

河床変動解析の現状とその応用

—二次元河床変動の数値解析—

森 明 巨

はじめに

数値解析による河床変動計算は、一次元解析を中心に進められ、実用的な技術として多用されている。現在、混合粒径やあるいは複断面や分合流などより多くの物理機構や流路形状の効果を取り込む努力がなされている。これに対して二次元河床変動計算法の開発は始まったところであり、まだ、多くの河川技術者にとって簡単に利用できる状況になっていない。本講では、まず、計算例をあげて二次元河床変動計算の現状と問題点を述べる（1章）。次いで、これまでに提案されている計算法を紹介する（2章）。3章では砂州を再現する計算法について考察する。数値解析の理論は特性帯の理論と密接に関係する。4章に差分法と特性帯の理論の簡単な解説を試みた。

1. 二次元河床変動の計算例

二次元の河床変動の計算例はここにあげる程度で少ない。山地河川や扇状地河川の河床変動予測は、わが国において重要課題であるが、まだ本格的な計算はなされていない。最近、Katopodes (1978¹⁾：特性曲線法、1984²⁾：有限要素法)により二次元の急勾配地の流れ（ダム破壊流）が計算された。いずれ山地河川や扇状地河川の河床変動に応用されるものと思う。

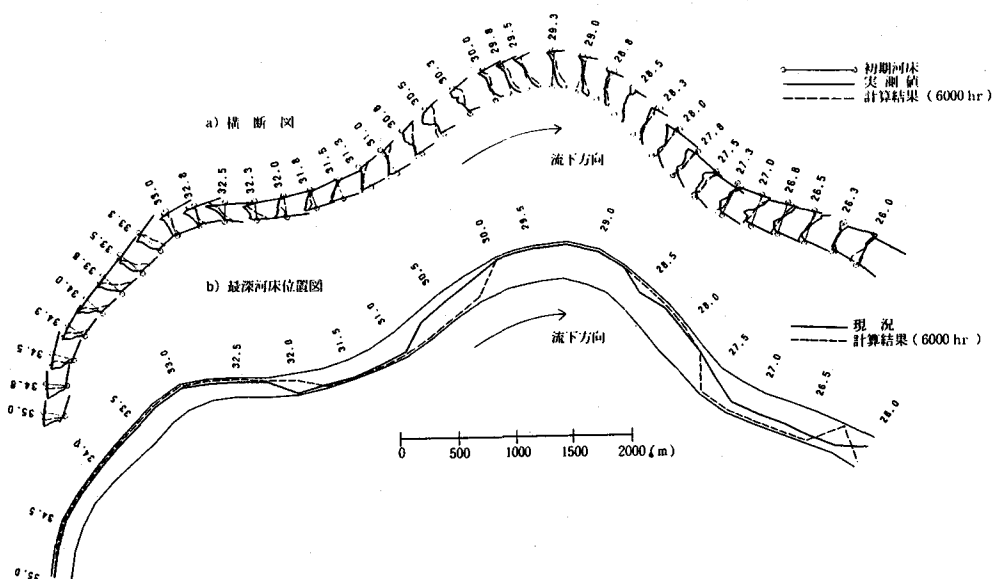


図-1

*多くの報文がある。関連するものを一括して参考文献にあげた。

1.1 河道弯曲部の平衡河床形

黒木・岸³⁾によると、実河川における河床形態は低水路満杯程度の流量（年最大流量の平均値にほぼ等しい）で決まる。清水ら^{*}は、弯曲部河床形に対してこの考えを適用し、石狩川の河口から26～36kmの河床形を計算した。 $Q = 3430 \text{ m}^3/\text{sec}$ を河床形がほぼ定常になるまで通水した。河床材料の粒径は1.5mm，マンニングの粗度係数は0.027である。図-1は河床横断形（a図）と最大洗掘地点（b図）の測定値（昭和56年10月測定）と計算値の比較である。両者の対応はおおむね良好である。深掘れ位置が対岸へ遷移する位置に若干の違いが見られる。弯曲部に発生する二次流（ラセン流）の計算にはEngelund⁴⁾の理論を用いている。

—弯曲流れの二次流について—

弯曲部の河床洗掘に及ぼす二次流の効果は大きい。弯曲部の流れは三次元性が強いから浅水流式を用いる場合には、二次流の評価に注意が必要である。

a) 非線形効果

弯曲部の二次流計算に線形理論を用いた研究例が多い。しかし、二次流の強度が大きくなると横断方向への運動量輸送に伴う非線形効果が無視できなくなる。この効果は、Rozovskii⁵⁾，村本⁶⁾，Kalkwijkら⁷⁾，筆者ら⁸⁾，長谷川⁹⁾，石川ら¹⁰⁾によって指摘されている。非線形効果は形式的に2つに分類できる。

深さ方向の流速分布 北海道開発局¹¹⁾は石狩川の矢臼場弯曲（河口から約5km）で3回の流跡観測を行った。流量は、2000、5000、7000 m^3/sec であった。観測結果によれば、 $Q \leq 5000 \text{ m}^3/\text{sec}$ では弯曲部特有のラセン流が見られたが、 $Q = 7000 \text{ m}^3/\text{sec}$ では確認できなかった。図-2は $Q = 7000 \text{ m}^3/\text{sec}$ のときの弯曲流の数値解（ $k-\epsilon$ モデル）である。非線形項を無視したときの数値解（点線）と比較している。非線形効果により二次流の強度が弱まっているのがわかる。 $Q = 2000 \text{ m}^3/\text{sec}$ の数値解ではこの現象は見られなかった。この効果が河床横断形状に大きな影響を与える。筆者ら⁸⁾らの計算結果によれば $Pr = \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi_0 \geq 0.02$ になるとこの非線形効果が現れる（ h ：水深， r ：曲率半径， φ_0 ：流速係数）。

横断方向流速分布 ラセン流による外岸側への運動量輸送により矩形断面の弯曲部においても強制渦が発生し得る。筆

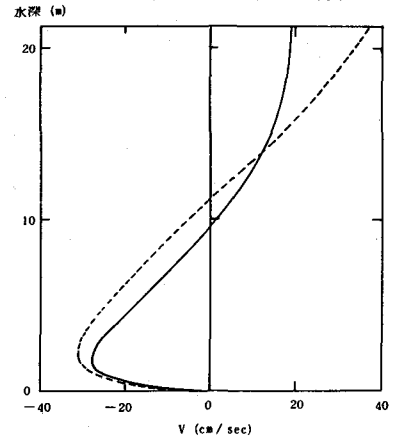


図-2

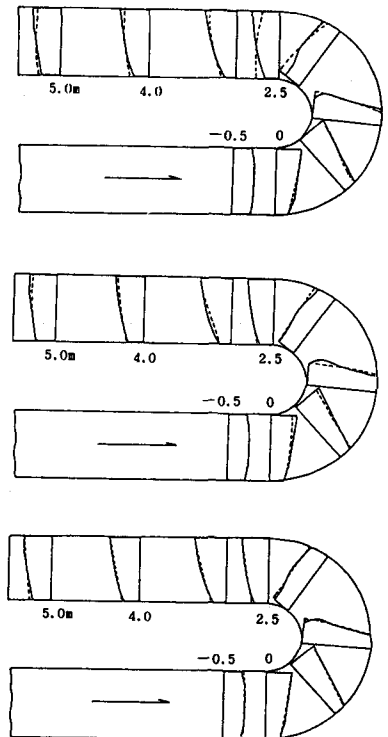


図-3

者ら¹²⁾は、この必要条件を $Pf = \sqrt{5} \pi \varphi^{0.63} h / B \geq 1$ で与えた (B : 川巾)。図-3は、矩形断面単弯曲の流下方向平均流速の数値解と実測値¹³⁾の比較である。a図は非線形効果を考慮しない場合で実測値がうまく説明できない。b, c図は非線形効果が考慮されているが、c図には更に次の点が考慮されている。

b) ラセン流の発達, 減衰

流れが直線部から弯曲部へと入るとラセン流は徐々に発達する。逆の場合は徐々に減衰する。上述のc図の計算にはこの効果が取り込まれている。

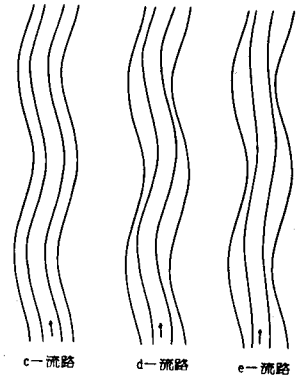


図-4

1.2 複断面蛇行流

木下^{14,15)}は航空写真による洪水流の分析と洪水前後の被害状況の調査から、複断面蛇行流路においては、堤防線形の位相差により被害状況が大いに異なることを発見した。木下^{16,17)}はさらに事例調査を進め、最適線形を見いだしてこれを移動床実験により検証した。図-4のe-流路が最適流路である。図-5の実線が横断河床形の実測値である。最深部が低水路岸から離れて水路中央によっている。これに対して、低水

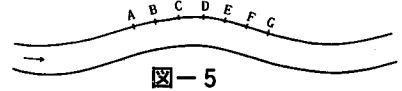
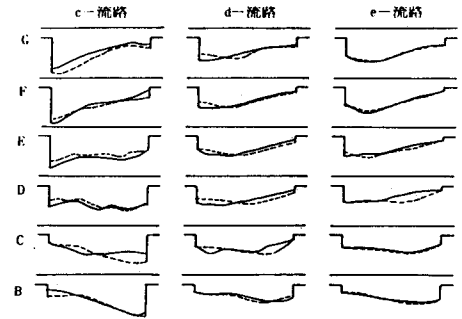


図-5

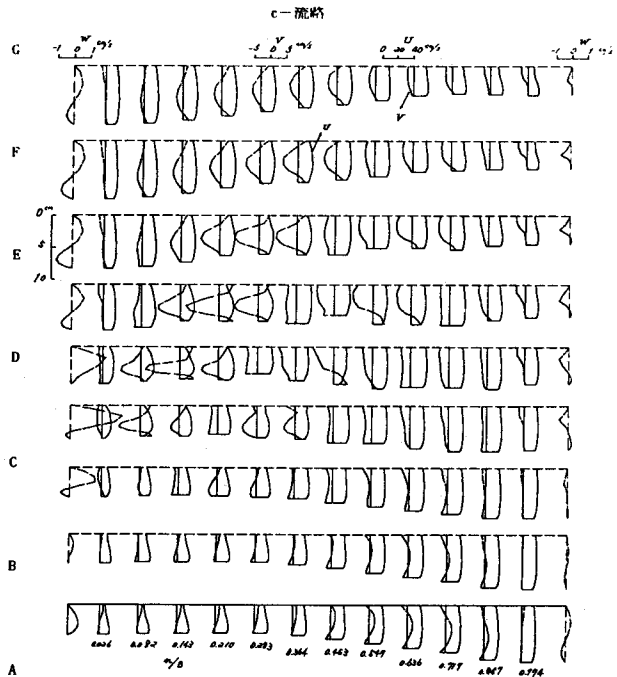
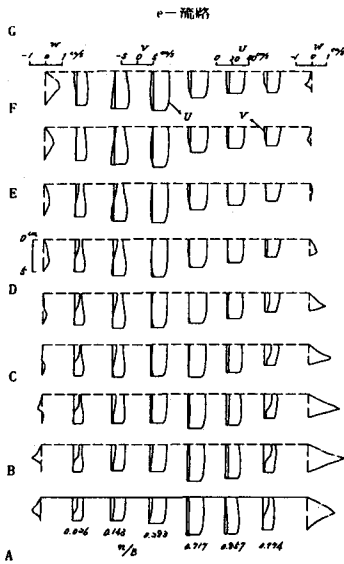


図-6

路と高水敷が同位相の *c* 流路では凹岸の低水岸に沿って深掘れが生じている。図中の点線は *MK* 法による数値解¹⁸⁾である。実測値と良く一致している。

図-6 は二次流の計算値である。*c* 流路では低水路凹岸に通常の回転方向を持つラセン流が発達している。*e* 流路ではこれと逆向きである。これは、高水敷から低速の流体が低水路に入り込み、表面流速が著しく低下するためである。筆者らはこの二次流を反転ラセン流と呼んだ。反転ラセン流の発生はまだ実験的に確認されていないが *e* - 流路を説明する有力な考えと思われる。

—乱流モデルについて—

流れの計算において Reynoldes stress をいかに与えるかは重要な問題である。開水路流れでは渦動粘性係数 ν_t を導入して流速分布が対数則となる

$$\nu_t = kzu * (1 - z/h) \quad (1)$$

が良く用いられる (k : カルマン常数, u^* : 摩擦速度)。

複断面流では高水敷流と低水路流が大規模な組織的渦構造を媒介として強い相互干渉を持つことが知られている^{19,20)}。この作用により実際の流れでは ν_t が(1)式のものより大きくなると考えられる。*MK* 法では、河岸付近に剝離が発生した場合にはこの効果を考慮しているが厳密なものではない。

近年、数値計算を前提とした乱流モデルの開発が進められている。開水路流れに対しても $k-\epsilon$ モデルを中心に適用例が増えている²¹⁾。しかし、これらのモデルをそのまま河床変動計算に使うのは計算時間が多大になるため実地的でない。また、現在の乱流モデルの方式では、組織的な渦構造をうまく表せないという問題もある²²⁾。この問題については今後の発展に期待するところ大である。

1.3 河口の堆砂予測

河口では、流れと波、潮位変化、密度流効果、複雑な地形、これらによる流砂の複雑な挙動、そし

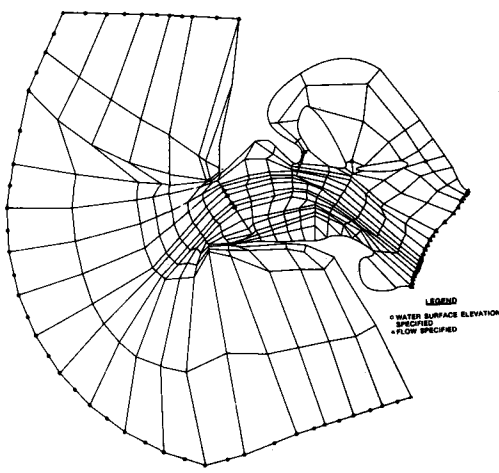


図-7

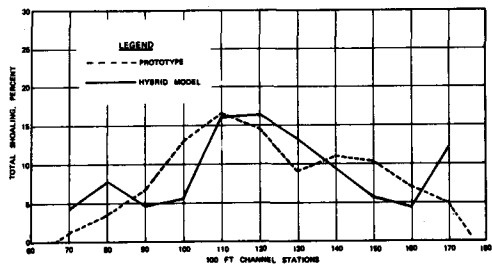


図-8

て水文的な要素が複合して堆砂機構は非常に複雑である。WEC^{23,24)}はこの問題に対して物理モデルと数値モデルを組み合わせた hybrid モデルを開発した。様々な初期および境界条件で模型実験を行って流れをモデル化しておき、これを基に数値解析を行う。

WEC はこのモデルで Columbia 川河口の堆砂予測を行った。同河口では航路維持のため年間370万 m^3 の浚渫を行っている。図-7は、数値モデル(有限要素法)の要素である。図-8は、航路に沿った堆積量の予測値と実績(1959~1968年の平均)の比較である。両者の一致は良好である。図-9は、堆積形状の分布図の比較である。定性的な傾向は一致している。

一浮遊砂の非平衡性一

浮遊砂の非平衡性は河口やダムおよび緩流河川の浚渫部などの断面急変部で大きい。非平衡性が河床変化に大きな影響を及ぼす場合にはその効果を計算に組み込まなければならない。二次元の河床変化の予測であるから浮遊砂の三次元構造が必要になる。流れの三次元性が著しく強い場では三次元数値解によらなければならないが、そうでない場合には、鉛直分布を解析的手法で推定するのが実際的である。

Ariathurai and Krone²⁵⁾は水平二次元の拡散方程式を数値的に解いている。しかし、深さ方向の分布形は一定としており、三次元性を表すには充分でない。浮遊砂の非平衡性を考慮した計算は二次元河床変動計算ではかなり進められているが二次元ではまだ初歩的な段階である。

1.4 河床波

岸ら²⁶⁾によればわが国の大河川のほとんどが砂州河川に属する。砂州河川では河岸近傍への流れの集中のため河岸決壊が多い。従って、砂州の挙動が再現できる計算法であることが望ましい。これに対して、小規模河床は再現する必要がない。小規模河床波は抵抗要素として働くが、これには抵抗則の理論が使えるからである。

図-10は砂州の発生した長谷川²⁷⁾の ME-1 の河床コンター図の実測値と計算値(MK法²⁸⁾)の比較である。図中の点線は峰線、一点鎖線は谷線を表す。峰線、谷線の位置、全体的形状がよく再現

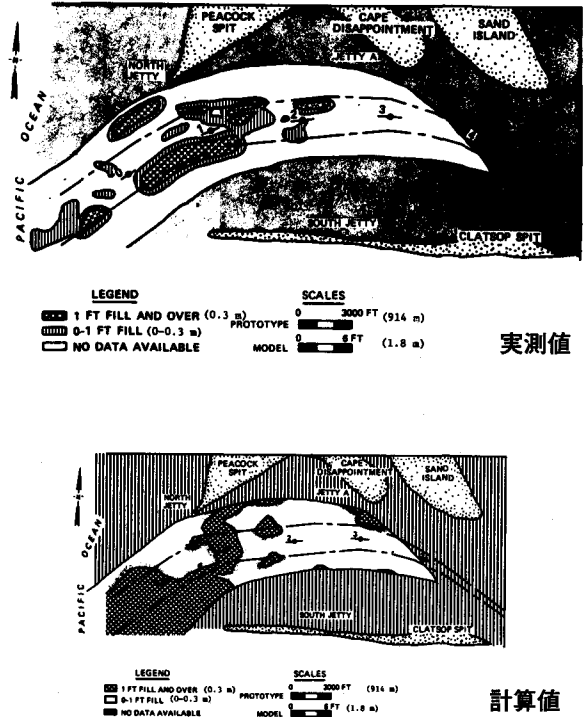
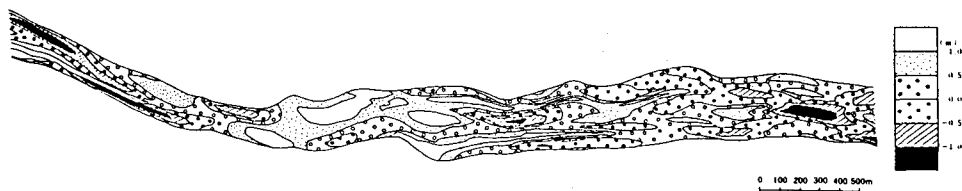
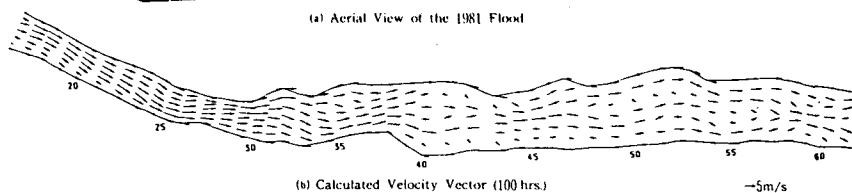
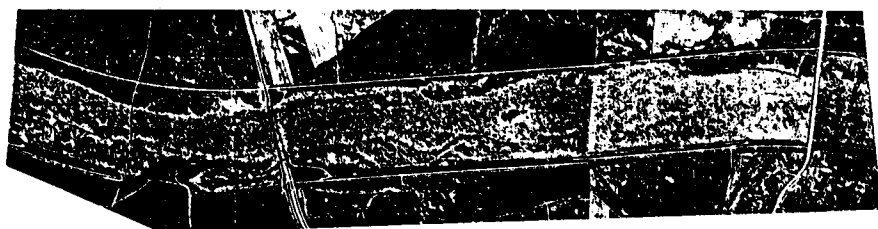
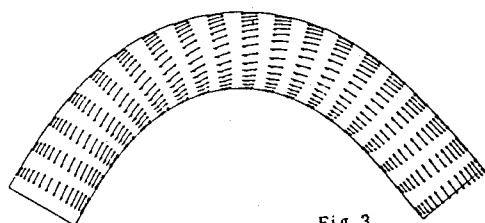
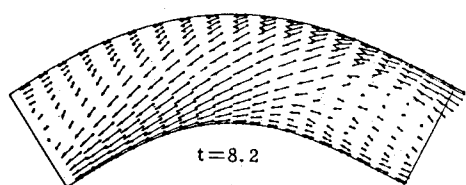
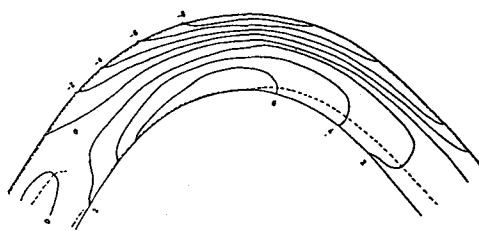
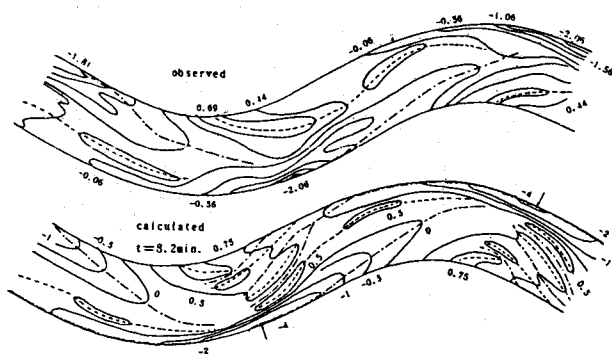


図-9



されている。図-11は dune が発生した Hooke²⁹⁾ の Run 20 の河床コンター図の計算値 (MK 法) である。砂州の場合と著しい違いがみられる。

図-12に表面流速と河床流速のベクトル図を示した。Run 20ではラセン流が一様に発達している。しかし、ME-1では流れが対岸に向かう部分では表面と河床で流向がほぼ一致し、水衝部付近の

流向が強く曲げられる所で強いラセン流が発生している。これらは非砂州や砂州の流れの特徴を良く表している。

図-13 a は昭和56.8出水時の音更川の航空写真である。写真には水面波の帯が見られる。上流側の川幅の狭い部分では帯は一本であるが、下流の川幅の広い部分では二本になっている。これは河床形態が単列砂州から複列砂州に変化していることを示している。b, c 図は清水らの計算による流速ベクトル図と河床コンター図である。計算結果が上述の河床変化に対応しているのがわかる。

河床波の発生領域は黒木、岸の区分図³⁰⁾ (図-14) で判定できる。清水らは直線流路で河床変化を計算し、発生した河床形態の区分を区分図中に示した (ST-a : 小規模, ST-1 : 砂州, ST-b : 複列)。数値解析によって発生する河床波が理論的に予測されるものに一致しているのがわかる。

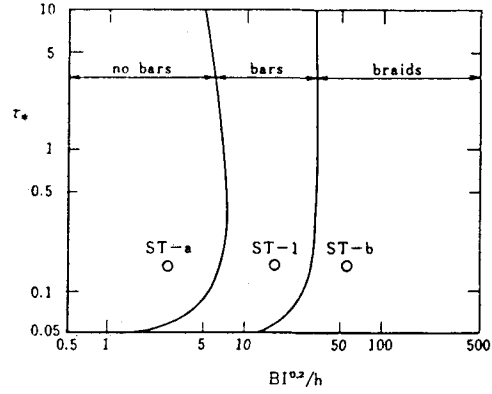


図-14

2. 二次元河床変動計算法

計算法の極く基本的な点のみ紹介する。詳細については参考文献を参照してほしい。

2.1 Hancu and Dan の方法³¹⁾

計算領域を Cartesian 座標系 (x, y) で表す。基礎方程式は、

x -方向運動方程式

$$\frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial hU^2}{\partial x} + \frac{\partial hUV}{\partial y} = -gh \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2} + \nu_t \Delta(hU) \quad (2)$$

y -方向運動方程式

$$\frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial hUV}{\partial x} + \frac{\partial hV^2}{\partial y} = -gh \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2} + \nu_t \Delta(hV) \quad (3)$$

流れの連続式

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

流砂の連続式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

ここに、 U, V : x, y 方向の水深平均流速、 h : 水深、 C : Chezy 係数、 g : 重力の加速度、 ξ : 水位、 η : 河床高、 q_x, q_y : x, y 方向の流砂量、簡単のために河床材料の空隙率は除いている。

計算法は Fractional step 法である。(2)～(5)式を次の様に書き換える。

第1ステップ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial hU^2}{\partial x} &= -gh \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \frac{U\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} + \nu_t \Delta(hU) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

第2ステップ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial hV^2}{\partial y} &= -gh \frac{\partial \xi}{\partial y} + g \frac{V\sqrt{U^2+V^2}}{C^2} + \nu_t \Delta(hV) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial hV}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

－ ADI について －

Fractional-step 法のアルゴリズムは ADI (Alternating-Direction Implicit) 法と似ている。問題によっては同じになる。

ADI は Peaceman and Rachford³²⁾ (1955), Douglas³³⁾ (1955) によって空間二次元の熱伝導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (8)$$

の陰解法として考案された。ADI の考え方は様々な方程式に応用されている。効率的で最も popular な計算法である。Fractional-step 法は、ADI がアメリカで開発されていた頃、ソビエトで開発されたものである (Yanenco³⁴⁾, 1971)。

各計算点毎に差分式が作られる。これをマトリックス表示する。

$$AU = F \quad (9)$$

U : 未知量で作る列ベクトル, A : U の係数マトリックス。

連立方程式を解くとき A の要素の大部分が 0 であることを利用して様々な効率の良い計算法が工夫されている。いま,

$$A = B \cdot C + \epsilon \doteq B \cdot C \rightarrow BCU = F \quad (10)$$

と、おけたとしよう (ϵ : 誤差, $0(\epsilon) < 0(A)$)。このとき,

$$CU = V \quad (11)$$

とおくと

$$BV = F \quad (12)$$

である。第1ステップで(12)式から V を求め、第2ステップで(11)式から U を求める。 B と C の反転が A の反転より簡単になっていればよい。この方法を一般に近似因数分解 (Approximate Factorization) 法という。 B が x 方向の未知量のみを含み、 C が y 方向の未知量のみを含む場合、ADI と呼ばれる。

(8)式を ADI で差分化すると次の様になる。

第1ステップ

$$U_{i,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^n = \alpha/2 \cdot (\delta_x^2 U_{i,j}^{n+1/2} + \delta_y^2 U_{i,j}^n) \quad (13)$$

第2ステップ

$$U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1/2} = \alpha/2 \cdot (\delta_x^2 U_{i,j}^{n+1/2} + \delta_y^2 U_{i,j}^{n+1}) \quad (14)$$

ここに, $\alpha = K\Delta t/\Delta x^2$, $\delta_x^2 U_{i,j} = U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}$,

$$\delta_y^2 U_{i,j} = U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}, \quad n\Delta t = t, \quad i\Delta x = x, \quad j\Delta y = y$$

Fractional-step 法で差分化すると次の様になる。

第1ステップ

$$U_{i,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^n = \alpha\delta_x^2 U_{i,j}^n \quad (15)$$

第2ステップ

$$U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1/2} = \alpha\delta_y^2 U_{i,j}^{n+1/2} \quad (16)$$

ここにあげた例は2空間次元1方程式の場合であるが、近似因数分解法は、例えば、Beam-Warming 法³⁵⁾の様に非定常の3空間次元の連立方程式に拡張できる。

— 擬似定常の仮定と時間発展法による定常解 —

我々は河床変動計算に擬似定常の仮定を用いることが多い。河床の変形に流れが直ちに追従すると見なすのである。この仮定では(2)~(4)式から非定常項がなくなる。そうすると計算は、

ステップ1. ある河床形に対する流れの定常解を求める、

ステップ2. この流れが Δt 間継続するものとして、この間の河床変形を求める、

の2段階に分解できる。

NS方程式は非線形であるため、第1ステップの定常解を直接求めるのは容易でない。そこで、非定常式を解いて（この間に河床は変化しない）、ほぼ定常に達したものを定常解とする時間発展法が用いられる。

時間発展法では収束の高速化が重要で様々な工夫がなされている^{36), 37)}。ADIなどの陰形式も1つの方法である。これは定常解に至る中間値は正確でなくても良く、 Δt が大きく取れるからである*¹⁾。ただし、あまり大きく取ると、(10)式中の誤差 ϵ が定常状態への収束を悪化させる。最適の Δt についていくつかの研究がある³⁷⁾。

以下に紹介する計算法はすべて擬定常の仮定を用いている。

2.2 清水らの方法

Patankar and Spalding³⁸⁾ (1972) は定常解を求める SIMPLE 法を開発した。プログラミングが容易で非圧縮の NS 方程式を解くのに多用されている。清水らの方法もこれに属する。計算は次の手順で行う。

1. 水位を仮定する。
2. この水位に対する流速を求める。 x -方向の運動方程式で U 、 y -方向の運動方程式で V を求める。
3. 得られた流速は必ずしも連続条件を満たしていない。これを満たすように水位を補正する。
4. 2～3 を繰り返して収束解を求める。

水位の補正は次のように行う。

流速の計算値を $\hat{U}$ 、 $\hat{V}$ 、これらの補正値を u' 、 v' とおくと流れの連続の条件は

$$\frac{\partial h(\hat{U}+u')}{\partial x} + \frac{\partial h(\hat{V}+v')}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

である（ただし、 h については $h = \hat{h} + h'$ とおいて h' を無視する）。ここで、

$$u' = \partial \phi / \partial x, \quad v' = \partial \phi / \partial y \quad (18)$$

なる一種のポテンシャル ϕ を考え、これを(17)式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial h \hat{U}}{\partial x} + \frac{\partial h \hat{V}}{\partial y} \right) \quad (19)$$

が得られる。右辺は既知量である。これを解いて、 ϕ と補正水位 ξ' とを関係づけることにより水位が補正される（例えば、 $\xi' = \alpha \phi$ 、 α : 係数）。

* Δt が大き過ぎると精度が低下する。このため、非定常現象そのものを求める場合には、プログラミングの簡単な陽形式も良く用いられる

2.3 SEDIBO モデル³⁹⁾

前述の2つの方法は、primitive variable を用いて NS 方程式を解くものである。これに対して DHL のグループは渦度輸送方程式と流れ関数 ψ を用いて2次元流れを解いている。この計算方式もアルゴリズムが簡単であり popular な計算法である。

2.4 有限要素法

これまで述べた方法は差分法である。差分法は任意形状の流れの場に適用するのは簡単ではない。近似直交座標系を用いる場合には、座標の斜交角度が大きくなれば当然精度が低下する。境界形状に合った一般座標系を用いるのが1つの有力な方法であるが、取扱はそれほど簡単でない。このため2次元流の計算には有限要素法による計算例が非常に多い。河床変動計算は1.3に紹介したものの他に Crotogino ら⁴⁰⁾、Alonso ら⁴¹⁾によって行なわれている。

2.5 流れの三次元計算—森、岸の方法

1章の計算例で示したように、三次元性の強い流れの河床変化を浅水流式を基にして正確に予測するのは困難である。しかし、三次元計算をまともに行うのは実際的でない。森⁴²⁾は、河川流の特性を考慮して種々の簡略化を行って、実用的な三次元計算法を開発した (MK 法)。この計算法では流路形状に合った一般座標系が採用されている。

3. 河床波の計算

1.4で述べた様に、砂州が発達し得る差分法が望ましい。小規模河床波は、その性質を調べる場合は別として、発生しても直ちに減衰する様にした方がよい。これを行うには河床波の性質と差分法の関係を知る必要がある。特性帯の理論を利用して二次元擾乱の伝播機構を調べ、この点について考察する。

3.1 安定条件について

流砂量を流れと河床高 η の関数とする。さらに、擬定常流を仮定して η のみの関数とする。このとき流砂量は η について非線形となるであろうから、差分化に際してはこの効果を考慮しなければならない。 η が充分平滑であれば(5)式を

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_y \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad a_x = \frac{\partial q_x}{\partial \eta}, \quad a_y = \frac{\partial q_y}{\partial \eta} \quad (20)$$

と書き換えて a_x , a_y を変係数とする線形方程式の安定条件を考えればよい。しかし、dune や砂州は峰で勾配が不連続的に変化しているので直ちに充分平滑としてよいかわからない。

空間一次元の場合、(20)式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

となる。この特性曲線は

$$dx/dt = a_x(\eta) \quad (22)$$

である。(21)式はこの曲線に沿った微分と見ることができる。これから特性曲線上で $\eta = \text{const.}$ ，従って， $a_x(\eta) = \text{const.}$ ，すなわち“特性曲線は直線”が得られる。そうすると初期条件

$$\eta = \begin{cases} \eta_1, & x < 0 \\ \eta_2, & x \geq 0 \end{cases}, \quad a_x(\eta_1) > a_x(\eta_2) \quad (23)$$

の場合には，図-15に太実線で示す位置に衝撃波の様な不連続点が生ずることになる。河床波上の流砂量の最大点は必ずしも峰に一致しないから， a_x は微妙に変化して絶えず図-15の様な現象が峰付近で生ずる可能性がある。河床波の峰をこの様に考えると，峰は非線形不安定が生じ得る地点となり差分化には注意が必要になる。

流砂の連続式は保存則の形をしている。保存則が非線形の場合の差分の安定および収束の条件が Harten⁴³⁾によって示された。Harten は

$$\text{total-variance TV}(u^n) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|$$

を導入し

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

となる差分を TVD (D: diminishing) と呼び，「差分スキームが保存則およびエントロピー条件に consistent であり，かつ，TVD であれば，エントロピー条件を満たした弱解（この解は衝撃波の様な不連続に対して物理的に意味のある解になっている）に収束する。」ことを示した。

この定理は線形方程式に対する Lax の同等定理に対応する。TVD 差分の最も簡単なものが monotone 差分である。一次元河床変動計算では，風上差分

$$\begin{aligned} a_x > 0 \text{ のとき } \partial \eta / \partial x &\rightarrow (\eta_j - \eta_{j-1}) / \Delta x \\ a_x < 0 \text{ のとき } \partial \eta / \partial x &\rightarrow (\eta_{j+1} - \eta_j) / \Delta x \end{aligned} \quad (24)$$

が良く使われる。この差分法は，常に， $a_x > 0$ または常に， $a_x < 0$ かつ，CFL 条件が満たされていれば monotone 差分である。 a_x の符号が正負混合する場合には，次の差分が monotone 差分になっている (G. Sod)。

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + a_{i+1/2}^- \frac{\eta_{i+1}^n - \eta_i^n}{\Delta x} + a_{i-1/2}^+ \frac{\eta_i^n - \eta_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (25-1)$$

ここに, $a_{i+1/2}^- = (a_{i+1/2} - |a_{i+1/2}|) / 2$

$$a_{i+1/2}^+ = (a_{i+1/2} + |a_{i+1/2}|) / 2$$

$$a_{i+1/2} = a_x \quad (x = (i+1/2) \Delta x)$$

ただし, $\max |a_{i+1/2}| \Delta t / \Delta x \leq 1$

保存形では,

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} [G(\eta_i^n, \eta_{i+1}^n) - G(\eta_{i-1}^n, \eta_i^n)] = 0 \quad (25-2)$$

ここに, $G(\eta_i^n, \eta_{i+1}^n) = q_{xi}^n + \delta(\eta_i^n, \eta_{i+1}^n) (q_{xi+1}^n - q_{xi}^n)$

$$\delta(V, W) = \begin{cases} 1, & \frac{q_x(W) - q_x(V)}{W - V} < 0 \\ 0, & \frac{q_x(W) - q_x(V)}{W - V} > 0 \end{cases}$$

monotone 差分は一次精度の差分である。衝撃波をより精密にとらえるための二次精度の TVD 差分が Harten その他によって開発されている。また, TVD 差分でなくても人工粘性係数を加えることにより, 非線形不安定の生じない差分が工夫されている。

3.2 線形方程式⁴⁴⁾

いずれの方法を採用するにせよ平滑な解を得ることができる。そうすると平滑な解を前提に河床攪乱の伝播機構が推定できるし, 擾乱を微小としてもおおよそが推定できるであろう。ちなみに, von Neumann が現在最も良く使われている安定条件に関する von Neumann の方法を考えたのは非線形問題に対してであった。非線形の数値解を観察すると, ゆるやかな場に小振幅短波長の振動が現れ, それが成長すると計算が不安定になる。このことから非線形項を線形化し, 更に, 定係数とすることにより擾乱を Fourier 成分で置き換えて安定性を吟味することを思いついたのである。

この考えに従って方程式を簡略化する。すなわち, 河床に微小擾乱を置いたときの擾乱の挙動を考えることにして方程式を線形化し, さらに定係数を仮定する。これにより著しく簡略化されるが, それでもまだかなり複雑である。

局所的な河床勾配や摩擦項などは河床波の発生, 発達には重要な要素であるが, 擾乱伝播に関しては第 1 位の要素ではない。これらの項も除き, さらに擬似定常を仮定して基本的な骨組みのみを残し, 流砂の連続式(26), x および y 方向の運動方程式(27), (28), 流れの連続式(29)を基礎式とする。

$$\eta_t + au_x + bv_x = 0 \quad (26) \quad F^2 u_x + \xi_x = 0 \quad (27)$$

$$F^2 v_x + \xi_x = 0 \quad (28) \quad u_x + v_y + \xi_x - \eta_x = 0 \quad (29)$$

上式において, 全ての変量が平均流速 U , 平均水深 h で無次元化されている。また, F :フルード数,

a, b : 流砂量を u のベキで表すことによる係数で、常数とし、 $a=4, b=1$ とする。

特性帯の理論を用いてこの方程式系の性質を調べる。②6～②9式の特性曲面 ϕ の特性条件は、

$$\begin{vmatrix} \phi_t & a\phi_x & b\phi_y & 0 \\ 0 & F^2\phi_x & 0 & \phi_x \\ 0 & 0 & F^2\phi_x & \phi_y \\ -\phi_x & \phi_x & \phi_y & \phi_x \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

ϕ の特性曲線は、これの特性微分方程式

$$\frac{dt}{F_1\phi_x^2 + \phi_y^2} = \frac{dx}{2F_1\phi_t\phi_x + b\phi_y^2 + 3a\phi_x^2} = \frac{dy}{2\phi_t\phi_x + 2b\phi_x\phi_y} = \frac{d\phi}{0} \quad (31)$$

ここに、 $F_1 = 1 - F^2$

を解いて得られる。これを解くと、時間 $t=0$ に原点においた擾乱が時間 t 後に到達する地点 (X, Y) はパラメーター λ を用いて③2式で与えられる。

$$\begin{aligned} X &= [aF_1 + (3a - bF_1)\lambda^2 + b\lambda^4] / (F_1 + \lambda^2)^2 \cdot t \\ Y &= 2\lambda(bF_1 - a) / (F_1 + \lambda^2)^2 \cdot t \end{aligned} \quad (32)$$

(X, Y) は λ を変えると図-16の様な曲線を描く (x 軸を中心に左右対称なので $y > 0$ の部分のみ示す)。これは点擾乱が伝播するときの峰の連なりを表す。図中の実線は常流の場合、点線は射流の場合である。(X, Y) 線は $x = a/F_1 \cdot t$ で x 軸と直交する。この点を P 点、この波速で伝わる波動を P 波と呼ぶことにする。また、(X, Y) 線は $x = bt$ で x 軸と接する。この点を S 点、この波速で伝わる波動を S 波と呼ぶことにする。

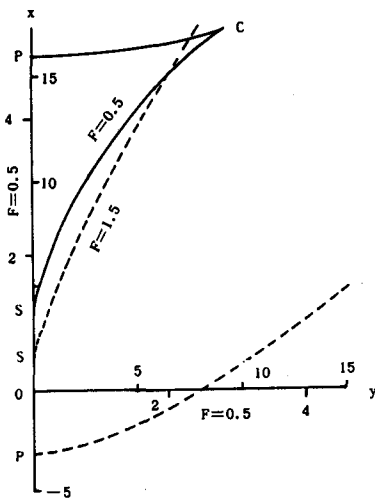


図-16

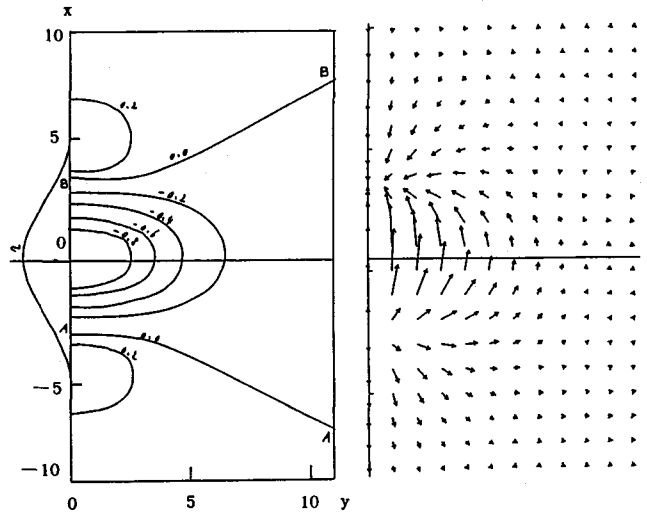


図-17

(X, Y) 線の形状から, P波は横断方向に一次元的な峰線を持つ波動であり, S波は主流を斜めに横切る二次元的な峰線を持つ波動であることがわかる。常流と射流の(X, Y)線を比較すると, P波は常流では下流に, 射流では上流(P点付近)に伝わる。一方, S波は常, 射流いずれも下流に伝わる。これらからP波は小規模河床波, S波は中規模河床波にそれぞれ関わっていることが予想される。川幅一定の直線流路で26~29式の数値解析を行うと, S-C線(C点は, P点, S点から延びる(X, Y)線の接点)が蛇行する交互深掘れに変化した。そこでP波の発達を抑え, S波の発達を助長する差分法を考える。

S波の波速は b である。これから v の作用による横断流砂がS波にかかわっているのがわかる。伝播機構は次の様に説明される。図-17は円形の河床擾乱の周りの擾乱流速のベクトル図(数値解)である。上流側半分では $v > 0$ で $\eta \rightarrow$ 減, 下流側半分では $v < 0$ で $\eta \rightarrow$ 増に作用しており, 結果として擾乱を下流方向に移動させる。

本節と前節での考察から次の様な差分法が考えられる。 x 方向には安定な風上差分とし, y 方向には不安定性の強い中央差分とする。これによりP波, 従って小規模河床波の発達を抑制し, S波, 従って中規模河床波の発達を助長することが期待できる。

S-C線の形成要因は上述の様に横断方向流砂がかかるが, 実際には下流方向流砂との複合作用である。図-18に示した擾乱流速のベクトル図(数値解)から下流方向の流砂が卓越するのが容易に推察できる。従って, 中央差分による河床波の発達作用はそれほど強くないが, 数値不安定を避けるために人工粘性(物理的には斜面に働く重力成分)を加えておく必要があるだろう。MK法や清水らの計算法にはこの差分法が採用されている。

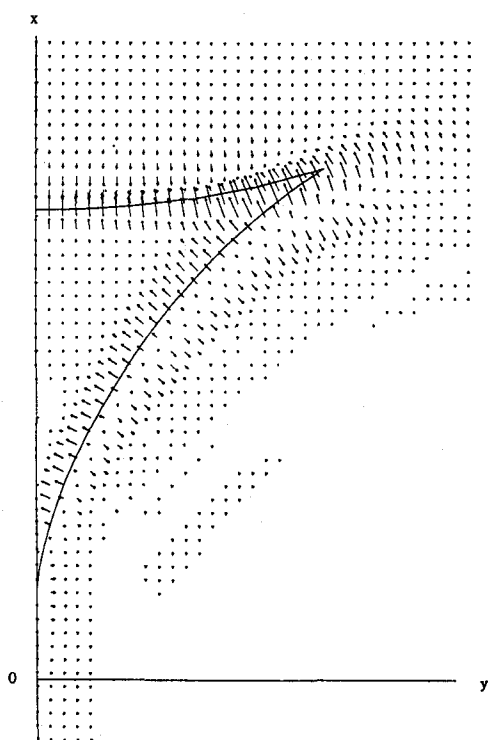


図-18

4. 偏微分方程式の性質と差分法

偏微分方程式は基本的に3つの型に分類される。数値計算法はこれらの型によるから, 扱う方程式の型を知る必要がある。型の分類は, 特性曲線と関連している。

4.1 特性曲線

二次元一階の ϕ に関する一般の偏微分方程式

$$F(x, y, \phi, p, q) = 0, \quad p = \phi_x, \quad q = \phi_y \quad (33)$$

の積分曲面は特性微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{d\phi}{ds} = p \frac{\partial F}{\partial p} + q \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial F}{\partial x} - p \frac{\partial F}{\partial \phi}, \quad \frac{dq}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial y} - q \frac{\partial F}{\partial \phi}\end{aligned}\tag{34}$$

を解いて得られる。上式は特性帯を定める。これを担っているのが特性曲線である。(34-1) ~ (34-3) は特性曲線の方角を与える。(34-4), (34-5) 式は特性曲線に沿って $dF=0$ とするための p, q に対する制約である。 $dF=0$ は $F=\text{const.}$ を意味するから特性曲線の出発点で $F=0$ が必要である。特性曲線は三次元空間 (x, y, ϕ) の曲線である。

上述は特性曲線の公式的な説明であるが、数理物理的に重要な特性曲線の性質は、これに沿って解に多価性が生じ得るという点である。一般に特性曲線の上には無数の特性帯が重なり合っており、特性曲線が分岐帯になっているのである。次節以降ではこの点に着目して特性曲線を求める。

一階の偏微分方程式には一本の特性曲線があるが、2階では常にあるわけではない。このことにより型の区分が行われる。

4.2 偏微分方程式の型の分類

型の分類は2階の線形偏微分方程式*)

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + \dots = 0\tag{35}$$

を用いてなされる。多次元、高階、連立方程式いずれの場合もこの分類法に基づく。

$$D = b^2 - 4ac > 0 \text{ のとき双曲型}$$

$$D = b^2 - 4ac < 0 \text{ のとき楕円型}$$

$$D = b^2 - 4ac = 0 \text{ のとき放物型}$$

と言う。 (x, y) の代わりに $\phi = \phi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ を用いて(35)式を書き換える。

$$J = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x \neq 0$$

であれば $[x, y]$ と $[\phi, \psi]$ は一対一に対応する。連鎖則

$$u_x = u_\phi \phi_x + u_\psi \psi_x\tag{36}$$

$$u_{xx} = u_{\phi\phi} \phi_x^2 + 2u_{\phi\psi} \phi_x \psi_x + u_{\psi\psi} \psi_x^2 + u_{\phi xx} + u_{\psi xx}$$

等を用いると、(35)式は、

*線形とは導関数の係数が独立変数のみの関数である場合。これに対して最高次の導関数の係数にこれより一次以上低い導関数が含まれる場合は準線形と呼ばれる。

$$Au_{\phi\phi} + Bu_{\phi\psi} + Cu_{\psi\psi} + \dots = 0 \quad (37)$$

ここに, $A = a\phi_x^2 + b\phi_x\phi_y + C\phi_y^2$

$$B = 2a\phi_x\psi_x + b\phi_x\psi_y + b\phi_y\psi_x + 2C\phi_y\psi_y$$

$$C = a\psi_x^2 + b\psi_x\psi_y + C\psi_y^2$$

(37) 式の型を判別すると,

$$D = B^2 - 4AC = J^2 (b^2 - 4ac)$$

であり変換により型が変わらないのがわかる ($J \neq 0$)。

ここで, 前節の考えに従って特性曲線を導き, 型との関係を見る。

例えば, $\phi = \text{const.}$ の面で解に多価性が生ずるためには $A = 0$ であれば良い。そうすると $u_{\phi\phi}$ が定まらない。この様な $\phi = \text{const.}$ の曲面^{*)}を特性曲面と呼ぶ。これは特性帯である^{*)}。 $A = 0$ を特性条件と呼ぶ。

$A = 0$ を ϕ に関する一階の偏微分方程式と見れば, (34)式を用いて ϕ を求められる。このとき特性条件に ϕ が含まれていないから, $d\phi = 0$, (34-4), (34-5) 式から p, q が求まり, これを (34-1), (34-2) 式代入すると, ϕ の特性曲線が求まる ($\phi = 0$ に属する陪特性曲線と呼ばれる)。 $\phi = \text{const.}$ の曲面は特性曲線から生成される。

線形の場合には特性曲線は, $A = 0$ および

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy = 0$$

を連立して求められる。 ϕ を消去すると

$$a (dy/dx)^2 - b (dy/dx) + c = 0 \quad (38)$$

これを解くと特性曲線

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (39)$$

が得られる。(38)式から特性曲線が双曲型では2本, 放物型では1本, 楕円型では0であることがわかる。

4.3 各型の偏微分方程式の特性

双曲型

*これは二次元では曲線, 三次元では曲面, 任意の次元に対して超曲面あるいは多様帯と呼ばれるが, ここでは単に曲面と呼ぶ

2階の準線形偏微分方程式では更に2つの条件が必要である。線形の場合には $A = 0$ のみで良い。

波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

は双曲型である。特性曲線は

$$dx/dt = \pm c$$

である。 $\phi = x - ct$, $\psi = x + ct$ の座標系で書くと $A = C = 0$ から

$$u_{\phi\eta} = 0$$

この一般解は

$$u = F(\phi) + G(\psi)$$

初期条件 $t = 0$ で $u = f(x)$, $u_t = g(x)$ の解は、次式で与えられる。

$$u(x, t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau \quad (40)$$

(40)式から図-19の点 P の値は、 $x = x_1 \sim x_2$ における u に関する量のみによって定まるのがわかる。

この領域を点 P の依存域と言う。数値計算においても点 P の依存域がある。差分が収束条件を満たすためには、差分式の依存域が元の方程式の依存域を含まなければ

ならない。これが CFL 条件である。このためには計算点を例

えば図-19中の○印の様に配置する必要がある。この条件が x ,

t の刻み幅 Δx , Δt に

$$\Delta t \leq \Delta x / c$$

(41)

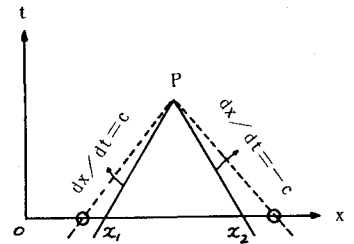


図-19

の制約を与える。

問題 1. 陰形式の差分では Δt に (41) 式の制約がない。この理由を考えよ。

双曲型の方程式は、ある時点の条件から将来の値を予測する型に差分化される。これは時間が経過

すると依存域が拡大してそこから新たな情報が入力されるからである。

放物型

熱伝導方程式 $u_t = k u_{xx}$

は放物型である。 $b^2 - 4ac = 0$ であるから特性曲線は一本である。この特性曲線の意味は次のよう

に考えれる。上式を

$$\frac{k}{c^2} u_{tt} + u_t = k u_{xx}$$

とにおいて $c \rightarrow \infty$ の極限と考える。上式には 2 本の特性曲線

$$dx/dt = \pm c$$

がある。 $c \rightarrow \infty$ では両者は一致する。そうすると特性曲線は $t = \text{const.}$ の一本となる(放物型に退化)。依存域は x の全域となる。

問題 2. 放物型の方程式も双曲型の場合と同様に将来を予測する形に差分化される。このときの差分には陽形式より陰形式の方がより合理的と考えられる。その理由を考えよ。

楕円型

$$\text{Laplace の方程式} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

は楕円形である。関数論によれば楕円型では境界上に不連続があっても内部にはその不連続が持ち込まれない。双曲型では境界上の不連続が特性曲線に沿って伝播するのと対称的である。境界条件は閉曲線上で与えられ、解は境界上の全ての点の影響を受ける。このため差分化は図-20中の●印の地点の値を計算するのに、その周辺の計算点、例えば○印の地点の u に依存する様になしなければならない。このため楕円型では全計算点の連立方程式となる。

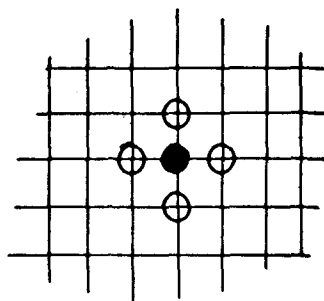


図-20

問題 3. 楕円型の方程式を解くのに、右辺に非定常項 u_t/k をおいて 2.1 に述べた時間発展法が使える。このことから各型の相互の関係を考えよ。

4.4 連立方程式の特性曲線

2 階の偏微分方程式の場合と同様な考え方で特性曲面を求める。準線形一階の u , v に関する連立方程式

$$au_x + bu_y + cv_x + dv_y = e$$

$$Au_x + Bu_y + Cv_x + Dv_y = E \quad (42)$$

を 2 つの独立な座標曲線 $\phi = \phi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$ を用いて書き換える。連鎖則(36)を用いると(42)式は、

$$\begin{aligned} (a\phi_x + b\phi_y) u_\phi + (c\phi_x + d\phi_y) v_\phi &= e' \\ (A\phi_x + B\phi_y) u_\phi + (C\phi_x + D\phi_y) v_\phi &= E' \end{aligned} \quad (43)$$

ただし、 ψ に関する微分項は総て右辺においた。 u_ϕ や v_ϕ は $\phi = \text{const.}$ ($= 0$ とする) の面の法線方向の微分を表す。一方、 ψ に関する微分は $\phi = 0$ の面内で行われる。従って、いま、 $\phi = 0$ 上で u , v が与えられているとすると、上式の右辺は既知量である。そうすると

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\phi_x + b\phi_y & c\phi_x + d\phi_y \\ A\phi_x + B\phi_y & C\phi_x + D\phi_y \end{vmatrix} \quad (44)$$

とおいたとき $\Delta \neq 0$ であれば u_ϕ や v_ϕ は唯一定まる。しかし、 $\Delta = 0$ だと定まらず多価性が現れる。従って、 $\Delta = 0$ が特性条件となる。

(42)式の型は二次元の場合と同様で、特性曲面がなければ楕円型、1つであれば放物型、2つであれば双曲型である。

4.5 流れの計算法—非定常流

(27)~(29)に非定常項を加えると、

$$\begin{aligned} u_t + u_x + h_x / F^2 &= 0 \\ v_t + v_x + h_y / F^2 &= 0 \\ h_t + h_x + u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

ただし $\eta = \text{const.}$ 。特性条件は

$$\begin{vmatrix} A & 0 & \phi_x / F^2 \\ 0 & A & \phi_y / F^2 \\ \phi_x & \phi_y & A \end{vmatrix} = A [A^2 - (\phi_x^2 + \phi_y^2) / F^2] = 0$$

$$A = \phi_t + \phi_x$$

$A = 0$ の特性曲線は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{0}$$

から、 $dx/dt = 1$ 、 $y = \text{const.}$

これは流線である。

$$A^2 - (\phi_x^2 + \phi_y^2) / F^2 = 0$$

の特性曲線は、

$$\frac{dt}{\phi_t + \phi_x} = \frac{dx}{\phi_t + \phi_x - \phi_x / F^2} = \frac{dy}{-\phi_y / F^2} = \frac{d\phi}{0}$$

$t = 0$ のとき $x = y = 0$ の場合をみると

$$(x - t)^2 + y^2 = t^2 / F^2$$

が得られる。* 上式から擾乱が平均流に乗って流下しつつ、波速 $1/F$ で同心円を描いて広がるのがわ

* 初期条件が時空間の1点で与えられる場合の積分曲面は特性錐と呼ばれる。

かる。

三次元の場合の方程式の型は、楕円型および放物型は二次元の場合と同じであるが、双曲型は異なる。いくつかの方法があるようである。1つの方法は、2つの独立変数のみをのこして型を判定するものである。

問題4. (45)式の方程式系は、 (t, x) , (t, y) いずれも双曲型であることを確かめよ（この場合、特性曲線は、それぞれ3本である）。

問題5. これらの流下方向および横断方向の速度の絶対値の最大値をそれぞれ a , b とする。差分に陽形式を用いたときの $\Delta t = \Delta t_u$ は

$$\Delta t_u \leq \min (\Delta x / a, \Delta y / b)$$

とする必要がある[#]。この理由を考えよ（CFL 条件）。

さて、流れの方程式系に流砂の連続式(26)式を加えると河床擾乱の伝播速度が加わるが、この速度は一般に a や b よりはるかに小さい。従って、河床変化の計算のみを考えたときの Δt を Δt_η と書くと $\Delta t_\eta \gg \Delta t_u$ である。このため(26)~(29)の方程式系を非定常流に書き換えて解く場合には河床波の time scale よりはるかに小さい Δt を採用しなければならない。

そこで1つの工夫が前述した擬似定常の仮定である。

4.6 流れの計算法一定常流

4.5と同様にして特性条件は流線を表すものの他に

$$\phi_x^2 - (\phi_x^2 + \phi_y^2) / F^2 = 0 \rightarrow (\phi_x / \phi_y)^2 (1 - 1/F^2) = 1/F^2 \quad (46)$$

が得られる。この場合 $F = 1$ を境に流れの特性が変わる。

$F > 1$ の場合

特性曲線は3本ある。解法は4.5の場合と同じになる。

$F < 1$ の場合

(46)式は実根を持たないから特性曲線は流線1本である。この型は双曲型でも楕円型でもない。しかし、ある意味で双曲型と楕円型の性質を持つ混合型である。双曲型と楕円型の性質は相入れないのであるけれども数値解析上は重要である。水位を見ると下流の状況が上流側に伝わる楕円型の性質を持つ。流れを見ると上流側の性質が下流側へ流線に沿って伝わる双曲型の性質を持つ。Hancu and Dan の方法の様に、流れの場を同時に解く方法ではこの性質は関係ないが、清水らの方法のように流速と水位を別々に解く分離解法ではこの性質が利用される。

[#] von Neuman の方法で安定条件を求めると、これより条件が厳しくなる。CFL 条件は必要条件である。

von Neuman の安定条件も必要条件であるがより厳密である。このため Δt がかなり小さくなる。実際の計算には Fractional step 法などを使って Δt を大きくする。

おわりに

清水は広範囲の計算を行っている。その結果によれば適用範囲はかなり広そうである。現在、混合粒径や浮遊砂を考慮した計算が進められている。計算のアルゴリズムは簡単である。理論的整備が進めば、より多くの河川技術者にとって利用し易いものとなるであろう。計算の高速化を工夫すればパソコンによる計算も可能となるであろう。

扇状地や山地河川に対しても清水らの方法が用いれる。数値粘性が大きいためである。このため衝撃波や定常波などの水面波が卓越する場への適用には注意を要する。水面波が現象を支配する場にはダム破壊流の様な計算法が必要になる。

基礎式として浅水流式を使う場合には航空工学の分野で開発されている技術が利用できる。問題は流れの三次元性を如何に正確にモデル化するかである。三次元数値解析の場合には自由水面の取扱に工夫が必要である。摩擦のない硬いふたをした管路で近似する方法が良く使われているが、河床変化を求める場合には適切でないだろう。むしろ「柔らかい壁」(竹光, 松信⁴⁵⁾)をおいた方が良い様に思われる。最近 Xu ら⁴⁶⁾により気液=相流として解く方法が提案された。静水圧が仮定できれば計算は大いに簡単になる。MK 法は側壁を除いて静水圧を仮定している。

参 考 文 献

- 1) Katopodes, N and Strelkoff, T., ; Computing Two-Dimensional Dam-Break Flood Waves, ASCE, Vol. 104, No. 9, 1978
- 2) Katopodes, N. ; Two-Dimensional Surges and Shocks in Open Channels, ASCE, vol. 110, No. 6, 1984
- 3) 黒木幹男, 岸 力; 沖積地河道の河床形態・流れの形態の形成領域区分, 北大工学部研究報告, 第118号, 1984年
- 4) Engelund, F. ; Flow and Bed Topography in Channel Bends, ASCE, Vol. 100, No. 11, 1974
- 5) Rozovskii, J. L ; Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel Program for Scientific Translations, 1961
- 6) 村本嘉雄; 開水路弯曲流の内部機構 (Ⅱ), 京大防災研年報第9号, 1966年
- 7) Kalkwijk, J. P and de Vriend, H. J ; Computation of The Flow in Shallow River Bends, Jour, Hydr, Reser, Vol. 18, No. 4, 1980
- 8) 森 明巨, 岸 力; 横断勾配を有する一様曲率弯曲部の流れの構造, 第28回水理講演会論文集, 1984年
- 9) 長谷川和義, 山岡 勲, 渡辺康玄, 笹島真一; 迂曲流路内の砂州上の流れに関する実験と理論, 土木学会北海道支部論文報告集, 第38号, 1982年
- 10) 石川忠晴, 金 舜範; 湾曲部の2次流に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第375号/Ⅱ-6,

1986年

- 11) 「昭和56年8月北海道豪雨災害に関する調査研究」, 昭和56年災害科学科研費(代表岸 力) 成果報告書, 1982年
- 12) 森 明巨, 岸 力; 河道弯曲部における二次流の構造, 第27回水理講演会論文集, 1983年
- 13) 森 明巨, 岸 力; 河道弯曲部流れの数値計算, 第37回年次講演会講演集, 1982年
- 14) 木下良作; 航空写真による洪水流の流況測定, 土木学会水工学シリーズ, 1968年
- 15) 木下良作; 河道平面計画試論, 土木学会水工学シリーズ, 1972年
- 16) 木下良作; 航空写真による洪水流解析の現状と今後の課題, 土木学会論文集 No. 345/Ⅱ-1, 1984年
- 17) 木下良作; 洪水時の沖積作用調査と適正複断面河道に関する実験的研究, 昭和59年度文部省科研費自然災害特別研究「沖積河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究」(代表岸 力) 研究成果報告書, 1988年
- 18) 森 明巨, 岸 力; 昭和56年石狩川洪水で観測された弯曲部河床変動の特性, 第30回水理講演会論文集, 1986年
- 19) 今本博健, 久下俊夫; 複断面流れの水理特性に関する基礎的研究, 京大防災研年報第17号 B, 1974年
- 20) 木下良作; 洪水と流路形態の現地観測, 土木学会水工学シリーズ, 1978年
- 21) 河原能久, 玉井信行; 複断面水路における大規模渦と流れの特性, 第17回災害科学総合シンポジウム講演論文集, 1980年
- 22) 木谷 勝; 乱流モデルと乱流構造, 土木学会水工学シリーズ, 1988年
- 23) McAnally, W. H., et al : Columbia River Hybrid Modeling System, ASCE, Vol. 110, No. 3, 1984
- 24) McAnally, W. H., et al : Application of Columbia Hybrid Modeling System, ASCE, Vol. 110, No. 5, 1984
- 25) Ariathurai, R. and Krone. B. : Finite Element Model for Cohesive Sediment Transport, ASCE, Vol. 102, No. 3, 1976
- 26) 岸 力, 黒木幹男, 石井千万太郎, 平山健一; 河床形態と流れの抵抗, 文部省科研費「比較河川学の研究」(代表岸 力) 研究成果報告書, 1987年
- 27) 長谷川和義; 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 学位論文, 1984年
- 28) 森 明巨, 岸 力; 蛇行流路における砂州の発生機構と流れの構造, 第41回年次学術講演会講演集, 1986年
- 29) Hooke, R. L. : Shear-stress and Sediment Distribution in a Meander Bend, Eng. Rept. 30, Univ. Uppsala, 1974

- 30) 黒木幹男, 岸 力: 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第342号, 1984年
- 31) Hăncu S. and Dan P.: A Two-Dimensional Mathematical Model for the River Bed Deformations, Proc. of the Second International Symposium on River Sedimentation, Nanjing China, 1983
- 32) Peaceman, D. W, and Rachford, H. H.: The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations, J. Soc. Industrial Appl. Math., vol. 3, 1955
- 33) Douglas, J.: On the Numerical Integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by Implicit Methods, J. Soc. Industrial Appl. Math., vol. 3, 1955
- 34) Yanenko, N. N.: The Method of Fractional Steps: The Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables, Springer-Verlag, New York
- 35) Beam, R. M. and Warming, R. F.: An Implicit Factored Scheme for the Compressible NS-Equations, AIAAJ. vol. 16, 1978
- 36) 大林 茂, 桑原邦郎: 圧縮性 Navier-Stokes 方程式の数値計算法 I, II, ながれ 5, pp 130~146, 197~198, 1986年
- 37) Turkel, E.: Progress in Computational Physics, Computers and Fluids, Vol. 11, No. 2, 1983
- 38) Patankar, S. V. and Spalding, D. B.: A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, 1972
- 39) Struiksma, N.: Prediction of 2-D Bed Topography in Rivers, ASCE, Vol. 111, No. 8, 1985
- 40) Crocogino, A. and K. P. Holz: Numerical Movable -Bed Models for Practical Engineering, Appl. Math. Modelling, vol. 8, February, 1984
- 41) Alonso, C. V. and Wang, S. Y.: Simulation of Local Scour and Fill in Sand Bed Streams, Proc, 3rd Int. Conf. Finite Elements in Water Resources, Mississippi, 1980
- 42) 森 明巨: 弯曲・蛇行河道における三次元数値解, 昭和59年度文部省科研費自然災害特別研究「沖積河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究」(代表岸 力)研究成果報告書, 1988年
- 43) Harten, A.: On a Class of High Resolution Total variation Stable Finite-Difference Schemes, SIAM J. NUMER. ANAL. vol. 21, No. 1, 1984
- 44) 森 明巨, 岸 力: 二次元河床擾乱の伝播機構, 第31回水理講演会論文集, 1987年
- 45) 竹光信正, 松信八十男: やわらかい壁をもつ溝の中の非定常流の数値解析による研究, ながれ 5, pp 254~266, 1986年
- 46) Xu. W and Jin Z.: Numerical Simulation of High Turbulent Free Surface Flow under the Curvilinear Coordinates, Proc. Third International Symp. on Refined Flow Modelling and

Turbulent Measurements, 1988 Tokyo

清水らによる研究報告

清水康行, 西村 豊, 本間 隆, 「複断面河道における平面流況解析」, 第39回建設省技術研究会論文集, 1985年

清水康行, 本間 隆, 「河川における縦横断形状の予測手法について」, 第41回建設省技術研究会論文集, 1987年

清水康行, 板倉忠興, 岸 力, 黒木幹男, 「昭和56年8月洪水における石狩川下流部の河床変動について」, 第30回水理講演会論文集, 1987年

清水康行, 板倉忠興, 山口 甲, 「2次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション」, 第31回水理講演会論文集, 1988年

清水康行, 「実用的河床変動計算手法について」, 第41回年次学術講演会講演概要集第2部, 1986年

清水康行, 板倉忠興, 「浮遊砂を考慮した河床変動計算手法」, 北海道開発局土木試験所月報 No. 396, 1986年

清水康行, 板倉忠興, 「河川における2次元流れと河床変動の計算」, 北海道開発局土木試験所報告第85号, 1986年

Shimizu, Y. Itakura, T. Kishi, T. and Kuroki, M., "Bed Variations during the 1981-Flood in the Lower Ishikari River", Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol. 5, No 1, July, 1987.

Shimizu, Y. Itakura, T. and Yamaguchi, H., "Calculation of Two-dimensional flow and Bed Deformation in Rivers", Proceedings of XXII Congress, IAHR, 1987.

清水康行, 荒井信行, 「河口付近における洪水流況および河床・海床の変動計算」北海道開発局土木試験所月報 No. 419, 1988年

福田義昭, 清水康行: 溪間拡幅部の流れと河床変動計算について, 砂防学会研究発表会概要集, 1986年

荒井信行, 中津川誠, 清水康行: 現場のための水理学(3)~(5), 土木試験所月報, No. 413~415, 1987年

(投稿中)

Shimizu, Y. and Itakura, T., "Calculation of Bed Variation in Alluvial Channels", Journal of Hydraulic Division, ASCE

「河道設計指針(案)」, 北海道開発局, 1988年

著書

数値計算に関するもの

D. A. Anderson, J. C. Tannehill & R. H. Pletcher : Computational Fluid Mechanics and Heat

Transfer, McGraw-Hill Book Company, 1984

流体力学の物理的側面と関連づけた説明が多く、また、数学的な細かい議論を省いているため、数値解析を初めて学ぶ人にとって取り付き易い。流体力学の各分野の広範な計算法が述べられている。

Gary A. SOD : Numerical Methods in Fluid Dynamics : Cambridge University Press, 1984

数値解析の基礎理論が解説されている。数値計算法の開発を目指す研究者にとって格好の教科書。

R. D. Richtmyer & K. W. Morton : Difference Method of Initial-value Problems, John Wiley & Sons, Inc., 1967

線形および変係数の安定条件や収束性に関する詳しい説明がある。古典的な教科書。

特性曲線に関するもの

犬井鐵郎：偏微分方程式とその応用，コロナ社

犬井鐵郎：応用偏微分方程式論，岩波書店

スミルノフ：高等数学教程（第Ⅳ巻），共立出版

クーラン・ヒルベルト：数理的理学の方法 3，4，東京図書