

パソコン・グラフィックス による流体力学教育

日 野 幹 雄

要旨：書店には「パソコンによる・・・」という本が山と積まれている現在、今ここで同じような題名の話をするには多少の躊躇いを感じる。ここに例をおみせするパソコン・グラフィックスは、流体力学を学ぶ**初年次ないしは中級程度**の学生を対象として、数年前から少しずつ作り貯えて来たものである。それは従来の計算・演習的なパソコン利用ではなく、流体力学（や水理学）の原理を理解させるための視覚面を重視した点に特色がある。内容は流体力学のうちでも、基礎的な部分を対象としているが、グラフィックスにしづらい内容や、良いアイデアが浮ばなかった問題もあり、必ずしもすべての内容を含んでいるわけではない。今回の水工学夏期研修会を機会にこのような試みに対して批判を仰ぎたい。

はじめに

学校教育の効果：

新しく進学して来た若々しいが何も知らない学生達が数年間の専門教育の後見事に成長し、またその後立派なエンジニアとして活躍しているのをみると、本人達の素質もさることながら教育の効果の大きさを感じずにはいられない。こうした学校教育の効果は、専門的な事柄に限ってみても本を読んで得られるものとは、その理解度の深さと広さにおいて独学とは全く異なるものである。さらに学校教育には専門教育以外に、これを通して物事の考え方・問題の解決の仕方を訓練・修得することや、対他人関係友人関係の形成など有形無形の多面的効果がある。

一方、学校教育の落入り易い欠点として、学生は受身ですべてが整理された形で教えられ、自ら疑いの気を起すことがない、探究心創造性が失われ易いなどが挙げられる。教える方はこの学校教育のもつ欠陥に落ち入らぬよう注意工夫をこらす必要がある。

ところで、これを専門分野に限ってみても、大学における教育技法に関する議論は以外に少ない。世にはいわゆる演習書の類が多く出され学生はこぞって購読するようであるが、多くの場合問題を解く技法あるいは単に問題の答を知るだけに利用されているのではないだろうか。学習の程度に応じ、色々な教育方法を工夫し、またその結果についての情報の交換・討議が必要なのではないだろうか。

流体力学・水理学の学習目的：

流体力学とか水理学を学習する目的は、次の3点にあると思う。この目的は機会あるごとに学生に話し、彼らの自覚を促している。

- (1) その第一は、限られた数の基礎法則を基にして、自然を記述する法則や原則の大系の論理的構成を理解すること。つまり論理思考の鍛錬。

- (2) 自然現象の美しさ・規則性・意外性を理解すること。
- (3) 実際問題の解を求めること。設計を行うための公式や計算式を理解し、実際問題への応用力を修得すること。(従来はこの点を第一目的にして教えることが主であったと思う)。

この第3の点をいまい少し噛み砕いて述べると、次のようである。

- a. 式や法則の誘導過程
- b. 導かれた式の解釈、意味の理解
- c. 法則、式の利用と応用

パソコンの教育への利用

さて、最近^{はやり}はパソコン流行で、書店の棚には「パソコンによる・・・」といった書名の本が多数並んでいる。現在では、パソコンそのものの計算能力はすでに1960年代後半の大型機に優に匹敵していると言われるが、それにも増してパソコンのもつ大きな能力はその図化機能である。少し以前の大型機の時代には、次々に掃き出される数値の並んだ印刷シートの山を前にして、どうこれらを整理したら良いのか途方に暮れたものだった。また、プリンターを利用して文字列による濃淡の簡単な図化も試みられたが、これとても計算結果の整理の苦痛から救うものではなかった。ところが、パソコンのもつ図化機能はパソコンの使用そのものを楽しみにさえ変えてしまった。

パソコンの教育への利用方法にはいくつかあるだろう。その一つは従来の演習における数値計算をパソコンに行わせ(プログラム化し)、結果を図表化するというやり方である。いま一つは、パソコンのもつ図化機能を重視して、視覚教育の面を重視する考え方であろう。

パソコン利用教育の特徴：

教室における教育技法には、(i)黒板、(ii)OHP、(iii)映画・ビデオ・TVなどの補助手段が従来用いられて来た。ここに新たに(iv)パソコン(グラフィックス)が登場したことになる。これらの手段にはそれぞれ他にはない特徴があって、場合場合に依じて使い分けられている。古典的な黒板を利用する方法が、教育という面に関する限り、OHPなどよりも広く利用されているのは、手作りの丁寧さや黒板にしゃべりながら書き説明する速度と学生の理解速度の一致、あるいは脳裏への印象度において優れているためであろう。

さて、未だ未だ書きたい前書きはあるが、この辺で視覚面でのパソコン・グラフィックス利用の利点を、カッコ内に他の方法と対比しつつ、挙げよう。

- (i) 図が正確に迅速にカラーで画かれ、印象が鮮明である。(黒板ではそうはいかないし、OHPでは結果のみボンと示すのでは印象が薄い。)
- (ii) 図表示の縦横比を自由に変えて、現象変化を誇張して表現できる。(教卓の上や実験室でのデモンストレーション実験では、変化がはっきり現れない現象も、明確に変化を示しうる。ビデオではその場で自由に好きなようには変えられない。)
- (iii) 条件を様々に設定して、それに対する現象の変化を図(表)化しうる。学習者の参加意識。(し

かも、ビデオなどと違い、学生がその場でキーボードから条件を入力し自ら行いうる。)

- (iv) 一度計算した結果をファイルしそれを次々に CRT に出して (BASIC ならば, GET, PUT 命令による), アニメの動きのある表現ができる。(ビデオ・TV で本来できたことが, パソコン・グラフィックスではより簡単に, 自由にできる。)
- (v) 問題によっては学生自らプログラムを作り, 理解度を深めることができる。(この点は, むしろ高学年に進んだ学生にプログラムの方針を示して参加させるのが有効である。)
- (vi) フロッピーのコピーが簡単に安価にでき, しかも持ち運びに便利である。(こうして作られたソフトがビデオや映画の場合よりも簡単に安くコピーができる上に, 郵便で封書として送れる。したがって, ソフト普及の上で遙かに有利である。)

実は, 今回ここに例をお見せする教育用ソフトは, 今年の M 1 の学生が 2 年生の時以来, したがって 4 年ほど前から, 私自身であるいはその時々々の 4 年次・M 1, 2 の学生に忙しい卒論や修論の仕事の合い間に手伝ってもらって, 作り貯めて来たものである。その数も未だ充分ではないし, もっと効果的な作り方や問題 (対象) もあると思われるが, 与えられた今年の水工学研修会の機会にこれを公開し, 諸君の反応意見を徴したいと思う。

1. 流れの表現のしかた

(1) 流体の変形と運動・加速度

流体力学で, まず初学者を悩ませるのは, 流体の変形と運動, 特に加速度の考え方である。普通は質点の場合と流体の場合との対比や数式的説明で, 実質加速度を教えているが, 質問の少ない日本人の学生相手では彼らが本当に理解してくれたのか心もとない。それでも, 段々いろんな問題を学ぶうちにわかってくれるだろうと期待して先へすすむことにしている。

オイラーの運動方程式を導く必要上から, そして剪断とか回転とかを習ってもすぐそれが必要というわけでもないから, 加速度の方を先に教えているが, 流体というものの性質や考え方に馴染むためには順序を逆にした方が良くかもしれない。

(a) 流体の速度表現

いずれにしても, 流体場における速度のオイラー的表現法は理解してもらわなければならない。質点と流体との違い, 質点における速度が時間 t のみの関数であるのに, 流体の場合には時間 t と場所 (x, y, z) の関数である。

(b) 流体の変形と運動

流体の変形と運動は伸縮・剪断・回転の 3 つの成分に分けられる。それらは式で書くとわずらわしいが, 目でみるときは一目瞭然である。

(c) 流体の加速度

流体運動における加速度を、視覚化するには径の変化する管内の定常流れを考える。一点での速度が一定不変であるにもかかわらず、流体塊は流下につれて変形する（引き伸され、あるいは圧縮される）と共に、管径が徐々に小さくなる場合には加速され、管径が大きくなる場合には減速（加速度が負）されることを容易にみることができる。

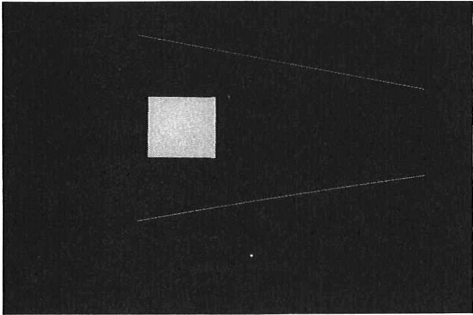


図- 1

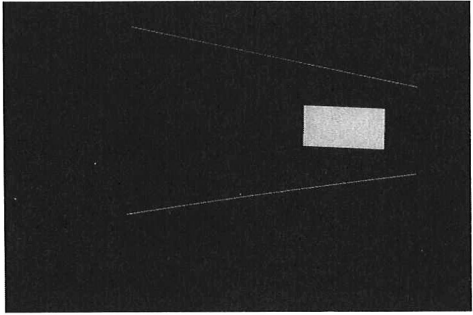


図- 2

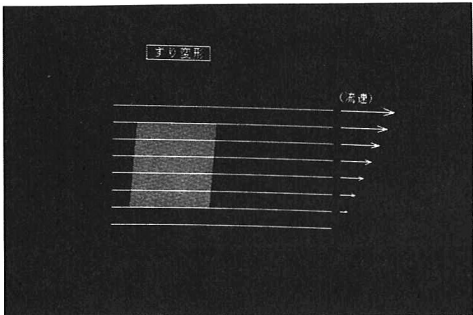


図- 3

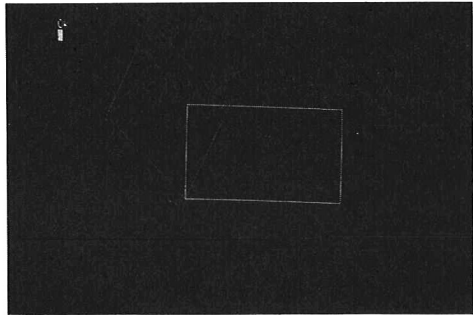


図- 4

こんな説明の仕方もある。「同一年齢（オイラー的に）」でみるときいつの時代にも若い人達は容姿も考え方もはつらつとしている。ところが彼らはやがて年齢を重ねて行く。個人個人をフォローする（ラグランジュ的にみる）とき、人はいかに変わるものか」というのが流体運動における加速度を理解するために、広田勇さん（京大・理）が持ち出した譬話である。

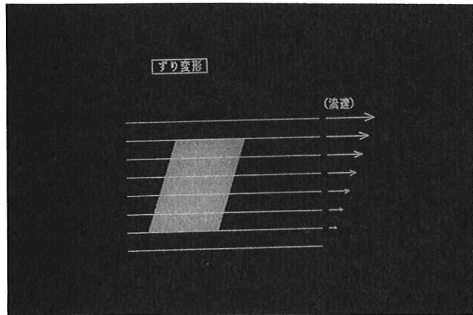


図- 5

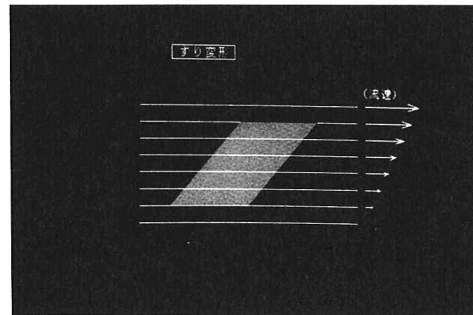


図- 6

(2) 流線・流脈線・流跡線

流れの様子を表わす上記の 3 つの線の区別をきちんとしておきたい。そのためには流れの場を種々

の関数で入力し、それらの違いを明確にすると良い。次に例を示す。

(a) 流れの方向が時間的に変化する一様流 (図-6)

(b) 進行表面波 (図-7) (c) 重複波 (図-8)

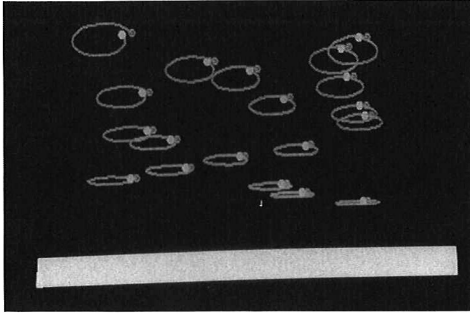


図-7

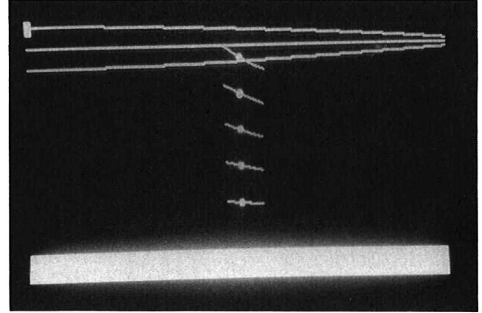


図-8

2. 完全流体の流れ

(1) Bernoulli の定理

(a) 管内流の管径変化と圧力分布

Bernoulli の定理の恰好の例題は、管径が途中で変り、また元に復する場合の管内の流れの流速と圧力の関係であろう。管の細い所では水は速く流れている。しかし、圧力は下っている。流量 Q の値をキーボードから色々入力して変化をみることができる。

(b) 水槽壁面の小孔からの噴流

水位を一定に保った水槽の壁面の小孔から噴出する水の初速は、トリチェリーの定理により

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2 \cdot 1)$$

である。ここに h : 小孔と水面の鉛直距離。このトリチェリーの定理は Bernoulli の定理の応用として導かれることは良く知られている。(注：噴出口を通る流線はなぜ自由表面より出なければならないかを考えさせよ。)

次に、この噴流がどこまで飛ぶかを計算してみる。噴流中の1つの点(水の小さな塊)を質点のように考えれば、その位置 (X , Z) は

$$\frac{dX}{dt} = v \quad (= \sqrt{2gh}) \quad (2 \cdot 2)$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -g \quad (2 \cdot 3)$$

で表される。これより

$$X = vt, \quad Z = \frac{g}{2}t^2 + h \quad (2 \cdot 4)$$

あるいは

$$Z = \frac{X^2}{4h} + h \quad (2 \cdot 5)$$

水槽の床面 ($Z = H$) 上での最大飛距離は、上式を

$$X^2 = 4h(H - h) \quad (2 \cdot 6)$$

と書き代えて、両辺を小孔の深さ h で微分してこれを 0 と置くことにより

$$2 \frac{dX}{dh} = 4(H - 2h) \rightarrow 0 \quad (2 \cdot 7)$$

したがって、

$$X_{max} = H \quad (\text{at } h = H/2) \quad (2 \cdot 8)$$

すなわち、小孔の位置が水槽の高さの半分の時に噴流は飛距離が最大となる。

また、飛距離 X を等しくする小孔の位置は、式 (2・6)

$$4h^2 - 4Hh + X^2 = 0$$

を h に関して解いて

$$h = \frac{1}{2}(H \pm \sqrt{H^2 - X^2}) \quad (2 \cdot 9)$$

となる。すなわち、水槽の高さの半分の位置の小孔から、上もしくは下へ同じ高さ分隔った小孔からの水は床上の同一点に落ちる。

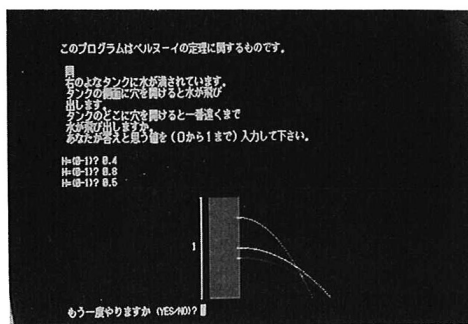


図-9

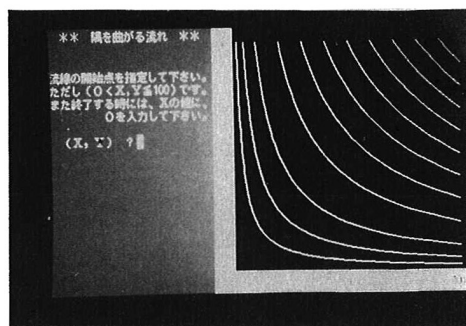


図-10

(2) 流れの運動保存則 (省略)

(3) ポテンシャル流

流体力学で学生が最初に出くわす数学的な問題はポテンシャル流れである。しかし、多くの場合数式上の理解に留まっていることが多く、式の表す流れの状態や特徴 (例えば圧力分布) を具体的に体

験させることは少ないのではないだろうか。したがって、式としては憶^{おぼ}えても現象としては理解していない、実感されていないということになる。

最も初歩的な問題である角を回る流れにしても、「角の所では圧力は式上では $-\infty$ となってしまう、物理現象としてはあり得ない状態となる。したがってここで流れは剥れ、キャビティが発生する」と教えても頭の中に画として入っていないのですぐ忘れてしまうか、元々頭には入らない。これをちょっとしたでもグラフ化してやると学生の理解度は大部違う。以下複素関数の表す単純なしかし基本的な流れについて、流線・流速分布・（壁面上の）圧力分布などを示す。

- ・角や隅を回る流れ
- ・湧き出しと吸込み、二重湧出し（ダブレット）
- ・一様流中に置れた湧出し、吸込み（ランキン・オーバル）
- ・一様流中の円柱（＝一様流中の二重湧出しによる流れ）
- ・ジューコフスキー変換による翼形まわりの流れ

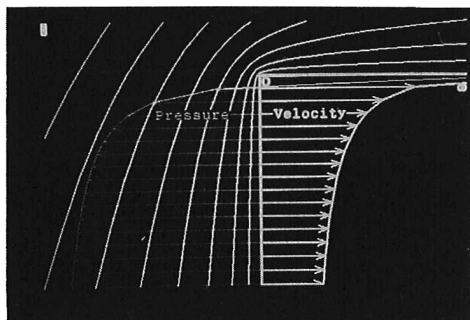


図-11

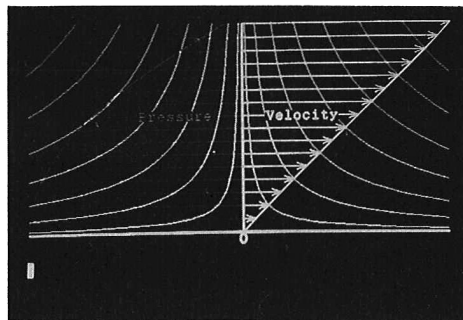


図-12

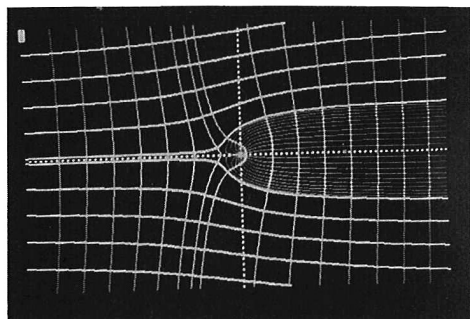


図-13

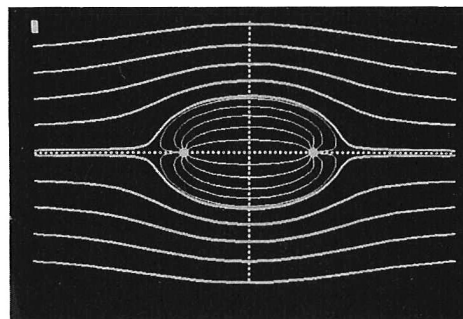


図-14

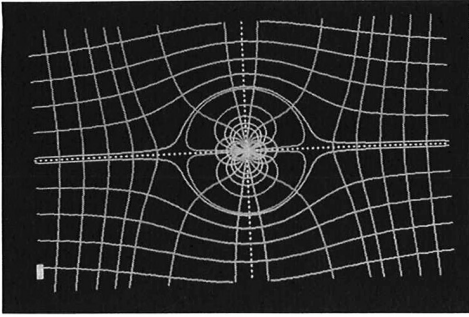


図-15

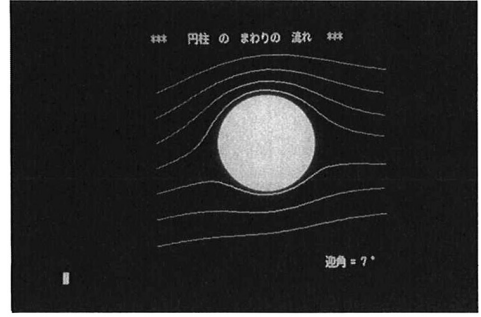


図-16

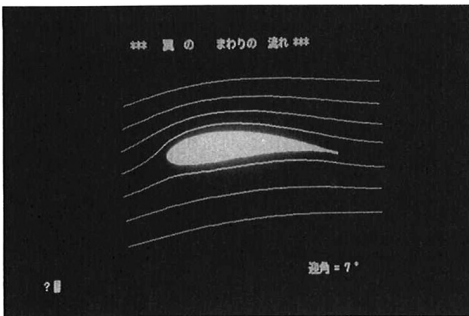


図-17

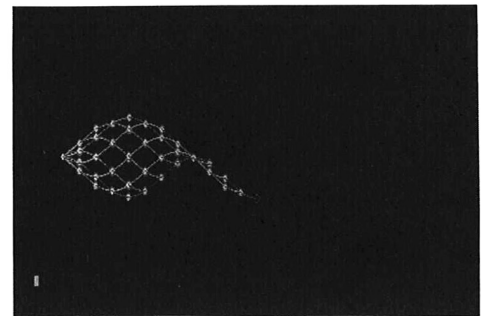


図-18

3. 渦，渦対，渦糸モデル

(a) 渦，“うずあり”の渦，“うず無し”の渦

一般の社会的通念での渦と，流体力学的な渦とは明確に異なる。一般的通念としては，単に流体が孤立的に回転的運動をしておれば，皆“渦”と呼ばれる。しかし，これらの渦は流体力学的には必ずしも“うず”とは言えず，単に“渦巻き”とでも言うべき運動であることが多い。流体力学では，流体の運動が剛体的回転運動（の成分）を含む場合に，これを“うず”（vortex）と定義している。この運動は次の量（渦度）によって定義される。

$$w_z (\equiv \zeta) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3 \cdot 1)$$

したがって，単に回転しているだけでは渦とはいえない。例えば，洗濯機の中の渦やお風呂場の栓を引き抜いたときに水槽中に出きる渦や天気図にみられる台風の渦も，中心近くは剛体的回転をしている“流体力学的渦”（＝“渦ありの渦”）であるが，外側は“流体力学的には渦ではない”（＝“うず無し”の渦）である。

現実に良く現れるこのような渦運動を表すのが図-19に示される Rankine 渦である。

一方、普通には全く“渦”とは見えない流れでも、流体力学的には立派に渦である流れがある。むしろ、この方が多い。例えば、最も簡単な壁からの高さと共に流速の増す流れ、Couette 流れ（直線的）や Hagen-Poiseuille 流れ（2次曲線）は“うず有り流れ”である。

流れが“うず有り”か“うず無し”か、いわば流体力学的に渦なのか、そうでないのかを調べるのには、流れの中に小さな十字の目印を置くと良い。（一本の棒では駄目で、二本の棒を組み合わせる必要がある。）もし渦ならば+の目印は渦の中心に関して回転するが、水槽の水を抜いたときに出来る渦巻の外側の+の目印は同じ方向を向いたままであり渦とは言えない。

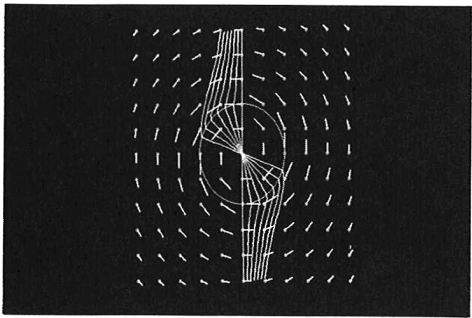


図-19

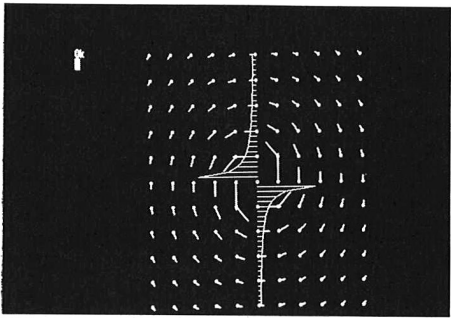


図-20

(b) 渦の相対運動

静止流体中に、一本の渦糸を置くとそのまわりに流れ場を作る。渦糸とは中心の一点だけが“渦”であるような「渦の数学的モデル」である。Rankine 渦で渦の部分の径が零になったものである。渦糸は複素関数を用いると、簡単できれいな形に表現できる。これから渦糸の作る流れの場を求めると、渦糸の中心のまわりの同心円運動であるが、これは非回転運動である。

流の中に同じ強さの渦糸を置くと、互に相手の渦の作る流れの場に乗って面白い動きをする。

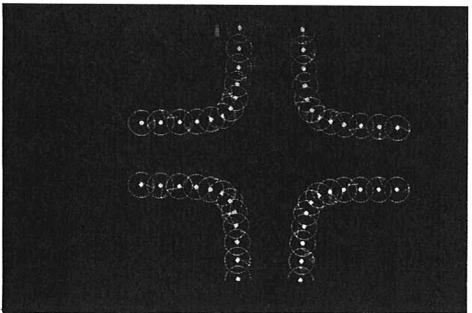


図-21

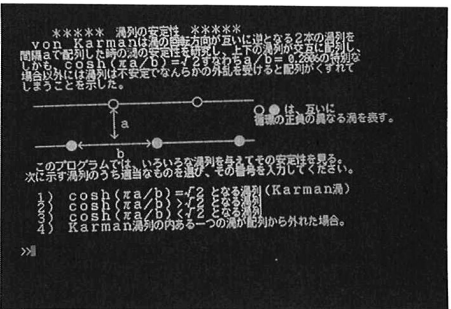


図-22

(c) 渦糸モデル

- Vortex sheet による剪断層

渦点 (vortex 2次元) ないし渦糸 (vortex filament 3次元) を流れの中に分布させることにより、実際の流れとその変化をうまく表現しうる。「流体力学」(朝倉書店)の序文にも書いたように「渦糸を考えると完全流体の力学も実在流体の良いモデル」と做せる。

例えば、渦糸を密に線状に並べたものを vortex sheet というが、これを幾層にも重ねると、その方向に流速分布を持つ剪断層を作ることができる。それぞれの vortex sheet の強さを適当に与えると、乱流場の平均流速分布である対数流速分布を作ることでもある。

(d) 2本の渦列の安定性—カルマン渦の配列—

流れの中を物体が真直に動くとき、あるいは流れの中に物体を置くと、物体の背後に2列の互に逆符号の渦が規則正しい配列で並ぶ。この渦の列の発見と配列規則の理論を作ったカルマン (1911) に因んで、これをカルマン渦という。もっとも発見については、それ以前にも無名の多くの人が気付いていたであろうし、15・6世紀のイタリアの画家による子供のキリストを抱いて川を渡る聖クリストファの絵にはこの聖人の足もとにこの渦列が画かれているそうであるし、カルマンと同時期のフラン

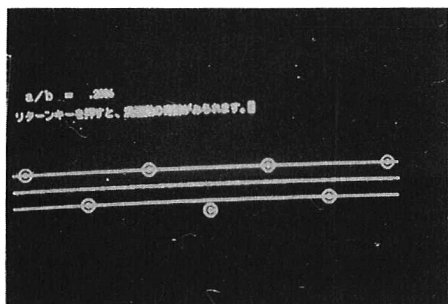


図-23(a)

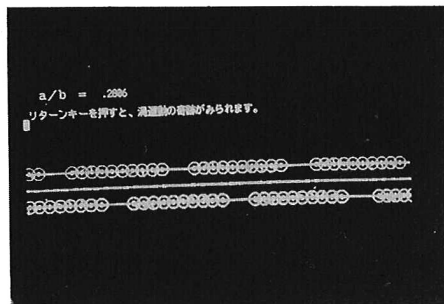


図-23(b)

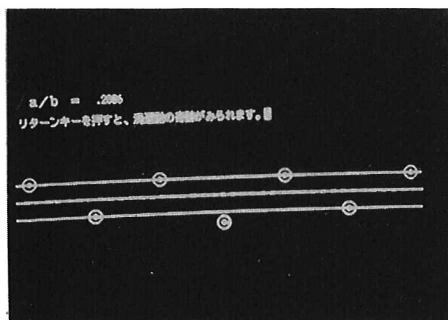


図-24(a)

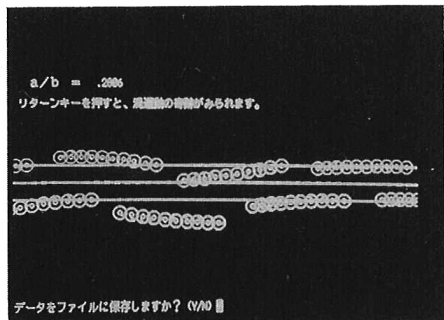


図-24(b)

スの流体力学者で、対流渦（本当は表面張力が原因）の発見者であるベナール（Bénard）もこの渦列発見の優先権を主張したといわれる。

ところで、物体の背後に渦が出来るメカニズムは一応置くとして、出来た互に逆符号をもつ2本の渦列がなぜ交互の配列を採るのか、また渦と渦との間隔、渦列同志の間隔が規則正しい配列となるのかは、簡単である。渦列を任意の間隔で配列させ、その中の一つの渦だけを、一寸だけ位置をずらしてやると、ある配列の場合のみその渦は元の位置に戻ろうとする。この場合だけが渦列は安定であり、これがカルマンの理論（1911）である。もっともカルマンはこのようなシミュレーションではなく数学的に理論を展開しているが。

このシミュレーションのもう少し手の混んだものは、上下にある間隔で並ぶ各渦糸列を渦シートとすること、あるいは渦の間隔を密に詰めることである。Vortex sheet はきれいな渦巻模様の列となっていく。

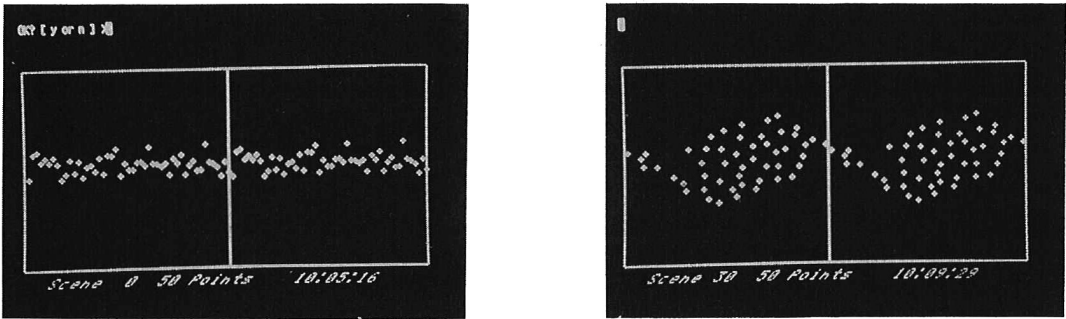


図-25

4. 粘性流体-(1) 平行流、粘性の作用の理解(1)

(1) 粘性の作用・効果

粘性とは流体が物体との間あるいは流体との間に相対的運動（剪断）が生じようとする時に、それに対して抵抗する性質である。そのため実現の流体が壁と接している面では“滑りなし（non-slip）”の条件を満たしている。これは流体と物体を分子オーダーにまで拡大して考えると納得される。つまり、物体の規則正しく並んだ分子に流体の分子が衝突しては乱反射して跳返って行くが、この時の x 方向の速度の平均は0となる。

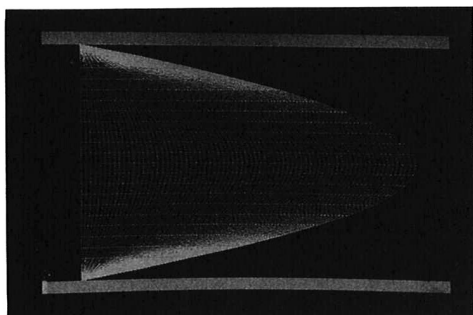
この流体の粘性は従って、流体中の物体への抵抗の原因であることは大脈において理解しうであろう。もっとも、流体抵抗の発生のメカニズムとなると、簡単にはまとめられないし、永い流体力学の歴史そのものであったと言っても良いであろう。

(2) 平行平板間の流れ（Poiseuille 流れ）—流体を運動させる力

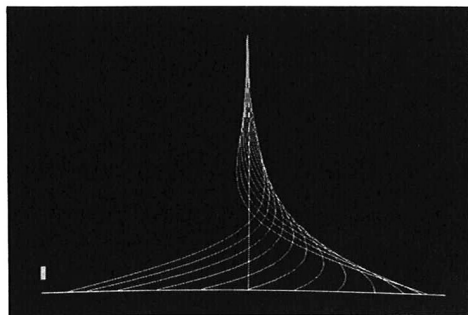
粘性流体の基礎方程式である Navier-Stokes の方程式は、慣性項の非線型性のため厳密解が得られ

る場合は限られている。厳密解が容易に得られる一般的な流れ場として、その方向が一様である平行流（一様流 uniform flow）がある。この代表的な例として二板の平行平板間の流れ－ Poiseuille 流れがある。

この流れは、二つの駆動力によって生じている。その一つは流れの上下流方向の圧力差であり、それによる流速分布は放物線分布である。流れを発生させるもう一つの力は粘性力である。一方の平板をその方向に動かすときの間の流体は平板の動きに引きずられて動く。その力による流速分布は直線分布で、このような流れを Couette（クエット）流れという。2つの力を同時に作用させると、それらの大きさにより流速分布の形が変ってくる。



図－26



図－27

(3) 水素気泡法による流れの可視化

水にせよ空気にせよ、普通ではその流れの様子をみることはできない。流れの様子をみるためには、流れに様々な方法でトレーサーを注入する。こうして眺めた（これを可視化（visualization）という）流れは、様々な様相を呈し驚くほど美しく、あるいは規則的あるいは複雑な、時には神秘的な様相を見せる。

可視化の方法のうち手軽にできる方法の一つに、水中に細い針金を張りこれにパルス状にあるいは連続して電流を通し、水の電気分解により生じる微細な水素の白い気泡をトレーサーとする方法（水素気泡 hydrogen bubble 法）がある。図－26は、この方法に倣って Poiseuille 流れの様相を示したものである。

(4) 振動平板上の流れ－ Stokes 層

流体の粘性効果は、徐々に遠く伝わりしかもその効果は弱まって行くという性質がある。これは、圧力の効果が非圧縮性流体では直ちに流れの場全体に伝わるのと大きく異なる。このことを示す流れの例を2つ挙げよう。

無限に長い平板の上に半無限に広がる粘性流体がある。平板をその面内で左右に振動させるとき、

流体は平板の振動に引き釣れて同じく振動運動を行う。しかし、平板から離れるほど振動の位相は遅れ、また振幅も減衰する。その上注意すべき点は、レーリー問題では時間と共に流体振動範囲が平板から遠く及ぶのに対し、振動平板上の振動流では振動壁面からある高さの範囲に流体運動が限られてしまう。

$$u(y,t)=U_0e^{-\eta}\cos(\omega t-\eta) \tag{4・1}$$

$$\eta=y/\sqrt{2\nu/\omega} \tag{4・2}$$

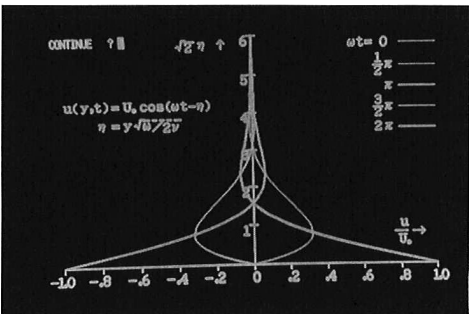
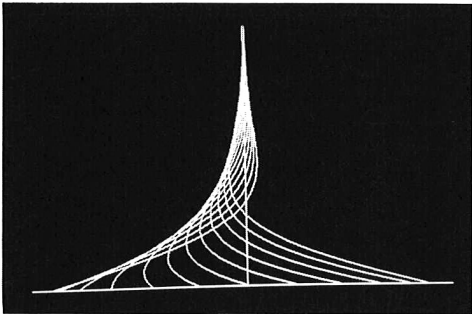


図-28

(5) レーリー問題 ― 急に運動を始めた平板上の流れ

流体は物体の表面にへばり付く性質があり（滑りなしの条件）、また流体相互の運動・変形（剪断変形）に対して抵抗しようとする。この性質を良く示すのがレーリーの問題である。無限に長い平板上に流体が静止して広がっているとき平板を急にその面の方向に一定速度 U_0 で動かす際に生ずる流体の運動の問題である。

平板に接している流体は、直ちに平板と共に速度 U_0 で動き始める。するとその上の物体との間にずれが生じるから、これにより粘性応力が発生し、流体は次々と平板に引きづられて運動する。粘性の及ぶ範囲は時間と共に厚くなり、粘性が大きいくほど（つまり粘ばっこいほど）影響の及ぶ速度は速い。粘性の及ぶ範囲（壁面からの距離） δ を、流速が平板流速の95%に達する高さで定義すると

$$\delta=4\sqrt{\nu t} \tag{4・3}$$

である。

流速分布は、壁面からの距離を δ で、流速を平板の速度 U で無次元化するとき、一つの関数形で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{U_0} &= f_n\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= (1-\operatorname{erf}(y/\delta)) \end{aligned} \tag{4・4}$$

ここに,

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\xi^2} d\xi \quad (4 \cdot 5)$$

5. 球および円柱のまわりの流れ — 粘性の作用の理解(2)

(1) 一様流中に置かれた球および円柱

円柱や球のまわりの流れは、粘性のもつ効果を理解するためにも、流れの意味を理解するためにも重要である。

流れが充分速くレイノルズ数が高い場合の流れ、特に球のまわりの境界層の剥離や層流・乱流遷移などの問題は措いて、ここではレイノルズ数の低い流れと完全流体の流れ（レイノルズ数は逆に ∞ の極限）についてみよう。

(a) 完全流体中の球・円柱

まず、一様流速の流れの中に球および円柱が置かれている場合の流れの場合は、完全流体の場合には次式で与えられる。

$$\Phi(x, y, z) = U \left(r + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (\text{球}) \quad (5 \cdot 1)$$

$$\Phi(x, y) = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta \quad (\text{円柱}) \quad (5 \cdot 2)$$

これは一様流にダブレットを重ねたものであることはすでに述べた。ここで注意したいのは球の表面近くの流速分布で、完全流体では粘性が零であるので球表面では流体の滑りが許され、また球が囲りの流線を押し分けてその間隔を密にするため、流速が増大していることである。

(b) Stokes 解

これに対し、粘性を考慮した低レイノルズ数流れの Stokes の近似解では、球の表面に近づくにつれて流速が減少している。しかし、流線は完全流体の場合と同様球の前後で対称である。

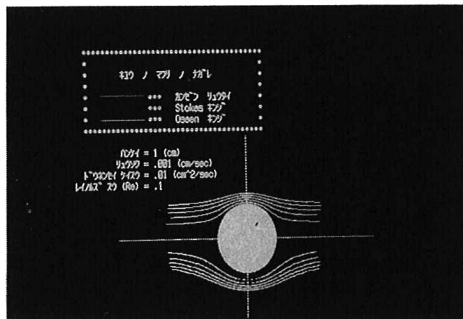


図-29

(c) Oseen 解

Oseen の解は、同じく低レイノルズ数流れに対する近似解であるが、近似の精度は上がっている。流速分布は図の下半分に Stokes 解と対比して示されるように球表面での“滑りなし (non-slip)”条件を満たして減速している。

同じく粘性を考慮した解であるが Stokes 解と Oseen 解の大きな違いは、流線の比較によって明らかになる。Stokes 解では球の前後で対称であった流線は、Oseen 解ではもはや対称ではない。このことを一層明らかにするには、次に示すように球に対する流れをみれば良い。

なお、球の粘性抵抗の精度つまりそれぞれの近似解の成立するレイノルズ数範囲という点からは、Oseen 解もそれほど Stokes 解より適用範囲が広がるわけではない。Oseen 解の意味は、むしろ粘性の作用を理解させる点にある。

(2) 静止流体中を移動する球

静止流体中を (一様速度で) 運動する球からみると、流線の状況は一変する。数学的には、前節の一樣流中に置いた球の場合の解に、一樣流と逆方向の流れを重ねれば良い。この流れを球と共に動いてみた時の流線は一見奇妙な形を示す。

それでも、完全流体の場合と Stokes 近似では球の前後で流れが対称である。ところが Oseen 近似解では球の前後で流れが非対称で、球の後に粘性の影響の及ぶ後流を引き摺っていることがわかる。この点 Oseen 解のもつ重要な意義である。

(3) Stokes パラドックス

Stokes の近似法は、Navier-Stokes 方程式の非線型項 (慣性項 $u \partial u / \partial x$ 等) を省略する方法である。Oseen の近似法は、これに対し非線型項を線型近似により残している。つまり、主方向の流速 u を物体から遠くの平均流速 U とそれよりのずれ u' として $U \partial u / \partial x$ を $U \partial u' / \partial x$ などとしている。

Stokes の近似法は球の場合にはすんなり解が求まるが、円柱の場合には (無限遠での境界条件を満たす) 解が存在しないのである。これを Stokes のパラドックスと言う。

6. 粘性流体—(2)—境界層流れ

(1) レーリー問題と境界層流れ

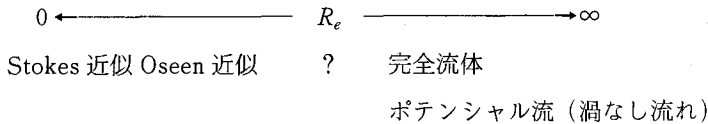
物体と流れの関係を粘性という立場から整理してみよう。流れと物体の関係を特徴づける無次元数がレイノルズ数

$$R_e = \frac{UD}{\nu} \quad (6 \cdot 1)$$

である。ここに、 U : 流れの代表流速、 D : 物体の代表長さ、 ν : 流体の粘性係数 (粘度)。ところで、完全流体は粘性の無い流体であるから、 $\nu \rightarrow 0$ の極限と考えれば $R_e \rightarrow \infty$ の場合であり、粘性の

作用は表れない。

一方、レイノルズ数が小さい場合には Stokes 近似により流れの解が求められ、粘性の影響が物体から遠くに及ぶことを知った。さらに、近似の精度を少し高めた Oseen 近似解では粘性の影響は、物体の背後に後流のように次第に広がることもわかった。したがって、レイノルズ数の中間範囲が未知領域である。



とすれば、次のように考えることはできないであろうか。流れのレイノルズ数を高めるにつれて、粘性による物体の影響の及ぶ範囲は狭く小さくなり、レイノルズ数が無限大の極限では粘性の影響範囲が零になってしまうのだと。

この考え方は、レーリーの問題の解釈の仕直しによっても達せられる。レーリーの問題の解からわれわれは平板の運動が粘性の作用によって徐々に遠方に伝えられ、その範囲は $\sqrt{\nu t}$ に比例することを知った。この時間を、流れが物体の存在を検知してからの経過時間と做すならば、時間 t を $t = x / U_\infty$ (x : 物体の先端からの距離, U_∞ : 物体上の主流速) と置き替えるであろう。したがって、平板 (物体) 上の粘性の及ぶ範囲は $\delta(x)$ は

$$\delta(x) \sim \sqrt{\nu x / U_\infty} \quad (6 \cdot 2)$$

と書き直される。つまり、レイノルズ数が十分大きくなると、その相対的な厚さ (δ/x —物体の先端からの距離に対する粘性層の厚さ) は十分小さくなり、それより外側の流れは完全流体と做せるであろう。Prandtl はこの層を境界層と名付け、この層の厚さが相対的に薄いことから、層内の流れの壁面に垂直な方向の変化に較べて流れ方向の変化は無視しうるものとして、境界層理論を提出した。それは1904年のことで、これは奇しくもライト兄弟がテキサス州キティー・ホークで人類初の有人動力による飛行機の飛行に成功 (1903年12月) してから、8ヶ月後であった。これより流体力学の進歩と飛行機の進歩は車の両輪の如く相い補って発展した。因に1905年はアインシュタインが三つの大論文 (特殊相対性理論, ブラウン運動の理論—原子・分子の实在への証明となる, 光電効果—後年この業績によりノーベル賞受賞) を発表した年であった。

(2) 境界層理論の成立する範囲

境界層理論は(i)レイノルズ数 R_e が十分大きく、また(ii) $\partial u / \partial x$ など流への x 方向の変化が $\partial u / \partial y$ など壁面に直角な方向の変化に較べて無視しうることを、圧力は壁面方向に一定 $\partial p / \partial y = 0$ を仮定して導かれている。ちょっと考えるとレイノルズ数の定義中の長さとしては物体先端からの距離とすべきである。物体の先端はむしろレーリー領域となっている。

(3) Blasius の解

Prandtl の境界層の理論が1904年に発表されたのち、初めて具体的な解が得られたのは、1908年 Blasius による流れに平行に置かれた平板に沿う流れである。ここでは、Prandtl の境界層方程式を解くために、次のように考えている。

- (i) $\eta = y/\delta(x)$, u/U_∞ の無次元化による流速分布の相似-独立変数が (x, y) から η 一つになる。
- (ii) 流関数の導入-従属変数が (u, v) から流(線)関数 ψ 一つとなる。
- (iii) 上の2つの仮定により、Prandtl の境界層方程式(偏微分方程式)が一つの常微分方程式に帰着される。

$$2 f''' + ff'' = 0 \quad (6 \cdot 3)$$

ここに、

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \psi(x, y)/\sqrt{\nu U_\infty x} \\ \eta &= y/\sqrt{\nu x/U_\infty} \end{aligned} \quad (6 \cdot 4)$$

- (iv) この非線型常微分方程式は、壁面で流速が零、無限遠で流速一定というように境界条件が別々に与えられる「二点境界値問題」である。Blasius は壁面では級数展開法、無限遠では一種の摂動法により2つの解を滑らかに接続する方法で解を求めた。

ここでは初期値問題として shooting method により解を求める。式(6・3)は3階の微分方程式であるから、3つの境界条件が必要である。そのうちの2つは壁面での流速が零として次のように与えられている。

$$\begin{aligned} \eta = 0 \quad : \quad u = 0 \quad \text{すなわち} \quad f' = 0 \\ \quad \quad \quad v = 0 \quad \quad \quad f = 0 \end{aligned}$$

残る一つの境界条件を壁面で適当に与えて、式(6・3)を Runge-Kutta-Gill 法により数値積分し、無限遠での条件

$$\eta \rightarrow \infty \quad : \quad u \rightarrow U_\infty \quad \quad f' \rightarrow 1$$

を満す解を trial and error により探す(図-30)。

(4) 楔形物体上の層流境界層(図-31)

(5) 流れの剥離

流れはその粘性のために物体の壁面にへばり付くと述べた。しかし、流れが物体から剥れる(剥離する)場合があり、多くの場合好ましくない結果をもたらす。例えば、航空機の翼に沿う流れは翼の迎角が大きくなり過ぎると翼の上面で剥れ翼は揚力を急激に失い、あるいは失速フラッターを発生して、カタストロフィックな事故をまねく。管路の幅が急激に拡大する場合にも流れは壁面から剥離してそこに渦領域を生じ、著しいエネルギー損失を発生させる。

流体に流れを生じさせる駆動力の一つは、圧力勾配である。平たく言えば上流からの高い圧力が流体を後から押しているためと言って良い。ところが、下流側の圧力が高まることは流れをもう結構と上流側に向って押し返そうとしているわけで、このとき流れは壁面から剥離する。

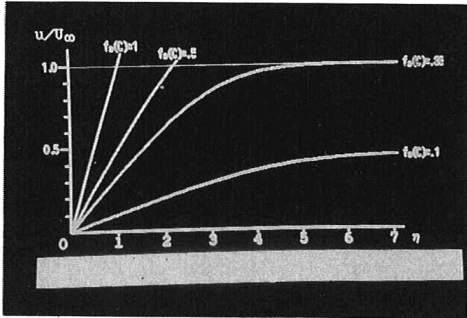


図-30

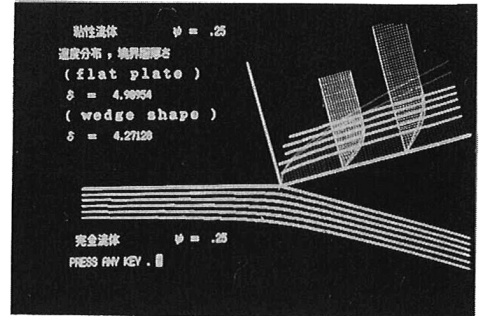


図-31

流れが下流側に向けて圧力が増加させなければならないとき、流れはそのもっている速度のエネルギーを圧力のエネルギーに変換して流れを持続しようとする。しかし、壁面に近い所では流速は小さく速度のエネルギーは元々小さいから、流れは遂に流速が零の状態となる。ここで、流れの壁面からの剥離が生じる。したがって、流れの剥離を防止するには境界層内の速度のエネルギーを増加してやることが有効である。その方策は流れを乱流化することと、エネルギーの小さい壁面近くの流れを吸い込むこと、逆にエネルギーの高い流れを壁面から吹き込むことなどが考えられている。

謝辞

本講を草するに当って使用したパソコン・ソフトの多くは、ここ一二年間に東工大・水工学研究室に所属した4年次および修士課程の学生の協力によるものである。就中、小林智尚君（現・東大助手）には、彼が4年生の時に卒論生として私に就いて以来修士課程を了えるまで、最初は私の意向を受けて試作的に、後に本格的にこの仕事を広げた時には他の人のプログラムの相談役、まとめ管理掛としても協力してもらった。ここに深く感謝したい。

また、この仕事の後半には昭和62・63年度科研費（総合研究(A)）を受けることができ、研究分担者の協力によりその対象範囲を水工学の分野（水理・水文，河川，海岸）にも広げつつある。本稿には入れることができなかったそれらの成果は、科研の報告書としてまとめたいと考えている。