

乱流モデルと乱流構造

木 谷 勝

1. 乱流モデル

1.1. 乱流モデルの背景

土木工学に関連する流れは、ほとんどすべて乱流（境界層、噴流などのせん断乱流）である。本稿では、せん断乱流の数学的モデリングとその構造について、基礎的な事柄を説明する。

流体を非圧縮性と仮定すれば、乱流は次の Navier-Stokes 方程式（1）（NS 方程式と略記）と連続の方程式（2）によって記述される。

$$\frac{D\bar{u}_\alpha}{Dt} \equiv \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} + \bar{u}_\beta \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \bar{X}_\alpha \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\bar{u}_\alpha$ は x_α 方向の速度成分、 $\bar{p}$ は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 $\bar{X}_\alpha$ は単位質量あたりの外力である。以下の議論では $\bar{X}_\alpha$ を無視する。

最近のスーパーコンピュータの性能向上と普及によって、乱流を NS 方程式の直接数値解析によって求める研究が行なわれている。これまで、等方性せん断乱流、平行流路内の乱流などの計算が発表されている。平行流路の乱流計算¹⁾におけるレイノルズ数 Re （流路高さと同時間平均速度の流路中心の値にもとづくもの）は6600であり、この値は工学機器あるいは自然界に生ずる乱流の中では、きわめて低い方に属している。現在の直接数値解のレイノルズ数がこの程度の大きさにとどまっているのは、流れの中に現われる最小の渦のスケール l_k が $LRe^{-4/3}$ の大きさになるからである；ここに L は流れの代表的な長さ（平行流路の流れではその高さ）である。 Re が大きくなると、 l_k は急速に減少するから、流れを数値的に正確に解析するための格子点の数は著しく増加する。文献¹⁾の計算では、主流方向（ x_1 ）とスパン方向（ x_3 ）に流れの周期性を仮定して格子数の減少をはかっているが、それでも x_1 方向に192、 x_3 方向に160、流路壁と垂直方向（ x_2 ）に129の格子分割を行っており、格子点の数は合計 4×10^6 である。この流れを CRAY-XMP で計算（ $tu_\tau/L = 0 \sim 5$ の範囲、 t ：時間、 u_τ ：摩擦速度）するのに CPU 250 時間を要している。したがって、 $Re = 10^5$ 程度の比較的低いレイノルズ数の乱流を計算するのに要する時間は、およそ CPU 1.5×10^7 時間（約1700年）であり、まったく非現実的なものとなる。

このように、NS 方程式の直接数値解析によって、レイノルズ数のはるかに高い実在乱流を計算することは、将来においても実現しそうにない。したがって、直接解析は、乱流の構造を物理的に正確

に把握するためのデータ（数値実験データ）を求める手段と考えるべきである。直接解析によれば、乱流に関するほとんどすべての物理量がえられるので、文献¹⁾の計算結果はNASAのデータベースとして保存され、研究者に配布されて、乱流の構造解明のために使用されている。

以上のことから明かなように、実用的な乱流計算のためには、何らかの乱流モデルの導入が不可欠である。現在の乱流モデルには、大別して二つのものがある。ひとつは格子平均モデル（Large Eddy Simulation, *LES*と略記）とよばれるもので、数値解析の格子間隔より長さスケールの小さい変動成分をモデル化する。スケールの十分小さな変動成分は、流れの巨視的条件によらない普遍性（局所等方性）をもつから、*LES*はさまざまなせん断乱流に対して精度よく適用できる。*LES*は平行流路内の流れ、はく離・再付着のある流れ、建物のまわりの流れなどの実用的な流れに適用され、かなりの成功をおさめている。

*LES*は乱流を非定常・3次元流れとして解析するもので、この点はNS方程式の直接解法と同じである。この方法で直接解法よりも高レイノルズ数の流れが計算できるのは、後者ほど細い格子が必要とされないからである。その反面、境界条件設定の困難、プログラミングの複雑性などの問題もある。平行流路内の乱流を例にとると、これまでに*LES*によって計算されたレイノルズ数の最大値は27600であり²⁾、直接解法のその約4倍にあたる。このときの格子点の数は 5.16×10^5 で、ILLIAC 4でCPU 24~92時間の計算時間がかかっている。現在も同様の計算が継続されており、計算時間がいく分減少しているものの、実用計算にはまだ時間がかかりすぎる。したがって、*LES*によって実際の工学的乱流を計算することも困難である。

現時点で実用可能な乱流モデルは、NS方程式に時間平均操作を行うことによって得られるReynolds方程式に基礎をおくものである。速度 $\bar{u}_\alpha$ および圧力 $\bar{p}$ を、時間平均値 U_α 、 P と変動成分 u_α 、 p に分離し、 $\bar{u}_\alpha = \bar{U}_\alpha + u_\alpha$ 、 $\bar{p} = P + p$ を式(1)、(2)に代入して各項の時間平均（ $\bar{\quad}$ で示す）をとると、

$$\frac{DU_\alpha}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta} - \frac{\partial \overline{u_\alpha u_\beta}}{\partial x_\beta} \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (4)$$

となる。これらの方程式の中には、 U_α (3個)、 P のほかに6個の独立なレイノルズ応力 $-\rho \overline{u_\alpha u_\beta}$ が未知数として含まれているにもかかわらず、方程式の数は4であるから、未知数を求めることができない。未知数を決定するためには、さらに $\overline{u_\alpha u_\beta}$ に対する方程式が必要である。これは式(1)および(2)から導くことができる

$$\frac{D\overline{u_\alpha u_\beta}}{Dt} = - \underbrace{\left(\overline{u_\alpha u_\gamma} \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\gamma} + \overline{u_\beta u_\gamma} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\gamma} \right)}_{\text{生成項 } P_{\alpha\beta}} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma}}_{\text{散逸項 } \epsilon_{\alpha\beta}}$$

$$+\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left[\overline{u_\alpha u_\beta u_\gamma}-\nu\frac{\partial \overline{u_\alpha u_\beta}}{\partial x_\gamma}+\frac{p}{\rho}(\delta_{\beta\gamma}u_\alpha+\delta_{\alpha\gamma}u_\beta)\right]$$

再配分項 $\phi_{\alpha\beta}$ 拡散項 $D_{\alpha\beta}$

(5)

となる。各項の下にその物理的意味を示してある。式(5)の右辺には、あらたに $\overline{u_\alpha u_\beta u_\gamma}$, $\overline{p(\partial u_\alpha/\partial x_\beta + \partial u_\beta/\partial x_\alpha)}$ などの未知数が含まれている。3次の相関 $\overline{u_\alpha u_\beta u_\gamma}$ は、NS方程式の非線型項に起する。このように速度変動の積の時間平均値を作ると、より高次の速度積および速度と圧力の積が未知数として現われてきて、方程式系は閉じることがない。したがって、適当な段階でこれらの未知数を既知の量で表わす近似（モデル化）を導入しなければならない。これが Reynolds 方程式に基礎をおく乱流モデルの方法である。

Boussinesq の渦粘性、Prandtl の混合距離の概念は、乱流モデルの最も簡単なものである。これらのモデルは現在でも広く使われている。とくに渦粘性は後にのべる $k-\epsilon$ 乱流モデルにも採用されている。以下に二つの代表的な乱流モデルを示す。乱流モデルおよび乱流の計算法については、大路³⁾によるすぐれた解説がある。また、乱流モデルを用いた多くの計算例が文献⁴⁾にまとめられている。

1.2 $k-\epsilon$ モデル

乱流モデルのうちで、工学的に最も広く使用されているのは、 $k-\epsilon$ 2 方程式モデルである⁵⁾。ここに、 k ($=\frac{1}{2}\overline{u_\alpha u_\alpha}$) は乱れのエネルギー、 ϵ ($=\nu(\partial u_\alpha/\partial x_\beta)^2$) はエネルギー散逸率である。このモデルでは、渦動粘性係数を ν_t として、レイノルズ応力を

$$-(\overline{u_\alpha u_\beta}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\overline{u_\gamma u_\gamma})=\nu_t\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$
(6)

とおく。乱れの積分長さスケールを l とすれば、 $\epsilon \sim k^3/l$, $\nu_t \sim k^2/l$ であるから、 C_μ を比例定数として

$$\nu_t = C_\mu k^2/\epsilon, \quad C_\mu = 0.09$$
(7)

とおく。 k に対する方程式は、式(5)の縮退をとって

$$\frac{Dk}{Dt} = -\overline{u_\alpha u_\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} - \epsilon - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\left(\frac{1}{2} \overline{u_\alpha u_\alpha} + \frac{p}{\rho} \right) u_\beta - \nu \frac{\partial k}{\partial x_\beta} \right]$$
(8)

となる。粘性の影響を無視し、式(8)に式(6)を代入する；あわせて式(8)の最右辺の拡散項を、 k の拡散によってモデル化すれば

$$\frac{Dk}{Dt} = \nu_t \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_\beta} \right)$$
(9)

がえられる。ここに、 $\sigma_k = 1.0$ である。

式(9)の右辺にある散逸率 ϵ も未知数である。 ϵ に対するモデル方程式は、 ϵ の厳密な方程式（NS方

程式から求められるが⁶⁾、複雑なのでここでは省略)の各項を適当にモデル化することによって、次のように求められる。

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\beta} \right) \quad (10)$$

ここに、 $C_{\epsilon 1}=1.45$ 、 $C_{\epsilon 2}=1.90$ 、 $\sigma_\epsilon=1.3$ である。式(10)は k のモデル方程式(9)に比較して、物理的根拠がとばしいとされている。しかし、これに代る本質的に新しい方程式はまだ提案されていない。

式(6)を式(3)の右边に代入すれば、未知数は U_α 、 P 、 k 、 ϵ の合計6個となる。方程式も全体で6個であるから、これらを解けば流れが求められる。 $k-\epsilon$ モデルは、乱流境界層、噴流、後流などの基本的な乱流せん断層のほかに、ディフューザ、急拡大部のある管内流、衝突噴流、内部噴流などのかなり複雑な流れにも適用され、良い成果をあげている。また、計算の手間も多くはないので、現在実用的な目的に広く使用されている。

1.3 応力方程式モデル

$k-\epsilon$ モデルでは等方的な渦粘性係数を用いているので、レイノルズ応力の非等方性を十分正確に表現できない。このことは、流路の曲率、回転などの影響によって、2次流れが発生し、レイノルズ応力の非等方性が大きいときに問題となる。また、 $k-\epsilon$ モデルでは、歪速度 $\partial U_\alpha / \partial x_\beta + \partial U_\beta / \partial x_\alpha$ が0のところではレイノルズ応力 $-\rho \overline{u_\alpha u_\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) が0であることを仮定しているが、壁噴流、上下壁で粗さの異なる流路内の流れなどでは、そのようにならない部分がある。これらの $k-\epsilon$ モデルの問題点を解消するには、渦粘性係数を用いない乱流モデルを採用しなければならない。これが、応力方程式モデル⁷⁾であって、式(5)をそのままモデル化する。この方法では、 U_α 、 P 、 $\overline{u_\alpha u_\beta}$ 、 ϵ が未知数となる。式(5)の生成項 $P_{\alpha\beta}$ は、求めるべき未知数をそのまま含んでいるから、モデル化の必要がない。散逸項、再配分項および拡散項は次のようにモデル化される。

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \epsilon \quad (\text{乱れの局所等方性を仮定}) \quad (11)$$

$$\phi_{\alpha\beta} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_\alpha u_\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \overline{u_\gamma u_\gamma} \right) - C_2 \left(P_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} P_{\gamma\gamma} \right) \quad (12)$$

$$D_{\alpha\beta} = C_3 \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_\gamma u_\alpha} \frac{\partial \overline{u_\alpha u_\beta}}{\partial x_\alpha} \right) \quad (13)$$

定数 C_1 、 C_2 、 C_3 の値は、基本的な乱流せん断層の実験結果と計算結果を比較することによって、 $C_1 \approx 1.5$ 、 $C_2 \approx 0.6$ 、 $C_3 \approx 0.25$ と決定されている。一方、 ϵ に対する方程式としては

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_\alpha u_\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + C_\epsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_\alpha u_\beta} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_\beta} \right) \quad (14)$$

が用いられる；ここに， $C_{\epsilon 1}=1.45$ ， $C_{\epsilon 2}=1.90$ ， $C_{\epsilon}=0.15$ である。

応力方程式モデルの適用性は，当然 $k-\epsilon$ モデルのそれよりも増加しており，はく離を伴う流れ，非円形断面管内の2次流れ（Prandtlの第2種の2次流れ），縮流などの主流の歪による等方性乱流の変形，物体の近傍後流²¹⁾（図1）など，複雑な流れ場に適用され，成功をおさめている。しかし， $k-\epsilon$ モデルに比較してプログラミングに手間がかかり，計算時間も長くなる。このような点を改善するために， $k-\epsilon$ モデルと応力方程式モデルの間にあるものとして，代数式応力モデル⁸⁾⁹⁾が考案された。これは， $\overline{u_\alpha u_\beta}$ ， k ， ϵ などの未知数の間の関係を，微分方程式の代りに代数式で与えるものである。しかし，モデル化の自由度が大きいため，まだ未完成の状態にある。

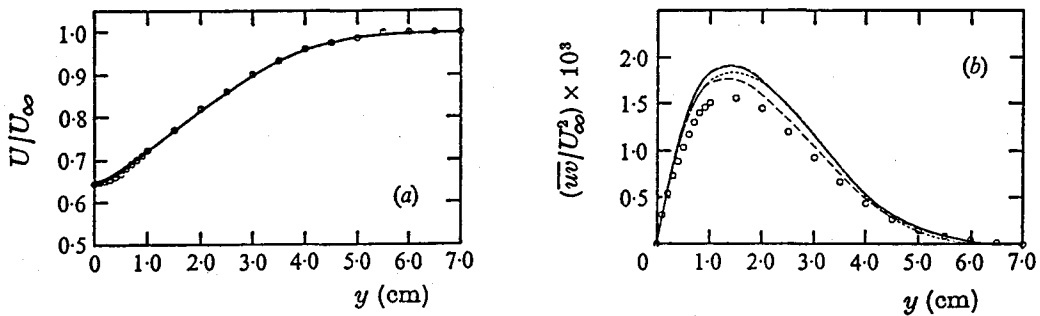


図1 主流に並行な平板の後流 (a)平均速度分布，(b)レイノルズせん断応力分布²¹⁾．O，実験データ；----- $k-\epsilon$ モデル；他の曲線は応力方程式モデル

1.4 乱流モデルの問題点

以上のように，Reynolds 方程式に基礎をおく乱流モデルは，広い範囲の実用的な流れを計算できる段階に達しているように見える。これまでの計算は，あらかじめ実験データが得られている流れを対象としたものが大部分である。乱流モデルに含まれている定数の値を適当に調整することによって，特定の流れに対する実験結果と計算結果をかなりの程度に一致させることができる。しかし，まったく新しいタイプの流れに対する計算結果が，疑義なく受け入れられるほどには乱流モデルの信頼性は高くない。1981年に代表的ないくつかの複雑乱流に対する，67の乱流モデルの計算結果と実験結果の比較が行われた¹⁰⁾。その結果，すべてのモデルにそれぞれの長所と欠点があり，最適のものはないとされている。したがって，乱流モデルには今後とも継続して改良が加えられなければならない。

乱流モデルによる流れの計算の問題点はいくつかあるが，そのうちの一つは，モデル方程式を階差法によって解くときの数値誤差の問題である。例えば，対流項に対する数値安

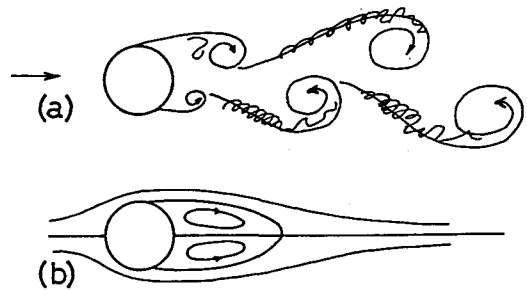


図2 円柱の乱流渦列後流中の(a)渦構造と (b)時間平均流線分布

定性を高めるために上流差分を用いると、流れの領域の中に大きな数値粘性誤差のある部分が生ずる。しかし、この問題は階差法に工夫を加えることによって、しだいに改善される方向にある。

もう一つの、より本質的な問題点は、乱流モデルと乱流中の渦構造との関係である。Reynolds 方程式に基礎をおく乱流モデルは、時間平均された流れの場を与えるものである；そのために乱流中の渦構造とくに組織的構造が正當に反映されていない。これは、乱流モデルが主として統計的な考察にもとづいて構成されているからである。たとえば、図2のように、実際には(a)のような渦構造をもつ流れも、平均化す

れば(b)のようになってしまう。問題となるのは、(a)の渦構造が(b)の時間平均流にも強い影響を与えていることである。したがって、乱流モデルにおいても、モデル化の過程で(a)の構造を取りこまない限り、信頼性の高いモデルはえられないと考えられる。

後に説明するように、柱体の乱流渦列後流（カルマン渦列）においては、乱流エネルギーの大きい領域は渦の中心部にあり、レイノルズせん断応力の大きい領域は、渦と渦の間にある。現在の乱流モデルでは、これらの領域をぬりつぶした平均的流れパターンを求めるために、その計算結果が実験と一致することは必ずしも期待できないことなのである。

このような渦構造を陽に取りこんだ「構造論的モデリング」はまだその緒についたばかりである。わずかに、比較的渦構造のわかっている壁乱流のモデリングが、笠木ら¹¹⁾（図3）によって行なわれている程度である。構造論的モデリングを行うためには、工学的に重要な乱流せん断層の基本的なものについて、その主要な渦構造がわかっていなければならない。（主要な渦構造は乱流せん断層ごとに異っている可能性もある。）これが、乱流モデルと乱流構造の接点である。

2. 乱流せん断層の組織的構造

2.1 はじめに

将来の乱流モデルの構成には、乱流せん断層の中の渦構造（組織的渦構造とよぶ）に対する知識が

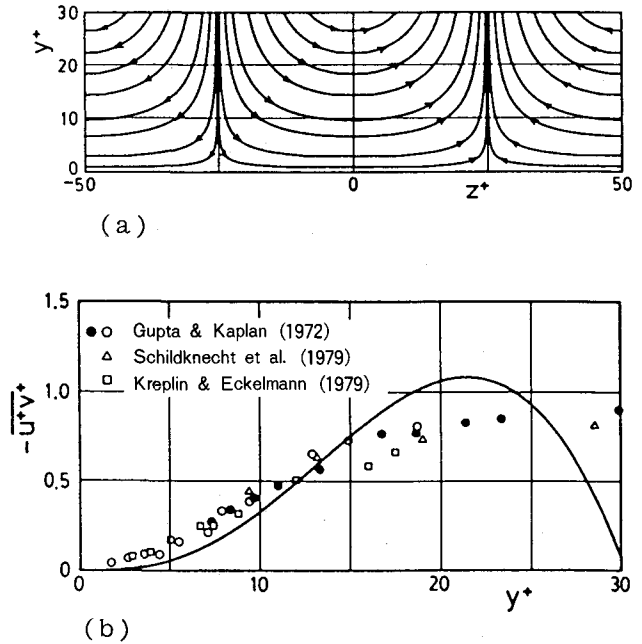


図3 壁乱流の構造論的モデリング¹¹⁾。(a)擬縦渦構造モデル、(b)レイノルズせん断応力分布。——，モデルによる計算結果；○，●，△，□，実験結果

必要であることを説明した。しかし、組織的構造の研究は、単に乱流モデルの構成のためだけにあるのではない。むしろ、組織的構造は、乱流エネルギーの生成・消散の機構、乱流中におけるさまざまなスケールの渦の役割など、乱流の本質的な物理的側面を解明する上で重要である¹²⁾。さらに、流体の混合、化学反応などにおける組織的構造の役割も重要である。

組織的渦構造の工学的応用の一つは、乱流せん断層の新しい制御の可能性を与えることである。乱流境界層の摩擦抵抗を減少させるリプレット¹³⁾、LEBD¹⁴⁾ (Large eddy breaking device) ; 適当な人工的攪乱による、噴流の拡散・混合作用の強化¹²⁾、などは組織的構造の知識をふまえた新しい乱流の制御法である。

以下に、乱流後流およびはく離・再付着流れの二つの乱流せん断層を例にとり、組織的構造およびその力学的役割について説明する。後者は、いわゆる複雑乱流¹⁵⁾の範ちゅうに入るものである。

乱流中の速度変動を一般に S と書けば、これは時間平均 $\bar{S}$ 、組織的構造の運動・変形による成分 $\tilde{s}$ 、不規則変動成分 s' の合成されたものであるから、

$$S = \bar{S} + \tilde{s} + s' = \bar{S} + s, \quad s = \tilde{s} + s' \quad (15)$$

と書ける。時間平均流が2次元の乱流せん断層に対して、主流の方向を x 、これに垂直な方向を y 、両者に垂直な方向 (スパン方向) を z とし、対応する速度成分を、 U 、 V 、 W とすれば、レイノルズ垂直応力 $\rho \overline{u^2}$ 、せん断応力 $-\rho \overline{uv}$ は

$$\rho \overline{u^2} = \rho \overline{\tilde{u}^2} + \rho \overline{u'^2}, \quad -\rho \overline{uv} = -\rho \overline{\tilde{u}\tilde{v}} - \rho \overline{u'v'} \quad (16)$$

となる；すなわち組織的構造による成分と、不規則速度変動による成分との和で表わされる。したがって、レイノルズ応力を正しく予測しうするためには、これらを適切に乱流モデルに取りこまなければならない。 $\overline{\tilde{u}\tilde{v}}$ 、 $\overline{v'v'}$ の大小関係は、乱流せん断層の型によって異なる。たとえば、乱流境界層の壁面近くの流れの生成には、バーストとよばれる組織的構造の寄与が大きい。これに対して、柱体の乱流渦列後流では、不規則変動の寄与の方が大きい；しかし、後に示すように、この場合でも大きな不規則成分の発生のもとになっているのは、組織的構造によってもたらされる歪速度の場である。

2.2 渦列後流中の組織的構造

レイノルズ数が $100 \sim 10^6$ 程度の範囲では、円柱、垂直平板などの柱体 (2次元物体) から周期的な渦放出が生じ、これらが物体の下流に交互に配列されて、カルマン渦列が形成される。図4にその概略と記号の定義を示してある。後流中の速度変動 u には、図5に示すように、周期的な速度成分 u_c と、これに重畳された不規則成分 u' がある。周期成分が組織的構造 (ここでは円柱の軸とおおむね平行な軸をもつ渦という意味で横渦とよぶ) によるものである。組織的構造による成分と不規則成分の相対的重要性は、図6に示す乱流エネルギーとレイノルズせん断応力の分布¹⁶⁾からも明らかである；すなわち、乱流渦列後流においては、不規則成分の寄与の方が大きい。不規則成分は、実際にはまった

く不規則なのではなく、周期的変動成分 $\bar{v}$ の位相（たとえば $\bar{v} = 0$ の時点から測った時間）ごとに異なる統計的性質をもっている。この時間を横軸に、流れと直角方向の座標 y あるいは z を縦軸にとった平面内に $\bar{v}^2, \langle \bar{v}^2 \rangle$ ($\langle \rangle$ は位相平均を意味する) などの分布を求めることによって、組織的構造および不規則成分の特性を知ることができる。

組織的構造とともに下流に移動する座標系（速度 U_c ）からみると、これによる流れ場 $(\bar{u}, \bar{v})$ は図7 a のようになる¹⁶⁾。図7の横軸は時間 t であるが、Taylor 仮説によって、これを主流方向の座標 $x (= -U_c t)$ に変換することができる。この速度ベクトル $(\bar{u}, \bar{v})$ 場には、鞍部点 (×印) と節点 (+印, 渦中心) が現われている。これらの点は、組織的構造と不規則成分の特性を理解する上で、重要な役割をもつものである¹⁷⁾¹⁸⁾。

速度変動エネルギー $q^2 (= u^2 + v^2 + w^2)$, ... およびレイノルズせん断応力 uv の位相平均分布 $\langle q^2 \rangle, \dots, \langle uv \rangle$ を図8および図9に示す; 図中の(b)は組織的構造による成分, (c)は不規則変動による成分である。これら

を一定の y について横軸（時間）方向に平均したものが、乱れのエネルギー $\overline{q^2}, \overline{q^2}, \overline{q^2}$ およびレイノルズせん断応力 $\overline{uv}, \overline{uv}, \overline{uv}$ である。図8および図9の分布で注目されるのは、(i)不規則成分のエネルギーは組織的構造の中心で最大値をとること, (ii)不規則変動のせん断応力 $\langle u'v' \rangle$ は鞍部点近くで極大値（負のときは極小値）をとること, である。このように、不規則成分は組織的構造の内部およびその周辺で、後者の作る歪速度場に対応した特徴的な分布をとる。たとえば、図7 b にみ

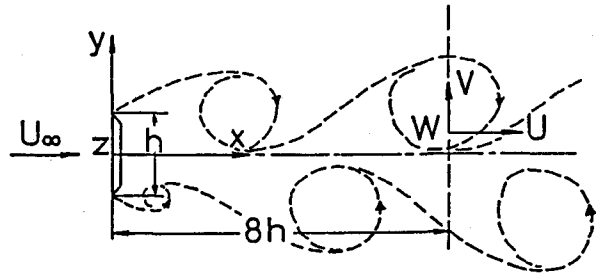


図4 渦列後流と記号の定義

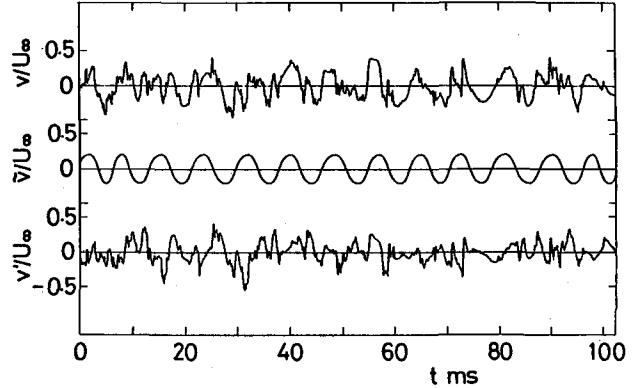


図5 後流中心の y 方向速度変動 ($x/h=8.0, y/h=0$)

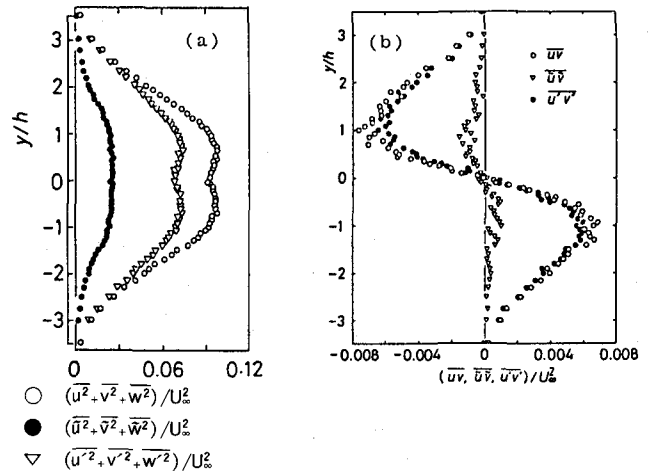


図6 (a)エネルギーと(b)せん断応力の分布 ($x/h=8.0$)

られるように、レイノルズ応力 $\langle u'v' \rangle$ が極大値をとる鞍部点の近くでは、主歪速度ベクトルは極大値を取り、しかも主流と 45° の方向を向いている。

このような性質をもつ不規則成分を生ずる実質的な構造はどのようなものであろうか。現在のところ、組織的構造の間をつなぐ、図10 a のような縦渦があり、これが鞍部点の歪速度場で伸長を受けるものと解釈されている¹²⁾。この縦渦の発生原因はまだ明らかにされていないが、その存在自体は流れの可視化実験および NS 方程式の直接解法によってほぼ確かめられている。縦渦は、互に反対方向に回転する渦対を単位にしているようにみえる (図10 a)。ただし、縦渦の存在によって、横渦も変形していると考えるのが自然であるから、実際の横渦と縦渦の関係は、図10 b のようになると推定される¹²⁾。縦渦は図11のように、隣り合う横渦ごとに互いちがいに配列されている可能性が強い¹⁶⁾。ただし、このような縦渦の存在、横渦との関連などを、熱線流速計などによって定量的に測定した例はまだ報告されていない。

横渦および縦渦によって、後流外部の物体が後流中に取りこまれる (連行) 過程や乱流エネルギーの生成・輸送・混合の過程がよく理解できる; 概略を図12に示してある¹⁸⁾。縦渦は鞍部点で主流とは 45° の方向に引き伸ばされる (伸長, Stretching) ので、伸長方向と直角方向の速度変動が強化される。これが、レイノルズ応力 $\langle u'v' \rangle$ が鞍部点近くで極大値をとる理由である。ここで生成された乱れは、鞍部点の流出方向に輸送され、横渦の渦度と混合し、しだいに横渦の中心部に集積される。この結果、不規則成分のエネルギー $\langle q^2 \rangle$ は、横渦の中心部で極大値をとることになる。また、流体は鞍部点の流入方向に引きこまれ、その流出方向に沿って輸送さ

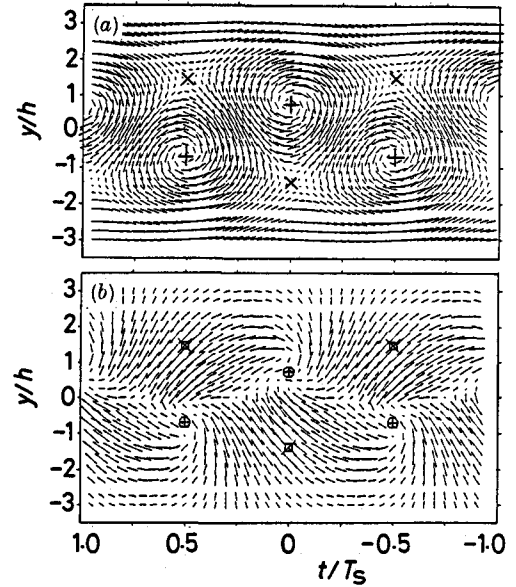


図7 組織的構造の (a) 変動速度ベクトルと (b) 主歪速度ベクトルの分布

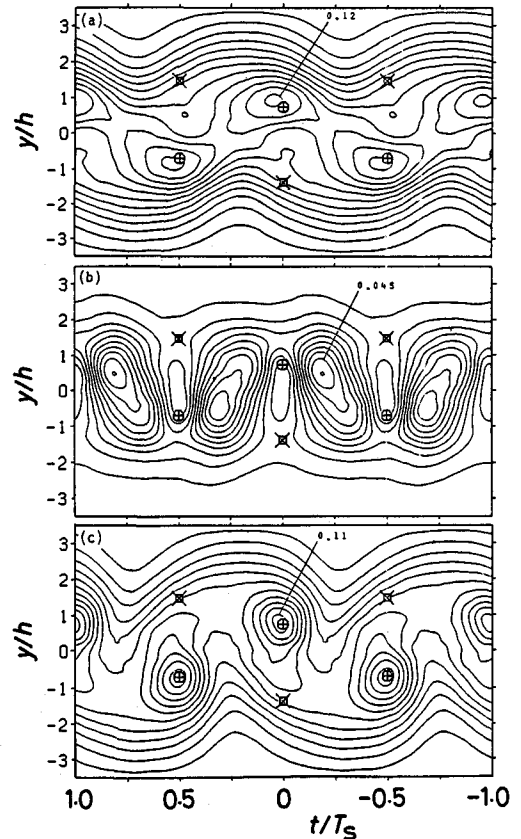


図8 エネルギー分布 (a) $\langle q^2 \rangle / U_\infty^2$, (b) $\bar{q}^2 / U_\infty^2$, (c) $\langle q'^2 \rangle / U_\infty^2$

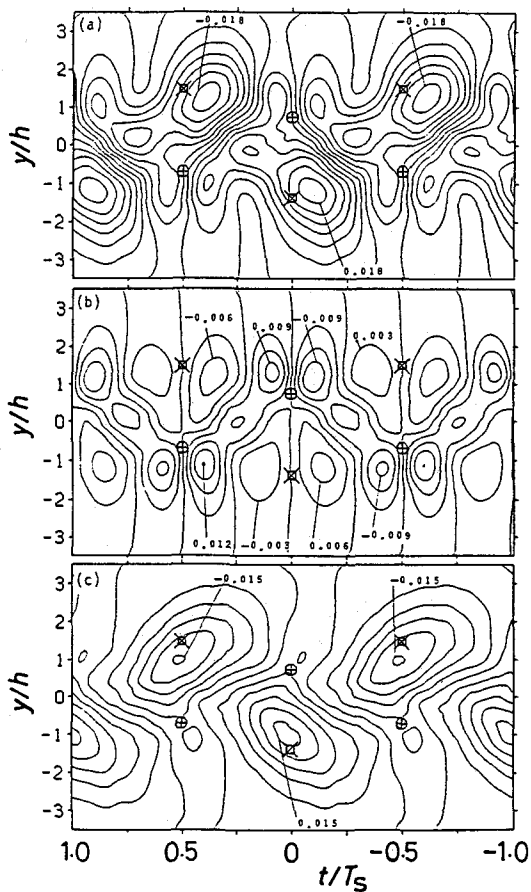


図9 せん断応力分布(a) $\langle uv \rangle / U_\infty^2$,
(b) $\langle \bar{u}v \rangle / U_\infty^2$, (c) $\langle u'v' \rangle / U_\infty^2$

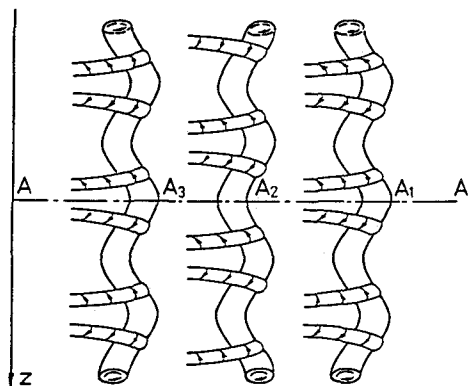


図11 相隣る横渦の間の縦渦の配列

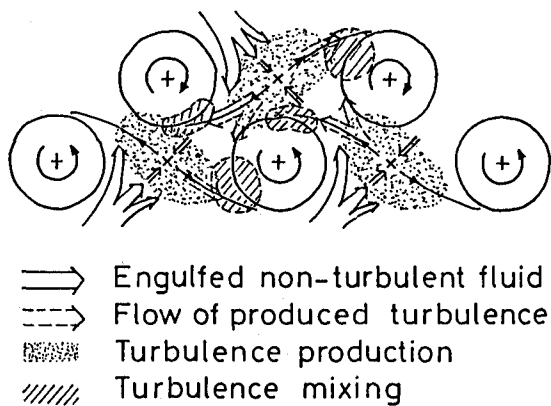


図12 組織的構造の力学的役割

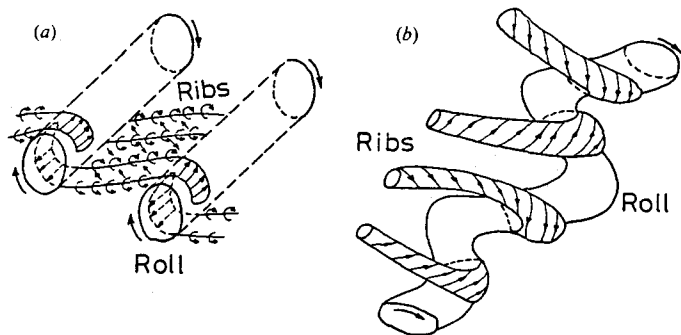


図10 (a)横渦と縦軸の関係
(b)実際に近い配列

れて横渦に取りこまれる。乱流のモデリングの物理的妥当性を高めるためには、図7～9のような位相平均された場を表現できるようにしなければならないであろう。先にのべたように時間平均された流れのパターンは、位相平均された流れのパターンとは著しく異っているからである。

2.3 乱流はく離泡の組織的構造

より複雑な乱流せん断層の例として、はく離・再付着流れ（はく離泡とよぶ）を取りあげる。はく離泡は、物体表面からはく離した流れが、下流で物体表面に再付着するときに形成される；代表的なものとしては、直角に切り落された角をもつ(i)厚板あるいは(ii)円柱の前縁はく離泡、(iii)後向きステップ下流のはく離泡などがあげられる。ここでは、(i)の場合¹⁹⁾²⁰⁾について説明する。

図13に流れの概略を示す； x_R は再付着点で、破線ははく離泡内の時間平均再循環流を表わす。はく離泡の内部およびそのすぐ下流には、図14に示すような3次的渦塊（組織的構造）があり、その運動がはく離泡における速度変動や圧力変動を作り出している。渦塊は合体を繰り返して成長するので、下流ほどその大きさは増加する。それと同時に、スパン方向（ z 方向）の不規則性（変形）も増大している。再付着点（より正確にいえば再付着線） x_R およびその周辺における渦構造が工学的にはとくに重要である；この領域で大きな速度変動、圧力変動、熱伝達、物質移動などが生ずるからである。

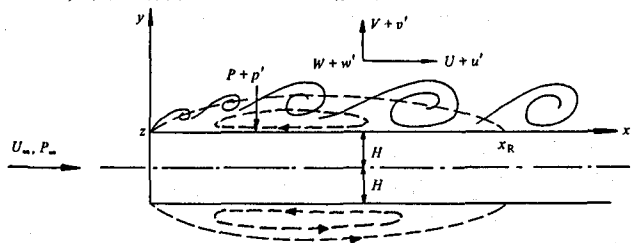


図13 流れの概略と記号の定義

はく離泡内の流れには、渦塊の運動に伴う非定常性があり、時間平均的には逆流している位置においても、瞬間的にみれば逆流と順流がくり返されている。単位時間あたりの逆流時間の割合を、逆流率 I_r とすれば、これは壁面近くで図15のような分布をとる。また、非定常性の強さに対する一つの指標として、壁面近くの主流方向速度成分が負から正（あるいは正から負）に切り換える周波数 f_s をとると、これは図15のような分布をとり、再付着点で極大となる。この極大値は、渦塊が再付着点を次々と通り過ぎる周波数を与えている。なお、滑らかな曲率変化をもつ壁面から、乱流境界層がはく離するときにも、はく離点ではほぼ同じ状態が現われる。

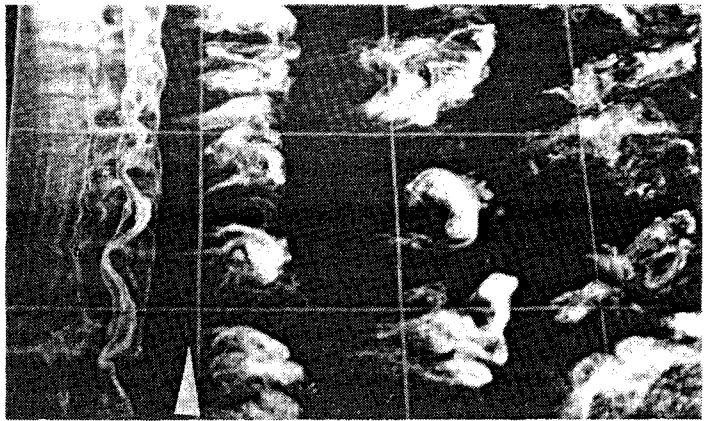


図14 はく離泡内の組織的渦構造
△印；再付着線，レイノルズ数630

再付着点の近くにおける組織的構造（渦塊）が、位相平均法によって求められている。渦塊の運動

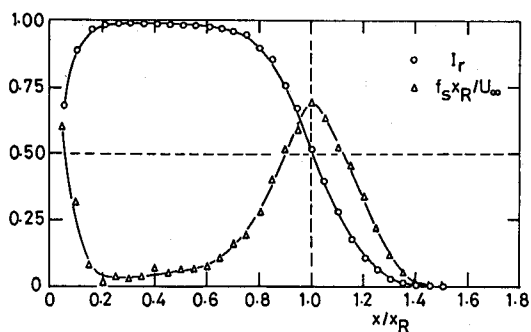


図15 逆流率 I_r と流れ方向転換周波数 f_s の主流方向分布 ($y/x_R=0.005$)

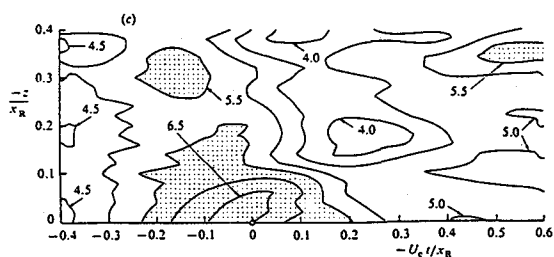
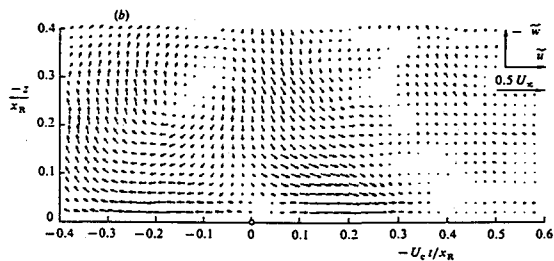
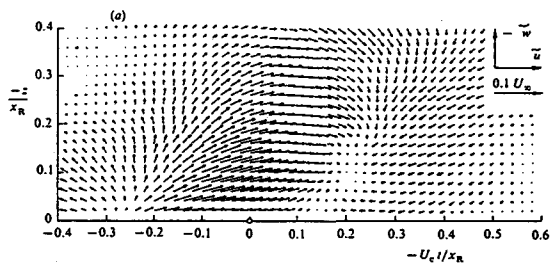


図17 再付着線の上側における (a) 組織的渦構造の変動速度ベクトル ($y/x_R=0.32$), (b) 同 ($y/x_R=0.16$), (c) 高周波乱流エネルギー ($y/x_R=0.16$) の位相平均分布

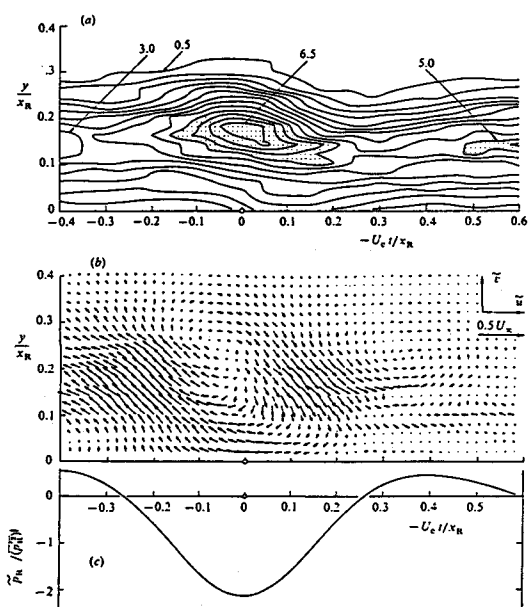


図16 再付着線の上側における (a) 高周波乱流エネルギー, (b) 組織的構造の変動速度ベクトル, (c) 表面圧力変動波形の位相平均分布

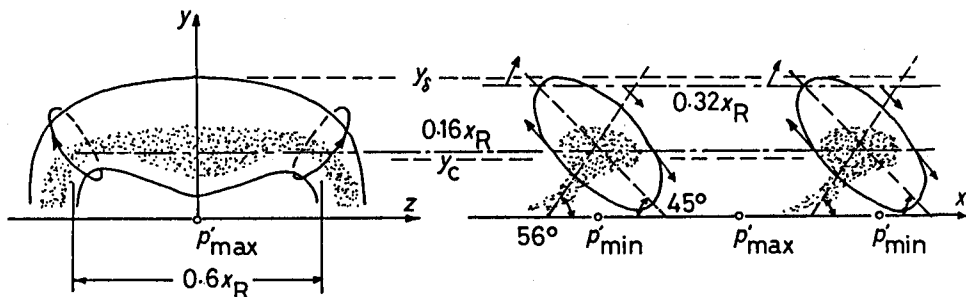


図18 再付着点の近くにおける組織的構造の概略

は、再付着点に強い表面圧力変動を生じ、渦塊のほぼ真下で極小値をとる。したがって、再付着点の圧力変動 p_R' の極大値が現われる時間を基準として、再付着点近くでの速度変動を位相平均することによって、渦塊の構造を知ることができる。図16 a は、変動エネルギー u^2 の高周波成分（Kolmogorov 周波数の程度）の位相平均 $\langle u_T'^2 \rangle$ であり、これの大きいところは渦度の大きいところに対応するものと解釈される。

図16 b は速度ベクトル $(\bar{u}, \bar{v})$ の分布である。横軸の原点 ($t = 0$) の上方には、時計方向に回転する流れが現われており、その中心部分で $\langle u_T'^2 \rangle$ が極大値をとっているの、この回転系は実際の渦塊を表わしている。一方、図17 a, b は、はく離泡の外縁部および中心部の高さにおける、壁面に平行な面内での速度ベクトル $(\bar{u}, \bar{w})$ 、図17 c は高周波エネルギー $\langle u_T'^2 \rangle$ の分布である。はく離泡の中心部においては、 $(-U_c t, z) \doteq (-0.15, 0.3)$ の位置に時計方向に回転する流れがあり、その中心部で $\langle u_T'^2 \rangle$ が極大値をとる。これらの位相平均分布は、図18に示すような組織的渦塊の存在を示唆している。この組織的渦塊が、つぎつぎと下流方向に運動することによって、

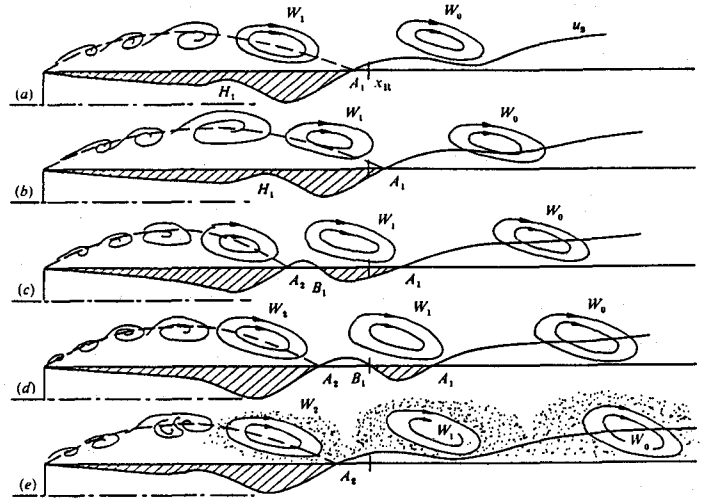


図19 組織的渦塊の運動とはく離泡の非定常性

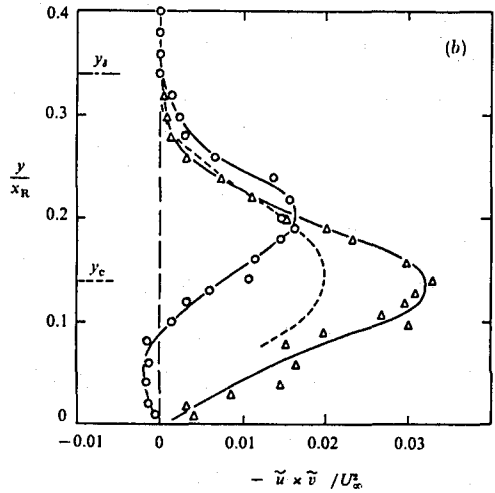
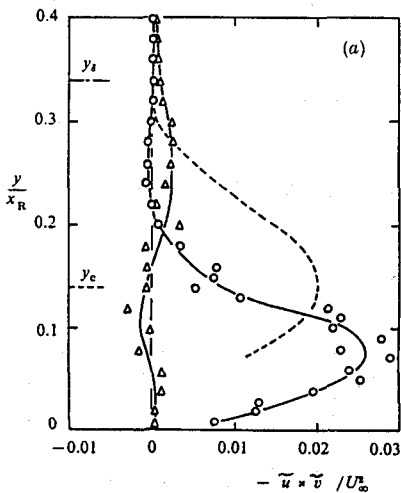


図20 組織的渦構造とレイノルズ応力生成の関係。(a) $\triangle$, 渦塊の中心部 (p_R' が極小) ; $\circ$, 2つの渦塊の中間 (p_R' が極大), (b) $\triangle$, 渦塊の後縁 (dp_R'/dt が極大) ; $\circ$, 渦塊の前縁 (dp_R'/dt が極小), 破線は時間平均値 $-\overline{uv}$ 。

はく離領域内の表面近くの流れは、図19のように時間的に変化する；斜線をほどこした部分は、瞬間的な逆流領域である。

組織的渦構造とレイノルズせん断応力との関係を図20に示す。図において再付着点における壁面圧力が極小になるのは、渦塊の中心部においてであるが、この位置ではせん断応力はほとんど生成されない。一方、 p_R が極大となるのは、2つの渦塊のほぼ中間点においてであるが、ここでは外部流体の流れこみがあるために、壁面近くで大きなせん断応力が生ずる。また、図20 bにみられるように、渦塊の後縁でせん断応力の生成が大きく、前縁での生成がこれについている。

はく離泡内の組織的渦構造が、再付着点を通過する周期性が明確ではないために、組織的構造に重畳されている不規則成分の特性は、まだ求められていない。

3. あとがき

本稿では、乱流のモデリングの必要性と、現在工学的な計算に多く用いられている乱流モデル方程式について説明した。さらに、乱流せん断層中の組織的構造とその力学的役割を、2次元乱流渦列後流および乱流前縁はく離泡を例にとって説明した。乱流のモデリングは、理想的に言えば、このような組織的構造の特徴をその中に組みこんだもの、あるいはそれが自動的に組みこまれているもの（例えば *LES*）であるべきであろう。乱流の構造論的モデリングは、まだその緒についたばかりである。

参 考 文 献

- 1) Moin, P. and Moser, R. : Turbulence statistics in fully-developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133 – 166, 1987.
- 2) Moin, P. and Kim, J. : Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, Vol. 118, pp. 341 – 377, 1982.
- 3) 大路通雄：乱流の計算，谷一郎（編）流体力学の進歩－乱流，東京，丸善，pp. 129–176，1980
- 4) 木谷 勝：乱流のモデルと計算法に関する調査研究（昭和62年度科学研究費補助金（総合研究 A）成果報告書），1988.
- 5) Launder, B. E. and Spalding, D. B. : *Mathematical Models of Turbulence*. London – New York, Academic, 1972.
- 6) Daly, B. J. and Harlow, F. H. : Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 2634 – 2649, 1970.
- 7) Launder, B. E., Reece, G. J. and Rodi, W. : Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, Vol. 68, pp. 537 – 566, 1975.
- 8) Rodi, W. : A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM*, Vol. 56,

T219 - T221, 1976.

- 9) Baldwin, B. S. and Lomax, H. : Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. AIAA paper 78 - 257, 1978.
- 10) Kline, S. J., Cantwell, B. and Lilley, G. M. (Eds.) : 1980 - 1981 AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows. Vol. 2, Stanford Univ. Press, 1982.
- 11) 笠木伸英, 平田賢, 西野耕一 : 壁面乱流の壁近傍領域の擬縦渦構造と構造論的モデリング. 日本機械学会論文集, 51巻, pp. 2272-2280, 1985.
- 12) Hussain, A. K. M. F. : Coherent structures and turbulence. J. Fluid Mech., Vol. 173, pp. 303 - 356, 1986.
- 13) Tani, I. : Drag reduction by riblets viewed as roughness problem. Proc. Japan Acad., Vol. 64, Ser. B. pp. 21 - 24, 1988.
- 14) Corke, T. C., Guezennec, Y. and Nagib, H. M. : Modification in drag of turbulent boundary layers resulting from manipulation of large-scale structures. Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 72, pp. 128 - 143, 1980.
- 15) Bradshaw, P. : Complex turbulent flows. Theoretical and Applied Mechanics. W. T. Koiter, ed., North-Holland Publishing Company, pp. 103 - 113, 1976.
- 16) Kiya, M. and Matsumura, M. : Incoherent turbulence structure in the near wake of a normal plate. J. Fluid Mech., Vol. 190, pp. 343 - 356, 1988.
- 17) Cantwell, B. and Coles, D. : An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. J. Fluid Mech., Vol. 136. pp. 321 - 374, 1983.
- 18) Hussain, A. M. K. F. and Hayakawa, M. : Eduction of large-scale organized structures in a turbulent plane wake. J. Fluid Mech., Vol. 180, pp. 193 - 229, 1987.
- 19) Kiya, M. and Sasaki, K. : Structure of a turbulent separation bubble. J. Fluid Mech., Vol. 137, pp. 83 - 113, 1983.
- 20) Kiya, M. and Sasaki, K. : Structure of large-scale vortices and unsteady reverse flow in the reattaching zone of a turbulent separation bubble. J. Fluid Mech., Vol. 154. pp. 463 - 491, 1985.
- 21) Pope, S. B. and Whitelaw, J. H. : The calculation of near-wake flows. J. Fluid Mech., Vol. 73, pp. 9 - 32, 1976.