

流出予測法の実例

星 清

1. は じ め に

治水対策はハード面の整備とソフト面の整備に大別される。ハード的対策とは、文字通り、ダム、遊水地、河川改修等の治水施設の整備向上を図り、洪水に対する安全度を高めることを目的としている。治水施設整備の現状をマクロ的に捉えれば、大河川では当面の整備目標を戦後最大洪水対応に置いているが、その整備率は約60%である。また、中小河川の都市域では整備目標を時間雨量50mm対応としているが、その整備率も約50%と必ずしも高水準とは言えない。

さらに、治水施設整備が進むにつれて、人口・資産が洪水防御対象区域に集中する傾向がますます顕著となってきており、とりわけ大都市周辺への集中が著しい。たとえば、全国第2位の流域面積をもつ石狩川流域は北海道の約20%の面積を有しており、この流域には280万人（北海道全人口の約50%）が生活を営み、資本の高度集積化が進んでいる地域である。上記の現象は我が国だけの問題ではなく、世界の大都市圏がかかえる大きな悩みの種でもある。治水施設の整備水準の向上は一朝一夕にできるものではなく、財政上の問題、時間的制約、社会的要因に強く影響される。

一方、ソフト的対策とは、洪水生起時の被害を極力最小限にとどめるため、的確かつ迅速な洪水情報収集伝達体制の整備・強化を図ることを目的としている。洪水は自然現象である降雨に起因する以上、異常出水が発生する可能性は常に存在する。かりに、洪水氾濫という事態が生ずれば、人口・資産が高度に集中化している河川流域では、従来にも増して壊滅的な被害を受ける危険にさらされている。このため、近年、洪水予報・水防警報システム開発の重要性が認識されるようになってきている。建設省が全国的規模で毎年行っている「水防演習」、 「出水時の情報伝達演習」、 「ダム管理演習」も治水のソフト的対策の一環として位置づけられる。

北海道開発局においても、ここ数年来、電子計算機や通信機器の進歩と相まって、洪水情報の収集・処理・伝達を機能的に行うことを目的とした河川情報システムの導入がはかられている。同時に、洪水生起時の災害防止・軽減のために、的確かつ迅速な洪水予報を確立することを目的とした、いわゆる洪水オンライン予測システムの開発が進められている。本報告ではとくに、石狩川で実運用されているカルマン・フィルター理論を取り入れた洪水予測手法を紹介する。

2. カルマン・フィルターの基本概念

カルマン・フィルター理論は、1960年にカルマン(Kalman)によって発表された論文に由来する。¹⁾この理論は、本来機械系の線形システムの最良状態変量推定法として考え出されたものである。カルマン・

フィルター理論を初めて洪水流出のオンライン予測問題に適用したのは日野である。^{2),3)}その後、水工学の多くの問題にカルマン・フィルターが適用され、その有効性が検証されている。^{4),5)}

カルマン・フィルター理論はむずかしすぎてよく理解できないという声がしばしば聞かれる。確かに、原論文¹⁾は難解であり、フィルター理論の誘導過程を理解するためには相当の確率過程論の習熟が必要である。しかしながら、カルマン・フィルター理論の一連の公式結果はそうむずかしいものではなく、行列演算の基礎知識があれば、容易にプログラムを組むことができることも事実である。実務者は行列演算を毛嫌いする向きがあるが、行列演算には規則があるわけで、みずから行列を展開してみることを奨める。むしろ、カルマン・フィルター理論を実際に適用する際の課題は、当該問題をどのように理論適用可能なように定式化するにかかっており、この作業が終れば、一連の公式を機械的に運用していけばよいことになる。

カルマン・フィルター理論がどうして洪水予測に適しているかをまず知ってもらう意味で、この理論のいくつかの特徴を以下に示すことにする。

- (a) 実務者が実際に洪水予測を行う場合、予測した値と実測値との間に差が生ずれば、最新の観測値に基づいて、その差異に手加減を加えて次の予測値を出そうとする意識が働くはずである。カルマン・フィルターは人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行える。したがって、洪水予測にあまり熟練を要しない。
- (b) 洪水時には、時々刻々受信される水文テレメータ情報を活用して、流出予測の信頼性を高める必要がある。カルマン・フィルターはオンライン予測に威力を発揮できる手法である。
- (c) どのような方法によっても予測値には必ず誤差が伴う。カルマン・フィルターは予測値の誤差分散（予測精度）を自動的に算定する。したがって、予測値の信頼区間を知ることができる。
- (d) 最良推定値を得る方法として回帰分析法が多用されている。この方法では長いデータを必要とする場合が多い。カルマン・フィルターは最新の観測値により推定値を逐次更新してゆく。したがって、過去の長い水文量情報を必要としないので、計算機のデータ容量が少なくてすむ。

カルマン・フィルター理論は洪水逐次予測を行う上で上記4個の特徴を有しているが、その理論がどのような構造式から成り立っているかを理解してもらうために、簡単な例題をとりあげる。今、洪水予測問題に焦点をしばって、われわれが流量を予測する手段としてどんな方法があるかを考えてみると、下記の2つの方法がまず頭にうかぶ。

(Ⅰ) なんらかの数学的モデル（たとえば、貯留関数法）を使う方法

(Ⅱ) 水位観測から水位～流量曲線を用いて流量に変換する方法

実は、カルマン・フィルター理論は上記2方法による情報に基づいて流量推定値の最適値を得ようとするものである。換言すれば、上記2つの方法によっても、われわれは流量の“真値”を知ることにはできず、必ず誤差を伴う。われわれは“真値”にできるだけ近い推定値を得ようとしているのである。カルマン・フィルター理論においては、(Ⅰ)をシステム方程式、(Ⅱ)を観測方程式と呼んでいる。

(I)の方法によるシステム方程式は、次のように定式化される。

$$z_1 = x + v_1 \quad (1)$$

ここで、 z_1 ：数学的モデルによる流量の推定値、 x ：流量の“真値”(われわれはわからない)、 v_1 ：モデル化による誤差

洪水流出解析に用いられている流出モデルは相当数にのぼる。したがって、採用流出モデルによって流量推定値 z_1 も異なり、それに伴ってモデル誤差 v_1 も変化することがわかる。カルマン・フィルター理論においては、 v_1 の値を知る必要はない代わりにその平均値と分散を規定しなければならない。すなわち、

$$E(v_1) = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_1^2 = E(v_1^2) \quad (3)$$

(2)式は不偏推定値であるための条件であり、(3)式はモデル誤差の分散である(v_1 の平均値がゼロであることに注意する)。また、 $E(\cdot)$ は期待値演算子である。

(II)の方法による観測方程式は、次のように定式化される。

$$z_2 = x + v_2 \quad (4)$$

ここで、 z_2 ：水位～流量曲線の変換から得られる流量推定値、 x ：(1)式と同様に流量の“真値”、 v_2 ：流量観測精度に依存する観測誤差

水位～流量曲線作成にあたっては、低水・高水の広範囲にわたって流量観測がなされていることが望ましい。最近、洪水観測体制が整備されつつあるが、出水時の流量観測には種々の困難が伴う。もし仮に水位～流量曲線が低水時の流量観測資料のみによって作成されている場合には、洪水ピーク近傍での流量推定精度は相当に低いことを覚悟しなければならない。したがって、洪水ピーク近傍における水位～流量曲線による流量推定値 z_2 とそれに伴う観測誤差 v_2 が大きくなることは容易に想像できよう。

(3)式のモデル誤差 v_1 と同様に、観測誤差 v_2 についてもその平均値と分散を次のように規定する。

$$E(v_2) = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_2^2 = E(v_2^2) \quad (6)$$

(5)式は不偏推定値であるための条件であり、(6)式は観測誤差 v_2 の分散を与える式である(v_2 の平均値は(5)式に示されるように、ゼロであることに注意)。

(1)、(4)式に示されるカルマン・フィルター理論におけるシステム方程式と観測方程式ができたので、いよいよ流量の最良推定値 $\hat{x}$ をどのように算定したらよいかという議論に進むことにする。この $\hat{x}$ を得るもっとも簡単な方法として、誰しも(1)式と(4)式の重みつき平均値を考えるであろう。すなわち、

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2 \quad (7)$$

ここで、 k_1 と k_2 は重み係数でこれらを決定してやる必要がある。

次に、流量の“真値” x とその推定値 $\hat{x}$ の誤差 $\tilde{x}$ を考えると、

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (8)$$

$\hat{x}$ が不偏推定値であるためには、 $\tilde{x}$ の平均値がゼロでなければならない。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$E(\tilde{x}) = 0 \quad (9)$$

(9) 式に (7), (8) 式を代入すると、

$$E(\tilde{x}) = E[(k_1 z_1 + k_2 z_2) - x] = 0 \quad (10)$$

さらに、(1) 式の z_1 と(4) 式の z_2 を(10) 式に代入すると

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}) &= E\{k_1(x + v_1) + k_2(x + v_2) - x\} \\ &= E\{(k_1 + k_2 - 1)x + k_1 v_1 + k_2 v_2\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$= (k_1 + k_2 - 1)E(x) + k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2) = 0 \quad (12)$$

(12) 式の右辺における各項の性質をよく考えてみよう。 x は流量の“真値”で、ただ1つしか存在しないので確定値であり、 $E(x) = x$ である。また、(2), (5) 式から、 $E(v_1) = E(v_2) = 0$ となる。したがって、(12) 式が必ずゼロになるためには、次式が成立しなければならないことがわかる。

$$k_1 + k_2 - 1 = 0 \quad \text{あるいは、} \quad k_2 = 1 - k_1 \quad (13)$$

(13) 式の関係式から、誤差項 $\tilde{x}$ は次式で与えられることがわかる。

$$\tilde{x} = k_1 v_1 + (1 - k_1) v_2 \quad (14)$$

次に、 $\tilde{x}$ の分散を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(\tilde{x})^2] = E\{[k_1 v_1 + (1 - k_1) v_2]^2\} \\ &= E\{k_1^2 v_1^2 + 2 k_1 (1 - k_1) v_1 v_2 + (1 - k_1)^2 v_2^2\} \\ &= k_1^2 E(v_1^2) + 2 k_1 (1 - k_1) E(v_1 v_2) + (1 - k_1)^2 E(v_2^2) \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式の右辺において、(3), (6) 式から $E(v_1^2) = \sigma_1^2$ と $E(v_2^2) = \sigma_2^2$ が成立する。 $E(v_1 v_2)$ は(1) 式のモデル化による誤差 v_1 と(4) 式の観測誤差 v_2 の共分散である。 v_1 と v_2 が互いに独立であると仮定すれば、 $E(v_1 v_2) = 0$ となる。この独立な条件を考慮すると、(15) 式は次のようになる。

$$\sigma^2 = E[(\tilde{x})^2] = k_1^2 \sigma_1^2 + (1 - k_1)^2 \sigma_2^2 \quad (16)$$

(8) 式にもどって、 $\tilde{x}$ は流量の“真値” x とその推定値 $\hat{x}$ の差になっており、(16) 式の σ^2 は推定値の誤差分散を意味する。誤差分散は $\hat{x}$ の推定精度に関連する。すなわち、われわれの最大の関心事は流

量の推定値 $\hat{x}$ の精度をあげることにある。したがって、精度向上には(16)式の分散をできるだけ小さくしてやればよい。先に、(7)式の重み係数 k_1 と k_2 ((13)式より $k_2 = 1 - k_1$ が成立する)を決定しなければならないと述べた。この k_1 の決定に、(16)式の分散を最小にすることを考えればよいことになる。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_1} = 2k_1\sigma_1^2 - 2(1-k_1)\sigma_2^2 = 0 \quad (17)$$

(17) 式を k_1 について解くと、

$$k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \quad (18)$$

(18) 式を(13)に代入して k_2 を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 - k_1 \\ &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

(18) 式を(16)式に代入して、流量推定値 $\hat{x}$ の誤差分散を計算すると次式が得られる。

$$\sigma^2 = E[(\hat{x})^2] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} \quad (20)$$

(20) 式は非常に重要な性質をもっている。それらを要約して、以下に示す。

- (a) σ^2 は流量推定値 $\hat{x}$ の精度(分散)である。したがって、 $\hat{x}$ が計算されたとしても、 σ^2 があまりに大きすぎると、推定値 $\hat{x}$ の信頼度は非常に低いことになる。実際問題を想定すれば、推定値 $\hat{x}$ は信頼おけない値ということになる。
- (b) 流量推定精度 σ^2 は、モデル誤差分散 σ_1^2 と観測誤差分散 σ_2^2 の大きさに依存する。 σ_1^2 と σ_2^2 がともに大きくなると σ^2 も大きくなる。すなわち、流量推定精度は低下してくる。反対に、モデル誤差と観測誤差がともに小さい(σ_1^2 と σ_2^2 が小さい)ときには σ^2 も小さくなり、推定精度があがる。
- (c) (b)の事実を念頭におくと、流量予測計算にあたっては、モデル誤差が小さくなるような流出モデルを選ばなければならない。また、観測誤差を小さくするためには、洪水時の流量観測をできるだけ多く行って、水位～流量曲線の精度向上に努力する必要がある。

(13) 式から得られる $k_1 = 1 - k_2$ を(7)式に代入すると、流量推定値 $\hat{x}$ は次のようにも書換えることができる。

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (1 - k_2)z_1 + k_2z_2 \\ &= z_1 + k_2(z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式もカルマン・フィルターを理解するうえで重要な式である。その特徴を以下に列挙してみる。

(a) (21) 式の右辺第 1 項の z_1 はなにを意味しているかを考えてみよう。(1) 式にもどって、 z_1 はなんらかの流出モデルを用いたときの流量推定値である。したがって、降雨量がわかれば（あるいは降雨予測値でもよい）、流出計算によって推定できる量である。

(b) 次に (21) 式の右辺第 2 項の $(z_2 - z_1)$ はなにを意味しているかを考えよう。(4) 式に示されるように、 z_2 は流量観測値（もちろん、水位～流量曲線から補完して得られるが）であり、 z_1 は流出モデルによる推定値である。したがって、 $(z_2 - z_1)$ は観測値と推定値（予測値）との誤差であり、 k_2 は $(z_2 - z_1)$ の誤差に応じた重みづけ係数であると判断できよう。

(c) 実際に流量予測をしなければならない人の立場で、(21) 式の意味を考えると興味深い。 z_1 と z_2 の差が小さければ実務者は流出モデル計算による z_1 を信用して、その値を流量予測値 $\hat{x}$ とみなすであろう。反対に、 z_1 と z_2 の差が大きければ、実務者は $(z_2 - z_1)$ の大きさに応じて重みづけを行い、 z_1 を補正して流量予測値 $\hat{x}$ を算定しようとする意識が働くはずである。したがって、(21) 式は人間の直感に近いことができる構造式となっている。先に、カルマン・フィルター理論が人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行えると述べたのは (21) 式の性質による。

(21) 式の重み係数 k_2 はカルマン・フィルター理論では重要な要素であり、しばしばカルマン利得（カルマン・ゲイン）と呼ばれている。それでは、このカルマン・ゲイン k_2 がどのような性質をもっているかを (19) 式から調べてみることにする。

(a) σ_z^2 / σ_1^2 が大きくなる（すなわち、観測誤差が大きく、モデル誤差が小さい）とき、 k_2 は小さくなる。したがって (21) 式の右辺第 2 項の $k_2(z_2 - z_1)$ の影響は非常に小さくなり、流量予測値 $\hat{x}$ はほとんど第 1 項のモデルによる推定値 z_1 で決まってしまうことになる。

(b) σ_z^2 / σ_1^2 が小さくなる（すなわち、観測誤差が小さくて、モデル誤差が大きい）とき、 k_2 は大きくなる。したがって、(21) 式の右辺第 2 項の $k_2(z_2 - z_1)$ は第 1 項の z_1 と同じくらい重要な影響をもつことになり、流量予測値 $\hat{x}$ に及ぼす補正効果が大きくなる。

以上、カルマン・ゲインの性質は人間が経験的直感に頼って予測値を補正する方法によく一致していることがわかっていただけたと思う。とくに、構成式としてのシステム方程式と観測方程式の定式化、およびカルマン・ゲインの特性を理解することが重要である。

一方、カルマン・フィルター理論を実際に適用する際の難点もいくつかある。そのうち、(3) 式のモデル誤差分散 σ_1^2 と (6) 式の観測誤差分散 σ_z^2 をどのように設定したらよいかという問題が起る。この難点を克服するために、京大グループ⁶⁾が実際の運用も比較的容易に行える「乗算的誤差」概念の導入を図っている。この方法論の基本的考えは次のように説明することができる。まず、(1) 式のモデル化誤差 v_1 を数学的モデルによる流量推定値 z_1 の大きさに依存して変化させる。同様に、(4) 式の観測誤差 v_2 を観測流量 z_2 に比例させようとするものである。石狩川の洪水予測システムは乗算的誤差の概念を組み入れている。

カルマン・フィルター理論は、元来線形システムの状態推定として導かれている。その構成式をまと

めて表-1に示す。カルマン・フィルター理論を適用して洪水流出オンライン予測を行うためには、表-1に示されるシステム方程式と観測方程式をどのように導くにかかっている。この作業が終われば、カルマン・フィルターのプログラムはほぼ完了したといっても過言ではない。

3. 流出モデルの選択

洪水流出のオンライン予測においても、なんらかの流出モデルを選定しなければならない。洪水防御施設操作、洪水予報の伝達、避難・水防活動などの緊急性を考慮すると、計算があまりかかりすぎる複雑なモデルは極力さけるべきである。また、洪水予測の実運用という観点からは、実務者が普段から慣れ親しんでいるモデルを採用することが望ましい。最近、全国109直轄水系における洪水予報・水防警報システムの実態調査が行われた。⁷⁾その結果、流出予測モデル手法として、貯留関数法を採用している所が93%と高率を占めている。したがって、実務者は洪水予測モデルとして、貯留関数モデルを採用することに関しては違和感がないであろう。さらに、降雨流出過程の物理機構に基づいた等価粗度モデル(Kinematic Wave法)を貯留関数モデルに変換して、貯留関数モデル定数の物理的意味を定量的に評価しようとする研究成果が発表されているので、^{8), 9), 10)}今後は物理構造を考慮した貯留型流出モデルが洪水予測の主流となてこよう。

石狩川流域の洪水予測システムで用いられている貯留関数モデルは次式で与えられる。

$$\begin{cases} s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ \frac{ds}{dt} = fr - q \end{cases} \quad (32)$$

ここで、 s : 貯留高 (mm), q : 流出高 (mm/h), r : 雨量強度 (mm/h), f : 流出率, t : 時間 (h), k_1, k_2, p_1, p_2 : モデル定数

(32) 式の貯留関数形は等価粗度モデルの理論解から導出されたものである。また、マニング則による表面流を想定する場合、貯留関数モデル定数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} k_1 = 2.823 f_c A^{0.24} \\ k_2 = 0.2835 k_1^2 \bar{r}^{-0.2648} \\ p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (33)$$

ここで、 A : 流域面積 (km²), $\bar{r}$: 平均有効雨量強度 (mm/h), n : 等価粗度 (m^{-1/3}s), i : 平均斜面勾配

一般には、(33) 式中の f_c は未知定数である。しかしながら、解析対象地点で数個の洪水資料がある場合、

表-1 n 次元カルマン・フィルタ理論

定 義	公 式	式番号
システム方程式	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1}$	(22)
観測方程式	$z_k = H_k x_k + v_k$	(23)
システム誤差	$E(w_k) = 0, E(w_k w_k^T) = Q$	(24)
観測誤差	$E(v_k) = 0, E(v_k^2) = R$	(25)
初期条件	$\hat{x}_0(+), P_0(+)$	(26)
状態変量の伝達方程式	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}D_{k-1}$	(27)
状態変量の推定誤差共分散伝達方程式	$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q$	(28)
カルマン・ゲイン	$K_k = P_k(-)H_k^T[H_k P_k(-)H_k^T + R]^{-1}$	(29)
状態変量の更新方程式	$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k[z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$	(30)
状態変量の推定誤差共分散更新方程式	$P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$	(31)

注) x_k : ($n \times 1$) の状態変量ベクトル

Φ_k : ($n \times n$) の遷移行列

Γ_k : ($n \times n$) の係数行列

D_k : ($n \times 1$) の確定変数 (強制関数)
ベクトル

w_k : ($n \times 1$) のシステム誤差ベクトル

z_k : (1×1) の観測値 (状態変量の
うちの1個)

H_k : ($1 \times n$) の係数ベクトル

v_k : 観測誤差

Q : ($n \times n$) のシステム誤差分散・
共分散行列

R : 観測誤差分散

P_k : ($n \times n$) の推定誤差分散・共分散行列

K_k : ($n \times 1$) のカルマン・ゲインベクトル

I : ($n \times n$) の単位行列

T : 上添字は行列の転置

$\hat{x}_k(-)$: ($k-1$) 時刻までの情報に基づき計算
される k 時刻での状態変量推定値

$\hat{x}_k(+)$: k 時刻で新しい観測値を得たときの状態
変量の更新推定値

$P_k(-)$: 推定値 $\hat{x}_k(-)$ の誤差分散

$P_k(+)$: 更新値 $\hat{x}_k(+)$ の誤差分散

実測流量と計算流量の誤差 2 乗和が最小となるように f_c を一次元探索によって同定し、その平均値を洪水予測システムに組み込むことが可能である。ちなみに、ピーク比流量 $0.5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ 以上の洪水例 169 ケースにつき f_c を最適同定した結果、その平均値は 1.56、分散 0.43 の値の得ている。モデル定数 k_2 には平均有効雨量強度 $\bar{r}$ が含まれている。そこで、1 時間毎に雨量情報が入手されるものとして、 $\bar{r}$ には過去の累加雨量の平均値を用いる。すなわち、

$$\bar{r} = \frac{f}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} r_i \quad (34)$$

ここで、 N_t は現時刻までの雨量系列 r_i の標本数

したがって、洪水予測システムでは、定数 k_2 を (34) 式により 1 時間毎に更新する。また、洪水生起時に流出率 f を正確に算定することは困難であるので、既往洪水の解析結果に基づき、流出率を最大値近傍に設定しておく。

(32) 式をカルマン・フィルター理論適用の際のシステム方程式とする訳であるが、(32) 式を表-1 に示される (22) 式の型式に変換しなければならない。このため、次のように変数変換を行う。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (35)$$

(32) 式と (35) 式から、次の非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_2} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_2} \end{cases} \quad (36)$$

(36) 式を解くにあたり、(37) 式の初期条件を設定する。

$$\begin{cases} x_1 |_{t=0} = q_0^{p_2} \\ x_2 |_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (37)$$

ここで、 q_0 は初期流量

(36) 式の非線形微分方程式は線形カルマン・フィルター理論が適用可能なように近似線形化する。まず、以後の解析に便利のように、(36) 式をベクトル表示すると

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (38)$$

ここで,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ f_2(x_1, x_2) = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_2} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_2} \end{cases} \quad (41)$$

今, $F(X)$ が十分になめらかな関数として, $F(X)$ をあらかじめ既知な $X=X^*$ において 1 次の項までテーラー級数展開すると,

$$F(X) = F(X^*) + A(X^*)(X - X^*) \quad (42)$$

ここで, $A(X^*)$ はヤコビアン行列で, 次式で定義される。

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

(43) 式の行列要素, a_1 と a_2 は次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{1}{k_2} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (44)$$

(42) 式を (38) 式に代入すると, (45) 式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + B(X^*) \quad (45)$$

ここで,

$$\begin{aligned} B(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1^*, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{cases} b_1 = f_1(x_1^*, x_2^*) - x_2^* = 0 \\ b_2 = f_2(x_1^*, x_2^*) - a_1 x_1^* - a_2 x_2^* \\ \quad = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2 - 1} (x_2^*) + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{fr}{k_2} \end{cases} \quad (47)$$

(45) 式は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $B(X^*)$ が定係数行列であるとき、その理論解は次式で表わされる差分方程式に変換できる。¹¹⁾

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k B_k \quad (48)$$

ここで、 X_k は任意の計算時間ステップ k における X の値である。

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}_k \quad (49)$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (50)$$

なお、行列 Φ_k と Γ_k は次式によって計算される。

$$\Phi_k = \exp(AT) = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \frac{1}{24}(AT)^4 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= [\exp(AT) - I] A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2}(AT) + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 \right] \end{aligned} \quad (52)$$

ここで、 T は計算時間間隔、 I は (2×2) の単位行列、 A は(43)式の行列である。

行列 Φ_k と Γ_k の要素を求めるには、(43)式を(51)、(52)式に代入すればよい。その結果を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1 T^2 + \frac{1}{6}a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24}a_1 a_3 T^4 \\ \phi_2 = T \left(1 + \frac{1}{2}a_2 T + \frac{1}{6}a_3 T^2 + \frac{1}{24}a_2 a_4 T^3 \right) \\ \phi_3 = a_1 T \left(1 + \frac{1}{2}a_2 T + \frac{1}{6}a_3 T^2 + \frac{1}{24}a_2 a_4 T^3 \right) = a_1 \phi_2 \\ \phi_4 = 1 + a_2 T + \frac{1}{2}a_3 T^2 + \frac{1}{6}a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24}(a_1 a_3 + a_2^2 a_4) T^4 \end{cases} \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = T \left(1 + \frac{1}{6} a_1 T^2 + \frac{1}{24} a_1 a_2 T^3 \right) \\ \gamma_2 = T^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} a_2 T + \frac{1}{24} a_3 T^2 \right) \\ \gamma_3 = a_1 T^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} a_2 T + \frac{1}{24} a_3 T^2 \right) = a_1 \gamma_2 \\ \gamma_4 = T \left(1 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 \right) = \phi_2 \end{array} \right. \quad (54)$$

ここで,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = a_1 + a_2^2 \\ a_4 = a_1 + a_3 \end{array} \right. \quad (55)$$

したがって, (48) 式は, (49), (50) 式を用いて, 次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} (b_2)_k \quad (56)$$

(56) 式は (57) 式によってスカラー計算できる。

$$\begin{aligned} (x_1)_{k+1} &= \phi_1 (x_1)_k + \phi_2 (x_2)_k + \gamma_2 (b_2)_k \\ (x_2)_{k+1} &= \phi_3 (x_1)_k + \phi_4 (x_2)_k + \gamma_4 (b_2)_k \end{aligned} \quad (57)$$

(57) 式の漸化式を用いれば, 任意の離散時刻 k における $x_1 (= q^k)$ と, $x_2 (= \frac{d}{dt}(q^k))$ の値を計算できる点で計算機演算に最適な計算手法と言えよう。最後に任意の離散時刻 k における所要の流量も (35) 式の逆変換で次式より算出される。

$$q = x_1^{1/p_2} = h(x_1, p_2) \quad (58)$$

非線形方程式の線形化解法では X^* の決定方法が問題となる。(48) 式によって X_{k+1} を計算しようとするれば, すでに X_k の値は既知であるから, 実用的には $X^* = X_k$ とするのが自然であろう。すなわち, (44), (47) 式の a_1, a_2, b_2 の係数を k ステップでの x_1 と x_2 の計算値を用いて算定すればよい。この操作に伴い, 変係数行列 Φ_k と Γ_k は計算時間間隔 T ごとに一定値をとることになる。

4. カルマン・フィルター理論の適用

カルマン・フィルター理論適用にあたっては, どの変数を状態変量とするかによって, システム方程式と観測方程式の定式化が異なることに留意しなければならない。たとえば, 流量予測に加えてモデル定数をオンライン同定したいときにはモデル定数も状態に含めることも可能である。石狩川流域における洪水予測システムでは, (35) 式に示される x_1 と x_2 のみを状態変量として, モデル定数を (33) 式の値に固定している。その理由は, 石狩川水系の予測地点数は本・支川あわせて42地点にのぼり, 各点で

モデル定数をオンライン同定することは、計算の迅速性から言って得策ではないと判断したからである。さらに、システムの実運用中の誤動作を極力排除する必要性があったからである。

モデル定数を固定した影響が流量予測精度にも影響を及ぼすことは容易に想像できる。したがって、予測精度の劣化をふせぐ方策としてシュミット・カルマン・フィルタを採用する。¹²⁾ この手法の特徴は、定数固定化に伴う影響を状態変量と定数の誤差分散・共分散で補償してやろうとする所にある。

このため、モデル定数を状態変量にみたてて、システム方程式の拡大を図る。まず、(35) 式の x_1 と x_2 をベクトル X_1 で表現し、モデル定数をベクトル X_2 で表わす。すなわち、

$$\begin{cases} X_1^T = [x_1 \ x_2] \\ X_2^T = [k_1 \ k_2 \ p_1 \ p_2 \ f] \end{cases} \quad (59)$$

新しい状態変量ベクトル X_2 を導入したとき、システム方程式は多少複雑になるが、基本的誘導過程は前述した方法を踏襲すればよい。すなわち、(41) 式 of 非線形方程式をモデル定数で微分して線形化微分方程式を導き ((45) 式に対応)、さらに差分方程式に変換する ((48) 式に対応)。その結果をベクトル表示で以下に示す。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0_2 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (60)$$

ここで、

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 \\ \phi_{10} & \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$0_1 : (5 \times 2)$ のゼロ行列, $0_2 : (5 \times 1)$ のゼロベクトル, $I : (5 \times 5)$ の単位行列

(60) 式を展開すると、 $(X_2)_{k+1} = (X_2)_k$ という関係式が得られる。これは 5 個のモデル定数が時間的に変化しない事を意味する。(61) 式の Φ_1 とベクトル Γ_1 の要素は (53) 式と (54) 式の値に等しい。したがって、モデル係数を状態変量にみたてた拡大システム方程式では係数行列 Φ_2 の要素のみがふえたことになる。(48) 式ないし (60) 式は表-1 中の状態変量の伝達方程式に対応している。このとき、状態変量の推定誤差分散・共分散がどのように伝達されるかが次の問題となる。このため、次に示す推定誤差分散・共分散を定義する。

$$\begin{aligned} P_k &= E(\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T) = E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix}_k [\tilde{X}_1 \ \tilde{X}_2]_k \right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、 $\tilde{X}_k$: 状態変量の推定誤差, $P_{1,k}$: X_1 に関する (2×2) の分散・共分散行列, $P_{2,k}$: X_1 と X_2 に

関する (2×5) の共分散, $U_k: X_2$ (モデル定数) に関する (5×5) の分散・共分散行列

(60) 式の $(d_2)_k$ を確定変数とみなし, 表-1 中の (28) 式と (62) 式の関係式を用いると, (63) 式の推定誤差分散・共分散の伝達方程式が得られる。

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0_1^T \\ \Phi_2^T & I \end{bmatrix} \quad (63)$$

(63) 式を小行列毎に展開した結果を以下に示す。

$$P_{1,k+1} = \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}^T \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T + \Phi_2 U_k \Phi_2^T \quad (64)$$

$$P_{2,k+1} = \Phi_1 P_{2,k} + \Phi_2 U_k \quad (65)$$

$$U_{k+1} = U_k \quad (66)$$

(64) 式は非常に重要な意味をもつ。 $P_{1,k+1}$ は状態変数 X_1 の推定値誤差分散・共分散である。さきに, モデル定数を固定するとしたが, モデル定数を状態変数に加え, システム方程式を拡大することによって, Φ_2 , $P_{2,k}$ および U_k の影響が $P_{1,k+1}$ に反映されていることになる。(66) 式に示されるモデル定数の誤差分散・共分散が一定値で伝達される理由はモデル定数が時間的に変化しないことによる。

U_k の値をあらかじめ設定しておく必要がある。このとき, モデル定数を (33) 式で固定するので, それに伴う不確定性を考慮しておく。誤差の大きさを各定数の $100\alpha\%$ ($\alpha=0.1\sim0.3$ が適当) として, U_k を次のように仮定する。

$$U_k = \begin{bmatrix} (k_1 \alpha)^2 & & & & 0 \\ & (k_2 \alpha)^2 & & & \\ & & (p_1 \alpha)^2 & & \\ & & & (p_2 \alpha)^2 & \\ 0 & & & & (f \alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (67)$$

なお, モデル定数 k_2 は平均雨量強度 $\bar{r}$ によって変化するので, カルマン・フィルタ理論によって状態変数 x_1 と x_2 を更新したのち, (34) 式によって累加平均有効雨量を算定して, 定数 k_2 を設定し直す。したがって, $(k_2 \alpha)^2$ のみが, 観測値情報入手後に変化し, 他の要素は変化しないことになる。

(48) 式は, カルマン・フィルタ理論における流量観測値間, $t_k \leq t < t_{k+1}$ での状態変量の伝達方程式に相当しており, この間システム誤差を考慮しない。その代り, $t=t_{k+1}$ において瞬間的にノイズが付加されると考える。このとき, ノイズの大きさは状態変量推定値に比例すると仮定する。この考えが京大グループによって提案された「乗算的ノイズ」の導入である。今, (48) 式の解より得られる $t=t_{k+1}$ における状態変量を $x_1(t_{k+1})$ 及び $x_2(t_{k+1})$ とする。また, 新しい流量観測値が得られる直前の状態変量を $x_{1,k+1}(-)$ および $x_{2,k+1}(-)$ とする。したがって, 乗算的ノイズを導入することにより, 次の定式化を行なうことができる。

$$X_{1,k+1}(-) = X_1(t_{k+1}) + B_{k+1} W_{k+1} \quad (68)$$

ここで,

$$\begin{cases} X_{1,k+1}(-) = \begin{bmatrix} x_{1,k+1}(-) \\ x_{2,k+1}(-) \end{bmatrix} \\ B_{k+1} = \begin{bmatrix} b_{1,k+1} & 0 \\ 0 & b_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) & 0 \\ 0 & x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} \\ W_{k+1} = \begin{bmatrix} w_{1,k+1} \\ w_{2,k+1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (69)$$

(68), (69) 式にも示されるように, システム誤差は状態変量に比例している。システム誤差ベクトル W_{k+1} は次の統計的性質をもつものとする。

$$\begin{cases} E(W_{k+1}) = 0 \\ E(W_{k+1} W_{k+1}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (70)$$

システム誤差として状態変量の $100\alpha_1\%$ の大きさが想定されているので, $\alpha_1 = 0.1 \sim 0.2$ の値を採用すればよい。 W_{k+1} は (70) 式の性質を有しているので, $X_{1,k+1}(-)$ の推定値は (68) 式から次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k+1}(-) = E[X_{1,k+1}(-)] = X_1(t_{k+1}) \quad (71)$$

すなわち, $\hat{X}_{1,k+1}(-)$ は (48) 式の伝達方程式を解いたときの $t = t_{k+1}$ における値に等しい。このときの推定誤差分散・共分散は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{1,k+1}(-) &= E[\hat{X}_{1,k+1}(-) \hat{X}_{1,k+1}(-)^T] \\ &= P_{1,k+1} + B_{k+1} E(W_{k+1} W_{k+1}^T) B_{k+1}^T \\ &= P_{1,k+1} + Q_{k+1} \end{aligned} \quad (72)$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= B_{k+1} E(W_{k+1} W_{k+1}^T) B_{k+1}^T = B_{k+1} (\alpha_1^2 I) B_{k+1}^T \\ &= \begin{bmatrix} (b_{1,k+1} \alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (b_{2,k+1} \alpha_1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

(72) 式の右辺第 1 項の $P_{1,k+1}$ は (64) 式で計算される。(73) 式においては, 行列 B_{k+1} は状態変量推定値に依存して流量観測値入手直前まで変化するので, α_1 が一定値であっても Q_{k+1} は時間的に変化していることになる。すなわち, システムノイズに非定常性が考慮されていることになる。しかも, 計算が非常に容易であり, 実際の運用にあたっても困難を生じない。

カルマン・フィルタ理論を適用するにあたって, 残された問題は観測方程式の定式化である。流量

と状態変数 x_1 の間には (58) 式の関係が成立するので、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = x_1^{1/p_2} (1 + v_k) = x_1^{1/p_2} + c_k v_k \quad (74)$$

ここで、

$$c_k = x_1^{1/p_2} \quad (75)$$

z_k : サンプルング時刻 k における流量観測値, v_k : 流量観測誤差

(74) 式に示される観測誤差は観測値に比例しているので、その効果は乗算的に作用していることになる。観測値 z_k が入手された後の状態変数の更新方程式は次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k}(+) = \hat{X}_{1,k}(-) + K_1 [z_k - \{\hat{x}_{1,k}(-)\}^{1/p_2}] \quad (76)$$

ここで、 $(-)$, $(+)$ の記号はそれぞれ、流量観測値情報入手直前と直後を意味する。

(76) 式の更新方程式においては、状態変数 x_1 と x_2 のみを更新し、5個のモデル定数の更新は行わない。ここで問題となるのが (2×1) 行列のカルマン・ゲイン K_1 の算定である。元来、カルマン・フィルター理論は表-1に示される線形システム方程式と線形観測方程式に関して理論展開がなされている。したがって、(74) 式 of 非線形観測方程式に直接カルマン・フィルター理論を適用することができない。このため、近似解法として、(58) 式 of 非線形関数 $h(x_1, p_2)$ の線形化を考える。すなわち、

$$h(x_1, p_2) \approx H_k X_k + h_{3,k} = [H_1 : H_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} + h_{3,k} \quad (77)$$

ここで、

$$H_k = [H_1 : H_2], \quad H_1 = [h_1 \ 0], \quad H_2 = [0 \ 0 \ 0 \ h_2 \ 0] \quad (78)$$

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2^*} (x_1^*)^{1/p_2^* - 1} \\ h_2 = \frac{\partial h}{\partial p_2} = \frac{-1}{(p_2^*)^2} (x_1^*)^{1/p_2^*} \ln x_1^* \\ h_3 = h(x_1^*, p_2^*) - h_1 x_1^* - h_2 p_2^* \\ \quad = (x_1^*)^{1/p_2^*} \left\{ 1 - \frac{1}{p_2^*} (1 - \ln x_1^*) \right\} \end{cases} \quad (79)$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

(79) 式中の x_1^* と p_2^* にはそれぞれ、 $x_1^* = x_{1,k}(-)$ と $p_2^* = 0.4648$ の値を用いる。また、(80) 式の X_1 と X_2 は (59) 式に示されている。観測方程式は (77) 式により近似線形化されたので、表-1中の (29) 式と (31) 式の H_k に (78) 式を用いればよい。ここで、計算上の留意点を述べる。まず、分散・共分散行列 $P_k(-)$ は (62) 式に準じて、次のように定義する。

$$P_k(-) = \begin{bmatrix} P_1(-) & | & P_2(-) \\ \hline P_2^T(-) & | & U \end{bmatrix} \quad (81)$$

$P_1(-)$ には(72)式による結果を、 $P_2(-)$ と U にはそれぞれ、(65)式と(66)式の計算結果を用いる。次に、観測誤差分散 R については、(74)式より次式で与えられる。

$$R = E[(c_k v_k)^2] = c_k^2 E[v_k^2] = c_k^2 \alpha_2^2$$

$$\alpha_2^2 = E[v_k^2] \quad (\alpha_2 = 0.1 \sim 0.2) \quad (82)$$

このとき、(75)式で定義される c_k の x_1 の値として $x_{1,k}(-)$ を用いればよい。(78)式のベクトル H_1 と H_2 を(29)式に代入して、カルマン・ゲイン K_k を計算した結果を以下に示す。

$$K_k = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(-)H_1^T + P_2(-)H_2^T \\ P_2^T(-)H_1^T + UH_2^T \end{bmatrix} S^{-1} \quad (83)$$

ここで、

$$S = H_1 P_1(-)H_1^T + H_1 P_2(-)H_2^T + H_2 P_2^T(-)H_1^T + H_2 UH_2^T + R \quad (84)$$

(84)式の S は一見複雑そうに見えるが、実際に行列を展開してみると、 S はスカラー量である。したがって、(83)式の S^{-1} も(84)式で計算される値の逆数をとればよい。ベクトル H_1 と H_2 の多くの要素はゼロである。このため、直接行列演算をプログラム化するのではなく、行列を展開した結果の要素をプログラムに組むことが得策である。この操作は、とくに計算時間を大幅に短縮させるのに有効となる。

以上、石狩川流域で実運用されている貯留関数モデルを基本式として、カルマン・フィルタ理論を用いた実時間洪水予測手法について述べてきた。その適用例として、既往最大昭和56年8月上旬洪水に対して予測シミュレーションを行った結果を示す。図-1には石狩川上流部の納内地点(流域面積: 3558km²)におけるシミュレーション結果を示した。同様に、図-2は石狩川中流部の月形橋地点(流域面積: 9306km²)における検証例である。この計算例では各地点における実績流域平均降雨量を与えている。図-1に示される納内の場合、モデルパラメータを $k_1=28.1$ 、 $p_1=0.6$ 、 $p_2=0.4648$ 、 $f=0.6$ と固定(k_2 は1時間毎に変化)してシミュレーションを行った結果であるが、これによると、3時間先予測で水位上昇時平均誤差が23cm、ピーク水位誤差が-18cm、ピーク水位時間誤差が4時間であり、6時間先予測で水位上昇時平均誤差が33cm、ピーク水位誤差が16cm、ピーク水位時間誤差が3時間である。この場合、ピーク水位時間が多少早めに出現しているが、これは安全側であり、ハイドログラフ上昇時、ピーク付近とも良好な結果を得ているものと言える。

図中の破線で囲まれた部分は6時間先予測の95%信頼区間を示すが、これは予測理論としてカルマン・フィルタ理論を用いた場合の1つの特徴であり、実際の予測の際にはこの上限値も考慮した方が安全である。

図-2に示す月形橋の場合も納内と同様に良好な結果と言えるが、双方ともハイドログラフの低減部の下降度合が若干早く今後改良の余地が残されている。

5. お わ り に

石狩川流域における洪水予測は昭和38年のアナログ計算機の導入から始まり、以来、計算機の更新、

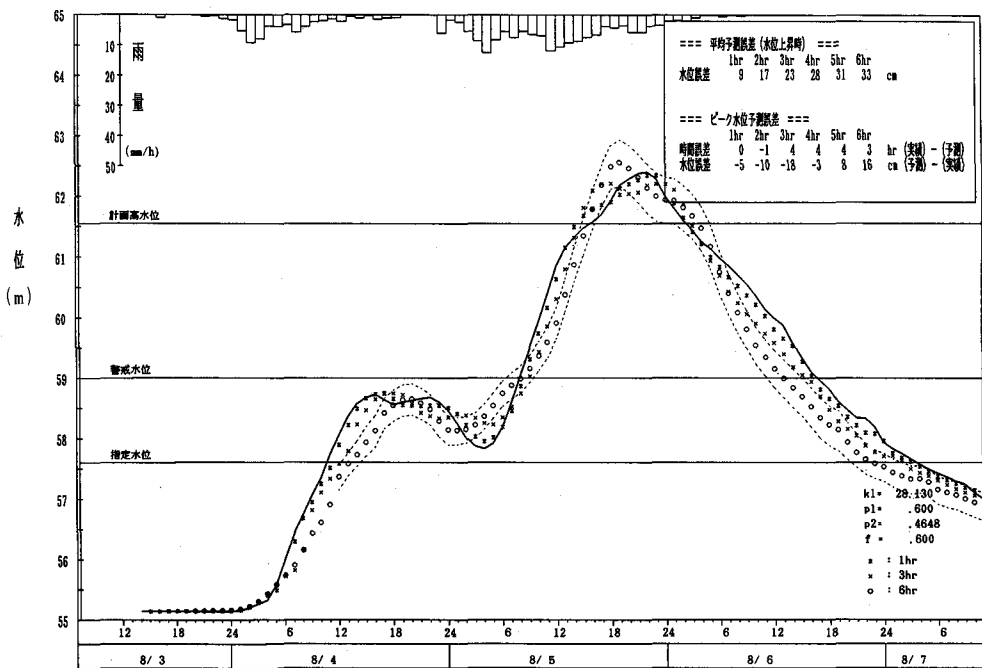


図-1 納内地点の再現計算結果 (昭和56年8月上旬洪水)

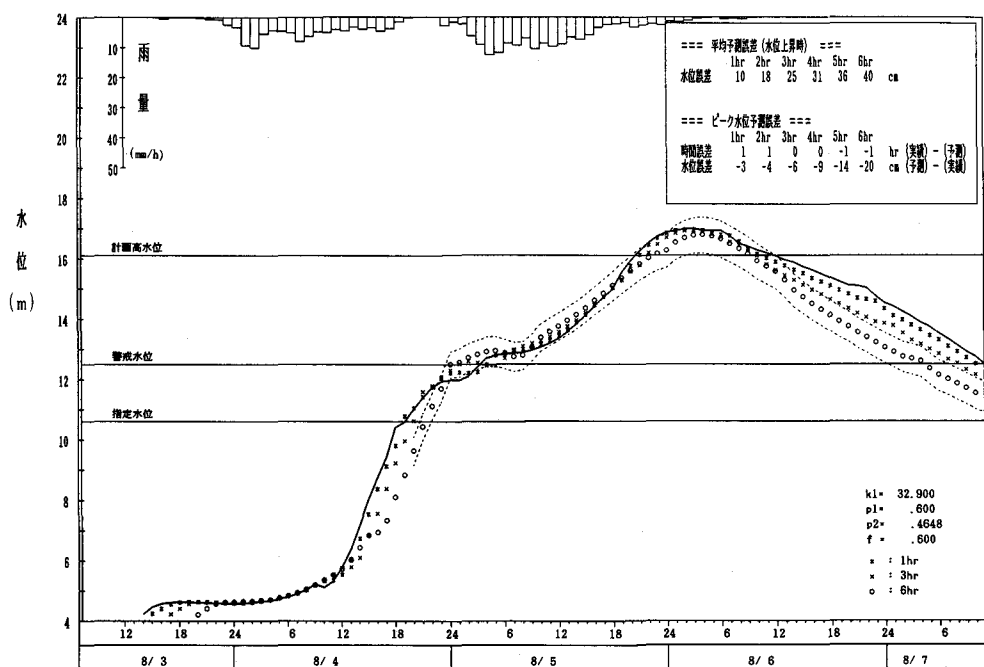


図-2 月形橋地点の再現計算結果 (昭和56年8月上旬洪水)

洪水予測システムの改良を図ってきている。とくに、昭和55年にプラサド¹³⁾によって提案された貯留関数法とカルマン・フィルター理論を組み合わせた洪水予測手法と流出関数法を用いた洪水予測法が同時に実運用された事は特記に値する。さらに、最近の電子計算機のデータ処理能力の向上、記憶容量の大型化、ディスプレイの高品位化、画像処理ソフトウェアの充実等の理由により、昭和61年には再度洪水予測システムの改良を行うことになった。その背景には、昭和62年10月に石狩川全流域を見渡すことができる道央レーダ雨雪量計が試験運用を開始したこともあげられる。洪水予測の精度向上を図る上で、レーダ雨量情報をどのように活用していくかが新たな鍵となっている。新洪水予測システムでは次の点に配慮している。すなわち(a)従来の縦横断水位予測システムの精度向上を図るため、11地点から42地点へ予測地点数を増設、(b)流出モデルの更新、(c)予測理論の改良、(d)ダム放流量を考慮した支川予測精度の向上、(e)本川の背水影響を受ける支川区間の水位予測向上、(f)本川における面積雨量の時間ずらし考慮である。

本報告では、上記の改良点のうち、流出モデルと予測理論の更新につき、その数学的構築法を詳述してきた。その要旨をまとめて以下に示す。

- (a)モデル定数に物理的意味をもつ貯留関数法を流出モデルに採用した。
- (b)演算時間の短縮を図るため、モデル定数を固定する。この定数固定に伴う流量予測精度の劣化を状態変量と定数に関する共分散を導入することによって防止した。
- (c)予測手法として、シュミットーカルマン・フィルター理論を用いた。
- (d)システム誤差と観測誤差に乗算的ノイズを導入し、推定誤差共分散の非定常性を考慮した。

参 考 文 献

- 1) Kalman, R. E. : *A new approach to linear filtering and prediction problems*, J. of Basic Engineering, ASME, Vol.82D, 1960.
- 2) Hino, M. : *On-line prediction of hydrologic system*, Proc. of the 15th Conference of the IAHR, Istanbul, Vol. 4, 1973.
- 3) 日野 幹雄：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，1974.
- 4) Chiu, C. L. : *Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources*, Proc. of the AGU Chapman Conference, University of Pittsburgh, 1978.
- 5) 椎葉 充晴：レーダ雨量計を利用した降雨の実時間予測と実時間流出予測法，第23回水工学に関する夏期研修会講義集，Aコース，土木学会，1987.
- 6) 宝 馨，高棹 琢馬，椎葉 充晴：洪水流出の確率予測における実際的手法，土木学会第28回水理講演会論文集，1984.
- 7) 洪水予警報システム実態調査結果，(財)国土開発技術研究センター，1986.

- 8) 星 清, 山岡 勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 土木学会第26回水理講演会論文集, 1982.
- 9) 永井 明博, 角屋 睦, 杉山 博信, 鈴木 克英: 貯留関数法の総合化, 京都大学防災研究所年報, 第25号, B-2, 1982.
- 10) 高棹 琢馬, 宝 馨, 楠橋 康広: 貯留関数型洪水流出モデルの比較評価, 土木学会第29回水理講演会論文集, 1985.
- 11) 高橋 安人: システムと制御, 岩波書店, 1974.
- 12) Jazwinski, A. H.: *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic Press, 1970.
- 13) Prasad, R.: *A nonlinear hydrologic system response model*, *J. of Hydraul. Div.*, ASCE, Vol.93 (HY4), 1967.