つの近似として $z=0$ から $z=-h$ 迄に一様に分布し、その大きさは U_B であると仮定する。このとき、

$$M = \rho h U_B \text{より} \quad U_B = E/\rho c h \quad \text{----- (4-6)}$$

となる。従って、波のみに依る質量輸送速度は、(4-4)、(4-5)を加えて、図-5(c)のような分布となる。

水深変化が緩やかで、反射波が無視できる通常の海岸の場合、平衡状態に達した後では、戻り流れは一様分布を持つとし、かつ任意地点では鉛直断面内で質量輸送総量は零と仮定するのが普通である。

4-3. 波と流れが存在する場合

緩やかに水深が変化する場合、平衡状態に達した後、波運動に起因する質量輸送はそれ自身で任意地点の鉛直断面内で総量が零との条件を満たすものと仮定する。

したがって、図-5(b)、(c)の和として、(d)が平均流速の鉛直分布として得られる。流れの流速 U は零次の項、波の谷以下での平均流速は零次および2次の項の和で与えられる。ただし、この時

$$U_B = E/\rho c_r h$$

----- (4-7)

のように流れに相対的な波速 c_r を使うことになる。

こうして得られる質量輸送を補正した速度ポテンシャルの表現が式(3-4)なのであった。

一般の場合、流れと波とを合わせた質量輸送は、境界条件の如何によって左右され、簡単には決められない。境界条件としては、質量輸送速度でなく、質量輸送流量 q で与えるのが便利である。なぜなら、前にも述べたように、平均水深 h も場所的に変化するからである。

記憶すべき事は、"The moral is that the mean velocity U can not be prescribed in advance as one might expect. The same applies to the mean depth h ." Whitham(1962)である。

5. ラディエーションストレス (平均しても零にならない運動量輸送)

ある空間を占める水の流速を変化させるには、二つの方法がある。一つはその水に力を加えることである。いま、完全流体で考えているから、圧力を取り上げれば良い。 もう一つは、違った流速の水と入れ換えることである。これが運動量の供給である。したがって、全運動量輸送は、圧力部分 p と運動量部分 ρu^2 とからなるといっても良い。解が周期解であっても、水底から水面まで集めるような操作をすると、境界である水面が上下運動をする事が原因となって、零とならない寄与の生ずる事が判っている。圧力及び水水平方向運動量を水底から水面まで集め、一周期について平均してみると、その結果は零ではない。これがラディエーションストレス F_w と呼ばれる。

成立ちからして、圧力・運動量の二つに分け、それぞれ F_p 、 F_u として計算してみよう。 まず、圧力について式(3-19)を考えにいて計算すると

$$\int_h^{\eta} p dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 + \rho g h \Delta h_w = (\text{静水圧}) + EG/2 = (\text{静水圧}) + F_p \quad \text{----- (5-1)}$$

というきわめて簡単な表現となる。

ρu^2 について式(3-14)を使いながら計算する。この時、 U_B は $0(a^2)$ であること、およびその成立ちからして、

$$\int_h^{\eta} \left[a \sigma_r \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t - kx) - U_B \right] dz = 0 \quad \text{----- (5-2)}$$

であることを使うと簡単である。

$$\begin{aligned} \int_h^{\eta} \rho u^2 dz &= \rho \int_h^{\eta} \left[U + \left\{ a \sigma_r \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t - kx) - U_B \right\} \right]^2 dz \\ &= \rho \int_h^{\eta} U^2 dz + \rho \int_h^{\eta} a^2 \sigma_r^2 \frac{\cosh^2 k(z+h)}{\sinh^2 kh} \cos^2(\sigma t - kx) dz \\ &= \rho U^2 h + \frac{1}{4} \rho a^2 g [1+G] = \rho U^2 h + \frac{1}{2} E [1+G] = (\text{一般流の運動量輸送}) + F_u \quad \text{----- (5-3)} \end{aligned}$$

この結果、ラディエーションストレス F_w は

$$F_w = F_p + F_u = E [1+2G]/2 \quad \text{----- (5-4)}$$

と表現される。

ここで、各平均量の物理的イメージを探ってみよう。

まず、波エネルギー E は、波振幅 a を使って

$$E = \rho g a^2 / 2 \quad \text{----- (5-5)}$$

と与えられるのが普通の表現であるが、もし波による質量輸送速度 U_B を使うならば

$$E = \rho h c_r \cdot U_B \quad \text{----- (5-6)}$$

と描ける。波速で進行する水塊が持つ平均的な運動量と解釈できる。

ラディエーションストレスの流速に起因する項は

$$F_u = \rho h c_{gr} \cdot U_B = E C_{gr} / C_r \quad \text{----- (5-7)}$$

である。群速度で進む水塊の事をHay(1970)はwave particleと名付けた。\$F_u\$は、それが持つ平均的な運動量である。

ラディエーションストレスの圧力に起因する項は、

$$F_p = \rho g h \Delta h_w \quad \text{----- (5-8)}$$

で、図-4で判るように、平均的な圧力補正を全水深にわたり集めたものである。

6. 平均エネルギーとwave set-down

6-1. 波運動による平均水位の低下(水表面での議論)

定常流の場合、ベルヌーイの定理は、

$$u^2/2g + p/\rho g + z = H \quad \text{----- (6-1)}$$

である。水面では

$$u^2/2g + h + z = H \quad \text{----- (6-2)}$$

となり、流速\$u\$ (運動のエネルギー) が大きい所では、水位\$(h+z)\$ (位置のエネルギー) が下がると説明される。例えば図-7のようである。

波運動の場合に、同じ事が生じて不思議ではない。つまり、波高(波としての運動エネルギー) が大きい所では、水位が下がる。これがwave set-downである。

話を2次の項までに限ることとして、ベルヌーイの条件からこの関係を導こう(例えば、Mei, 1983)。\$z=\eta\$における

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz = 0 \quad \text{----- (6-3)}$$

を、\$z=0\$において展開すると、

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\eta = 0 \quad \text{----- (6-4)}$$

ここで、第2項を

$$-\eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} = \eta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial(\eta w)}{\partial t} - w \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial(\eta w)}{\partial t} - w^2 \quad \text{----- (6-5)}$$

のように速度ポテンシャルの定義、および波形連続条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w, \quad z=0 \text{において。} \quad \text{----- (6-6)}$$

を使って書き直す。式(6-6)により、\$\eta\$がcosなら\$w\$はsinで与えられるから、式(6-5)の\$\eta w\$は倍角のsinになり、平均すると消えてしまう。こうした事を考慮して1周期に関し式(6-4)の平均を取ると

$$\frac{1}{2}(\overline{u_s^2} - \overline{w_s^2}) + g\bar{\eta} = 0. \quad \text{----- (6-7)}$$

が得られる。ここで、水面での値であることを明確にするために流速に添え字の\$s\$をつけて表わした。

この結果、運動が大きくなると平均水位が下がることが判る。しかし、水面位置での水位時間変化の影響を取り入れているため、定常流の場合のように速度水頭と位置水頭の入替わりは、直接的ではない。

ここで、\$z=0\$での\$u_s, w_s\$の値を計算すると

$$\overline{u_s^2} = \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \frac{\cosh^2 kh}{\sinh^2 kh}, \quad \overline{w_s^2} = \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \quad \text{----- (6-8)}$$

であり、式(3-17)を参照すると

$$\bar{\eta} = -\frac{a^2 \sigma^2}{4g} \left[\frac{\cosh^2 kh}{\sinh^2 kh} - 1 \right] = -\frac{a^2 k}{2 \sinh 2kh} = -\Delta h_w \quad \text{----- (6-9)}$$

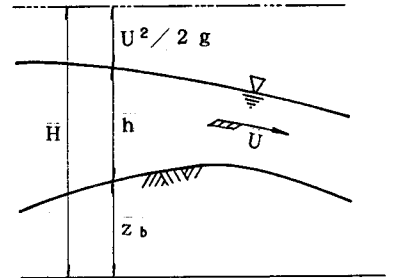


図-7 定常流のベルヌーイの定理

が得られる。表面圧力補正項を水位として表現した値と全く同じである。

Whithamのいうように、「平均流速、水深は前もっては不明」である。この議論の展開では、その不明である水面位置を $z=0$ と選んで摂動を行なっている。変化しない基準面を用いた議論が出来ないものであろうか。

6-2. 波と流れが共存する場合の平均的ベルヌーイの定理（水底での議論）

図-8のように、 $z=0$ を固定した基準面に取り、底面の高さを z_b 、その上に水深 h とすると、平均水位は

$$\bar{\eta} = z_b + h \quad \text{----- (6-10)}$$

と書ける。ここで、水深の定義として、底での平均的な圧力を静水圧換算した値で与えられるとする。

$$h = \frac{1}{\rho g} \bar{p}_b \quad \text{----- (6-11)}$$

さて、平均的なベルヌーイの定理は、次の通りである。

$$\frac{1}{2g} (\bar{u}^2 + \bar{w}^2) + z + \frac{\bar{p}}{\rho g} = \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \text{const.} \quad \text{----- (6-12)}$$

いま、流れは z 方向には一様な流速分布を持ち、しかも x に無関係（あるいはきわめて緩やかに変化する）ので第一近似としては x に無関係）とし、波は x, t に関して周期的とする。この時、固定座標で測った一周期について平均すると、右辺の値は常数となる。これは、平均的な全水頭で、 x に無関係の一定値を取る。今後、Mean Energy Levelの意味のMELを添え字としてつけて表現する。これを基準値として選ぶと、6-1の扱いが場所によって異なった平均水位 (MWL=Mean Water Level) を基準としたものであったのに比べ、分かりやすいものとなる。

平均水位の位置は、運動のエネルギーが増えるにつれて低下する。すなわち、上式の値を底面 $z=z_b$ で考えると、

$$\frac{1}{2g} (\bar{u}_b^2 + \bar{w}_b^2) + \bar{\eta} = \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} = \text{const.} \quad \text{----- (6-12)}$$

あるいは、

$$\Delta h = D - h = \frac{1}{2g} (\bar{u}_b^2 + \bar{w}_b^2) \quad \text{----- (6-13)}$$

である。「平均水位の低下量は、底面で測った平均速度水頭の大きさに等しい」。定常流でのベルヌーイの定理と全く同じ形となった。

ここで、 u_b を計算しよう。その際、 $0(k^2 a^2)$ の周期解は平均操作を行なうと消えることを考慮して関係のある項だけを書くと次のようになる。

$$u = U + a \frac{\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t - kx) - U_b + 0(k^2 a^2 \text{の周期項}) \quad \text{----- (6-14)}$$

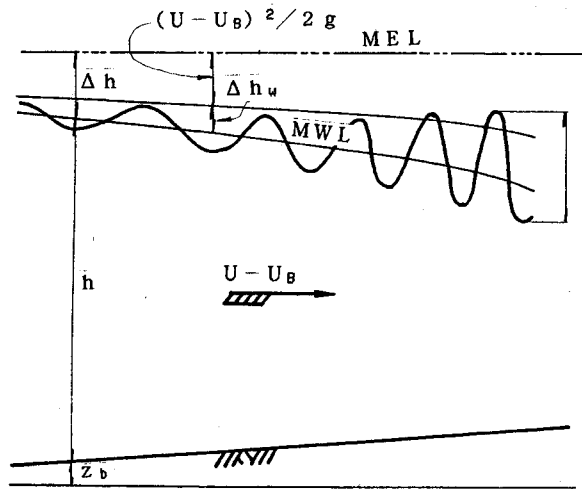


図-8 波流れ共存時の平均的ベルヌーイの定理

これに $z=-h$ を入れれば良い。

また底面では w_b は零であるから、結局水位低下量(wave set-down)は次式となる。

$$\begin{aligned}\Delta h &= \frac{(U - U_B)^2}{2g} + \frac{a^2}{4h} \frac{2kh}{\sinh 2kh} = \frac{(U - U_B)^2}{2g} + \Delta h_w = \frac{U^2}{2g} + \frac{a^2}{4h} \frac{2kh}{\sinh 2kh} - \frac{UU_B}{2g} \\ &= \frac{U^2}{2g} + \frac{a^2}{4h} \frac{2kh}{\sinh 2kh} - \frac{a^2 U}{2hcr} \quad \text{----- (6-15)}\end{aligned}$$

0(a²)迄正しい第2式によれば、水位の低下は、修正後の一般流速に対応する速度水頭と波運動の運動エネルギーによる速度水頭との和で与えられるのである。図-5 (d) に示すように、波の質量輸送に見合う分だけ戻り流れ U_B を考えねばならなかった。このため、底面での平均的な流速は $(U - U_B)$ に修正されるからである。

多くの文献では、誘導の過程が異なり、最後の式のような表現になっている。三つの項があり、それぞれ、第1項は流れの速度水頭、第2項は波運動の運動エネルギーによる速度水頭、第3項は波と流れの干渉項と説明される。

どの様な表現でも、もちろん全部0(a²)迄は正しいが、第2の式が物理的イメージが明確であろう。

この様に、底面で考えると、定常流の場合と完全に対応していることが判る。

7. エネルギー伝達率とwave actionの保存則

鉛直断面を通じて運ばれるエネルギーを計算しよう。高さ dz を通じて単位時間に運ばれる質量は $\rho u dz$ 、これの持つ運動のエネルギー、位置のエネルギーが運び込まれるのと同時に、この断面に働く圧力が仕事をする。これは圧力 $p dz$ にその方向の流速 u を掛ければ与えられる。この両者の和が運ばれるエネルギーである。同じ事であるが、 $\rho u dz$ が運び込む全エネルギーという言い方もできる。

これを水深全体について集め、さらに一周期について平均すると、平均的なエネルギー伝達率 E_T が得られる。まず、平均水面に $z=0$ を取った表現で計算する。

$$E_{T, MWL} = \overline{\int_{-h}^0 \rho \left[\frac{1}{2} u^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right] u dz} = \overline{\int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dz} \quad \text{----- (7-1)}$$

ここに

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} (U - U_B)^2 + \frac{F_p}{\rho h} + \frac{\sigma}{k} a \sigma_r \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(\sigma t - kx) \quad \text{----- (7-2)}$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \left[-U_B + a \sigma_r \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t - kx) \right] \quad \text{----- (7-3)}$$

を代入して計算する。この時、質量輸送速度の関係

$$\int_{-h}^0 \left[a \sigma_r \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(\sigma t - kx) - U_B \right] dz = 0 \quad \text{----- (7-4)}$$

およびラディエーションストレスの速度成分の表現

$$\int_{-h}^0 a^2 \sigma_r^2 \frac{\cosh^2 k(z+h)}{\sinh^2 kh} \cos^2(\sigma t - kx) dz = F_u \quad \text{----- (7-5)}$$

を使用すると積分が簡単である。

結果は

$$\begin{aligned}E_{T, MWL} &= \overline{\int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dz} = \rho h U \left[\frac{1}{2} (U - U_B)^2 + \frac{F_p}{\rho h} \right] + \rho h U_B (U - U_B) \frac{\sigma}{k} + F_u \frac{\sigma}{k} \\ &= \frac{1}{2} \rho h U^3 + E(U + C_{gr}) + U F_w \quad \text{----- (7-6)}\end{aligned}$$

である。

ただし、ここで

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{\sigma_r}{k} + U = C_r + U, \quad F_u = \rho h C_{gr} U_B \quad \text{-----}(7-7)$$

の関係をも使っている。

エネルギー伝達の中身は、式(7-6)では明確である。第一項は流れの運動エネルギーが流れの速度で運ばれるもの、第二項は波のエネルギーが流れに相対的に群速度で運ばれるもの、第三項はラディエーションストレスが流れに対して行なう仕事である。

この表現の欠点は場所によっては異なるであろう平均水面を基準としていることである。積分の上限が平均水面MWLから測った波面であったことから推測されよう。異なった場所の間で比較をするには不便である。まだ未定である水面位置を基準としない表現の方が望ましい。

場所によっては変化しないレベルを基準に取れば、相互比較が楽になる。6-2で出てきた平均エネルギー位置MELを基準レベルにしよう。これは定常流の場合の全水頭で、場所によらない。図-8を見れば判る通り、MELの方が上に位置する。すなわち、MELから測ったエネルギー値の方が小さい値となる。高さの違いが Δh であるから、位置エネルギーにすると $\rho g \Delta h$ 、これに U をかけ $-h$ から水表面まで集め、一周期について平均する。この時、常数である $\rho g \Delta h$ に U 以外の項をかけて得られる積分は式(7-4)の関係から零になる。結局、補正量としての寄与は、 $\rho g \Delta h$ に U をかけ水深 h 全体にわたって集めたものだけになる。

$$E_{r,MEL} = E_{r,MWL} - (\rho g \Delta h) U, \quad \text{ただし } \Delta h = (U - U_B)^2 / 2g + \Delta h_w \quad \text{-----}(7-8)$$

として計算すると、

$$E_{r,MEL} = (U + C_{gr})(1 + U/C_r)E = (U + C_{gr})(C_r + U)E/C_r = \sigma(U + C_{gr})E/\sigma_r \quad \text{-----}(7-9)$$

σ が固定座標からみた周波数で、所与の一定値であるから、MELを基準として考えたエネルギー伝達率一定の条件は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E}{\sigma_r} (U + C_{gr}) \right] = 0 \quad \text{-----}(7-10)$$

という、いわゆるWave action E/σ_r の保存則となる。

8. 終わりに。

当初、演算を全く度外視して説明することを考えたが、その根拠を示すのが難しく、かえって判りづらい、独りよがりのものになる可能性があった。演算を大幅に採用したため、予定した表題とは異なり、羊頭狗肉になった嫌いがある。しかし、一般書にみられるよりは、演算の持つ意味、演算上の要点などを分かりやすく工夫した積もりである。例えばWhithamの論文に沿って計算しようとする、式(3-4)にたどりつくのも大変である。平均量で話をするときには、実は $O(a^2)$ の周期項は不要なのであり、平均流速の補正、平均水圧の補正だけは $O(a^2)$ で行なうことを前提として進む、ここでのやり方で十分なのである。類書に従うよりは少しは演算も楽であるから、一度ご自分で追算して見られることをお勧めしたい。

参考文献

1. Hay, W.D. (1970): Kinematic wave theory, Proc. Roy. Soc. London, A. **320**, 209-226.
2. Jonsson, I. G., C. Skougaard and J. D. Wang (1970): Interaction between waves and currents, Proc. 12th Conf. ICCE, 489-507.
3. Whitham, G. B. (1974): Linear And Nonlinear Waves, 636 p., Wiley-Interscience.
4. Whitham, G.B. (1962): Mass, momentum, and energy flux in water waves, J. Fluid Mech., **12**, 135-147.