

高層大気の流れとゆらぎ

Fluctuations and Chaos in Atmospheric Phenomena

岡本 寿夫, 栢原孝浩, 瓜生 道也

Hisao OKAMOTO, Takahiro KAYAHARA, Michiya URYU

第 1 章 カオスとフラクタル

最近の著しい計算機の発達によって、カオス現象をいとも簡単に体験できるようになった。手近かなパソコンによって、カオス軌道や奇妙なアトラクターは勿論のこと、フラクタル構造にも出会うことができる。ここでは、カオス運動に内在する端正な幾何学的構造を特徴づけ、それを定量化する試みを述べる。

§1 カオスとは —— 複雑だが端正なアトラクター

ミクロではレーザーや強磁場中の水素原子から、マクロでは木の葉のそよぎから気象衛星の写真に見られる雲の集団の形や動き、数千キロにおよぶ巨大スケールの地球流体（大気・海洋・マントル・コア）の運動に至るまで、生々流転する自然の諸々の局面で、カオスと呼ばれる複雑な運動が問題になっている。カオスとは、一言でいえば、決定論的に生成されるにも拘わらず、その軌道が不安定なため、変動がブラウン運動のようにランダムで予測不可能である運動をいう。物理学では、このような自然から簡単な要素系を切り出し、簡単な運動法則を発見してきた。しかし、簡単な要素系も実は、大抵の場合、複雑で予測不可能な運動を示し、複雑さは運動法則の非線形に由来する普遍的現象であることが分かってきた。それは、周期的外力下の振り子や水素原子、流体のベナール熱対流等の簡単な要素系に見ることができる。簡単な運動法則が如何にして複雑さを作り出すか、複雑さはどんな姿をし、どんな秩序構造を内包しているかが研究されている。

以下では、まず、カオス状態を実現できる最も簡単な例を述べる。

§2 カオスの簡単な例

2.1 強制振り子

まず、よく知られた要素系である周期的外力下の振り子を考えよう。振り子の角度 ϕ に対する運動方程式は

$$\ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + \sin \phi = a \cos \omega t \quad (1)$$

とかける。ここで γ は摩擦係数、右辺は振動数 ω 、強さ a の外力である。図1は、 $\gamma=0.22$,

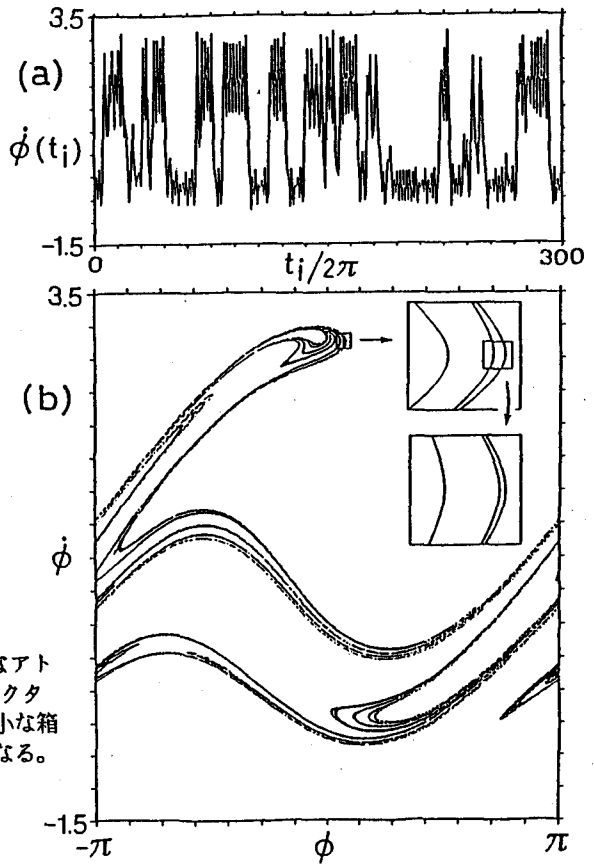


図1 振り子, (a)時系列, (b)奇妙なアトラクター。図(b)の挿入図は, アトラクターの自己相似な入れ子構造を示す。微小な箱を拡大すれば, 外側の線は2本の線からなる。

$\omega=1$, $\alpha=2.7$ に対する解 $\phi(t)$ を示したもので, 初期値として $\phi=-1.5$, $\dot{\phi}=1.3$ をとり, (1)式の数値積分により時間 2π 毎に ϕ , $\dot{\phi}$ の値を求め, 初期の 100点を過渡的なものとして捨てて, その後の値を記入した。図1(a)は時刻 $t_i=2\pi i$, ($i=0, 1, 2, \dots$) における $\dot{\phi}(t_i)$ の値を, 図1(b)は $X_i=\{\phi(t_i), \dot{\phi}(t_i)\}$ の値 5万点を示す。図1(a)の時系列 $\dot{\phi}(t_i)$ の変動は, ブラウン運動のようにランダムである。しかし図1(b)は, ランダムでない端正な姿を描き出している。しかも多重紐構造をもち, その一部を拡大していけば, 図1(b)の挿入図のように自己相似な入れ子構造になっている。このような構造はフラクタル構造と呼ばれ, ブラウン運動など確率過程では現れないものである。どんな初期値をとっても, 殆どすべての場合, 軌道 X_i は図1(b)の有界な集合に引き付けられ, 十分な時間経過後にはその上になる。このような集合をアトラクターという。フラクタル構造をもつアトラクターを奇妙なアトラクターという。図2は, このような構造が如何にして作り出されるかを図示するため, $t=0$ のアトラクターが周期 2π の間にどの様に変化するかを示したものである。 $t=0$ で黒く塗りつぶされた部分 (セル) は $t=2\pi/3$ の

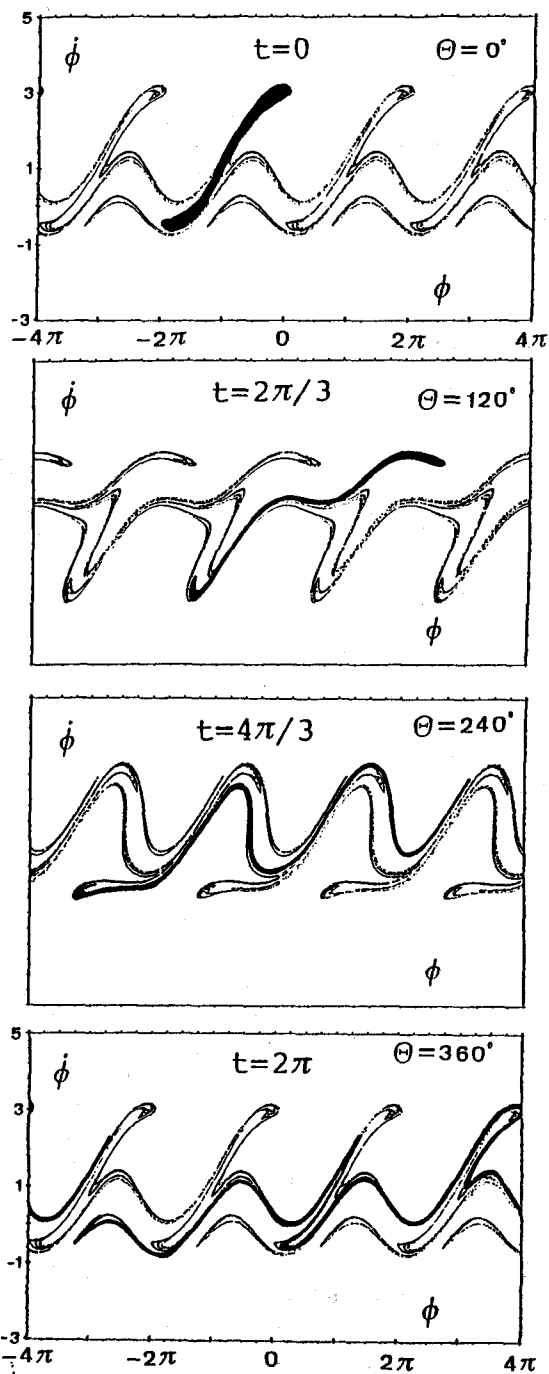


図2 時刻 t_i と時刻 t_{i+1} の間におけるアトラクターの変化。1周期 2π の間に、 $t=0$ の黒く塗りつぶされた部分 (セル) は $t=2\pi$ の細長い折り畳まれたセルに変化する。

間に長く引き伸ばされ、次の時間には更に長く引き伸ばされ、かつ、折り畳まれていく。 $t=2\pi$ では、 $\text{mod } 1$ をとって $-\pi \leq \phi < \pi$ に移せば、黒く塗りつぶされたセルはアトラクターの全体に広がっている。このようなセルの伸長・折畳みがカオスの基本的プロセスである。では次に、(1)の様な簡単な運動法則が、如何にしてこのように複雑だが端正な幾何学的構造を作り出すか、この構造、特にその湾曲部はどんな物理量によって動的に捉えることができるかを調べていこう。

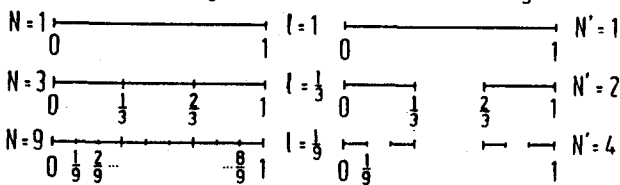
系の位相空間は、 ϕ , $\dot{\phi}$ と外力の位相 $\varphi = \omega t = t$ とを直交座標とする3次元空間である。ただし、 $0 \leq \varphi < 2\pi$ とし、 φ が 2π を越えると 2π を差し引いて 0 に戻す。したがって、この位相空間における軌道は、時刻 t_i ごとに $\varphi=0$ の面を横断する。その交点が図1(b)の $X_i = \{\phi(t_i), \dot{\phi}(t_i)\}$ に他ならない。 X_{i+1} は X_i から一義的に定まり、ある関数 $F(X_i) = \{f(X_i), g(X_i)\}$ が存在して $X_{i+1} = F(X_i)$, ($i=0, 1, 2, \dots$) とかける。この2次元写像をポアンカレ写像という。

§3 フラクタル構造とその次元

最近、自然界には自己相似な構造を示す現象が多数存在することが知られてきた。スケールの大きい例としては、天空の星の分布や雲の形、河川の枝別れした構造などがあるが、これらの特徴づけるためにそのフラクタル次元を調べることが行われている。ここではコッホ曲線などの簡単な例を用いてフラクタル構造とその次元の計算法について説明する。図3。

$$D = - \frac{\log [N(l)/N(l')]}{\log (l/l')}$$

Straight Line: $D = \frac{\log 3}{\log 3} = 1$ Cantor Set: $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$



Koch's Curve: $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618$

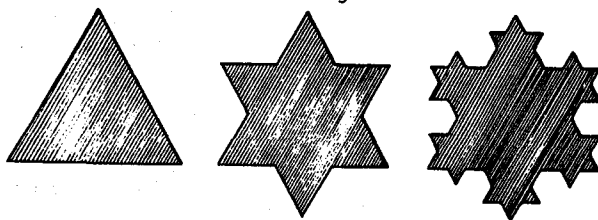


図3 フラクタル構造と次元
(a) カントール集合。
(b) コッホ曲線。

第2章 FGGE データにおける相関次元と最大リアプノフ指数

§ 1. 序

気象現象の解析において重要な熱対流をモデル化した3元連立常微分方程式の解の挙動がカオス的であることがローレンツによって1963年に報告された。[1] また、時を同じくして、我国でも、電気回路の研究においてカオス現象が上田によって発見されていたことが知られている。[2] その後、特にここ10年の間にカオス現象は他の多くの分野において実験的に観察され、理論的研究も進展している。また、気象データの解析への応用例も見られるようになった。[3-8]

カオス現象とは決定論的に時間変化するにも拘わらず、その変動が不安定であり、解軌道は位相空間内の固定点または周期軌道に漸近することなく、ある有限な領域内に広がった奇妙なアトラクターを形成することである。しかも、解軌道群の伸長・折り畳みの結果奇妙なアトラクターはフラクタル構造をもっている。

実験的にあるカオス的な時系列が得られたとき、そこから様々な情報を引き出し、しかも、その時系列を発生している体系のもつ動的機構を明らかにする手法の開発のために多くの努力が払われてきた。特に、奇妙なアトラクターの次元および最大リアプノフ指数についての知見を得ることがカオス現象の理解に有用であることがわかってきた。[9, 10]

本研究では気象データへのカオス解析の応用の試みとして FGGE データ [11] を取り上げ、特に500ミリバール (mb) の等圧面高度の時間変動を解析し、その奇妙なアトラクターの相関次元および軌道の最大リアプノフ指数を調べたので報告する。[12-17]

§ 2. 相関次元と最大リアプノフ指数

2.1 相関次元 D

位相空間内での奇妙なアトラクターを特徴づけるその次元の大きさを知ることは、実際にカオス的な挙動を生み出している体系の動的機構を記述するのに必要な独立変数の個数の目安を知る上で有用である。

次元としては、容量次元、情報次元、相関次元などが知られているが、これらはいずれも数値的にはきわめて近い値を取る場合が多いので、実験データからの計算が最も容易な相関次元をもって奇妙なアトラクターの次元とすることが多い。

以下にその計算法を略記する。[9] 先ず、実験的に得られた連続または離散的な一本の時系列を $\{X(t)\}$ としよう。これから、次式によって p 次元ベクトルを構成する。

$$\vec{x}_t = \{ X(t), X(t+\tau), X(t+2\tau), \dots, X(t+(p-1)\tau) \} \quad (1)$$

ただし、 τ はある時間遅れのパラメタであり、 $X(t)$ の自己相関が最初に0または極小になる時間が選ばれる。[ただし、本研究では、取り扱うデータの個数が少ないこともあり、暫定的に $\tau=1$

として解析する。] このようにして得られた N 個のベクトル $\{\vec{x}_t\}$, ($t=1, 2, \dots, N$), は p 次元空間内に散らばった N 個の点を表わす。これらの点の間の距離が r 以下になるベクトルの対の個数を数え上げるにより, 相関積分 $C(r)$ を定義する。即ち,

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (2)$$

ただし, H はヘビサイドの階段関数で

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq 0, \\ 1, & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

である。 $C(r) \propto r^D$ なる関係が得られるとき, D を相関次元と呼ぶ。即ち,

$$D = d\{\log C(r)\}/d\{\log r\}. \quad (4)$$

2.2 最大リアプノフ指数 Λ

カオス軌道の不安定性を特徴づける物理量, 即ち, 互いに接近した2本の軌道間距離の時間的拡大率が最大リアプノフ指数である。

ここでは, (1)式で構成された1本の時系列 $\{\vec{x}_t\}$ を与えているのであるが, 長時間の間に軌道 $\vec{x}_t$ が位相空間内に描いた軌跡 (アトラクター) の中にその軌跡の一部分が互いに接近し時間と共にその距離が指数関数的に増大していくような軌跡の組を多数見出すことができる筈である。

いま, 時刻 t において軌道 $\vec{x}_t$ のすぐ近くを通る軌道を $\vec{y}_t$ とし, その間の距離を $\text{dis}(\vec{x}_t, \vec{y}_t)$ と記すと, 時刻 $t+\tau$ での軌道間距離は $\text{dis}(\vec{x}_{t+\tau}, \vec{y}_{t+\tau})$ と書ける。図1参照。このとき, 軌道間距離の拡大率, 即ち, 最大リアプノフ指数 Λ は

$$\text{dis}(\vec{x}_{t+\tau}, \vec{y}_{t+\tau}) \sim e^{\Lambda\tau} \text{dis}(\vec{x}_t, \vec{y}_t) \quad (5)$$

で与えられる。これから Λ は

$$\Lambda(\tau) = \frac{1}{\tau} \left\langle \frac{\log \text{dis}(\vec{x}_{t+\tau}, \vec{y}_{t+\tau})}{\log \text{dis}(\vec{x}_t, \vec{y}_t)} \right\rangle. \quad (6)$$

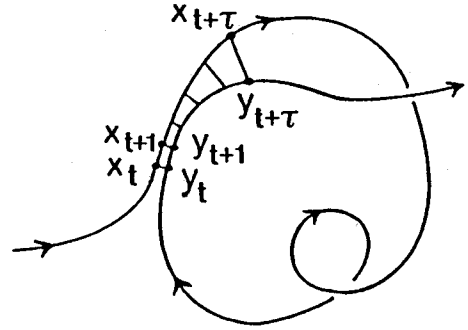


図1 軌道間距離の拡大率を一本の時系列から実験的に求める方法。

ただし、 $\langle \dots \rangle$ は全ての $\vec{x}_t$ についての平均を表わす。[10]

§ 3. FGGEデータの解析 (I) : 一地点観測データの解析

FGGEデータから、東経127.5度に沿った5つの地点、 60° N , 30° N , 0° (EQ) , 30° S , 及び 60° S での 500mb の等圧面高度の変動のデータを取り出し、§2 で述べた方法に従って解析し、相関次元と最大リアプノフ指数を求めた。使用したデータの期間は

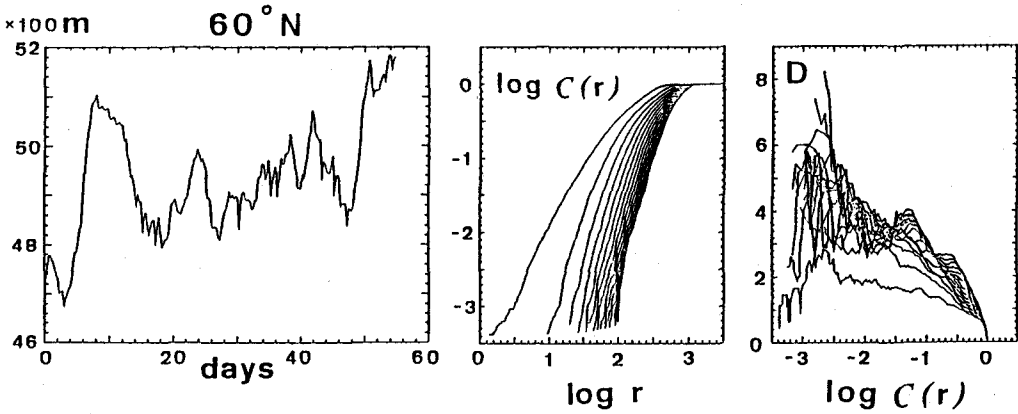


図2 (a) 北緯 60度 (東経 127.5 度) での 500 mb の等圧面高度の日変化。
(b) 相関積分 $C(r)$ の r 依存性の両対数プロット。
(c) 相関次元 D の $C(r)$ 依存性。

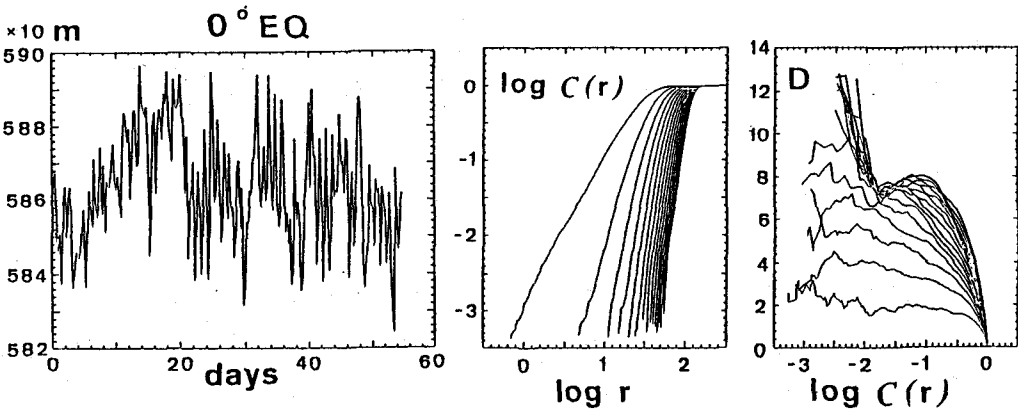


図3 (a) 赤道 (東経 127.5 度) での 500 mb の等圧面高度の日変化。
(b) 相関積分 $C(r)$ の r 依存性の両対数プロット。
(c) 相関次元 D の $C(r)$ 依存性。

(i) 1978年12月1日～1979年2月28日 (1日2回観測, データ個数 180), 及び
(ii) 1979年1月5日～2月28日 (1日4回観測, データ個数 220),
(iii) 1979年1月5日～2月28日 (1日4回観測, データ個数 220×192),
であるが, (i), (ii) のデータ数が少ないのを補うために, データ (ii) と同じ期間に得られた等緯度線上に等間隔に並んだ 192 地点の全データ (iii) についても解析を行った。以下では1日4回観測のデータ (ii), (iii) についての結果を示す。

図2(a) には北緯60度での 500 mb の等圧面高度の日変化を示す。これから得られた, 相関積分 $C(r)$ の r 依存性の両対数プロットを図2(b) に示す。図2(b) の勾配が (4) 式で与えられる相関次元 D である。図2(c) は D を $C(r)$ に対してプロットしたものであるが, $\log C(r) = -2.5 \sim -1.5$ の区間で D の値はほぼ一定の範囲内にあり, $D=3 \sim 4$ であることが読み取れる。図3は赤道でのデータによるものの結果であり, $D=7 \sim 8$ となっている。これらの D の値を, 他の3地点 (30° N , 30° S , 及び 60° S) での結果と共に図4に示してある。

相関次元 D は赤道域で 7～8 次元と高く, 南北の中緯度で約4次元, 高緯度で 3～4 次元と低くなっている。また, 最大リアプノフ指数 Λ の値が図5に示してある。 Λ は赤道域で約 0.15/day と小さく, 南北の中高緯度に行くに従って約 0.4/day と大きくなっている。

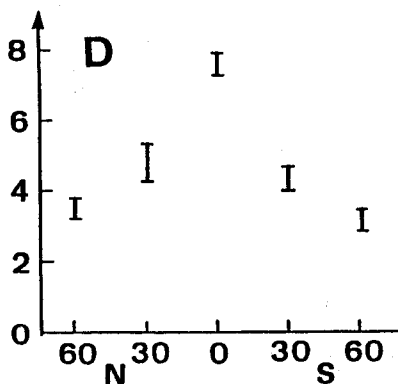


図4 相関次元 D の緯度変化。

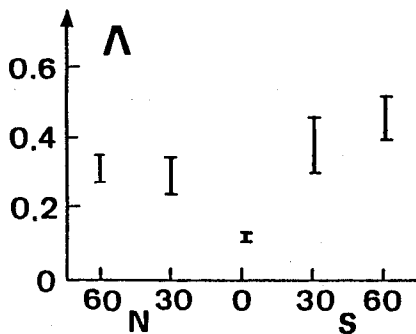


図5 最大リアプノフ指数 Λ (1/day) の緯度変化。

§ 4. FGGEデータの解析 (II) : 緯度方向の波動モードの解析

ここでは, FGGEデータから, 60° N , 30° N , 0° (EQ), 30° S , 及び 60° S の各緯度に沿って地表を一周した 500mb の等圧面高度の経度及び時間変動のデータを波数 $K=1 \sim 8$ の各波動モードについて解析し,

- (1) エネルギースペクトル密度 (図6),
- (2) 波数 K の波動モードのエネルギー振幅の時間変動 (図7, 図8),

- (3) 各波動モードの相関次元 D (図9) と最大リアプノフ指数 Λ (図10),
 (4) 北緯60度及び30度に沿った波動のゆらぎの各モード(波数 K) に対する相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ (図11, 図12),

を求めた。

§ 5. まとめ

FGGEデータの500mb等圧面高度の時間的・空間的変動についてカオス解析を行った。

§3では東経127.5°上の5つの地点での時間変動について相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ を求めた。§4では、赤道、中緯度(30度)および高緯度(60度)の5つの緯度に沿って地球を一周した500mb等圧面高度の時間的・空間的変動を波数 $K=1\sim 8$ の各モードについてのカオス解析の結果を示した。

§3の一地点観測データおよび§4の波数モード分解したデータのいずれについても、赤道域では相関次元 $D=7\sim 8$ 次元, 最大リアプノフ指数 $\Lambda \cong 0.15/\text{day}$, 高緯度域では $D=3\sim 4$ 次元, $\Lambda \cong 0.40/\text{day}$ であることが判明した。即ち、観測時の誤差が e (≈ 2.7) 倍に成長するのに要する時間 T_e ($=1/\Lambda$) は赤道域では約7日と長く、中高緯度域では約3日と短いといえる。

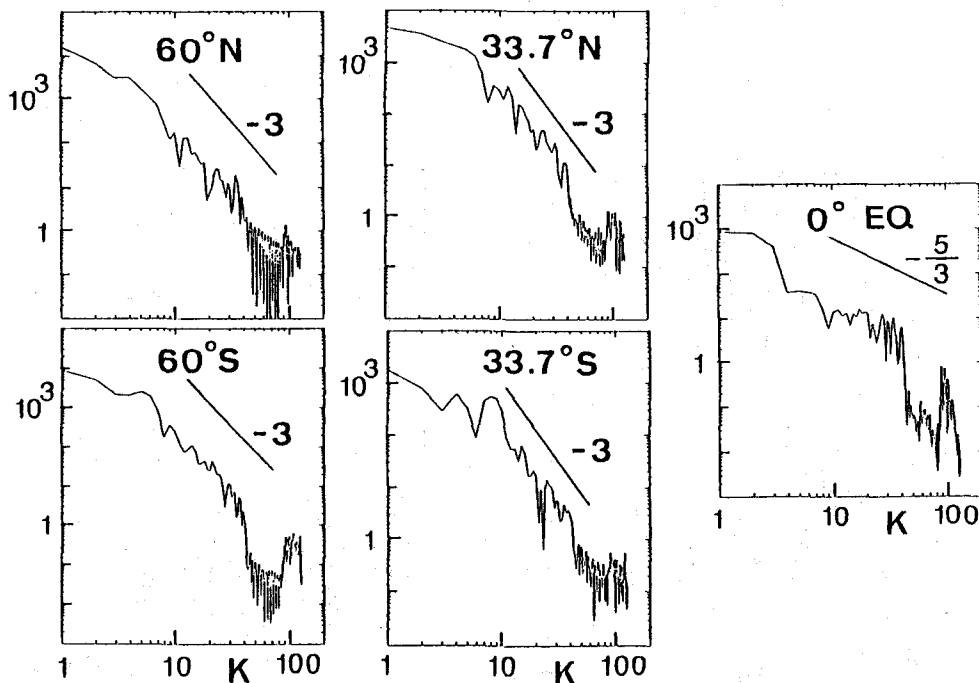


図6 各緯度に沿って地表を一周した500mbの等圧面高度の時間変動のエネルギースペクトル密度。

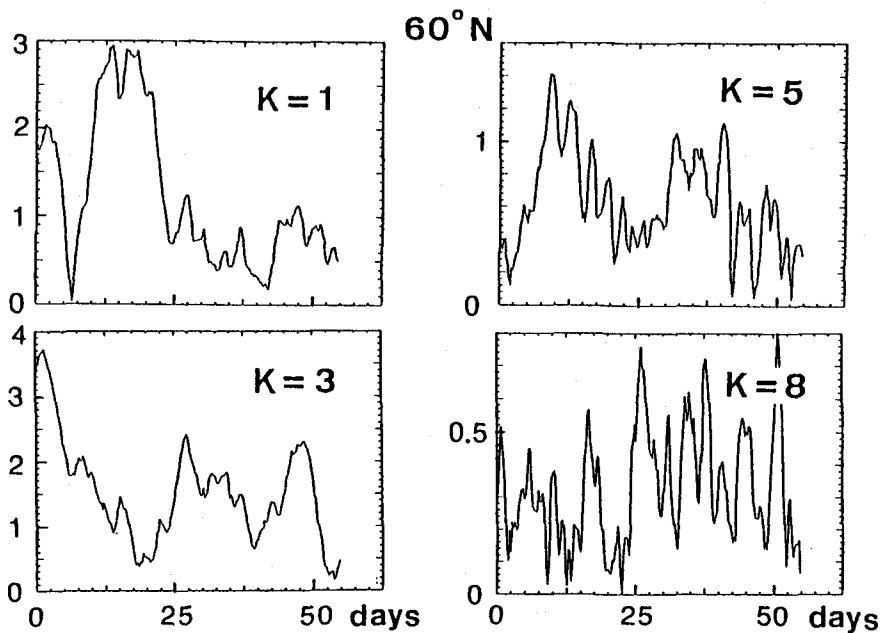


図7 北緯 60度に沿って地表を一周した 500 mb の等圧面高度の時間変動のエネルギー振幅を各ノーマルモード毎に示したものの。

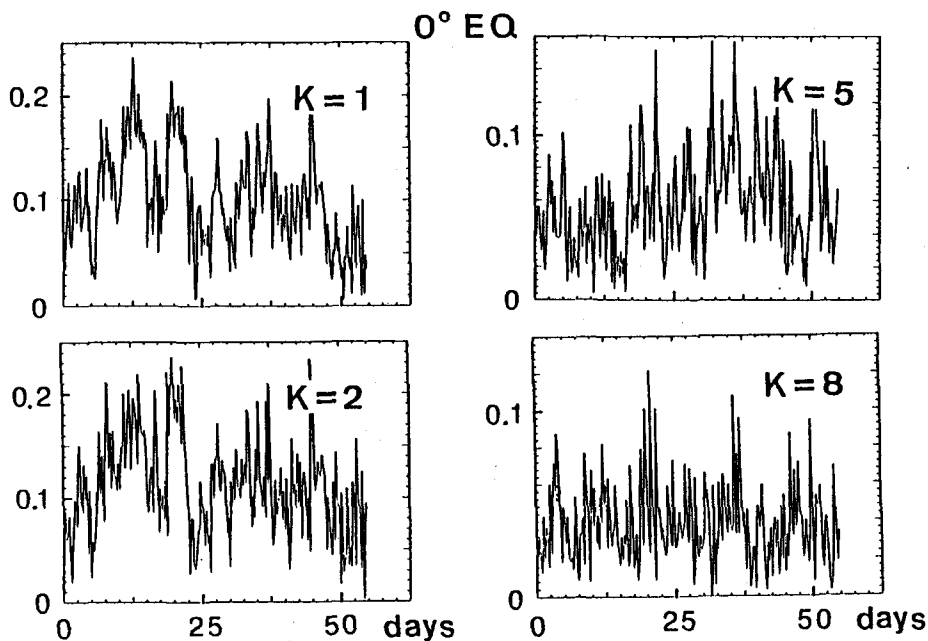


図8 赤道に沿って地表を一周した 500 mb の等圧面高度の時間変動のエネルギー振幅を各ノーマルモード毎に示したものの。

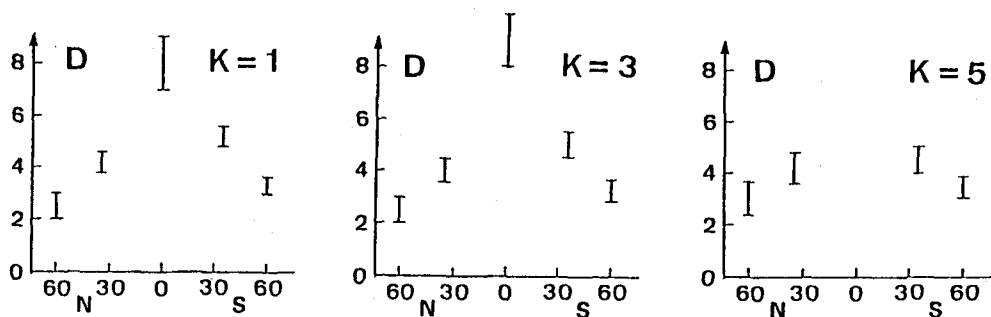


図9 各ノーマルモードに対する相関次元 D の緯度変化。

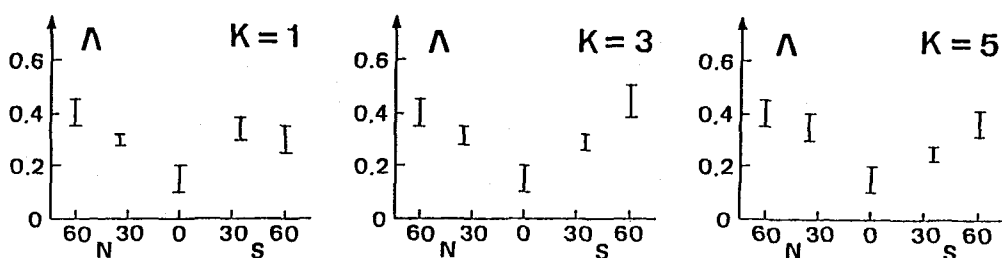


図10 各ノーマルモードに対する最大リアプノフ指数 Λ (1/day) の緯度変化。

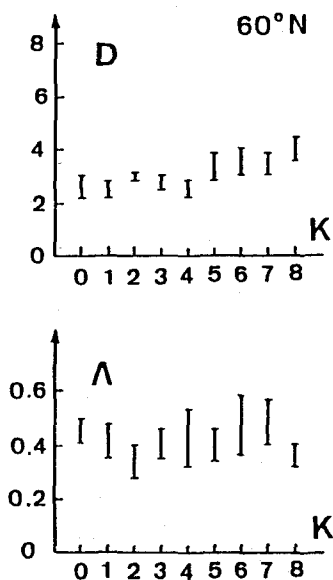


図11 北緯60度に沿ったゆらぎのモード (波数 K) に対する相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ 。

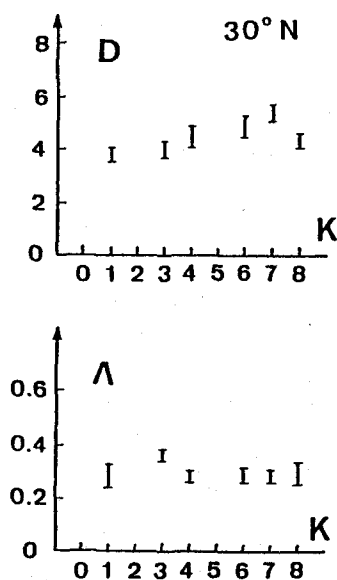


図12 北緯30度に沿ったゆらぎのモード (波数 K) に対する相関次元 D と最大リアプノフ指数 Λ 。

また、等緯度線上でのゆらぎの波動モードについては相関次元及び最大リアプノフ指数はいずれも波数 ($K=1\sim 8$) の変化に対してほぼ一定の値をとることが分かった。

今回は、使用したデータ点の個数が少ないため、計算結果のバラつきが大きく、従って、結論についても定性的な傾向についての示唆を与えている程度と解釈するのが無難であろう。また、今回のデータ処理の経験からの印象として、相関次元の計算には1日2回観測のデータに較べて1日4回観測のデータの方が結果の収束性が良好であった。しかし、最大リアプノフ指数の計算では1日4回観測のデータでもバラつきが比較的大きかった。

最近、カオス研究の分野では、奇妙なアトラクターの次元 α の多重フラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ 、[10,18] 及び、粗視化されたリアプノフ指数の q -相転移 [19] などが研究されているが、FGGEデータの解析にもこれらの手法を適用することを検討中である。

参 考 文 献

- [1] E.N.Lorenz, J.Atom.Sci. 20 (1963) 130.
- [2] 山口昌哉著,「カオスとフラクタル —— 非線形の不思議 ——」(講談社,昭和61年)115頁。
J.M.T.Thompson & H.B.Stewart著,武者利光・橋口住久訳:「非線形力学とカオス」(オーム社,1988)。
- [3] S.Lovejoy, Science 216 (1982) 185-187.
- [4] S.Lovejoy and D.Schertzer, Bull.Amer.Meteor.Soc. 67 (1986) 26-32.
- [5] J.Yano and Y.Takeuchi, J.Meteor.Soc.Japan 65(1987)661-667.
- [6] K.Fraedrich, J.Atom.Sci. 43 (1986) 419-432.
- [7] H.W.Henderson and R.Wells, Adv.Geophys. 30 (1988) 205-237.
- [8] 川上紳一・吉田英太郎, 天気, 第35巻, 第11号(1988年11月号) 693-700頁.
- [9] P.Grassberger and I.Procaccia, Physica 9D (1983) 189-208.
- [10] S.Sato, M.Sano and Y.Sawada, Prog.Theor.Phys. 77(1987)1-5.
- [11] FGGE:第1回・地球大気開発計画・全球・実験(1978年12月-1979年11月),
例えば,増田耕一, 天気, 第35巻, 第1号(1988年1月号) 5-19頁.
- [12] 栢原孝浩・岡本寿夫・瓜生道也, 日本気象学会 秋季大会(仙台,1988年10月)
講演予稿集(第54巻)15頁.
栢原孝浩・岡本寿夫・瓜生道也, 日本気象学会 春季大会(東京,1989年5月)
講演予稿集(第55巻)206頁.
- [13] 栢原孝浩, 修士論文(九州大学理学部物理,1989年2月)
- [14] T.Kayahara, H.Okamoto, M.Uryu, IAMAP89 (International Association of Meteorology and Atmospheric Physics, University of Reading, UK, 31 July to 12 August 1989) Abstracts Volume Two, ND.21.
- [15] 栢原孝浩・岡本寿夫・瓜生道也, 気候変動国際共同研究計画(WCRP)第2回シンポジウム(京都大学,1988年11月28日-30日)報告書128-134頁.
- [16] 瓜生道也・岡本寿夫, 第2回・ゆらぎ現象研究会(代表者:武者利光・東京工業大学,1989年11月25日-26日)資料集45-53頁.
- [17] 岡本寿夫・栢原孝浩・瓜生道也, 日本ME学会専門別研究会「生体環境の時系列情報解析研究会」(平成2年1月27日,九州大学工学部電子工学科)研究会報告集 Vol.1, No.6, pp.62-66.
- [18] T.C.Halsey, M.H.Jensen, L.P.Kadanoff, I.Procaccia and B.I.Shriman, Phys.Rev. A33 (1986) 1141.
- [19] 森 肇・岡本寿夫, 日本物理学会誌, 第44巻(1989年5月号) 316-322頁.