

# 環境水理学における拡散問題

Diffusion Problems in Environmental Hydraulics

小松 利光

Toshimitsu KOMATSU

## 1. はじめに

地球環境の危機が認識されるようになってから、さまざまな分野の多くの研究者がこの問題に目を向け、研究体制を整えつつあるが、我々水工学の研究者・技術者にとってこの問題はどう関わってくるのであろうか。水工学の知識でどう対処できるのだろうか。

確かに温暖化・酸性雨・オゾン層破壊などの地球環境問題を扱うには大気・海洋を含めた地球スケールの流体運動や乱流運動の知識が要求されている。大気大循環モデルなどは我々が日常扱っている問題とは桁違いのスケールをもつため、当然新たな未知の要因が数多く入ってくることになる。従って、我々が直接地球規模の環境問題に入っていくのは容易ではない。

しかしながら近い将来、具体的な対策面においては地球規模から小規模化・局地化への回帰が起こってくるであろう。例えば水位上昇や気候変動に伴う集中豪雨などに関してはローカルで具体的な対策が不可欠となってくるからである。従って従来より我々が取り扱ってきた枠組みの中での環境問題に関する知見が大いに活用されるようになるものと思われる。

ところで、環境水理学における拡散問題というテーマで以下議論することになるが、環境水理学の定義がいまだに明らかではない。環境問題に関わりをもった人々がそれぞれの立場から、それぞれのフレームを設定して環境水理学と呼んでいる段階であり、まだ統一の見解は見出されていない。

本稿ではまず環境水理学の守備範囲について若干ふれ、その後、拡散・分散問題における数値解析手法の高精度化や拡散能の評価法について述べる。

## 2. 環境水理学とは

土木学会水理委員会環境水理部会では現在“何が環境水理学なのか”を明確にするための作業を行っている。基本的には水理学・流体力学の基礎から出発して、生態学、生物学、熱力学、衛生工学、物理水文、大気環境、海洋学等との間の学際領域を取り込んだ広い範囲をカバーすることになる。以下に示すのは浅枝隆 埼玉大学助教授の試案を基に著者の考えを新たに加えたものである。

### 環境水理学

#### A. 環境水理基礎

##### A-1 流体の性質

物理的性質・化学的性質

##### A-2 密度流・成層流の特性

密度流・成層流の基礎方程式、回転系流れ場の基礎方程式

モーニン・オブコフの相似則

混合層、界面抵抗則

A-3 環境水理に見られる代表的な流れ

ブルーム、サーマル、噴流、気泡噴流、パフ

A-4 拡散・分散問題

乱流拡散、移流分散

A-5 放射および熱輸送

黒体放射、日射、大気放射、対流による熱輸送

A-6 蒸発散

バルク式輸送形式、ペンマン・マンティースの式

A-7 水質指標

pH、DO、COD、BOD、生物指標

B. 閉鎖性水域および河川の環境水理

B-1 閉鎖性水域の物理環境

熱収支、機械的エネルギー

水温（塩分）分布、温度躍層の推移

B-2 閉鎖性水域および河川における拡散・分散

B-3 水質問題

生物的水質環境、化学的水質環境

プランクトン

B-4 水質改善技術

C. 海洋の環境水理

C-1 海洋の物理環境

C-2 海洋における拡散・分散問題

C-3 海洋環境と水産資源

C-4 赤潮・青潮

D. 都市の環境水理

D-1 都市の大気環境、熱収支

D-2 ヒートアイランド、海風、陸風

D-3 化学物質による大気汚染・拡散

E. 乾燥地環境水理

E-1 砂漠化

E-2 塩害

F. 地下水汚染

F-1 生物汚染

F-2 重金属による汚染

F-3 放射性廃棄物

以上のように広範囲に渡る学際分野が入ってくるが、環境水理学で特に要求される水理学・流体力学的知識は成層流・密度流ならびに拡散・分散問題に関するものであろう。

### 3. 自然水域における拡散・分散過程

#### 3・1 概 説

河川、湖沼、海などの自然水域における物質の拡散・分散過程については近年数多くの研究成果が発表されている。しかしながら自然水域の複雑な幾何学的形状や多くの力学的要因の故に全体的なパラメーターから拡散・分散過程を特定して拡散係数を完全に予知するまでには至っていない。

自然水域においては流れの要因の多さや拡散メカニズムの複雑さの故に、拡散方程式の解析解を期待するのはほとんど不可能であり、数値解析に頼らざるを得ない。したがって、自然水域における拡散・分散過程を良好に予知・把握するためには高精度な数値計算法の開発と高精度な拡散・分散係数の予測が不可欠となっている。

#### 3・2 拡散と分散<sup>1)</sup>

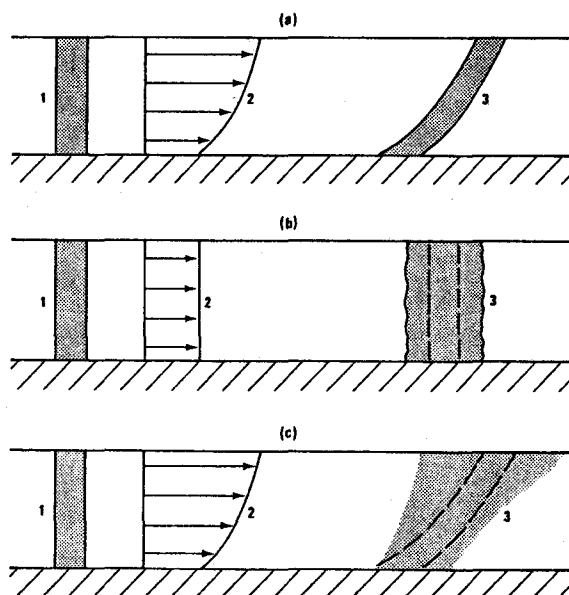


図-1 分散の概念

1:拡散物質の初期濃度分布, 2:流速分布, 3:時間経過後の濃度分布,  
(a)拡散のないせん断流の場合, (b)拡散はあるが流速が一様分布の場合,  
(c)せん断流でかつ拡散もある場合

拡散現象とは流体の不規則な運動により物質が輸送されて散らばる現象のことである。この散らばりの程度すなわち拡散能力は拡散係数で表され、乱れの強さや乱れのスケールに依存する。乱れによる物質の輸送量、すなわち乱流拡散を拡散係数と濃度勾配の積で表されるとして解析するのが一般的である。

一方、流速分布が一つの断面で一様でないせん断流の時には、この流速差によって流れ方向の物質輸送力に差が生じ、その結果流れ方向に散らばりを生じさせる。この現象は拡散とはそのメカニズムを異にしているので、分散あるいは移流拡散と呼んでいる。最も単純な場合として図-1に示すような鉛直2次元断面を考える。一様な流れの場合は拡散のみにより物質は拡がるが、せん断流の場合には流速差と拡散作用の両者により、流下方向に物質はより大きく混合する。

### 3・3 拡散方程式

大気中や水域における物質の拡散現象を規定する基礎式として、拡散方程式が拡散物質の保存則から導かれる。

瞬間量に対する1次元の拡散方程式は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_m \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (1)$$

となる。ここに $c(x,t)$ は瞬間濃度、 $u(x,t)$ は瞬間流速、 $D_m$ は分子拡散係数である。工学的にも重要な平均濃度、平均流速について取扱えるように、平均量と変動成分とに分ける。すなわち $c=C+c'$ 、 $u=U+u'$ として、この両式を(1)式に代入し、平均をとると次式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_m \frac{\partial C}{\partial x} - \overline{u'c'} \right) \quad (2)$$

右辺第2項が乱流拡散項であり、フラックスが平均濃度勾配に比例するとするFick則に従えば

$$-\overline{u'c'} = K_x \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3)$$

と表される。ここに、 $K_x$ は乱流拡散係数(渦動拡散係数)である。乱流においては $D_m \ll K_x$ であるので、1次元乱流拡散方程式は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (4)$$

となる。同様に2次元、3次元空間における乱流拡散方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (6)$$

平均流速ならびに乱流拡散係数が一定で、拡散物質を瞬間放出もしくは連続放出する場合について、いくつかの理論解析解が得られているが、現象の複雑な自然水域や大気中の拡散問題を扱うときは拡散方程式(4)、(5)、(6)式を直接数値計算することになる。

一方、河川や細長い湾のように断面平均した流速や濃度で拡散現象を近似的に表現し得る場合には1次元の移流分散方程式

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial AUC}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( A D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (7)$$

を用いることも可能である。ここでAは断面積、U、Cはともに断面平均された流速、濃度であり、 $D_x$ は流速や濃度の断面非一様の影響を考慮した移流分散係数である。通常  $D_x \gg K_x$  であることから(7)式では既に  $K_x$  が省略されている。

また広い湖沼や湾・海洋のように水深方向のスケールが水平方向のスケールに較べて極端に小さいときには水深方向に平均した流速・濃度で拡散を十分記述できる場合が多い。このときの2次元移流分散方程式は

$$\frac{\partial hC}{\partial t} + \frac{\partial hUC}{\partial x} + \frac{\partial hVC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( h D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (8)$$

である。ここにhは水深、 $D_x$ 、 $D_y$ は水深方向の流速のせん断効果が加味されたx方向、y方向の移流分散係数であり、通常  $D_x \gg K_x$ 、 $D_y \gg K_y$  である。

自然界の流れや拡散は厳密には3次元の現象であるから(6)式の拡散方程式を解くのが最も望ましいが、3次元格子を組むと膨大な数の計算点が必要となり、コンピューターの容量や計算時間上の制約から実行できない場合が多い。その結果(7)式の1次元もしくは(8)式の2次元の移流分散方程式を用いて数値計算を行うことになる。

### 3・4 拡散方程式の高精度数値計算法

密度差をもたない拡散物質の拡散問題を解析するときには、平均流による輸送(移流)と拡散もしくは分散による輸送という性質の異なる2種類の輸送形式を含む偏微分方程式(式(6)もしくは式(7)か(8))を解かねばならない。拡散や分散による輸送は種々の差分形式を用いてかなり正確に計算することが可能である。一方、平均流による輸送の項の数値計算は従来より1次精度風上差分、2次精度風上差分、Leapfrog差分、1次元 quick 差分、Lax-Wendroff 差分、Staggered 差分など多くのスキームを用いて行われてきたが、ダンピングや位相のずれなどの数値誤差が大きく、拡散の計算に匹敵する程の正確な計算は容易ではなかった。従って種々の工夫がなされてきたが、大別すると1つは平均流による輸送と拡散の計算を同時に行おうとするもので有限要素法を用いて試みられている<sup>2)</sup>。もう1つは移流と拡散・分散を別個に独立させて1step毎に取扱おうと

するもの (Split-operator approach) でそれぞれの process に対し最適な計算方法を選択できるという大きな長所がある。特に後者は移流項の計算に対し特性曲線法を用いることにより境界条件を自然な形で取り入れている。ここではこの難問の移流項の計算において従来のスキームに較べて格段に高い精度が得られているいくつかの計算法を紹介する。

### 3・4・1 Split-Operator Approach

1次元問題から2次元問題への拡張は比較的容易なので、ここでは簡単のため1次元の移流分散方程式 ( $A = \text{const.}$  の場合)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (9)$$

を考える。式 (9) を図-2 の計算格子に従って単純に差分化すると濃度の damping や位相のずれなどの数値拡散が大きくなり、ときには右辺の移流分散を凌駕する場合もみられる。

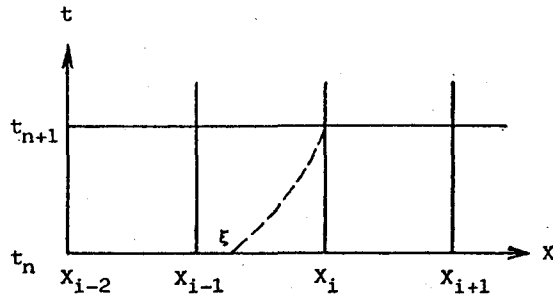


図-2 1次元計算格子

Split operator approach では 1 time step 毎に左辺の平均流による輸送と右辺の分散を便宜的に分離して、まず最初に次式に従って濃度  $C$  を輸送させる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

上式により新しい time step ( $n+1$ ) における濃度  $C_n$  の分布を求める。続いて次式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (11)$$

を解くことにより、 $\Delta t$  時間に拡散された最終的な濃度  $C_i^{n+1}$  を求める。

式 (11) の計算は式 (10) に比べると容易で、例えば “一般化された Crank-Nicholson スキーム” で精度良く計算される。簡単の為、 $D_x = \text{const.}$  として式 (11) を差分化すると

$$\frac{C_i^{n+1} - C_{a,i}^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\theta D_x}{(\Delta x)^2} \left\{ C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1} \right\} + \frac{(1-\theta)D_x}{(\Delta x)^2} \left\{ C_{a,i+1}^{n+1} - 2C_{a,i}^{n+1} + C_{a,i-1}^{n+1} \right\} \quad (12)$$

ここで $\theta$ は重みを表わすパラメータで  $0 \leq \theta \leq 1$  である。

$\theta = 0$  のときは “explicit”， $\theta > 0$  のときは “implicit” な計算となる。

$0 \leq \theta < 1/2$  に対しては安定条件

$$\frac{D_x \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2 - 4\theta} \quad (13)$$

が満足されなければならない。

$\theta \geq 1/2$  に対しては無条件に安定であるので、 $\theta = 1/2$  (Crank-Nicholson スキーム) がよく用いられる。

### 3・4・2 特性曲線法を用いた移流の計算<sup>3)</sup>

Split operator approach の2段階の計算のうち、高精度の計算が容易でない pure advection (純粋移流) の次式を特性曲線法を用いて計算する。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

上式は次のように書換えられる。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{dC}{dt} = 0 \quad (14)$$

すなわち、特性曲線  $dx/dt = U$  上で  $C = \text{const.}$  となる。従って、図-2において時刻  $t = t_{n+1}$  における  $x_i$  点での濃度  $C_i^{n+1}$  は

$$C_i^{n+1} = C_{\xi}^n \quad (15)$$

で与えられる。ここで $\xi$ は格子点  $(x_i, t_{n+1})$  に到る特性曲線の  $t = t_n$  における  $x$  座標を表す。そこで既知の  $t = t_n$  の格子点上の濃度を用いていかに  $C_{\xi}^n$  の値を精度良く求めるかが次の課題となる。

#### (a) 線型内挿スキーム

簡単に直線内挿によって  $C_{\xi}^n$  の値をを求める (図-2) と  $U = \text{const.}$ ,  $U\Delta t \leq \Delta x$  の場合には

$$C_i^{n+1} = C_{\xi}^n = \frac{U\Delta t}{\Delta x} C_{i-1}^n + \left(1 - \frac{U\Delta t}{\Delta x}\right) C_i^n \quad (16)$$

となる。これは1次精度の風上差分と等価である。ここで、 $C_i^n$ のまわりに Taylor 級数展開して、 $C_i^{n+1}$ ,  $C_{i-1}^n$ を求めると

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &\approx C_i^n + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ C_{i-1}^n &\approx C_i^n - \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。式(17)を式(16)に代入し、また式(10)より得られる次式

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = U^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (18)$$

を用いると、式(16)は次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U \Delta x}{2} \left( 1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (19)$$

ここで

$$C_r \equiv \frac{U \Delta t}{\Delta x} \quad (C_r: \text{クーラン数})$$

とおくと 式(19)は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} C_r (1 - C_r) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (20)$$

となる。式(20)の右辺は式(10)の移流方程式を式(16)のように差分化したときの数値誤差を表しており、その係数を

$$K_n \equiv \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} C_r (1 - C_r) \quad (21)$$

とおくと、 $K_n$ は数値拡散係数と呼ばれる。式(21)より  $C_r = 0$  or  $C_r = 1$  のときは  $K_n = 0$  となり、式(16)の計算は式(10)の厳密解を与える。一般的には  $C_r$  は整数とはならないので後で1次精度の風上差分の計算例として示すように  $K_n$  が存在し、大きな damping を引き起こすことになる。

#### (b) Holly - Preissmann スキーム (Two-point fourth - order method)<sup>4)</sup>

直線内挿の代りに Holly - Preissmann は濃度  $C_{i-1}^n$ ,  $C_i^n$  に加えて更に  $C' \equiv \partial C / \partial x$  として  $C_{i-1}'^n$  と  $C_i'^n$  の4つの既知量を用いて点  $x_{i-1}$  と  $x_i$  の間に以下のような内挿3次式を構成した。

$0 \leq C_r \leq 1$  に対して

$$C_i^{n+1} = C_\xi^n = a_1 C_{i-1}^n + a_2 C_i^n + a_3 C_{i-1}'^n + a_4 C_i'^n \quad (22)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 a_1 &= C_r^2 (3 - 2 C_r) \\
 a_2 &= 1 - a_1 \\
 a_3 &= C_r^2 (1 - C_r) (x_i - x_{i-1}) \\
 a_4 &= -C_r (1 - C_r)^2 (x_i - x_{i-1})
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

式 (22) を用いて順次計算を進めていくためには、ここで  $C_i^{n+1}$  の値も求めておかなければならない。式 (10) を  $x$  に関して 1 度微分すると  $C'$  を規定する次式が得られる

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + U \frac{\partial C'}{\partial x} = 0
 \tag{24}$$

式 (22) を導いた場合と同様の方法で  $x_{i-1} \sim x_i$  間で内挿して  $C'_\xi$  を求めると次のようになる。

$$C_i^{n+1} = C'_\xi = b_1 C_{i-1}^n + b_2 C_i^n + b_3 C_{i-1}'^n + b_4 C_i'^n
 \tag{25}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 6 C_r (C_r - 1) / (x_i - x_{i-1}) \\
 b_2 &= -b_1 \\
 b_3 &= C_r (3 C_r - 2) \\
 b_4 &= (C_r - 1) (3 C_r - 1)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

式 (22), 式 (25) を用いて計算格子点毎に  $C$  と  $C'$  の値を新しい  $(n+1)$  time step について求めていく。

式 (9) の右辺のように拡散もしくは分散のある流れでは、式 (22), (25) を用いて  $C$  と  $C'$  の純粋移流の計算を行った後、式 (11) ならびに式 (11) を  $x$  に関して微分することによって得られる次式

$$\frac{\partial C'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C'}{\partial x} \right)
 \tag{27}$$

を用いて  $C$  と  $C'$  の拡散の計算を各 time step 毎に行うことになる。

Holly - Preissmann スキームは直線内挿の式 (16) と比べると高い精度をもっており、damping や位相のずれも小さい。

流速  $U = 0.5$  m/s の一様流速をもつ理想的な 1 次元水路を考える。計算格子間隔を  $\Delta x = 200$  m として  $C_r = 0.25$  ( $\Delta t = 100$  sec),  $C_r = 0.5$  ( $\Delta t = 200$  sec),  $C_r = 0.75$  ( $\Delta t = 300$  sec) の場合について、図 -3 に示されたような初期濃度分布を純粋移流させる計算を行いその結果を図 -3 に示す。

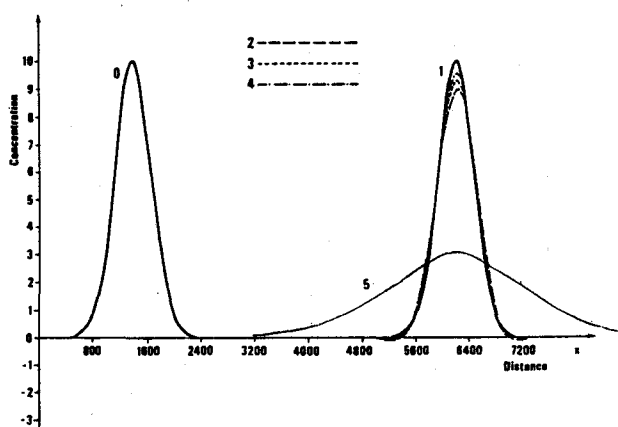
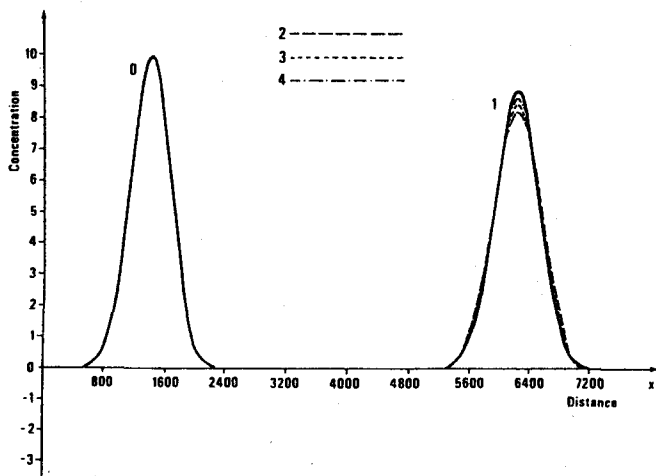


図-3 Holly - Preissmann スキームによる数値拡散

- 0 : 初期濃度分布, 1:  $t=9600\text{ s}$  のときの厳密解,  
 2 :  $C_r=0.25$  で  $t=9600\text{ s}$  の計算値, 3:  $C_r=0.50$  で  $t=9600\text{ s}$ ,  
 4 :  $C_r=0.75$  で  $t=9600\text{ s}$ ,  
 5 : 直線内挿式 (16) を用いた  $t=9600\text{ s}$  のときの計算結果で  $C_r=0.25$

直線内挿式（1次精度の風上差分）に比べると格段に精度が改善されていることがわかる。図からも明らかなように Holly - Preissmann スキームの精度は  $C_r$  値に依存するが、それだけでなく濃度分布の拡がりや  $\Delta x$  の比にも依存する。 $\Delta x$  に対する濃度分布の相対的拡がりが大きくなればなる程数値拡散は少なくなる。流れに本来の物理的な拡散が加われば、時間の経過とともに濃度分布は拡がっていくため、数値拡散は減少し計算精度は向上する。図-4 は (9) 式を (a)  $D_x = 1\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$  の場合と (b)  $D_x = 10\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$  の場合について Holly - Preissmann スキームを使って計算した結果である。



(a)  $D_x = 1\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$

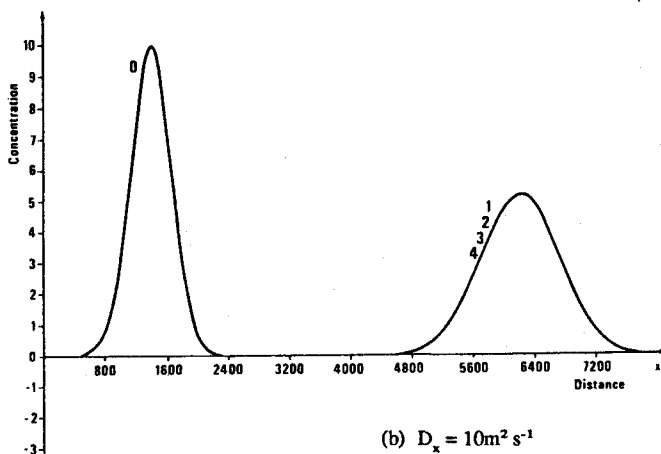


図 - 4 拡散の大きさが数値誤差に与える影響

- 0 : 初期濃度分布, 1: 厳密解,  
2 :  $C_r = 0.25$  で  $t=9600$  s, 3 :  $C_r = 0.50$ ,  
4 :  $C_r = 0.75$

この図からも明らかなように、強い物理拡散があれば移流の計算の不正確さが覆い隠される傾向にある。

以上のように Holly - Preissmann スキームは従来の計算スキームと比べると飛躍的に改善された結果を得た。拡散物質の濃度だけでなく、濃度の場所的な変化率も従属変数として移流拡散させるもので 1 次元問題への適用は簡単であり、満足すべき結果が得られている。しかしながら 2 次元問題への適用は非常に煩雑でかつ計算時間を要しとても実用的とは言えない。<sup>5)</sup>

### (c) 6-point スキーム<sup>6)</sup>

2 次元問題への適用が容易ではない Holly - Preissmann スキーム にとって代わるべきスキームとして開発されたのが 6-point スキームである。既知の時刻  $t_n$  における 6 点の  $C$  の値を用いて 3 次式を構成し  $x_{i-1} \sim x_i$  間で内挿させて  $x_\xi^n$  を求めようとするものである。最終的な計算式は  $0 \leq Cr \leq 1$  に対し以下のである。

$$C_i^{n+1} = C_\xi^n = d_1 C_{i-3}^n + d_2 C_{i-2}^n + d_3 C_{i-1}^n + d_4 C_i^n + d_5 C_{i+1}^n + d_6 C_{i+2}^n \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad d_1 &= -0.01806 C_r^3 - 0.03828 C_r^2 + 0.05633 C_r \\ d_2 &= 0.2570 C_r^3 + 0.05276 C_r^2 - 0.3097 C_r \\ d_3 &= -0.6806 C_r^3 + 0.6480 C_r^2 + 1.033 C_r \\ d_4 &= 0.6806 C_r^3 - 1.394 C_r^2 - 0.2869 C_r + 1 \\ d_5 &= -0.2570 C_r^3 + 0.8236 C_r^2 - 0.5667 C_r \\ d_6 &= 0.01806 C_r^3 - 0.09245 C_r^2 + 0.07439 C_r \end{aligned} \quad (29)$$

$$C_r = \frac{U \Delta t}{\Delta x}$$

6-point スキームは Holly - Preissmann スキームに匹敵する高い精度で移流の計算を可能としただけでなく、2次元問題、3次元問題への拡張も容易である。

2次元の流れの場合式(14)は次のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = U, \quad \frac{dy}{dt} = V \quad \text{上で} \quad \frac{dC}{dt} = 0 \quad (30)$$

ここで  $V(x, y, t)$  は  $y$  方向の流速である。従って求める解は次式で与えられる (図-5)。

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{\xi,\eta}^n \quad (31)$$

ここに  $j$  は  $y$  方向の格子点の指標であり、 $(\xi, \eta)$  は時刻  $t_n$  における  $x-y$  平面と特性曲線の交叉点の座標である。

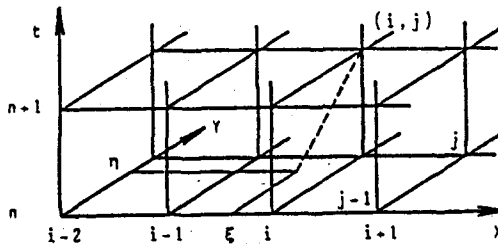


図-5 2次元問題の計算格子

$C_{\xi,\eta}^n$  の値を求めるには式(28)を1方向に6本の格子線に沿って6回適用し、得られた値について再度式(28)を直角方向に適用すればよい。

#### (d) 改良型 6-point スキーム<sup>7)</sup>

6-point スキームは式形も比較的簡単で精度も良く、2次元への拡張も容易なスキームであるが、以下に記すような工夫により更に精度の改善が図られた。式(28)の6-point スキームについて式(20)をを求めた場合と同様にして Taylor 級数解析を行うと次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 C (\Delta x)^2}{\partial x^2 2! \Delta t} + D_3 \frac{\partial^3 C (\Delta x)^3}{\partial x^3 3! \Delta t} + D_4 \frac{\partial^4 C (\Delta x)^4}{\partial x^4 4! \Delta t} + \dots \quad (32)$$

$$\text{ここで} \quad D_2 = -3.16 \times 10^{-2} C_r^2 + 3.16 \times 10^{-2} C_r, \quad D_3 = 4.74 \times 10^{-2} C_r^2 - 4.74 \times 10^{-2} C_r$$

式(32)の右辺が6-point スキームの数値拡散項である、右辺の各項を出来るだけ消去できれば精度の向上が期待できることになる。

従って6-point スキームから以下のように2次の微分項と3次の微分項を差し引くことにする。

$$C_i^{n+1} = C_{\xi}^n = d_1 C_{i-3}^n + d_2 C_{i-2}^n + d_3 C_{i-1}^n + d_4 C_i^n + d_5 C_{i+1}^n + d_6 C_{i+2}^n - \gamma D_2 \frac{\partial^2 C (\Delta x)^2}{\partial x^2 2!} - \beta D_3 \frac{\partial^3 C (\Delta x)^3}{\partial x^3 3!} \quad (33)$$

最終的な改良型 6-point スキームの表示式は次のようになる。

$$C_i^{n+1} = C_i^n = d'_1 C_{i-3}^n + d'_2 C_{i-2}^n + d'_3 C_{i-1}^n + d'_4 C_i^n + d'_5 C_{i+1}^n + d'_6 C_{i+2}^n \quad (34)$$

ここで

$$\begin{aligned} d'_1 &= d_1 + \frac{\beta C_r}{12} D_3 \\ d'_2 &= d_2 - \frac{C_r \gamma S_f}{2} D_2 - \frac{(-1 + 3C_r) \beta}{12} D_3 \\ d'_3 &= d_3 - \frac{(1 - 3C_r) \gamma S_f}{2} D_2 - \frac{(1 - C_r) \beta}{6} D_3 \\ d'_4 &= d_4 - \frac{(-2 + 3C_r) \gamma S_f}{2} D_2 + \frac{C_r \beta}{6} D_3 \\ d'_5 &= d_5 - \frac{(1 - C_r) \gamma S_f}{2} D_2 - \frac{(-2 + 3C_r) \beta}{12} D_3 \\ d'_6 &= d_6 - \frac{(1 - C_r) \beta}{12} D_3 \end{aligned} \quad (35)$$

$d_i$  ( $i=1 \sim 6$ ) は式 (29) と同じであり、 $S_f$  は減衰関数で

$$S_f = \frac{23.6}{(n + 18.7)^{0.758}} \quad (36)$$

で与えられる。 $n$  は time step の指標であり、定数  $\beta = 0.275$  である。

また

$$\gamma \equiv \begin{cases} \frac{\omega}{|\omega|} & (\omega \neq 0) \\ 0 & (\omega = 0) \end{cases} \quad (37)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \frac{\partial^5 C}{\partial x^5}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1}^n - C_i^n - C_{i-1}^n + C_{i-2}^n}{2(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} &= \frac{C_{i+2}^n - 3C_{i+1}^n + 2C_i^n + 2C_{i-1}^n - 3C_{i-2}^n + C_{i-3}^n}{2(\Delta x)^4} \\ \frac{\partial^5 C}{\partial x^5} &= \frac{C_{i+2}^n - 5C_{i+1}^n + 10C_i^n - 10C_{i-1}^n + 5C_{i-2}^n - C_{i-3}^n}{(\Delta x)^5} \end{aligned}$$

改良型 6-point スキームが従来の 6-point スキームに比べてどの程度精度が改善されたかを示すために条件の厳しい 2 次元の純粋移流 ( $U = V = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $\Delta x = \Delta y = 200 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 100 \text{ sec}$ ), 3 次元の純粋移流 ( $U = V = W = 0.5 \text{ m/s}$ ,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 200 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 100 \text{ sec}$ ) のそれぞれについて  $t = 9,600 \text{ sec}$  の計算結果を図-6, 7 に示す。

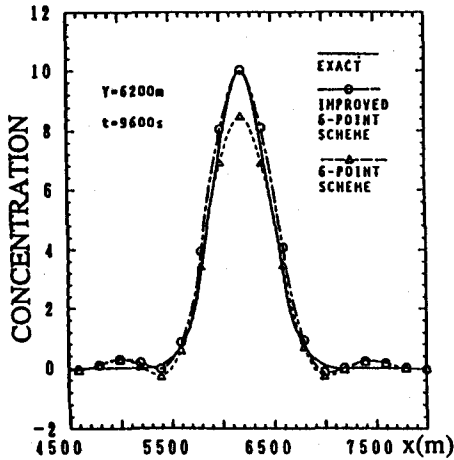


図-6 2次元移流の計算結果

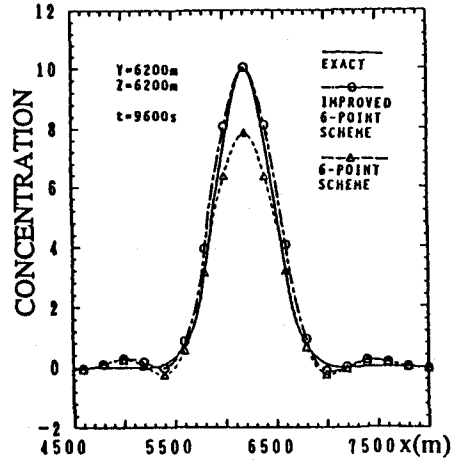


図-7 3次元移流の計算結果

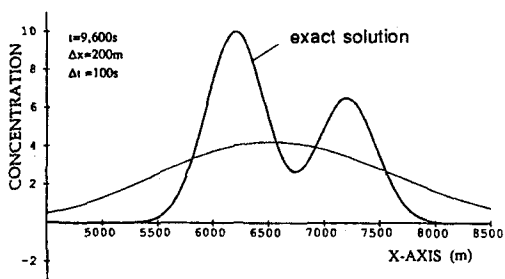
また他の多くの代表的スキームとの比較のために図-8に1次元の移流の計算結果を図-9, 図-10に2次元移流の計算結果を示す。いずれも 6-point スキーム, 改良型 6-point スキームは他のスキームと比べて高い精度で計算出来ることを示している。唯、両スキームとも 6 点という多くの点の濃度の情報を使用するので境界近くでの取り扱いが少しばかり面倒である。いくつかの処理の仕方が考えられるが詳細についてはここでは触れない。文献<sup>9)</sup>を参照されたい。また本稿では  $0 \leq C_r \leq 1$  の場合についてそれぞれのスキーム (式 (16), (22), (28), (34)) を表したが  $C_r$  の範囲が異なっても修正は簡単である。

例えば  $1 < C_r \leq 2$  であれば各スキームの表現式において

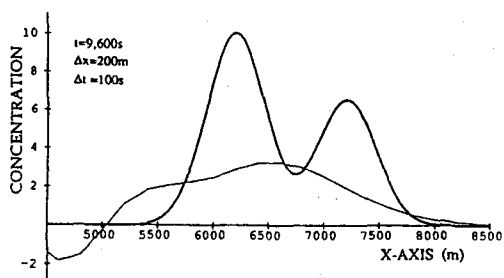
$$\left( \begin{array}{c} C_r \longrightarrow C_r - 1 \\ \text{空間指標 } i \longrightarrow i-1, \quad i-1 \longrightarrow i-2, \quad i+1 \longrightarrow i \dots \end{array} \right)$$

と修正すれば良い。

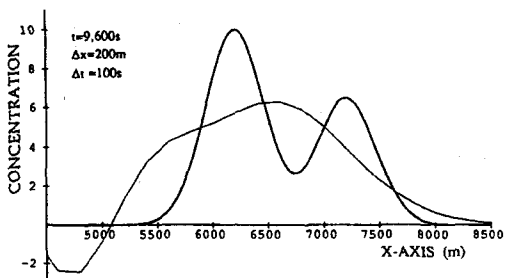
以上述べたスキームの 1 つを用いて純粋移流の計算を行い、その後式 (11) から拡散の計算を各 time step 毎に行うことにより拡散方程式の数値計算が実行される。



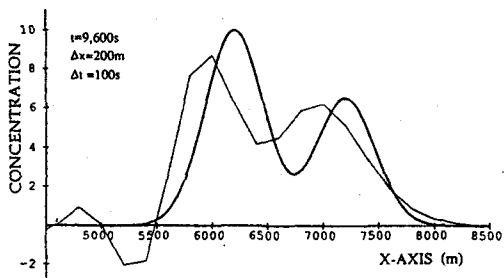
(a) 1st order upwind difference scheme



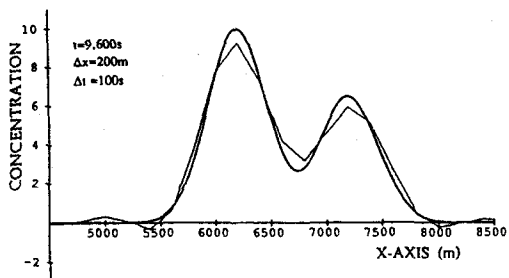
(b) leapfrog scheme



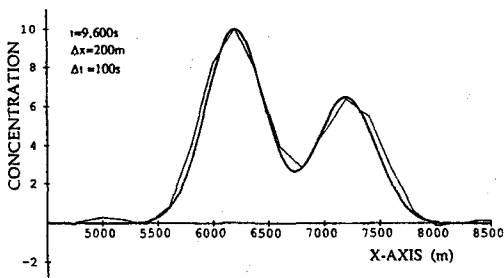
(c) Lax-Wendroff scheme



(d) staggered scheme

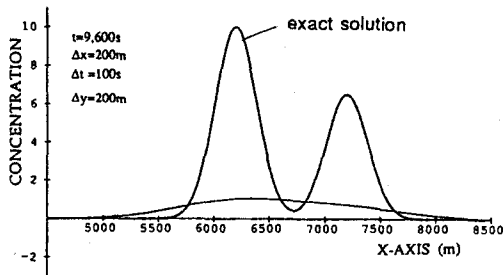


(e) six-point scheme

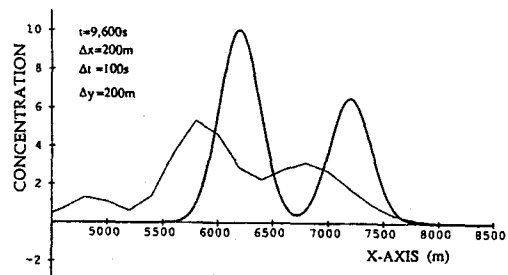


(f) improved six-point scheme

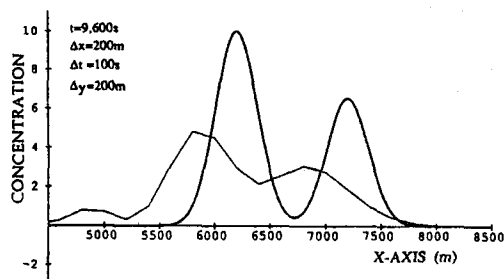
図 - 8 1次元純粋移流の計算結果の比較



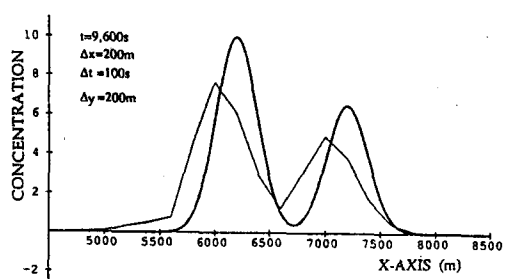
(a) 1st order upwind difference scheme



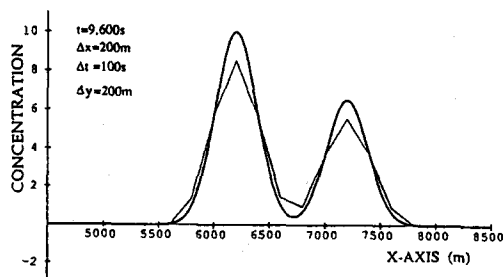
(b) leapfrog scheme



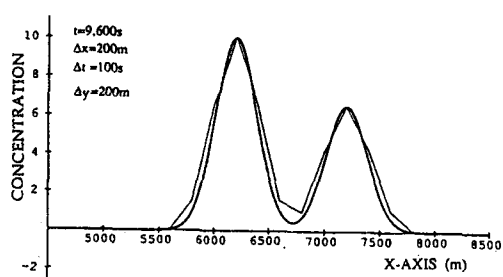
(c) Lax-Wendroff scheme



(d) staggered scheme

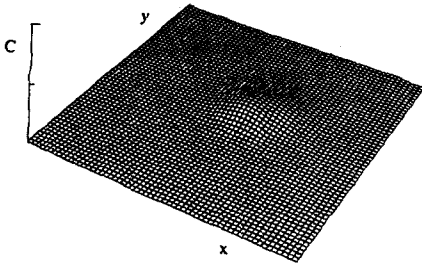


(e) six-point scheme

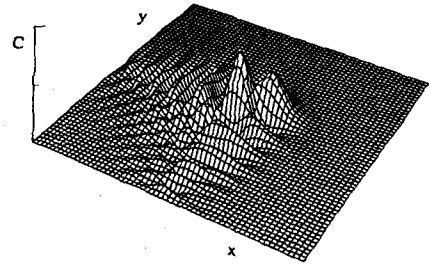


(f) improved six-point scheme

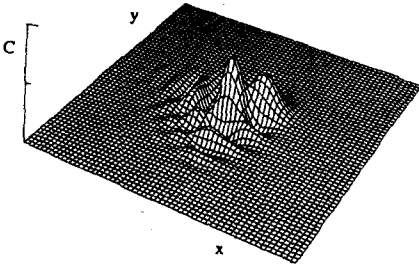
図-9 2次元純粋移流の計算結果 (x=yの線に沿って) の比較



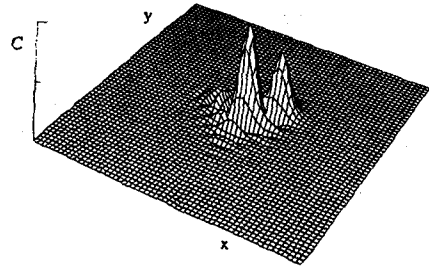
(a) 1st order upwind difference scheme



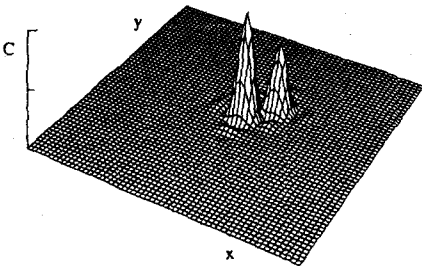
(b) leapfrog scheme



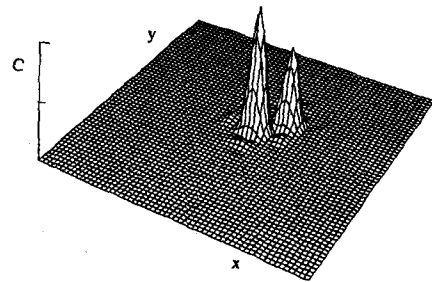
(c) Lax-Wendroff scheme



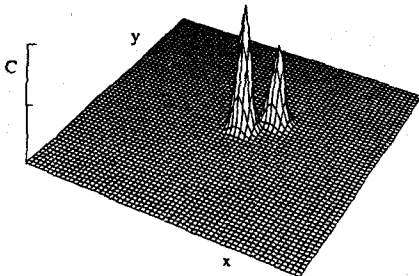
(d) staggered scheme



(e) six-point scheme



(f) improved six-point scheme



(g) exact solution

図 - 10 2次元純粋移流の計算結果の比較

(図 - 9 と同じデータ)

### 3・5 拡散係数・分散係数の評価

式(6)の拡散方程式もしくは式(7), (8)の移流分散方程式を数値的に解くためには正確な拡散係数あるいは分散係数の評価が不可欠である。そのためにはまず第一に拡散・分散過程に及ぼす流れと拡散・分散の効果を時間と空間のスケールに関して正確に把握することが必要である。例えば内湾に放出された汚染物質の短時間の変化を問題にするときは約半日の周期で振動する潮流は移流効果をもつが、1年間といった長時間にわたる物質濃度変化もしくは定常状態を問題にするときには潮流は流れというよりはむしろ大きなスケールの乱れとして拡散・分散に寄与する。従って拡散・分散方程式中の拡散・分散係数を評価するときには対象とする拡散現象の時間・空間スケールを考慮して決める必要がある。

#### 3・5・1 乱流拡散係数の評価

式(6)の拡散方程式中の乱流拡散係数  $K_x, K_y, K_z$  は乱流拡散量  $\overline{u_i C'}$  が評価もしくは測定されれば算出することができるが、 $\overline{u_i C'}$  の評価自体容易ではない。

乱流拡散係数の評価は次の Prandtl の基本概念に基づいて検討されてきた。

##### (i) 乱れの変動は摩擦速度

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

として知られる代表速度に関連付けられている。

ここに、 $\tau_0$  : 底面せん断力、 $\rho$  : 流体密度

- (ii) “混合距離  $l$ ” が気体分子拡散における平均自由行程と同じ役割を果たし、その大きさは壁面からの距離  $y$  に比例する。すなわち  $l = \kappa y$  である。ここに、 $\kappa$  は Karman 定数である。

これらの概念を適用して半経験的に拡散理論を展開するときには運動量の輸送と質量の輸送の間に Reynolds の相似が用いられている。

Fischer<sup>9)</sup> は開水路流れにおける乱流拡散係数は底面摩擦速度  $u_*$  に直接関係付けられることを明らかにした。乱流拡散係数の分布は通常一様ではなく、流速変動の向きと壁からの距離に依存している。一般的には乱流拡散係数は方向によって値が異なり、更に空間座標  $(x, y, z)$  の関数として変化する。

#### 3・5・2 移流分散係数の評価

移流分散についての理論的な研究は管路流に関する Taylor<sup>10)</sup>の研究に始まり、Elder<sup>11)</sup>は深さ方向にだけ流速分布をもつ広長方形開水路における  $D_x$  を求めている。しかし開水路で観測された

表-1 拡散・分散係数に関して現在までに得られている知見

| 流れの状況                                             | 記号                      | 普通採用されている値                                                           | 備 考                                              |
|---------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| (1)分子拡散                                           | $D_m$                   | $\sim 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$                                  | 拡散物質や溶質の種類に依存する                                  |
| (2)無限領域の<br>3次元乱流拡散                               | $K_x$<br>$K_y$<br>$K_z$ |                                                                      | 実測するかもしれないが乱流モデルを用いた推定が必要                        |
| (3)3次元乱流拡散<br>(せん断流)                              | $K_x$<br>$K_z$<br>$K_y$ | $\kappa / 6 \cdot u_* h$<br>$\kappa / 6 \cdot u_* h$<br>$0.23 u_* h$ | Reynolds相似<br>Elderは $K_x = K_z$ を仮定<br>Elderの測定 |
| (4)水深方向に平均<br>化された二次元<br>分散<br>(plane flow)       | $D_x$<br>$D_y$          | $5.93 u_* h$<br>$0.23 u_* h$                                         | 対数流速分布を仮定して<br>(0.23の値は議論の余地がある)                 |
| (5)水深方向に平均<br>化された二次元<br>分散<br>(confined channel) | $D_x$<br>$D_y$          | $5.93 u_* h$<br>$0.23 u_* h + ?$                                     | 二次流の影響の評価が難しい                                    |
| (6)断面平均された<br>1次元管路流の<br>分散                       | $D_x$                   | $10.1 u_* a$                                                         | Taylorの理論, $a$ は管の半径<br>実測値と良い一致                 |
| (7)断面平均され<br>1次元河川流の<br>分散                        | $D_x$                   | Fischerの解析                                                           | $D_x$ は川の形状や流れのパターン<br>に強く依存する                   |

分散係数の値は一般にElderの理論値よりも大きく、特に自然河川では理論値の数十倍程度になることも珍しくない<sup>12)</sup>。これは自然河川における流速・濃度の非一様性が水深方向よりもむしろ川幅方向に顕著なためであって、この点を考慮したFischer<sup>13)</sup>の研究がある。これまでに得られている拡散・分散係数に関する知見をまとめて表-1<sup>14)</sup>に示す。

分散係数については不明な点が多くElderやFischerの理論解析が工学分野ですぐに利用できる分散係数の適切な値を与えているわけではない。むしろ彼らの研究の意義は速度差による混合を勾配拡散型で記述するための理論的基盤を与えかつこの仮定の適用性の限界を明らかにしたことにあるといえよう。

### 3・5・3 内湾における分散係数の評価

1次元分散方程式が適用可能な細長い湾における分散係数の評価法について考察する<sup>15)</sup>。湾内においては多くの場合拡散・分散のエネルギー源は潮流で、河川水などの流入による湾奥から湾口への固有流量は微少である。拡散物質の1次元分散係数は代表流速と代表長さの積に比例するものと思われる。 $M_2$ 潮の卓越している湾を想定してlocalな代表流速として $M_2$ 潮の最大流速 $V_M$ をとることにする。一方、代表長さとしては海面幅 $b$ とtidal excursionの内小さい方が支配的であると思われるが、場所毎に変化するので取り合えず次のように両者別個に用いることにする。

$$\begin{aligned} D_x &= \alpha V_M^2 T \\ D_x &= \beta V_M b \end{aligned} \quad (38)$$

ここに $\alpha$ 、 $\beta$ は比例定数、 $T$ は $M_2$ 潮の周期。

$\alpha$ 、 $\beta$ は一応定数としているが湾の形状や流れのパターン、島の有無などに依存する量であると思われる。そこで、 $\alpha$ 、 $\beta$ の決定のために大小約3000個の島が散在し、複雑な地形を持つ瀬戸内海と逆に最もsimpleな例として島が全くなく湾の幅もあまり変化しない有明海の例から $\alpha$ 、 $\beta$ の値を決定する。

#### (a) 瀬戸内海

図-11のように座標を設定し、 $\alpha$ 、 $\beta$ の値を試行的に与えて1次元の分散方程式の数値計算を行い、塩素濃度分布の実測値と最も良く一致するように $\alpha$ 、 $\beta$ の値を決定した。その結果 $\alpha=0.28$ 、 $\beta=0.13$ が得られた。長さのスケールとして湾幅 $b$ とtidal excursionの両者の影響を取り込むために次式のように荷重平均をとる。

$$D_x = \theta \beta V_M b + (1 - \theta) \alpha V_M^2 T \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \left( 1 - \frac{b}{b_0} \right) & (b \leq b_0) \\ \theta &= 0 & (b > b_0) \end{aligned} \quad (40)$$

$b_0$ の値をやはりtrialで与えて数値計算を行い、塩素濃度の実測値と最もよく一致するように $b_0 = 100 \text{ km}$ を決定した。そのときの塩素濃度の実測値と計算値の比較を図-12に示す。またこのときの瀬戸内海の分散係数の分布を図-13に示す。

### (b) 有明海

図-14に示されているように諫早湾の手前から $x$ 座標を設定する。湾幅 $b$ が比較的小さいので、 $b$ を支配的な長さのスケールと考えて、分散係数を次のようにおく。

$$D_x = \beta V_M b$$

1次元分散方程式を数値計算して塩分濃度を求め、最も良く実測値と一致するように $\beta = 0.046$ を決定した。そのときの塩分濃度の計算値と実測値の比較が図-15、分散係数の分布を図-16に示す。

### (c) 内湾における1次元分散係数

非常に複雑な形状の瀬戸内海( $\beta = 0.13$ )と島一つなく単純な有明海( $\beta = 0.046$ )で $\beta$ の値は2.8倍程度の変化を示したが、この2つの内湾が両極に位置していることから、近似的に一次元と見なせる通常の内湾については分散係数 $D_x$ は次式で与えられるものと期待できる。

$$\underline{D_x = \beta V_M b} \quad \beta: \text{地形の複雑さや島の有無などによって変化するが} \underline{0.046 \sim 0.13 \text{ 程度の値をもつ。}}$$

$\alpha$ の値については更に今後の検討が必要である。

また瀬戸内海について式(39)から得られた $D_x$ を海面幅 $b$ についてプロットしたのが図-17である。 $b \leq 2 \times 10^6 \text{ cm}$  (20 km)で

$$D_x = 0.1 b^{4/3} \quad (\text{cm, s 単位}) \quad (41)$$

となりRichardsonの4/3乗則と一致しているのは興味深い。比例定数がRichardsonの0.01の10倍程度となっているのは $D_x$ が移流分散の効果を全て含んだ1次元の分散係数となっているためであろう。 $b > 20 \text{ km}$ では $b$ の増加に従い、 $D_x$ は逆に減少する。これは代表長さスケールが $b$ からtidal excursionに移行したためである。

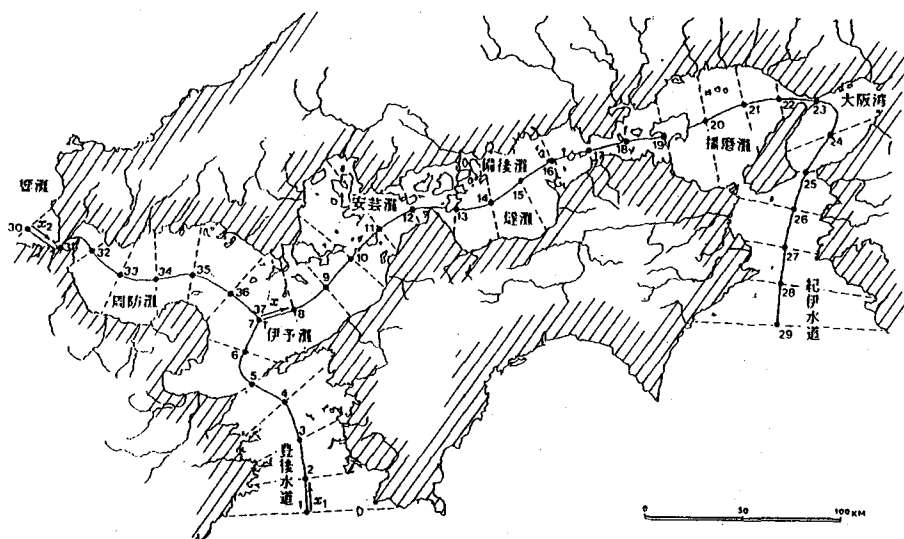


図 - 11 瀬戸内海と断面座標

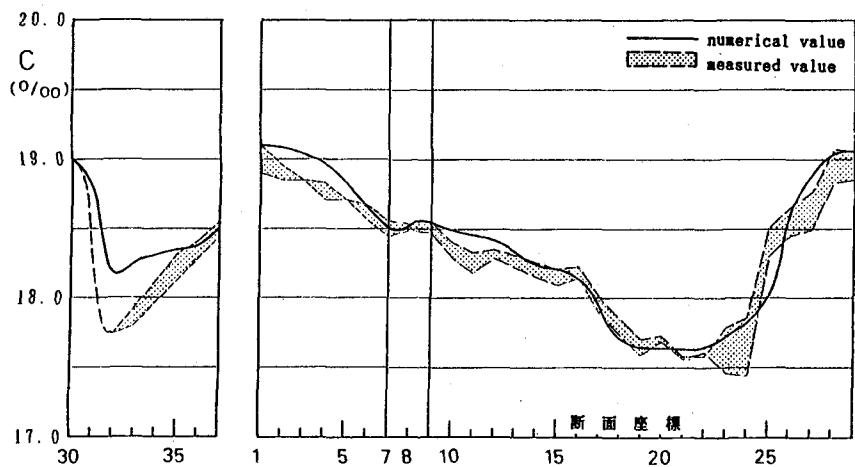


図 - 12 塩分濃度分布の実測値と計算値の比較

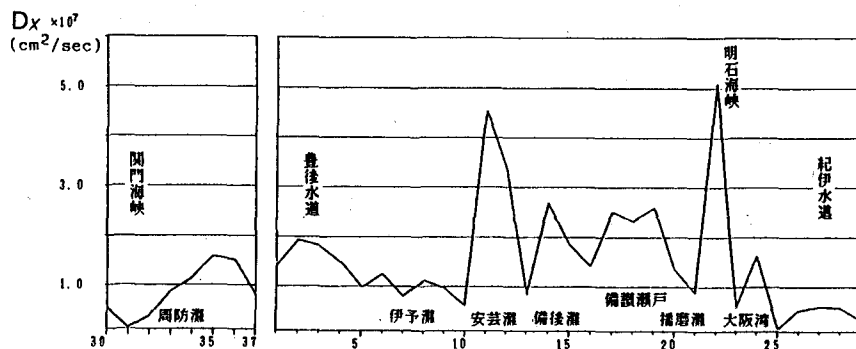


図 - 13 瀬戸内海の場合毎の分散係数

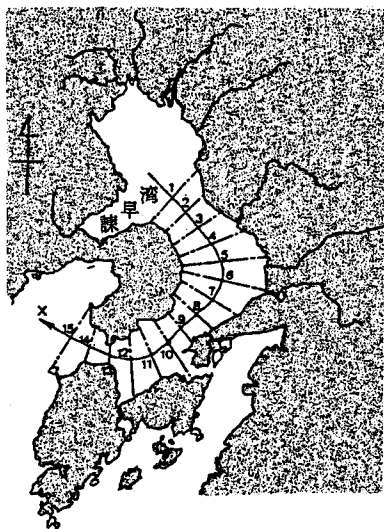


図 - 14 有明海と断面座標

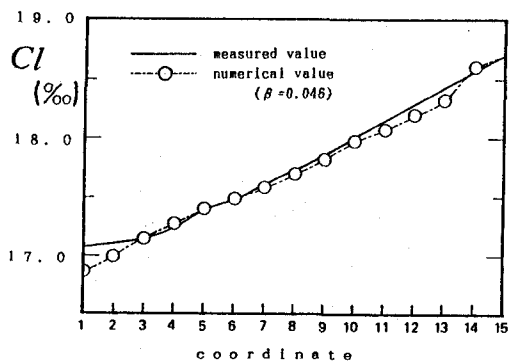


図 - 15 塩分濃度分布の実測値と計算値の比較

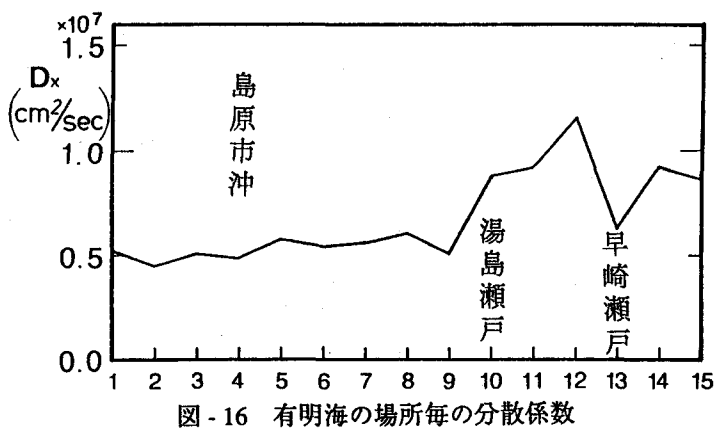


図 - 16 有明海の場所毎の分散係数

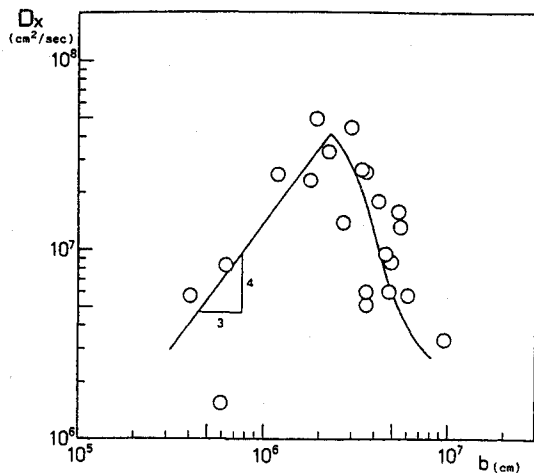


図 - 17 瀬戸内海における分散係数と海面幅の関係

おわりに

以上、拡散・分散問題における数値解析手法と拡散能の評価法について1次元の分散係数を中心に述べてきた。実際問題に応用するときの拡散係数の評価については既存のデータと一致するように決める場合はまだ良い方で、推量で適当に与えている場合すら見られる。今後、拡散・分散過程に関して総合的に資料を集約し、諸概念を統一的に整理することにより、実用的な拡散・分散過程の特定・予測手法の確立を図る必要がある。具体的には

- (a) 拡散・分散過程の現地測定データを集積し、室内実験データと比較検討して、水域・空域の種類とそのスケール毎に拡散現象の解明の度合を明らかにする
- (b) 拡散現象の測定解析手法としてのラグランジェ法とオイラー法の関連性を流れの種類、スケールのファクターを考慮して明らかにし、一般的な拡散・分散現象の測定解析手法としてまとめる。
- (c) 模型実験手法について比較検討し、拡散・分散現象の模型実験法の指針を作成する。

ことなどが当面の課題となるであろう。今後の研究の進展を期待したい。

最後に本稿の作成に当たり献身的な助力をお願いした九州大学 柴田敏彦 技官に謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) 土木工学ハンドブック (第四版) I, 12, 水理学・流体力学, 第6章 拡散・分散 (角湯正剛著), 1989.
- 2) Morton, K. W. : Finite Element Method for Non-Self-Adjoint Problems, Numerical Analysis Report 3/81, Dept. of Mathematics, Univ. of Reading, Reading, England, 1981
- 3) Cunge, J. A., Holly, F. M. Jr. and Verwey, A. : Practical Aspects of Computational River Hydraulics, 8, Transport of Pollutants, Iowa Institute of Hydraulic Research. 1980.
- 4) Holly, F. M. Jr. and A. Preissmann : Accurate calculation of transport in two dimension, JHYD, ASCE, Vol.103, 1977.
- 5) Holly, F. M. Jr. and Usseglio-Polatera, J. M. : Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow, JHYD, ASCE, 110, No.7, 1984.
- 6) Komatsu, T., Holly, F. M. Jr., Nakashiki, N. and Ohgushi, K : Numerical calculation of pollutant transport in one and two dimensions, JHHE, Vol.3, No.2, 1985.
- 7) Komatsu, T., Ohgushi, K., Asai, K., Holly, F. M. Jr. : Accurate numerical simulation of scalar advective transport, JHHE, Vol.7, No.1, 1989.
- 8) 小松利光・仲敷憲和・大串浩一郎 : 河川や沿岸部における拡散物質の輸送拡散の計算法, 第31回海岸工学講演会論文集, 1984.
- 9) Fischer, H.B.: Longitudinal Dispersion in Laboratory and Natural Streams, Report No. KH-R-12, W.M.Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, Caltech, 1966.
- 10) Taylor, G.I.: The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, Proc. Roy. Soc., A.223, 1954.
- 11) Elder, J.W.: The dispersiom of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow, J.Fluid Mech., 5, No.4, 1959.
- 12) Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J. and Brooks, N.H. : Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press, New York, 1979.
- 13) Fischer, H.B.: The mechanics of dispersion in natural streams, J. Hydraul. Div., ASCE, 93, 1967.
- 14) Novak, P.: Developments in Hydraulic Engineering-3, Elsevier Applied Science Publishers, 1985.
- 15) 小松利光・相良 誠・朝位孝二・大串浩一郎 : 瀬戸内海における物質の拡散係数の評価, 海岸工学論文集, 第36巻, 1989.