

スペクトル解析と不規則波の浅水変形

浜 中 建一郎

1. まえがき

不規則波の屈折現象を含んだ浅水変形の研究は、良く知られている様に、波別解析法とスペクトル法に大別される。前者（例えば水口等⁽¹⁾，岩垣等⁽²⁾）は、相続く一組の水面の山と谷を切り取り、それをひとつの波と考えて適当な規則波の浅水変形の理論に適用し、求める地点での様子を知らうとするもので、取り扱いの簡単さや工学的な利便（例えば有義波等が簡単に求める）はあるものの、力学的には多少無理のあるモデルと思われる。

スペクトル法に属する研究としては、基準点でのパワースペクトルを適当な方法で分割し、それを基に有限個の振幅を求め、それ等の振幅を持つ線形成分波が独立に浅水変形をするという方法（合田等⁽³⁾，Tang et al⁽⁴⁾，パワースペクトルを使ったエネルギー平衡方程式を導き、直接パワースペクトルの変化を求める方法（合田等⁽³⁾，Méhauté et al⁽⁵⁾，丸山等⁽⁶⁾），さらに緩勾配方程式を放物形方程式に近似し、回折効果も含んだ不規則波の変形を論じた研究（泉谷⁽⁷⁾，磯部⁽⁸⁾）等がある。これ等は全て線形の扱いであるのに対し、非線形の効果を含んだ研究としては、水平底の不規則波の2次近似解を用いて、2次スペクトル（パワースペクトルのピーク周波数の2倍近傍に現われる第2のピーク）の変化を論じた研究や（酒井⁽⁹⁾），同じ波動解を用い、不規則波の非線形性をより直接的に表現するバイスペクトルの変化を論じた研究（樫木⁽¹⁰⁾），さらに、現地観測データによる実測バイスペクトルの変化を論じた研究（柿沼等^{(11),(12)}）等がある。しかしながらこれ等のバイスペクトルの研究はバイスペクトルの実部だけを論じたものであった。一方、Masuda et al⁽¹³⁾によってバイスペクトルの実部が変動の上下の非対称性（波の山が尖り谷が平らになる），虚部が前後の非対称性（波形の前傾化や後傾化）に密接に関係していることが示されてから、虚部を含めたバイスペクトルの研究も進められる様になった。著者等は、水底勾配を陽に含んだストークス展開によって得られた波動解から2次のオーダーで、水深が浅くなるに従って波形の前傾化を促す項が現われることを示し⁽¹⁴⁾，同時にバイスペクトルの虚部が有意な値を持つことを示した⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。又 Elgar et al⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾は Bous-sinesq 方程式に基づく波動解からバイスペクトルを求め、現地観測から得られたバイスペクトルとの比較を行った。さらに Doering et al⁽¹⁴⁾はバイスペクトルに漂砂現象との関連性を見出すことを試みている。

本論では、これまでの著者等の研究に沿って不規則波の浅水変形について述べるが、その際、確率過程のスペクトル表現を理解することは重要であると思われるため、次節でその直感的理解が得られる様解説を試み、第3節でそれを用いた解析法として浅水変形を述べる。

2. スペクトル解析

2.1 パワースペクトルとスペクトル表現

海洋波動のスペクトル解析を考える際、初めに会おうのは相関関数とパワースペクトルだろう。すなわち、 $X(t)$ を定常確率過程、 $R(\tau)$ をその相関関数、 $P(\omega)$ をパワースペクトルとすると、

$$R(\tau) = \int P(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (1)$$

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

ただし

$$R(\tau) = \langle X(t) X(t+\tau) \rangle \quad (3)$$

が成立する。記号 $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。(1)式と(2)式は $R(\tau)$ と $P(\omega)$ が Fourier 変換の対で結ばれていることを表わす。この時、(1)式(3)式において特に $\tau = 0$ を考え、 $X(t)$ のエネルギーを E とすると

$$R(0) = \langle X^2(t) \rangle = E \quad (4)$$

$$\int P(\omega) d\omega = R(0) = E \quad (5)$$

となり、 $P(\omega)$ がある意味で $X(t)$ のエネルギーの周波数軸上の分布を表わしていることが分る。しかし、(1)式(2)式から分るように $P(\omega)$ は直接的には $R(\tau)$ の Fourier 変換であり、 $X(t)$ の Fourier 変換ではない。従って(2)式によりある $P(\omega)$ が与えられたとしても、 $X(t)$ そのものがどのような確率過程であるのか、あるいはその周波数領域での特性がどうであるかという間に(1)式(2)式は直接答えてくれるものではない。この間に答えるのが(6)式(7)式であり、スペクトル表現と呼ばれている。

$$X(t) = \int A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int X(t) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7)$$

この(6)式(7)式は見かけ上 Fourier 変換の形をしているが、通常の意味での Fourier 変換ではない。例えば、 $X(t)$ としてひとつの $\sin$ 関数や $\cos$ 関数を考えれば、(7)式の積分は明らかに発散し $A(\omega)$ は値を持たない。一方、このスペクトル表現は、確率論の中で体系づけられた理論であり、それを正確に理解するためにはかなり多くの数学の予備知識が必要とされる。しかしながら、通常土木工学に携わる研究者にとって、それらを学ぶ時間的余裕はほとんど持ち得ないのが現状と思われる。他方、 $X(t)$ を無限個の $\sin$ 関数 $\cos$ 関数の和とし、 $A(\omega)$ はその振幅とだけ考えるものも少々荒っぽ過ぎる様に見える。何故なら、各々の成分波について(7)式の積分は発散するからである。

このことから本節では、 δ 関数の概念を用いることにより、より具体的かつ直感的に $A(\omega)$ あるいは(6)式(7)式の表現が理解される様、解説を試みるつもりである。

又、(6)式(7)式は単に確率論上の興味だけでなく、実際の不規則波動の解析にも大変有用である。何故なら通常我々が出発点とすぐ微分方程式は、変動そのものに対する微分方程式であって、変動の相関関数に対するそれではない。従って、もし(6)式が成立するなら、(6)式をその微分方程式に代入することにより変動そのものの周波数領域での議論に変換することが出来るからである。

2.2 δ 関数と Fourier 変換

δ 関数は良く知られている様に、無限小幅のインパルスとして、例えば以下の様な関数の極限で与えられる。(図1)

$$\delta(x) = \lim_{l \rightarrow 0} \delta_l(x) \quad (8)$$

$$\delta_l(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & |x| \leq \frac{l}{2} \\ 0, & |x| > \frac{l}{2} \end{cases} \quad (9)$$

δ 関数はそれ単独ではほとんど意味がなく、通常積分演算の中で用いられる。例えば $f(x)$ を x 軸上の連続関数とすると、

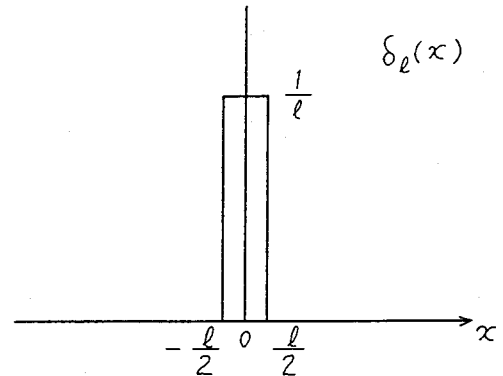


図1 $\delta_l(x)$

$$\begin{aligned} \int f(x) \delta(x) dx &= \lim_{l \rightarrow 0} \int f(x) \delta_l(x) dx \\ &= f(0) \end{aligned} \quad (10)$$

である。(10)式の積分では δ 関数の働きにより、関数 $f(x)$ と実数（又は複素数） $f(0)$ の対応が与えられている。一般に、ある関数に対しある実数（又は複素数）の対応を与えるものを汎関数と呼び、 δ 関数も常に(10)式のような積分演算の中だけで用いられるとすれば汎関数となっている。

次に Fourier 変換について述べる。Fourier 変換は良く知られている様に、絶対可積分な関数

$$\eta(t), \quad \int |\eta(t)| dt < \infty \quad (11)$$

に対し、

$$\hat{\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \eta(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

$$\eta(t) = \int \hat{\eta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (13)$$

が成立し、(12)式を Fourier 変換、(13)式を Fourier 逆変換という。又、(12)式が成立すれば(13)式が成立し、

逆に(13)式が成立すれば(12)式が成立することを Fourier 変換の対称性という。

今 $g_T(t)$ として

$$g_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \quad (14)$$

を考えると、その Fourier 変換は

$$\begin{aligned} \hat{g}_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega T}{\omega} \end{aligned} \quad (15)$$

である。ここに現われる $\sin x / x$ の形の関数は Fourier 核と呼ばれている。次に Fourier 変換の対称性から

$$g_T(t) = \int \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \quad (16)$$

さらに、 $T \rightarrow \infty$ の極限を考えると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = 1$$

だから

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = 1 \quad (17)$$

となる。(17)式の積分中にある Fourier 核は T が大きくなるに従って $\omega = 0$ の点の値を大きくし、他の点では ω 軸に沿って激しく振動する (図 2)。従って積分を実行すると、 $\omega = 0$ の近傍だけが意味を持ち、他の所では互いに相殺し意味を失う。

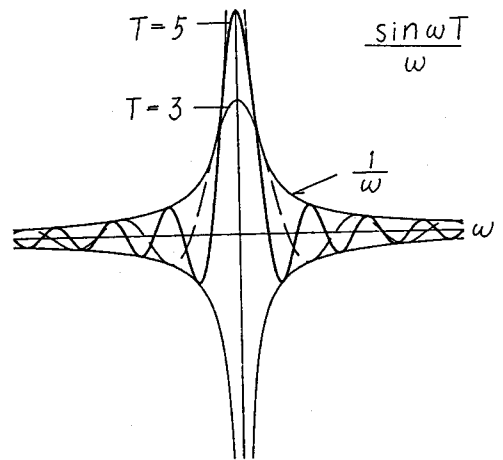


図 2 Fourier 核

次にこの Fourier 核が(10)式と同じ意味で δ 関数

になっていることを示す。 $t = 0$ の近傍で連続な関数を $f(t)$ とし、その Fourier 変換を $\hat{f}(\omega)$ とすると、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int f(t) \frac{\sin tT}{\pi t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \iint \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{\sin tT}{\pi t} d\omega dt$$

(17)式より

$$\begin{aligned} &= \int \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= f(0) \end{aligned} \quad (18)$$

となり、確かに関数 $f(t)$ に対し $f(0)$ を与えており、(10)式と同じ性質を持つ。($f(t)$ が通常の意味

で Fourier 変換を持たない場合は $t = 0$ の前後で切り取った関数を考えれば良い。) 従って, (17)式, (18)式に現われた Fourier 核の極限も又 δ 関数となっており, それらを同一視して同じ記号 δ を用いて表わすと(15)式(17)式は

$$\left. \begin{aligned} \delta(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t} dt \\ 1 &= \int \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

と書ける。

又一般に(14)式の $g_T(t)$ として

$$g_T(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} & , |t| \leq T \\ 0 & , |t| > T \end{cases}$$

を考えると, $T \rightarrow \infty$ では, 同様にして

$$\left. \begin{aligned} \delta(\omega - \omega_0) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \\ e^{i\omega_0 t} &= \int \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。

(20)式は, δ 関数を導入することにより, $\sin$ 関数や $\cos$ 関数が Fourier 変換を持つようになることを意味し, 2.1節で述べたスペクトル表現の理解に一歩近づいたことになるだろう。

2.3 確率振幅

今 a をある実数 (又は複素数) とし,

$$\eta(t) = a e^{i\omega_0 t} \quad (21)$$

を考えると, (20)式から

$$\left. \begin{aligned} a \delta(\omega - \omega_0) &= \frac{1}{2\pi} \int \eta(t) e^{-i\omega t} dt \\ \eta(t) &= \int a \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

が言える。次に a をある確率変数 A の見本値と考え, 各々の a と(21)式から作られる関数 $\eta(t)$ の全体を $X(t)$ とする。これらの a と $\eta(t)$ に対し(22)式が成立するという意味で以下の様に表わそう。

$$\left. \begin{aligned} A \delta(\omega - \omega_0) &= \frac{1}{2\pi} \int X(t) e^{-i\omega t} dt \\ X(t) &= \int A \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

さらに, N 個の $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ に対し, N 個の確率変数 $A_1, A_2, \dots, A_N$ を考え

$$X(t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{i\omega_n t}$$

を作ると、(23)式から

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N A_n \delta(\omega - \omega_n) &= \frac{1}{2\pi} \int X(t) e^{-i\omega t} dt \\ X(t) &= \int \sum_{n=1}^N A_n \delta(\omega - \omega_n) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と書ける。ここで、(24)式の $X(t)$ は t 軸上のひとつの確率過程となっており、 A_n は周波数の ω_n の成分波の確率的な振幅となっている（以下その意味で確率振幅と呼ぼう）。

さらに、我々が本論で論じようとしているスペクトル表現(6)式(7)式は、なんらかの意味で(24)式の $N \rightarrow \infty$ の極限であるだろうことは容易に想像出来るだろう。

2.4 スペクトル表現とその構成法

前節で述べた(24)式のどの様な極限がスペクトル表現になるのかを調べるため、始めに(7)式で与えられた $A(\omega)$ の性質を調べてみよう。

今、 $X(t)$ を平均値零で実数をとる定常確率過程とする。この $X(t)$ に対し(7)式の積分

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int X(t) e^{-i\omega t} dt$$

を考える。これまでの議論からこの $A(\omega)$ が通常関数としては意味を持たないことは容易に分る。

この $A(\omega)$ の性質を見るために $\langle A(\omega_1) A(\omega_2) \rangle$ を求めてみよう。(7)式から

$$\langle A(\omega_1) A(\omega_2) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \langle X(t_1) X(t_2) \rangle e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

$t_2 - t_1 = \tau$ として

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \langle X(t_1) X(t_1 + \tau) \rangle e^{-i\omega_2 \tau} d\tau \right\} e^{-i(\omega_1 + \omega_2) t_1} dt_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \frac{1}{2\pi} \int R(t_1, \tau) e^{-i\omega_2 \tau} d\tau \right\} e^{-i(\omega_1 + \omega_2) t_1} dt_1 \end{aligned}$$

定常確率過程だから $R(t_1, \tau) = R(\tau)$ 、さらに(2)式を用いて、

$$= P(\omega_2) \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(\omega_1 + \omega_2) t_1} dt_1$$

(19)式より

$$P(\omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (25)$$

従って

$$\int \langle A(\omega_1) A(\omega_2) \rangle d\omega_1 = P(\omega_2) \quad (26)$$

あるいは(25)式の意味で単に以下の様に記そう。

$$\langle A(\omega_1) A(\omega_2) \rangle = \begin{cases} P(\omega_2), & \omega_1 + \omega_2 = 0 \\ 0, & \omega_1 + \omega_2 \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

特に $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ のときは、 $A(\omega)$ の実部、虚部を各々 $A_R(\omega)$ 、 $A_I(\omega)$ と書いて

$$\left. \begin{aligned} \langle A_R(\omega) A_I(\omega) \rangle &= 0 \\ \langle \{A_R(\omega)\}^2 \rangle &= \langle \{A_I(\omega)\}^2 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

が成立する。又、 $X(t)$ が実数だから(7)式より

$$A(\omega) = A^*(-\omega) \quad (29)$$

である。ただし、*印は共役複素数を表わす。従って、(27)式(28)式から

$$\left. \begin{aligned} \langle A(\omega) A(-\omega) \rangle &= \langle A(\omega) A^*(\omega) \rangle = P(\omega) \\ \langle \{A_R(\omega)\}^2 \rangle &= \langle \{A_I(\omega)\}^2 \rangle = \frac{1}{2} P(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

か言え、さらに $\langle X(t) \rangle = 0$ より

$$\langle A(\omega) \rangle = 0 \quad (31)$$

である。

この様にして、(7)式で表わされる $X(t)$ の形式的 Fourier 変換であるから確率振幅 $A(\omega)$ の性質は、相関関数 $R(\tau)$ の Fourier 変換であるパワースペクトル $P(\omega)$ と δ 関数によって(27)式から(31)式の様に表わされることが分った。

次に $A_R(\omega)$ と $A_I(\omega)$ の性質をもう少し詳しく調べてみよう。(7)式から

$$\left. \begin{aligned} A_R(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int X(t) \{ e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} \} dt \\ A_I(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int X(t) \{ e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} \} dt \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(32)式から次の量を計算する。

$$\langle A_R(\omega_1) A_R(\omega_2) \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \langle X(t_1) X(t_2) \rangle \{ e^{-\omega_1 t_1} + e^{\omega_1 t_1} \} \{ e^{-\omega_2 t_2} - e^{\omega_2 t_2} \} dt_1 dt_2$$

(24)式と同様の演算をすると

$$= \frac{1}{2} P(\omega_2) \{ \delta(\omega_1 + \omega_2) + \delta(\omega_1 - \omega_2) \} \quad (33)$$

同様にして

$$\langle A_I(\omega_1) A_I(\omega_2) \rangle = -\frac{1}{2} P(\omega_2) \{ \delta(\omega_1 + \omega_2) - \delta(\omega_1 - \omega_2) \} \quad (34)$$

$$\langle A_R(\omega_1) A_I(\omega_2) \rangle = 0 \quad (35)$$

が得られる。この(33)~(35)式が前述の(27)~(30)式を満たすことは容易に分る。又、(33)式(34)式は ω_1 と ω_2 の空間上で $\omega_1 + \omega_2 = 0$ と $\omega_1 - \omega_2 = 0$ に沿ってだけ値を持っている。

(32)式において、 $\omega_2 = \omega$ とおき、 ω_1 を ω に近付けることを考えてみよう。 $\langle A_R(\omega) A_R(\omega_1) \rangle$ は $\omega_1 = \omega$ の時だけ値 $P(\omega)/2$ を持ち、 ω_1 がいかに ω に近くとも $\omega_1 \neq \omega$ である限り値を持たない。このことは、 ω 軸上の確率過程 $A_R(\omega)$ のほとんどの見本関数は ω 軸上の関数として点 ω で不連続であると言え、さらに考えている点 ω は任意であるから $A_R(\omega)$ のほとんどの見本関数は ω 軸上の全ての点で不連続と言える。又 $A_I(\omega)$ についても同様である。

このことが $A(\omega)$ は ω 軸上に δ 関数を無限に密に並べたものであることを想像させる。

最後に(27)~(31)式及び(33)~(35)式の性質を持ちつつ(24)式の様なスペクトルの極限としての $A(\omega)$ の概念的構成方法を考えてみよう。

最初にパワースペクトル $P(\omega_1)$ が与えられているとして確率変数列 A_n を次の様にして構成する。 ω 軸を適当な微小区間 $\Delta\omega$ で分割し、原点に近い区間から順に番号を付け、 n 番目の区間の中央の ω の値を ω_n とする($\omega_{-n} = -\omega_n$)。各分割区間での $P(\omega)$ の積分値(図3の斜影部分)を P_n とする。この P_n を用いて次の様に互いに独立な確率変数列 A_n を決める。

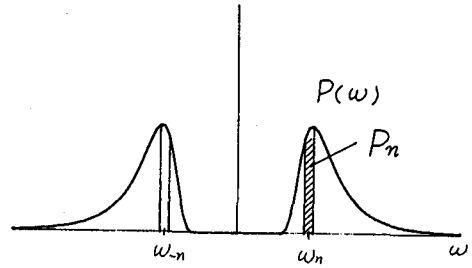


図3 P_n

A_n の実部、虚部を R と I を付して表わし

$$\left. \begin{aligned} \langle \{ A_n^R \}^2 \rangle &= \langle \{ A_n^I \}^2 \rangle = \frac{1}{2} P_n \\ \langle A_n^R \rangle &= \langle A_n^I \rangle = 0 \\ \langle A_n^R A_n^I \rangle &= 0 \\ A_{-n}^R &= A_n^R, \quad A_{-n}^I = -A_n^I \\ \langle A_m^R A_n^R \rangle &= \langle A_m^I A_n^I \rangle = 0, \quad m + n \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

とする。このことから

$$\langle A_m A_n \rangle = \begin{cases} P_n, & m + n = 0 \\ 0, & m + n \neq 0 \end{cases} \quad (37)$$

が言える。これらの確率変数 A_n を用いて(24)式と同様な確率過程 $X(t)$ を作る。さらに分割区間幅 $\Delta\omega \rightarrow 0$ の極限を考え、

$$A(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_n A_n \delta(\omega - \omega_n) \quad (38)$$

と書くと、 $X(t)$ は

$$X(t) = \int A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (39)$$

となる。

この表現の妥当性を見るには、この $X(t)$ で作られる相関関数の Fourier 変換が最初に与えた $P(\omega)$ になることを確かめれば良い。実際

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle \int A(\omega_1) e^{i\omega_1 t} d\omega_1 \cdot \int A(\omega_2) e^{i\omega_2(t+\tau)} d\omega_2 \rangle \\ &= \iint \langle A(\omega_1) A(\omega_2) \rangle e^{i(\omega_1+\omega_2)t} e^{i\omega_2\tau} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \iint \sum_m \sum_n \langle A_m A_n \rangle \delta(\omega_1 - \omega_m) \delta(\omega_2 - \omega_n) e^{i(\omega_1+\omega_2)t} e^{i\omega_2\tau} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

(37)式より

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \iint \sum_n P_n \delta(\omega_1 + \omega_n) \delta(\omega_2 - \omega_n) e^{i(\omega_1+\omega_2)t} e^{i\omega_2\tau} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_n P_n e^{i\omega_n \tau} \\ &= \int P(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega \end{aligned} \quad (40)$$

となり、確かに $P(\omega)$ をパワースペクトルとして持っている。

さらに(38)式で与えられる確率振幅が(26)式を満たしていることを示しておこう。(38)式の $A(\omega)$ を用いて

$$\begin{aligned} \int \langle A(\omega_1) A(\omega_2) \rangle d\omega_1 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \iint \sum_m \sum_n \langle A_m A_n \rangle \delta(\omega_1 - \omega_m) \delta(\omega_2 - \omega_n) d\omega_1 \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int \sum_n P_n \delta(\omega_1 + \omega_n) \delta(\omega_2 - \omega_n) d\omega_1 \\ &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_n P_n \delta(\omega_2 - \omega_n) \end{aligned}$$

となり δ 関数の意味で(26)式と一致する (ω_2 軸に沿って任意の区間積分すれば一致するという意味)。

3. 不規則波の浅水変形

本節では、2節で述べたスペクトル表現を用いた不規則波の浅水変形の解析の例として、著者等がこれまで行ってきた研究に沿った解説を試みる。

用いた解析手法は摂動法で、波の振幅に関係し、非線形性を表わすパラメータと水底勾配に関係し、変形性を表わすパラメータとのふたつのパラメータで展開する。このことは、弱非線形な波がゆっくり変化しながら進行する様な波動場を考えていることになる。

3.1 基礎方程式と摂動展開

非粘性、非圧縮のポテンシャル流れを仮定する。又、不規則波としては時間的に定常な準ガウス過程（線形波の振幅はガウス分布を持つ。このことにより高次のスペクトルが容易に求まる）を仮定する。

基礎方程式は、連続の式、自由水面での運動学的境界条件式と力学的境界条件式、および水底での境界条件式である。用いられる諸量は波動の代表周波数 ω_m （例えばピーク周波数）と重力加速度 g

で無次元化する。具体的には、長さを表わす諸量には ω_m^2/g 乗じ、時間を表わす諸量には ω_m を乗ずる。さらに水平方向の座標を微小パラメータ δ で圧縮すると

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 \Delta \phi + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= \eta_t + \delta^2 \nabla \eta \nabla \phi, \quad z = \eta \\ \phi_t + \eta + \frac{1}{2} \delta^2 (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} (\phi_z)^2 &= 0, \quad z = \eta \\ \phi_z + \delta^2 \nabla \phi \nabla h &= 0, \quad z = -h \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

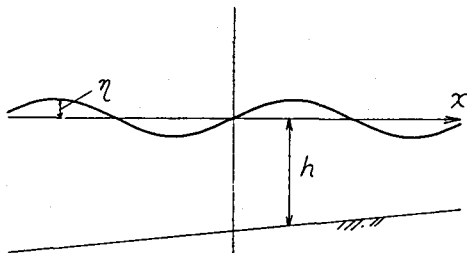


図4 座標系

となる。ここで、 x, y は水平座標、 z は静水面から上向きにとった垂直座標、 t は時間、 ϕ は速度ポテンシャル、 η は水面変動、 h は水深であり、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 、 $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ とする。

シャル、 η は水面変動、 h は水深であり、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 、 $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ とする。

(41)式の第2式と第3式の中の値を $z = 0$ の回りのTaylor展開で与えると、

$$\left. \begin{aligned} (\phi_z + \eta \phi_{zz} + \frac{1}{2} \eta^2 \phi_{zzz} + \dots) &= \eta_t + \delta^2 \nabla \eta (\nabla \phi + \eta \nabla \phi + \dots), \quad z = 0 \\ (\phi_t + \eta \phi_{tz} + \frac{1}{2} \eta^2 \phi_{tzz} + \dots) + \eta + \frac{1}{2} \{\nabla \phi + \eta \nabla \phi + \dots\}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \{\phi_z + \eta \phi_{zz} + \dots\}^2 = 0, \quad z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

となる。次に、速度ポテンシャル ϕ と水位変動 η がスペクトル表現と非線形性を表わすパラメータ ϵ による摂動展開とによって記述し得ると仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned} \phi &= \epsilon^2 \Omega^{(2)} + \dots + \epsilon \int_{\tilde{K}} A^{(1)}(\tilde{K}) e^{i\chi} d\tilde{K} \\ &+ \epsilon^2 \int_{\tilde{K}_1} \int_{\tilde{K}_2} A^{(2)}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) e^{i(\chi_1 + \chi_2)} d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \epsilon^2 \zeta^{(2)} + \dots + \epsilon \int_{\tilde{K}} B^{(1)}(\tilde{K}) e^{i\chi} d\tilde{K} \\ &+ \epsilon^2 \int_{\tilde{K}_1} \int_{\tilde{K}_2} B^{(2)}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) e^{i(\chi_1 + \chi_2)} d\tilde{K}_1 d\tilde{K}_2 + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、 χ は位相で $\nabla \chi = \delta^{-1} \mathbf{k}$ 、 $\chi_t = -\omega$ 、 Ω は定常流の速度ポテンシャルで $\nabla \Omega = \delta^{-1} \mathbf{V} = \delta^{-1} (U, V)$ 、 $\Omega_z = W$ 、 ζ は平均水位の変化量を表わす。又 K は波数、周波数ベクトルで $K = (\mathbf{k}, \omega)$ である。 $\tilde{K}$ は適当な基準点でのそれである。(43)式(44)式から分る様に振幅 A, B は、基準点での $\tilde{K}$ 上で定義されているが同時に局所的な K の振動の振幅でもある。(41)式(42)式の微分演算は各成分波毎に実行出来るとする。

(i) $\epsilon^1 \delta^0$ のオーダー

(43)式、(44)式を(41)あるいは(42)式に代入し ϵ の1次のオーダーでまとめると、

$$\left. \begin{aligned} \int_{\bar{K}} \{ A_{zz}^{(1)} - k^2 A^{(1)} + i\delta (A^{(1)} \nabla \cdot \mathbf{k} + 2 \mathbf{k} \cdot \nabla A^{(1)}) + \delta^2 \Delta A^{(1)} \} e^{iX} d\bar{K} &= 0 \\ \int_{\bar{K}} A_z^{(1)} e^{iX} d\bar{K} + \int_{\bar{K}} i\omega B^{(1)} e^{iX} d\bar{K} &= 0, \quad z=0 \\ \int_{\bar{K}} -i\omega A^{(1)} e^{iX} d\bar{K} + \int_{\bar{K}} B^{(1)} e^{iX} d\bar{K} &= 0, \quad z=0 \\ \int_{\bar{K}} A_z^{(1)} e^{iX} d\bar{K} + \delta^2 \int_{\bar{K}} \nabla h \cdot (\nabla A^{(1)} + i\delta^{-1} \mathbf{k} A^{(1)}) e^{iX} d\bar{K} &= 0, \quad z=-h \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

一般に $\int_{\bar{K}} F(K) e^{iX} d\bar{K} = 0$ が全ての場所と時間で成立するには $F(K) = 0$ 。さらに $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(0)} + \epsilon \mathbf{k}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{k}^{(2)} + \dots$ としてあらためてまとめると、

$$\left. \begin{aligned} A_{zz}^{(1)} - \{ k^{(0)} \}^2 A^{(1)} + i\delta \{ A^{(1)} \nabla \cdot \mathbf{k}^{(0)} + 2 \mathbf{k} \cdot \nabla A^{(1)} \} + \delta^2 \Delta A^{(1)} &= 0 \\ A_z^{(1)} + i\omega B^{(1)} &= 0, \quad z=0 \\ B^{(1)} - i\omega A^{(1)} &= 0, \quad z=0 \\ A_z^{(1)} + i\delta A^{(1)} \mathbf{k}^{(0)} \cdot \nabla h + \delta^2 \nabla h \cdot \nabla A^{(1)} &= 0, \quad z=-h \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

となる。ここで $\mathbf{k}$ を ϵ で展開したことにより、(45)式の第1式と第4式から ϵ の高次方程式に組み込まれる項が出ることを注意しておく。

次に(46)式の $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $\mathbf{k}^{(0)}$ を δ で展開し、 $\epsilon^1 \delta^0$ のオーダーでまとめると、 $\mathbf{k}^{(0)} = \mathbf{n} + \delta \mathbf{k}^{(0,1)} + \delta^2 \mathbf{k}^{(0,2)} + \dots$ として

$$\left. \begin{aligned} A_{zz}^{(1,0)} - n^2 A^{(1,0)} &= 0 \\ A_z^{(1,0)} + i\omega B^{(1,0)} &= 0, \quad z=0 \\ B^{(1,0)} - i\omega A^{(1,0)} &= 0, \quad z=0 \\ A_z^{(1,0)} &= 0, \quad z=-h \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

となる。これは各成分波ごとに通常の微小振幅波に対する方程式と一致し、解は

$$\left. \begin{aligned} A^{(1,0)} &= -ia(\bar{K}) \cosh \alpha \\ B^{(1,0)} &= \omega a(\bar{K}) \cosh \beta \\ \omega^2 &= n \tanh \beta \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

ただし、 $\alpha = n(z+h)$, $\beta = nh$

となる。(48)式の等3式は線形分散関係を与える。

(ii) $\epsilon^1 \delta^1$ のオーダー

(46)式を $\epsilon^1 \delta^1$ のオーダーでまとめると

$$\left. \begin{aligned} A_{zz}^{(1,1)} - n^2 A^{(1,1)} &= 2 n k^{(0,1)} A^{(1,0)} - i (A^{(1,0)} \nabla \cdot \mathbf{n} + 2 \mathbf{n} \cdot \nabla A^{(1,0)}) \\ A_z^{(1,1)} + i\omega B^{(1,1)} &= 0, \quad z=0 \\ B^{(1,1)} - i\omega A^{(1,1)} &= 0, \quad z=0 \\ A_z^{(1,1)} + iA^{(1,0)} \mathbf{n} \cdot \nabla h &= 0, \quad z=-h \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

が得られ、(48)式を代入することにより

$$\left. \begin{aligned} A^{(1,1)} &= (C_1 \alpha^2 + C_2 \alpha) \cosh \alpha + C_3 \alpha \sinh \alpha \\ B^{(1,1)} &= i \omega \{ (C_1 \beta^2 + C_2 \beta) \cosh \beta + C_3 \beta \sinh \beta \} \\ k^{(0,1)} &= 0 \\ \nabla \cdot \{ \mathbf{n} \mid a \mid^2 (\sinh^2 \beta + \omega^2 h) \} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

ただし

$$C_1 = -\frac{a}{2n^3} \mathbf{n} \cdot \nabla n, \quad C_2 = -\frac{a}{n} \mathbf{n} \cdot \nabla h$$

$$C_3 = -\frac{1}{2n^2} (a \nabla \cdot \mathbf{n} + 2 \mathbf{n} \cdot \nabla a - \frac{a}{n} \mathbf{n} \cdot \nabla n)$$

を得る。ここで(50)式の第4式は線形波のエネルギー保存則を表わしており、次節でパワースペクトルによる表現を示す。

$\epsilon^1 \delta^2$ のオーダーについても全く同様にして解くことが出来るが、解が複雑になるだけであるから省略する。ただし、このオーダーでは波数の変形性による補正項 $k^{(0,2)}$ が値を持つことに注意しておく。

(iii) $\epsilon^2 \delta^0$ のオーダー

ϵ^2 のオーダーでも(45)式と同様の形式にまとめると、線形解による $\int \cdot e^{iX} dK$ 形の強制項と $\iint \cdot e^{i(X_1+X_2)} dK_1 dK_2$ 形の強制項が現われ、各々に従って方程式をふたつに分離することが出来各々(46)式と同形式の方程式が得られる。さらに δ で展開し $\epsilon^2 \delta^0$ のオーダーでまとめることにより、前者からはこのオーダーでの波数の補正量は零、後者からは $A^{(2,0)}$ 、 $B^{(2,0)}$ に関する方程式が得られ、それを解くことにより、

$$\left. \begin{aligned} A^{(2,0)} &= -i a^{(2,0)}(K_1, K_2) \cosh \alpha_2 a(\bar{K}_1) a(\bar{K}_2) \\ B^{(2,0)} &= b^{(2,0)}(K_1, K_2) a(\bar{K}_1) a(\bar{K}_2) \end{aligned} \right\}$$

ただし、 $\alpha_2 = |\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2| (z + h)$

の形の解が得られる。

さらに、この方程式において $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ 、 $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ とすることにより、定常項に対する方程式が得られ、wave set-down が求まる。

(iv) $\epsilon^2 \delta^1$ のオーダー

このオーダーでも $\epsilon^2 \delta^0$ のオーダーの時と同様にして解けて、以下の様な解を持つ。

$$\left. \begin{aligned} A^{(2,1)} &= \{ [E_1 \alpha_2^2 + E_2 \alpha_2 + E_3] \cosh \alpha_2 + E_4 \sinh \alpha_2 \} a(\bar{K}_1) a(K_2) \\ B^{(2,1)} &= i [\omega \{ E_1 \beta_2^2 + E_2 \beta_2 + E_3 \} \cosh \beta_2 + \omega E_4 \sinh \beta_2 + E_5] a(\bar{K}_1) a(K_2) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

ただし $\beta_2 = |\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2| h$ で、 $E_1 \sim E_5$ は K_1 と K_2 の関数。

ここで注目すべきことは、このオーダでの確率振幅 A 、 B に関して虚数単位 i の付き方が $\epsilon^2 \delta^0$ や $\epsilon^1 \delta^0$ のオーダの場合の逆になっていることである。このことは規則波の場合で考えると、もし $\epsilon^1 \delta^0$ のオーダの水面変動を $\eta^{(1,0)} = b_1 \cos \chi$ とすると $\epsilon^2 \delta^1$ のオーダの水面変動は $\eta^{(2,1)} = b_2 \sin 2\chi$ となり、浅水域に進入した波の前傾化に寄与することに対応している。不規則波の場合にもこのオーダの解は統計的な意味で波の前傾化に寄与しており、パイスpekトルの虚部に密接な関係を持つ。このことは次節でもう一度述べる。

$\epsilon^3 \delta^0$ のオーダについてもこれまでと同様な解析を進めて行けるが、そのオーダではストークス波の場合と同様波数の非線形性による補正項が現われることを指摘しておくだけにとどめる⁽²⁰⁾。

3.2 パワースpekトル, 方向pekトル, パイスpekトル

前節で各オーダごとの確率振幅が求まったが、2節で述べた様に、これら等の確率振幅は通常関数ではない（図示出来ない）。従って、これ等の確率振幅の特性を調べたり、実測データとの比較のためには通常関数の世界に変換しておく必要がある。すなわち、パワースpekトル、パイスpekトル、トリ Spekトルや2変量間のコヒーレンシー等がそれである。

前節では水位変動と同時に速度ポテンシャルも求まっているから任意方向の水粒子の速度変動についても論ずることが出来るが、本節では水位変動だけを論ずることにする。

水位変動のパワースpekトルを求めるには、(48式)の第2式を、 $b(K)$ を用いて

$$B^{(1,0)}(\bar{K}) = \omega a(K) \cosh \beta = b(K) \quad (53)$$

と書き変えると便利である。(53式)の $a(K)$ を各オーダの解に代入し、3.1節で具体的に示したオーダだけで考えて、以下のように表記する。

$$\left. \begin{aligned} B^{(1,1)}(\bar{K}) &= iH^{(1,1)}(K) b(K) \\ B^{(2,0)}(\bar{K}_1, \bar{K}_2) &= H^{(2,0)}(K_1, K_2) b(\bar{K}_1) b(\bar{K}_2) \\ B^{(2,1)}(\bar{K}_1, \bar{K}_2) &= iH^{(2,1)}(K_1, K_2) b(\bar{K}_1) b(\bar{K}_2) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

(53式)(54式)を用いて、標準的なpekトル表現式

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\bar{K}_1} B(\bar{K}) e^{i\mathbf{x} \cdot \bar{K}} d\bar{K} \quad (55)$$

に書き変えると、(定常項を除いて)

$$\begin{aligned} B(\bar{K}) &= \{1 + iH^{(1,1)}(K)\} b(\bar{K}) \\ &+ \int_{\bar{K}_1} \{H^{(2,0)}(K_1, K - K_1) + iH^{(2,1)}(K_1, K - K_1)\} b(\bar{K}_1) b(\bar{K} - \bar{K}_1) d\bar{K}_1 \end{aligned} \quad (56)$$

となる。(56式)からパワースpekトル $\Phi(K)$ を求めるには、2節の(27式)から

$$\Phi(\bar{K}) = \langle B(\bar{K}) B(-\bar{K}) \rangle \quad (57)$$

であるが、56式の右辺は $\epsilon^1 \delta^0$ のオーダの振幅 $b(\tilde{K})$ によって表わされているから $\epsilon^1 \delta^0$ のオーダの波の
パワースペクトルを $\Phi^{(1)}(\tilde{K})$ とすると

$$\Phi^{(1)}(\tilde{K}) = \langle b(\tilde{K}) b(-\tilde{K}) \rangle \quad (58)$$

である。ここで $\Phi^{(1)}(\tilde{K})$ は48式の第3式かが分る様に、波数、周波数空間 $K = (\mathbf{k}, \omega)$ の中で48式の
第3式を満す面上にのみ値を持つ。さらに3.1節の初めに述べたように、準ガウス過程を仮定すると、
 $b(\tilde{K})$ はガウス分布を持つから、

$$\begin{aligned} \langle b(\tilde{K}_1) b(\tilde{K}_2) b(\tilde{K}_3) \rangle &= 0 \\ \langle b(\tilde{K}_1) b(\tilde{K}_2) b(\tilde{K}_3) b(\tilde{K}_4) \rangle &= \langle b(\tilde{K}_1) b(\tilde{K}_2) \rangle \langle b(\tilde{K}_3) b(\tilde{K}_4) \rangle \\ &\quad + \langle b(\tilde{K}_1) b(\tilde{K}_3) \rangle \langle b(\tilde{K}_2) b(\tilde{K}_4) \rangle \\ &\quad + \langle b(\tilde{K}_1) b(\tilde{K}_4) \rangle \langle b(\tilde{K}_2) b(\tilde{K}_3) \rangle \end{aligned} \quad (60)$$

である⁽²¹⁾。これ等を用いて57式を求めると

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{K}) &= [1 + \{H^{(1,1)}(\tilde{K})\}^2] \Phi^{(1)}(\tilde{K}) \\ &\quad + 2 \int_{\tilde{K}_1} [\{H^{(2,0)}(\tilde{K}_1, \tilde{K} - \tilde{K}_1)\}^2 \\ &\quad + \{H^{(2,1)}(\tilde{K}_1, \tilde{K} - \tilde{K}_1)\}^2] \Phi^{(1)}(\tilde{K}_1) \Phi^{(1)}(\tilde{K} - \tilde{K}_1) d\tilde{K}_1 \end{aligned} \quad (61)$$

となる。ここで61式は $K = (\mathbf{k}, \omega)$ 上で与えられているから、パワースペクトルであると同時に謂ゆる
方向スペクトルでもある。

次に50式の第4式の ensemble 平均をとると

$$\nabla \cdot \left\{ n \Phi^{(1)}(\tilde{K}) \frac{\sinh^2 \beta + \omega^2 h}{\omega^2 \cosh^2 \beta} \right\} = 0 \quad (62)$$

となる。43式44式を41式に代入するとき述べた様に、微分演算は成分波毎に行ったから、この62式
も成分波毎に成り立つ。62式と48式第3式を用いた Snell の法則により各場所ごとに $\Phi^{(1)}(\tilde{K})$ が求ま
り、 $\tilde{K}$ 空間から K 空間への座標変換に伴う Jacobian を考慮して $\Phi^{(1)}(\tilde{K})$ が求まる。同時に61式から
非線形項を含めたパワースペクトルが求まる。

次にバイスペクトル $\Psi(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ を求める。バイスペクトルも56式の振幅 B を用いて

$$\Psi(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = \langle B(\tilde{K}_1) B(\tilde{K}_2) B(\tilde{K}_3) \rangle, \quad \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 + \tilde{K}_3 = 0 \quad (63)$$

と表わされる。パワースペクトルの場合と同様56式を代入し、ガウス分布の性質を用いると

$$\begin{aligned} \Psi(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) &= 2 \{H^{(1,0)}(-\tilde{K}_1, -\tilde{K}_2) + iH^{(2,1)}(-\tilde{K}_1, -\tilde{K}_2)\} \Phi^{(1)}(\tilde{K}_1) \Phi^{(1)}(\tilde{K}_2) \\ &\quad + 2 \{H^{(2,0)}(-\tilde{K}_1, \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) + iH^{(2,1)}(-\tilde{K}_1, \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2)\} \Phi^{(1)}(\tilde{K}_1) \Phi^{(1)}(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) \\ &\quad + 2 \{H^{(2,0)}(-\tilde{K}_2, \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) + iH^{(2,1)}(-\tilde{K}_2, \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2)\} \Phi^{(1)}(\tilde{K}_2) \Phi^{(1)}(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) \end{aligned} \quad (64)$$

の様になる。規則波の場合には $\epsilon^2\delta^0$ のオーダーの解が波形を尖らせ波の上下の非対称性に寄与し、 $\epsilon^2\delta^1$ のオーダーの解が波形を前傾させ波の前後の非対称性に寄与した。不規則波の場合にも同じことが言え、この場合(64)式から分るように、パイスベクトルの実部が上下の非対称性の、虚部が前後の非対称性の強さを表わしていることが分る。特にピーク周波数近傍の値が統計的な波形の尖りと前傾化の強さを表わしている。

3.3 計算例と実測例

前節で述べたパワースペクトルとパイスベクトルについて、若干の計算例と実測例を示す。

図5、図6は汀線に平行な直線等水線を持つ海域に、沖の深水域から波が進入する場合のパワースペクトル（方向スペクトル）の計算例で、沖で（図5）線形波として周波数に関しては Pierson-Moskowitz 形、方向分布として $\cos^4\theta$ 形のものを与えた。図6は無次元水深 $h=0.3$ での線形波のスペクトルである。屈折効果によりエネルギーが汀線と直角方向に移動している様子が分る。なお、パワースペクトルは沖での全エネルギー E で正規化してある。図7と図8は図5と図6で示した線形波による1次スペクトルを用いて得られた同じ場所での2次スペクトルであり、線形波と同様屈折の効果が良く現われている。なお、2次スペクトルの場合は E^2 で正規化されている。

図9、図10はパイスベクトルの実測値と推定値との比較の例である。実験は、長さ35m、幅80cm、深さ120cmの造水路に1/30の一樣勾配の水底を設けて行った。

深水域で与えたスペクトルは Bretschneider - 光易形のもので、有義周期2.0秒、有義波高15.1cmであり、図中(a)は水深49.3cm、(c)は水深29.6cmでのものである。図9はパイスベクトルの実部で、左上は実測値で、右下は左枠外に示されている実測パワースペクトルを1次スペクトルと仮定して(64)式により推定されたものである。これによると実測パイスベクトルと推定パイスベクトルは良好な一致を示している。又水深が浅くなることにより値はやや大きくなり、

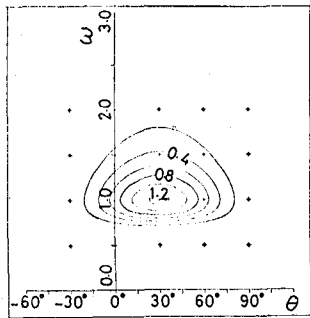


図5 1次パワースペクトル $h=\infty$

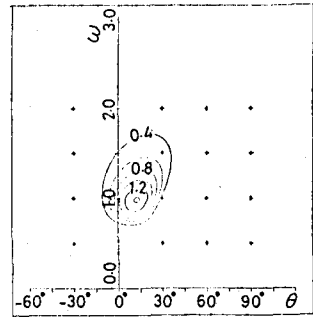


図6 1次パワースペクトル $h=0.3$

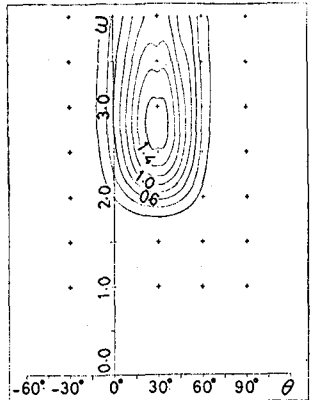


図7 2次パワースペクトル $h=\infty$

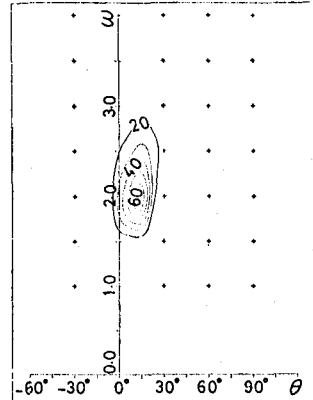


図8 2次パワースペクトル $h=0.3$

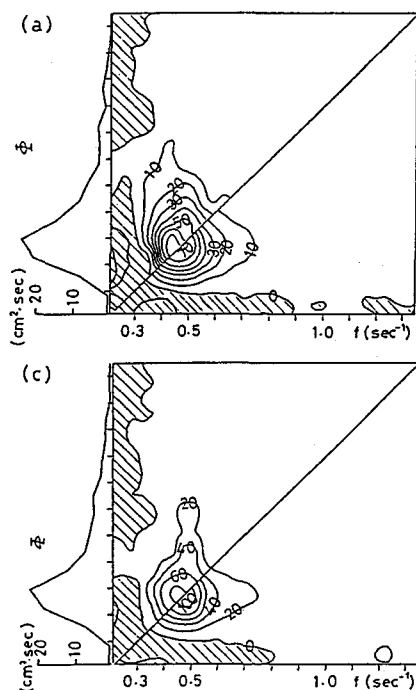


図9 バイスpekトルの実部(a) $h=49.3\text{cm}$
(c) $h=29.6\text{cm}$

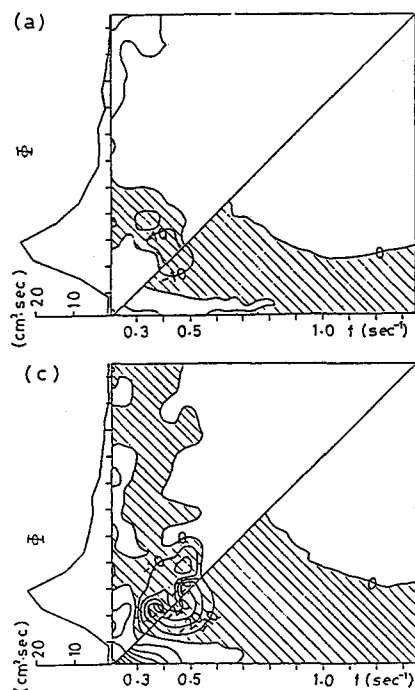


図10 バイスpekトルの虚部

上下の非対称性がやや強まったことを示している。図10は同じ様にして求めたバイスペクトルの虚部で、測定位置は実部の場合と同じである。これによると、実部の場合に比べると実測値にパターンの乱れが見られるが、ほぼ妥当な推定値を与えていると思われる。又、深水区(a)では小さな値だったものが、浅水区(c)では値が顕著に増加し、前後の非対称性が強まったことが分る。

参 考 文 献

- (1) 水口優・松田仲次(1980): 現地不規則波浪の浅海変形について, 第27回海講論文集, 136-138
- (2) 岩垣雄一・間瀬肇・田中剛(1981): 不規則波の浅海変形モデルについて, 第28回海講論文集, 104-108
- (3) 合田良実・鈴木康正(1975): 光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No230, 1-45
- (4) Tang, F. L. W. and C. F. Lin (1986): Practical method for evaluating directional spectra, 20th Coastal Engg. Conf., 780-793
- (5) Le Méhauté, B. and J. D. Wang (1982): Wave spectrum changes on sloped Beach, J. waterway, Port, Coastal and Ocean Engg., ASCE Vol 108, No WW1, 33-47
- (6) 丸山康樹・平口博丸・鹿島遼一(1984): 不規則波に対する屈折計算法の適用性, 第31回海講論文集, 104-108

文集, 148-152

- (7) 泉宮尊司 (1984) : 屈折・回折による方向スペクトルの変形計算法, 第31回海講論文集, 169-173
- (8) 磯部雅彦 (1986) : 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法, 第33回海講論文集, 134-138
- (9) 酒井哲郎 (1973) : 不規則波の水深変化に伴う変形に関する研究, 土木学会論文報告集, 第216号, 9-20
- (10) 榎木亨・田端竹千穂 (1972) : 減衰期における不規則波の変形について, 第19回海講論文集, 143-148
- (11) 柿沼忠男・伊福誠 (1976) : 大湊海岸における波浪の変形について(3), 第23回海講論文集, 302-307
- (12) 柿沼忠男・伊福誠 (1976) : 中予海岸における波浪変形の観測, 第25回海講論文集, 175-178
- (13) Masuda, A. and Y. Y. Kuo (1981) : A note on imaginary part of bispectra, Deep-Sea Research, Vol. 28A, No. 3, 213 - 222
- (14) Hamanaka, K. and K. Kato (1983) : Asymptotic analysis of finite amplitude waves in water of gradually varying depth, Coastal Engg. in Japan, Vol. 26, 1 - 10
- (15) 浜中建一郎・佐藤典之 (1984) : 不規則波の非線形浅水変形について, 第31回海講論文集, 138-142
- (16) Hamanaka, K. (1985) : Random wave deformation and bispectral change, 1985 Australasian Conf. on Coast. and Ocean Engg. Vol. II, 43 - 50
- (17) Elgar, S. and R. T. Guza (1985) : Observation of bispectra of shoaling surface gravity waves, J. F. M., Vol. 161, 425 - 448
- (18) Elgar, S. and R. T. Guza, (1986) : Nonlinear model prediction of bispectra of shoaling surface gravity waves, J. F. M. Vol. 167, 1 - 18
- (19) Doering, J. C. and A. J. Bowen (1986) : Shoaling surface gravity waves : a bispectral analysis, 20th Coastal Engg. Conf., 150 - 162
- (20) 浜中建一郎・加藤雅也 (1985) : 不規則波の非線形浅水変形について(2), 第32回海講論文集, 199-203
- (21) アー・エス・モーニン・アー・エム・ヤグロム (1981) : 統計流体力学 1, 文一総合出版, p 198