

流砂の確率モデルとその応用

中 川 博 次

1. まえがき

流砂の運動は確率的かつ離散的な性質で特徴づけられる。こうした個々の流砂の本質的特性によって非平衡な移動床現象が産み出されることから、確率論的または確率過程論的取扱いによって、合理的な現象説明が可能である。一方、個々の粒子運動など一つ一つの素過程はあくまで力学法則にもとづいており、確定論的に決定されるとする立場がある。従来ややもするとこの異なる立場でのアプローチが相容れないものと受取られ、そのことが流砂現象のより深い理解を妨げる原因の一つであったと考えられる。ここでは、流砂現象に固有な不規則性に着目して、現象の素過程に対する力学的考察とその総合化としての確率論的考察とを融合した流砂モデルの展開とその移動床過程への適用を論じる。

2. 掃流砂の確率モデル

Einstein は掃流砂礫の運動を図 1 に示すように、比較的長い休止時間 (rest period) と非常に短い運動時間内の離散的な移動距離 (step length) からなるジグザグモデルで表わした。すなわち、rest period $\{T\}$ と step length $\{X\}$ を確率変数とする確率過程モデル (stochastic model) である。 $\{T\}$ と $\{X\}$ が独立であるとする、時間軸において離脱現象の生起、距離軸において運動の停止現象の生起という不規則現象の生起過程としてモデル

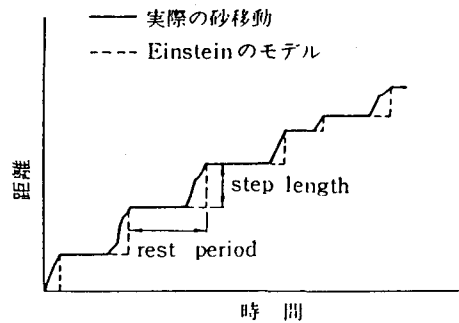


図 1 Einstein による掃流砂移動のモデル

化できる。それぞれの単位時間当たり及び単位距離当たりの生起確率密度を p_s 及び p_d とすると、平坦河床のように確率統計的に均質な場における rest period と step length の確率分布はいずれも指数分布となる。すなわち、それぞれの確率密度関数を $f_T(t)$, $f_X(x)$ と書くと、

$$f_T(t) = p_s \cdot \exp(-p_s t) \quad (1)$$

$$f_X(x) = p_d \cdot \exp(-p_d x) \quad (2)$$

であり、このとき $\{T\}$, $\{X\}$ の期待値すなわち平均 rest period 及び平均 step length λ は、

$$E[T] = 1/p_s \quad (3)$$

$$A \equiv E[X] = 1/p_d \quad (4)$$

となる。

掃流過程は rest period と step length の連続で構成されるから、それらの確率密度関数を用いて、砂粒の長時間あるいは大きい空間での挙動が明らかにされ、平坦河床ではいわゆる複合ポアソン過程モデルとしてその分散過程が記述される。しかし、通常の移動床では河床波が形成されるなど場の均質性が失われる場合が多く、rest period や step length は河床波の特性に大きく支配される。また、 p_s 、 p_d 共に時間、空間の関数となり、分布性状も著しく変化するから、こうした非均質場での砂粒群の分散過程を記述するモデルの一般化が必要であり、そのための研究が 1970 年代に盛んに行われた (Yang-Sayre : 1971, Shen-Todorovic : 1971, Hung-Shen : 1976, 中川・辻本 : 1979)。

このように掃流砂の確率モデルは砂の運動を追跡するいわばラグランジュ的モデルであったために、流砂の分散過程の記述にその適用がとどまっており、流砂量や河床変動などオイラー的に扱われる問題への応用的発展はほとんど見られなかった。確率モデルの適用性を拡大する意味から、そのオイラー的解釈が試みられ、これによって河床波の初生や初期の変形過程、更に armor coat の伝播等非平衡流砂現象を合理的に記述することが可能になった (中川・辻本 : 1980)。

いま図 2 の位置 x における単位時間当たり、砂粒 1 個の占める面積当りの砂粒離脱個数は pick-up rate p_s で代表され、そこへ上流から運ばれてきた砂粒の停止個数も同様に deposit rate p_d と定義すると、停止する砂粒は step length だけ上流で pick-up されているから、

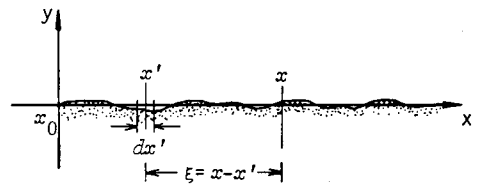


図 2 定義図

$$p_d(x) = \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_x(\xi) d\xi \quad (5)$$

と書ける。ここに、 x_0 は流砂の原点で、平衡河床では $x_0 \rightarrow \infty$ である。すなわち、ある場所 x へ持込まれる上流の流砂状況の影響は step length の確率分布として現われ、それによる流砂の応答遅れが流砂固有の非平衡性を生む原因となる。一方、河床の任意点での離脱現象そのものも不規則で、離脱個数は時間的に変動するから、 t 時間の累積離脱個数 $\{N_s(t)\}$ は確率変数であり、式 (5) から累積停止個数 $\{N_d(t)\}$ も確率変数となる。すなわち、オイラー的な観点からみると、確率モデルの構成要素としての $f_T(t)$ は初期移動の不規則性を表わし、一方 $f_x(\xi)$ は上流の流砂状況の影響を表わし、式 (5) にみられるように、河床の一点での砂粒の不規則な交換現象における離脱確率と停止確率との差が河床の変形を生むことになる。

いま、図2を参考にして、pick-up rateに場所的变化がある場合の局所流砂量分布及び河床高の変化は次式で与えられる。

$$q_B(x) = (A_3 d / A_2) \int_{x_0}^x p_s(x') \int_{x-x'}^{\infty} f_X(\xi) d\xi dx' \quad (6)$$

$$\partial y(x) / \partial t = A_1 d \{ p_d(x) - p_s(x) \} \quad (7)$$

ここに、 d ：砂粒径、 A_1, A_2, A_3 はそれぞれ1, 2, 3次元の形状係数である。

3. 非平衡掃流砂量

式(6)に示されるように、pick-up rateは各点の掃流力によって決まるが、step lengthの作用によって流砂量に及ぼす掃流力の影響には場所的履歴性が現われ、一般に掃流力と流砂量との間には1対1の関係が成り立たない。こうした現象を掃流現象の本質的特徴に起因する非平衡掃流過程と呼んでいる。

いま、固定床粗面に接続する移動床での実験結果から、掃流力が場所的にほぼ一様で、pick-up rateや粒子の運動速度はほとんど変化しないのに、流砂量は固定床との接続部より指数関数的に増加することが確認された。流砂量の場所的变化は、式(6)で $p_s(x) = p_{s_0}$ (一定)($x \geq 0$)、 $x_0 = 0$ とおき、step lengthの分布を指数分布として導びかれる次式と良好に一致している(図3)。

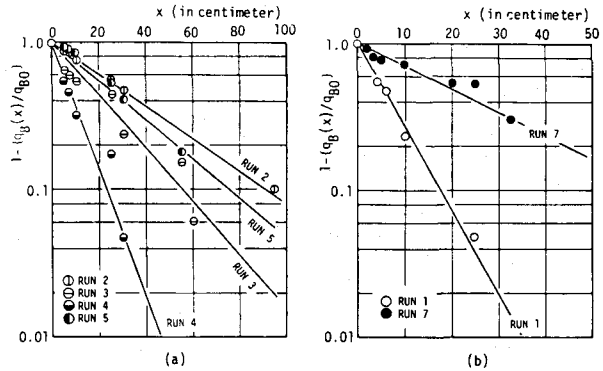


図3 非平衡流砂量

$$q_B(x) / q_{B0} = 1 - \exp(-x/A) \quad (8)$$

なお、step lengthの超過確率を $G_X(x) (\equiv \int_x^{\infty} f_X(\xi) d\xi)$ と書くと、式(6)は

$$q_B(x) = (A_3 d / A_2) \int_{x_0}^x p_s(x') G_X(x - x') dx' \quad (9)$$

となり、 $G(x)$ はpick-up rateの場所的变化(確率過程)を入力、 $q_B(x)$ (確率過程)を出力とする系の impulse response ということができる。したがって、上述の実験は $p_s \sim q_B$ 系の unit impulseを知るためのものと考えてよい。

4. 砂面擾乱の初生

河床波の形成に関しては、Kennedy の線型不安定解析による研究以来、「砂面と水流の相互作用における不安定性によるもの」との理解が定着しているが、不安定解析において最初に仮定される初期擾乱はいかにして発生するかという問題に対する解答は得られていない。

掃流砂の確率モデルに固有の確率性、離散性を効かして河床の不規則性の出現を説明することができる(辻本, 中川: 1982)。いま, 砂が運動し始める時刻を 0 として, 時間間隔 $(0, t)$ の間における河床のある位置で砂粒 1 個の占める面積当りの離脱砂粒個数を $\{N_s(x, t)\}$ とすると, 式(5)及び(7)と同様確率モデルの考え方をを用いると, その点の河床高変化は step length の確率密度関数を $f_x(\xi)$ として,

$$y(x) = A_1 d \left\{ \int_0^\infty N_s(x - \xi, t) f_x(\xi) d\xi - N_s(x, t) \right\} \quad (10)$$

であり, 時刻 t での砂面波数スペクトルは

$$\begin{aligned} S(\kappa, t) &= \overline{F[y(x, t)] F^*[y(x, t)]} \\ &= (A_1 d)^2 \overline{\{F[f_x(\xi)] - 1\} \cdot \{F^*[f_x(\xi)] - 1\}} \cdot S_{NN}(\kappa, t) \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。ここに, κ : 角波数, S_{NN} : $\{N_s(x, t)\}$ の空間相関関数であり, $F[\cdot]$ はフーリエ変換, $F^*[\cdot]$ は共役複素数, $\bar{\cdot}$ はアンサンブル平均を表わす。いま, step length が式(2)の指数分布に従うとしたときの砂面波数スペクトルは次式で与えられる。

$$S(\kappa, t) = (A_1 d)^2 t \left[\kappa^2 / \{ (1/A)^2 + \kappa^2 \} \right] \cdot S_{NN}(\kappa, t) \quad (12)$$

この式は pick-up rate の場所的変動が河床面擾乱を生むことを示しており, 平坦河床でも水流の乱れ等による底面せん断応力の場所的相関が現われ, そのため有限の大きさの S_{NN} が存在するものと考えられる。

いま, $\{N_s(x, t)\}$ の分散が $p_s t$ であることと, その空間相関関数が $R_{NN}(\xi) = p_s \exp(-\alpha_0 \xi)$ の指数型で与えられるものとする, $S(\kappa, t)$ として次式が得られる。

$$S(\kappa, t) = 4 \alpha_0 p_s A^2 (A_1 d)^2 \kappa^2 t / \{ (\kappa^2 + \alpha_0^2) (\kappa^2 A^2 + 1) \} \quad (13)$$

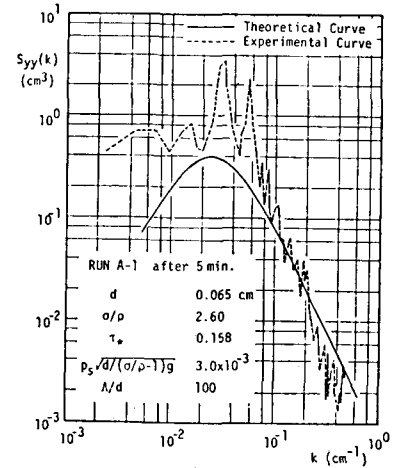
ただし, α_0^{-1} は $\{N_s(x, t)\}$ の空間相関の緩和距離であり, $\alpha_0 = 1/A$ とした場合の計算曲線とごく初期の河床高変化の測定結果とを図 4 に比較するが, ほぼ良好な一致がみられる。初期の波数スペクトルは平衡状態でのいわゆる「-3 乗則」に比べてなだらかで, -2 乗則に近く, ランダム性の強いものといえる。また, 式(13)からスペクトルピークに対応する波長を計算すると, $L_p = 2\pi \sqrt{A/\alpha_0}$ となり, 波長の変化はみられない。これは河床波のごく初期に現われる現象で, その後は波同志の追つ

き、合体など波数間の相互作用が顕著になり、波長の変化が生じてくる。

さらに、式(13)から河床高の標準偏差 σ_y の時間的変化が次式のように導びかれる。

$$\sigma_y/d = \sqrt{F_0} \tau_*^{1/4} (1 - k_2 \tau_{*c}/\tau_*)^{m/2} \times \sqrt{tu_*/d} \quad (14)$$

この式は河床高の分散 σ_y^2 がまったく平坦な河床($\sigma_y^2 = 0$)からでも時間に比例して生成されることを表している。すなわち、ランダムな砂の離脱、落下の繰返しにより砂面擾乱が生まれることを示しており、これを初期擾乱として移動床の不安定解析を進めることができる。



初期砂面擾乱の波数スペクトルの例

図4 初期砂面擾乱の波数スペクトル

5. 掃流運動による砂面の不安定性

河床波の形成が流砂量と河床形状との間の位相差に起因する不安定性によるものとの理解は定着しているものの、位相差、特に「遅れ距離」と呼ばれる流砂運動の非平衡性にもとづくものについての評価は得られていなかった。掃流砂に対するオイラーの確率モデルを砂面の線型不安定解析に適用することによって、この遅れ距離は容易に推定できる(中川, 辻本: 1980)。

いま、砂面擾乱が次の正弦波で表されるものとする。

$$y(x, t) = a(t) \sin \kappa (x - ct) \quad (15)$$

ただし、 $a(t)$: 振幅, κ : 角波速, c : 擾乱の伝播速度である。 $a\kappa$ が十分小さいとして線型解析を行う。このとき、砂面上の流れ、流砂、河床特性量はいずれも振幅、位相が異なるだけで、次のような正弦波として表現できる。

$$\Psi_R(x, t) = r_R a \sin \{ \kappa (x - ct) - \phi_R \} \quad (16)$$

ここに、 Ψ_R は摂動分を非擾乱値で無次元化した量である。したがって、流砂量は

$$q_B(x, t) = q_{B0} [1 + r_B a(t) \cdot \sin \{ \kappa (x - ct) - \phi_B \}] \quad (17)$$

と書ける。ここに、 q_{B0} : 非擾乱時の流砂量, $r_B a q_{B0}$: 流砂量の摂動分の振幅, ϕ_B : 流砂量の擾乱の砂面擾乱に対する位相差である。式(15), (16)を流砂の連続式に代入するとにより

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{q_{B0} r_B}{1 - \rho_0} \kappa \sin \phi_B, \quad \kappa c = \frac{q_{B0} r_B}{1 - \rho_0} \cos \phi_B \quad (18)$$

が得られる。これより砂面の安定性、擾乱の伝播方向が流砂量の砂面波に対する位相差 ϕ_B によって表1のように決定されることがわかる。

表1 砂面擾乱の挙動

ϕ_B	U_B	d/a	砂面波の挙動
$0 \sim \pi/2$	+	-	減衰
$\pi/2 \sim \pi$	-	-	減衰
$\pi \sim (3/2)\pi$	-	+	上流へ進行する砂面波が増幅
$(3/2)\pi \sim 2\pi$	+	+	下流へ進行する砂面波が増幅

ϕ_B は底面せん断応力 $\tau(x)$ の河床形 $y(x)$ に対する位相差 ϕ_r と、局所流砂量 $q_B(x)$ の τ に対する位相差 ϕ_{Br} の2つからなり、線型解析では次式で与えられる。

$$\phi_B = \phi_r + \phi_{Br} \quad (19)$$

ϕ_r は波状路床上の流れのモデルより、 ϕ_{Br} は掃流力が場所的に変化する場に適用できる流砂のモデルよりそれぞれ評価されるものである。特に、 ϕ_{Br} については、 $\delta_{Br} \equiv \phi_{Br} / \kappa$ を「流砂の遅れ距離」と呼んでいる。

波状路床上の流砂については合理的な取扱いの確立が遅れ、むしろ流れモデルの不都合を補う形で処理された例も少なくない。著者らは微小砂面擾乱上の掃流力の場所的変化に応答する局所流砂量の場所的分布は非平衡流砂過程として扱われるべきだとし、特に pick-up rate の場所的変化に比べ、step length の分布はほとんど変化しないことから、オイラー的確率モデルを適用した(1980)。pick-up rate はほとんど瞬間的に掃流力分布に応答するので、

$$p_s(x) = p_{s0} [1 + r_p a \sin \{ \kappa(x - ct) - \phi_r \}] \quad (20)$$

と書ける。ここに、 $p_{s0} : p_s$ の非擾乱時の値、 $r_p a p_{s0} : \text{pick-up rate}$ の摂動分の振幅である。これと平均値 A の指数分布に従う step length の確率密度関数を式(6) ($x_0 \rightarrow -\infty$)に代入し、式(17)と比較することにより次のように ϕ_{Br} が評価される ($\phi_{Br} = \phi_B - \phi_r$)。

$$\sin \phi_{Br} = \kappa A / \sqrt{1 + (\kappa A)^2}, \quad \cos \phi_{Br} = 1 / \sqrt{1 + (\kappa A)^2} \quad (21)$$

$$r_B / r_p = 1 / \sqrt{1 + (\kappa A)^2} \quad (22)$$

このように、 ϕ_{Br} が合理的に評価され、第1象限に属する。図5は $\kappa \delta_{Br}$ と κh_0 との関係を $\gamma_1 \equiv A/h_0$ をパラメータとして描いたものである。流砂の遅れ距離 δ_{Br} を saltation 長や step length の平均値と

は単純に同一視できないことが注目される。

一方、波状水路上の流れの性状を大まかに把えと、最大底面せん断応力は lower regime の場合、流れの収縮効果でクレストのやや上流に現われるから、 $-(\pi/2) < \phi_r < 0$ が期待され、

一方、upper regime ではトラフ付近に現われ、 $\phi_r \approx \pi$ となる。 $0 < \phi_{Br} < (\pi/2)$ であるから、lower regime では $(3/2)\pi < \phi_B < (5/2)\pi$ で、表 1 から砂面擾乱は下流へ進行し、増幅することがあり、dunes または ripples に相当する。一方、upper regime では $\pi < \phi_B < (3/2)\pi$ で、砂面擾乱は上流へ進行し増幅する。これは antidunes に相当する。

いま、局所水深及び局所流速をそれぞれ、

$$h = h_0 [1 + r_s a \cdot \sin \{ \kappa (x - ct) - \phi_s \}]$$

$$U = U_0 [1 + r_u a \cdot \sin \{ \kappa (x - ct) - \phi_u \}]$$

で表わすとき、ポテンシャル流理論を用いると、 $\phi_s, \phi_u = 0$ または π で

$$R_* \equiv r_s \cos \phi_s = (F_r^2 \kappa h_0 \operatorname{sech} \kappa h_0) / (F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0) \quad (23)$$

$$F_* \equiv r_u \cos \phi_u = (1 - F_r^2 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0) / (\tanh \kappa h_0 - F_r^2 \kappa h_0) \quad (24)$$

となる。いま、便宜上みかけの抵抗則を導入して、 U と掃流力 τ の関係を次式で与える。

$$\tau(x) = \beta \rho U^2 \{ 1 - \hat{\alpha} (\partial h / \partial x) \} \quad (25)$$

ここで、 $\tau_0 \equiv \beta \rho U_0^2$: 非擾乱時の掃流力、 β : 抵抗係数、 $\hat{\alpha}$: 補正係数であって、上式の第 2 項で河床波上での流れの拡大・収縮の効果を与えている。ポテンシャル流理論を適用して摂動流速 $u(x)$ 及び $(\partial h / \partial x)$ を求めると、掃流力の擾乱の振幅と位相は次式で与えられる。

$$r_r^2 = \{ \hat{\alpha} \kappa (R_* - 1) \}^2 + (2 \kappa F_*)^2 \quad (26)$$

$$\sin \phi_r = \hat{\alpha} \kappa (R_* - 1) / r_r, \quad \cos \phi_r = 2 \kappa F_* / r_r \quad (27)$$

ここで、 $r_r a \tau_0$: 掃流力の摂動の振幅である。

このようにして ϕ_{Br} 、 ϕ_r が求められると、砂面擾乱の挙動が明らかになり、砂面が不安定になる領域として河床波の形成領域が明確になる。図 6 は著者らの解析結果であり、図中、 $\gamma_1 \equiv \Lambda / h_0$ 、 $\gamma_2 \equiv$

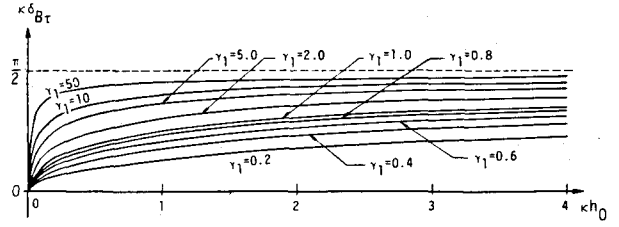


図 5 流砂の遅れ距離

$\hat{\alpha} Fr^2$, $\gamma_* \equiv \gamma_1/\gamma_2$ で、ポテンシャル流理論では upper regime と lower regime の不安定領域が明確に区分される。このような理論的取扱いは完全発達河床波の形成領域の予測に成功しているが、線型解析はこれらの平衡河床波に適用可能なものではなく、また、 ϕ_{Br} , ϕ_r のいずれが必ずしも正当に評価されているとはいえない。

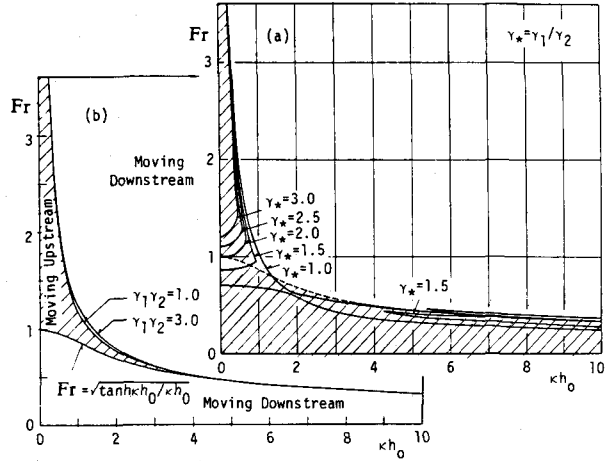


図6 砂面不安定解析結果の例

6. 波数スペクトルからみた河床波の発達

平坦河床からの河床波の成長過程は、移動床現象の規則性及び不規則性に関連して最も興味深い問題の一つである。この場合、初期の河床擾乱は前述のように極めて不規則であるから、砂面の不安定解析においてもスペクトルの変化に着目した取扱いがより適切である。このような方法は Jain-Kennedy (1974) により初めて試みられたが、流砂の遅れの取扱いが不十分であり、理論結果の実験による検証にも乏しかった。いま、河床波発生初期にはランダムな砂の離脱、落下を素過程とする分散生成過程が卓越し、その後擾乱路床上の流れと非平衡流砂過程に支配される不安定機構が働くとの考えに立って、フーリエ変換された砂面に対する不安定解析によって、スペクトル成分の増幅率が論じられる(中川, 辻本: 1984)。

式(5)を式(7)に代入してフーリエ変換を行うと、

$$\partial Y / \partial t = A_1 d \cdot \hat{r}_p \cdot p_{s0} \cdot F[r_\tau \Psi_\tau(x)] \{ F[f_X(\xi)] - 1 \} \quad (28)$$

が得られる。ここに、 $Y(\kappa, t) \equiv F[y(x, t)]$ である。砂面の波数スペクトル密度関数は、

$$S(\kappa, t) \equiv \overline{Y(\kappa, t) \cdot Y^*(\kappa, t)} \quad (29)$$

と定義される。 Y^* は Y の共役複素数、 $\overline{Y \cdot Y^*}$ は Y と Y^* の積のアンサンブル平均である。式(28)及び(29)を用いると、砂面の波数スペクトルの時間変化が得られる。

式(28)で pick-up rate $p_s(x)$ は底面せん断応力 $\tau(x)$ と位相差なしに応答するから、 $p_s(x)$ の摂動分 $p_s'(x)$ は

$$p_s'(x) = \hat{r}_p r_\tau \Psi_\tau(x) \cdot p_{s0} \quad (30)$$

で表わされる。ここで、 $r_\tau \Psi_\tau(x) \cdot \tau_0 : \tau(x)$ の摂動分、 $\hat{r}_p = \partial p_{s*} / \partial \tau_* |_{\tau_* = \tau_0}$ である。これに後述の $p_{s*} \sim \tau_*$ の関係を用いると、式(29)は次式のようになる。

$$S(\kappa, t) = S(\kappa, 0) \cdot \exp \{ 2 B^* \Gamma^*(\kappa h_0) \cdot p_{s0} t \} \quad (31)$$

ただし, $B^* \equiv A_1 d\hat{\gamma}_p / A$

$$\Gamma^*(\kappa h_0) \equiv - \left[(\kappa A)^2 / \{ 1 + (\kappa A)^2 \} \right] \{ 2 F_* \kappa A + \hat{\alpha} (R_* - 1) \} \quad (32)$$

Γ^* は無次元のスペクトル増幅率で, $\gamma_1 = 1.0$, $\gamma_2 = 1.2$ とした場合の $\Gamma^* \sim \kappa h_0$ の関係は図7に示すとおりである。これによるとある波数域の波は成長するが, 他の波は減衰するいわゆる波数選択的増幅がなされる。さらに, 一定の波数での波の増幅率は無限大になり, これはエアリー波に相当する。この波数は初期のスペクトルピークと良好に対応しており, 初期に相当規則正しい波が出現することを示している。

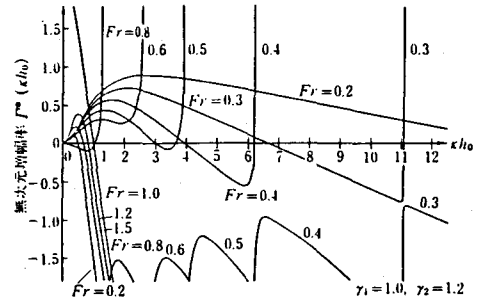


図7 河床波スペクトルの波数別増幅率

図8には砂面波数スペクトルの時間変化の実験結果の一例が示されている。実験は幅0.33 m, 長さ9 mの移動床水路を用い, 直径0.42 mm, 0.5 mm及び0.7 mmの砂を使用して, 超音波砂面測定器を30 cm/sの速度で自走する台車にのせて瞬間の河床縦断形を測定している(中川, 辻本: 1982, 1984)。図において初期($t = 30$ sec)でのスペクトルは比較的なだらかで, 4.で説明した砂面擾乱の初生に相当し, この段階での砂面は非常に不規則である。2~6分ではスペクトルに卓越したピークが現われ, それが成長していく。これは上述のスペクトル不安定解析でみられた特異点に相当し, 砂面は規則的に

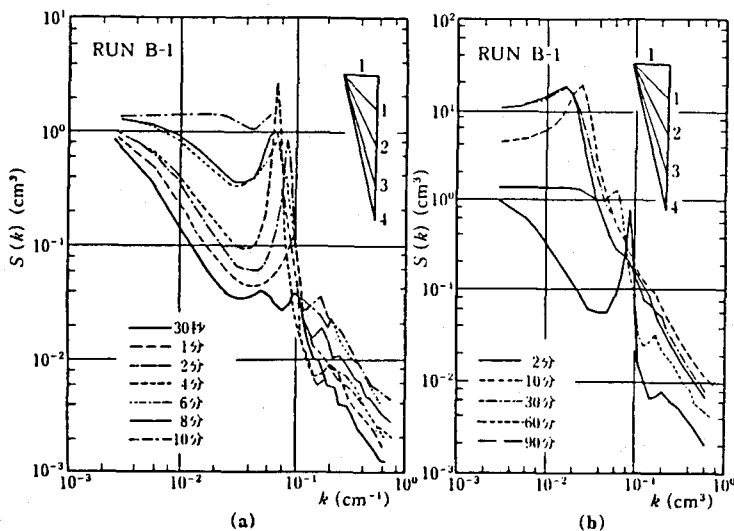


図8 河床波の発達過程における砂面波数スペクトルの時間的变化

なる。この例ではまた不安定機構による波数選択的成長がみられる。さらに時間が経つと、スペクトルピークは低波数側に移行し、その大きさも減少して砂面は不規則になるが、初期擾乱ほどランダムではない。この過程はJain-Kennedy (1974) によって“variance cascade process”と呼ばれ、これに伴うスペクトル特性が -3 乗則で表されることを確認している。

上述の実験的研究の結果、河床波の形成は少なくとも3つの機構によることがわかる。すなわち、(1) 砂礫のランダムな離脱、落下の繰返しによる分散生成機構、(2) 擾乱砂面上の流れと非平衡流砂運動の間の相互関係による砂面不安定機構、(3) variance cascade 過程である。前2者は個々の砂粒運動に関する確率モデルによって説明されるが、最後のものは例えば幅広いスケールに分布した砂堆の進行速度の差によって、追付き、合体が繰返されるといった個々の河床波の確率的挙動を考慮したモデルで説明されるであろう。

7. 確定論的方法と確率論的方法の位置づけ

これまで述べてきたように、流砂の確率的性状や離散性を具備した stochastic model によって移動床過程での非平衡流砂現象が合理的に説明されることがわかった。すなわち、注目すべき次の2つの素事象が巧みに記述される。

- (1) **ランダム現象の繰返し**：掃流砂粒の分散過程や砂面擾乱の初生の記述でみられたように、主として砂の pick-up rate の不規則性が重要な役割を果たす。
- (2) **流砂の非平衡性**：砂面の不安定性をひき起こす流砂の遅れ距離や armor coat の伝播（中川，辻本，原：1979）に代表され、主として step length の確率分布に支配される。

各種の流砂過程は表2に示すような基礎式に含まれる砂の挙動を表わす諸量の把え方によってそれぞれ異なったものとなる。流砂モデルとしては、表中のC-bの組合せであることが理想的であって、このとき砂面擾乱の初生や流砂の遅れ距離にもとづく河床波の形成機構を明らかにすることができる。

浮遊砂についても、砂粒の不規則な上昇と下降の繰返しが濃度分布を形成するし、stochastic modeling によってその非平衡性を容易に組込むことができる。

さらに、砂面の波数スペクトルの変化についても、流砂の応答遅れを考慮したスペクトル密度関数から河床波の発達過程を論じることができた。すなわち、初期には砂のランダムな離脱、落下の繰返しによって不規則性が増大する分散生成過程が卓越し、その後擾乱路床上の流れと非平衡流砂過程に支配される不安定機構が働いて、波数選択的成長がみられて、砂面が規則的になることが示された。また、この場合のスペクトル増幅率や特異性から、砂面の不規則性から規則性への遷移、さらに規則性の崩壊を知ることができる。こうした成果が線型解析の範囲を越えた河床波の成長過程を論じる上で有用な確率的知見を与えるという点でも意義がある。

さて、個々の粒子の運動などはあくまで力学法則にもとづいているところから、運動方程式を中心に据えた確定論的立場からのアプローチがある。本論で述べたような確率論的取扱いと決定論的考察との

表 2 場の性質

初期移動	p_s の理解	砂れきの離脱状況	モデル
	$\mu_s = \text{const} = p_s$	一定時間間隔または連続的	a
	$E[\mu_s] = p_s$	離散のかつランダム	b

* μ_s : 砂粒 1 個の占める面積における単位時間当りの砂の離脱個数

rest period	$f_x(\xi)$	遅れ機構	砂れきの離脱落下	モデル
	$f_x(\xi) = \delta(0) \text{ or } \delta(\infty)$	含まない	無相関	A
	$f_x(\xi) = \delta(\Lambda)$	含む、但し決定論的	相 関	B
	$f_x(\xi) = 1/\Lambda \cdot \exp(-\xi/\Lambda)^{**}$	不規則性考慮して含む	相 関	C

** 軽微な非平衡状態では step length の分布性状は平衡平坦河床のものからそれ程偏倚していない。

関係はどのように理解すればよいのであろうか。

元来, stochastic modelling は個々の流砂の挙動に関する情報が不足しているために, あるいは流砂の個々の運動が複雑で, 全体としてモデル化するためには得られている情報すら削減し, 比較的少ない情報から逆に多くの事柄(流砂やそれに伴う移動床過程の平均的挙動)を推定しようとする立場をとっている。掃流砂の確率モデルでも, 個々の砂粒運動は rest period と step length の 2 つの確率変数に集約され, これらはトレーサテストによる比較的少量の資料あるいは着目粒子の原点残留確率の測定など比較的短い時間, 狭い場所での観測によって推定されるとしている。この点が力学モデルの決定論的立場に立つ多くの研究者が確率モデルの欠点として指摘してきたところである。本来, こうした流砂現象の素過程である個々の粒子運動のパラメータは, いわゆる確率モデルそのものからは評価できないものであって, これらこそ力学的手法で評価されねばならないにもかかわらず, 確率モデルの枠外であるとの理由で, また不規則性の故に力学になじまないとの理由で, その検討は長くなおざりにされてきた。一方, 個々の粒子運動などの素過程が力学法則にもとづいて決定論的に取扱えるとしても, そこには流砂現象に固有な種々の不規則性の出現は避けられず, 力学的手法と確率論的手法との結合が必要となる。掃流砂礫の運動特性についてこのことを検討しよう。

近年, 画像解析など流砂運動の計測技術の進歩により, 砂礫の運動特性量の実測が進められるようになった。図 9 は移動床上で砂粒が動き始めてから完全に停止するまでの 1 step length 中の砂粒速度の変化を 16 ミリフィルム解析から求めた一例を示したものであるが, 加速と急激な減速の不規則な繰返しがみられる。掃流砂運動を滑動形式とみなすと, 次の運動方程式で表わされる。

$$M \dot{u}_g = \frac{1}{2} c_D \rho A_2 d^2 |u_d - u_g| (u_d - u_g) - A_3 \rho (\sigma/\rho - 1) g d^3 \mu_R \quad (33)$$

ここに、 M ：砂粒の仮想質量、 u_g ：砂粒の運動速度、 c_D ：抗力係数、 u_d ：流送砂粒の中心位置での流速、 μ_R ：動摩擦係数である。上式と実測粒子速度との比較検討の結果から、加速過程のみが式(33)を満足すること、みかけ上導入されている μ_R は粒子速度の増加とともに河床との接触度合が低下するために減少することが明らかにされた。しかし、1 step の砂粒運動に限

っても、急激な減速を含む挙動を単一の運動方程式で表現できるものではなく、まして平均速度を平衡速度で代用するなどは大いに疑問の残るところである。著者らは砂粒速度の急減は不規則な床面突起との衝突によるものであり、小さな変動を含む突起間での加速過程は式(33)にもとづいて記述されたとした解析を行っている(中川, 辻本, 細川：1979)。前者については衝突による粒子速度の変化を衝突-乗越しの力学モデルで与え、それに突起間隔及び突起高の確率分布を考慮して、不規則な床面突起との衝突の繰返しによる粒子速度の確率分布が評価された。

いま、突起高 Δ_* を確定量として扱ったモデルでは、衝突前後の砂粒速度(それぞれ V_1 及び V_3)の関係を示す図10からも明らかなように、その平均的挙動すら説明できないし、突起高の変動係数 α_H を考慮した場合でも平均的特性は十分評価できても、図11にみられるように速度の変動までは正当に評価できないことがわかる。すなわち、不規則現象では素過程(例えば衝突モデル)の正確さとともに、その変動(例えば突起高の変動係数)の高次モーメントの評価が必要とされ、素過程を平均化して

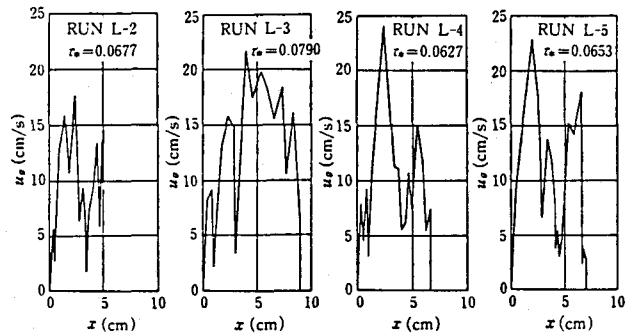


図9 掃流砂礫の1 step 内の速度変動

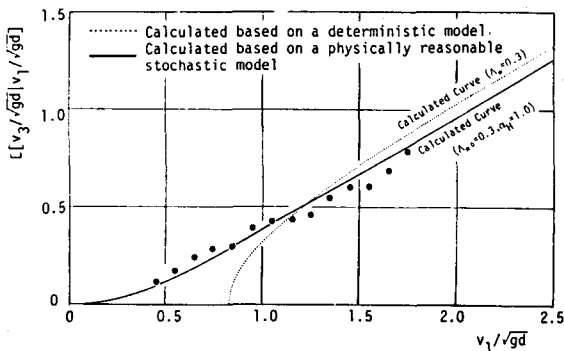


図10 衝突後の粒子の平均速度

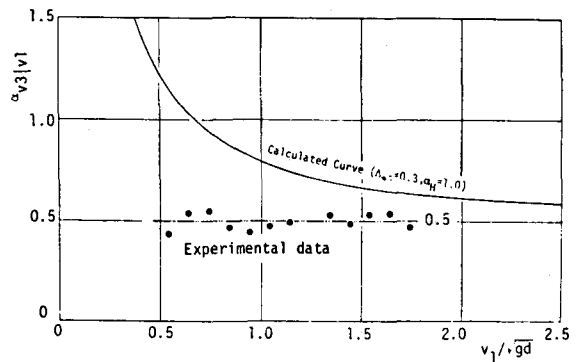


図11 衝突後の粒子速度の変動係数

みてしまうと、現象の平均的性状すら表わし得ない場合があることが注目される。

上述の手法で図12に示すフローチャートに従ってシミュレーションした結果の一例が図13に示されており、実測結果の図14との対比によって掃流砂の不規則運動がかなり忠実に表現されているといえる。これによって step length や流砂量の場所的変動が明らかになるが、運動方程式が現象の一部に現われる確定事象（条件付き確率を考慮して抽出されるもの）しか説明できず、これを確率過程論的なフレームワークの中に効かすことの重要性が示唆される。

掃流砂運動を saltation として扱う場合には、底面からの各高さでの砂粒の存在確率密度（掃流砂濃度分布）を論じることができるから、浮遊砂濃度との接続などと関連して有用である。上述の滑動形式のモデルではこうした掃流層の概念は成立しえない。saltation の運動方程

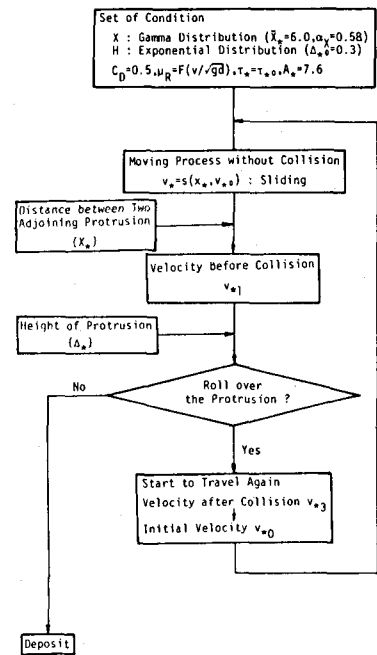


図12 数値シミュレーションのフローチャート

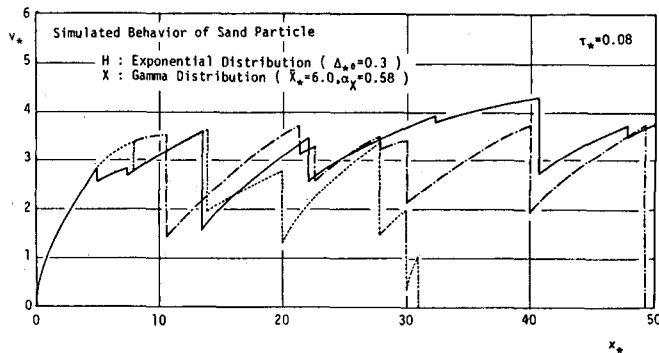


図13 掃流砂運動の数値シミュレーションの例

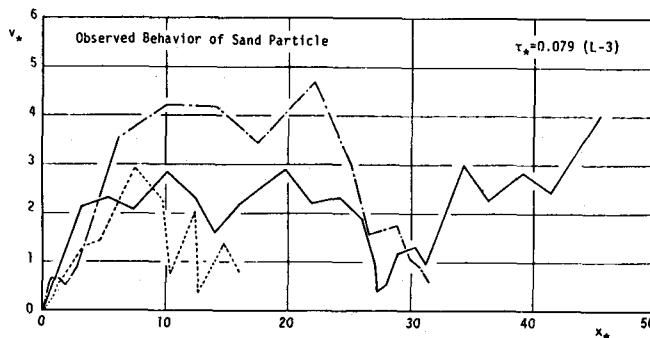


図14 移動床上の掃流砂運動の観測例

式にもとづく取扱いは Yalin (1963) 以来, わが国でも意欲的に研究が行われ, successive saltation の理論や saltation 運動の確率的性質が明らかにされた (土屋他: 1969, 1970)。しかし, 理論的取扱いにおいて確率的諸量を十分反映させた確率過程論的モデルに総合されなかったために, 流砂量を求めるだけでも運動方程式の厳密さとは斉合性のとれない大胆な仮定を設けざるを得なかった (河田: 1976)。

すなわち, 確定論的立場から平均水理量に規定される一つの運動軌跡の厳密な取扱いができたとしても, その集合が流砂現象の平均的特徴を表わすものではなく, 確定論的見方をすると, saltation は一つで存在するか, あるいは定常跳躍になってしまい, 前者では実際現象との隔りが大きすぎるし, 後者では bed load material の特徴である運動砂粒と河床砂粒との交換現象が説明できず, その結果例えば非平衡要因である遅れ距離は説明できないことになる。

著者ら (1984) は個々の saltation は運動方程式に従う確定論的なものであるが, 初速度を生み出す床面での反発現象が不規則性をもたらすことから, 不規則継続跳躍としてモデル化すべきであるとした。すなわち, 個々の跳躍軌跡を表現する運動方程式は初速度の不規則性に起因する saltation 特性量の分布の相互関係を与えるものとの理解に立ち, それらの変換式を導いた。したがって, 運動方程式にもとづいて saltation の初速度 $\{v_0\}$ の条件付きでの存在確率密度が求められ, これに $\{v_0\}$ の分布を考慮して条件開放することにより掃流砂の鉛直方向存在確率密度分布, さらに濃度分布が導かれた。 $\{v_0\}$ の分布については, 床面での反発事象の力学モデルから反発前後の粒子速度の関係を与え, これに入射角と入射速度の分布を考慮して求められた。

これらのモデルを組合せて継続跳躍を数値模擬することによって, 個々の saltation の特性量のみならず, 継続跳躍の特性量の分布性状を明らかにすることができる。図 15 にはシミュレーションにより得られた個々の saltation の高さ H_s , 長さ L_s , 所要時間 T_s , 初速度 (u_{g0} , v_0), 着床時速度 (u_{gr} , v_s) の平均値及び標準偏差と無次元掃流力 τ_* との関係が示されており, また, 図 16 には saltation の継続回数, step length, moving period (step length 間の運動時間) が示され, ほぼ指数分布に従うことが認められる。さらに, 図 17 には粒子の存在高さの平均値と変動係数が示されるが, これによると掃流層の上限は $\tau_* = 0.1 \sim 0.3$ に対して粒径の 4 ~ 8 倍であり, 浮遊

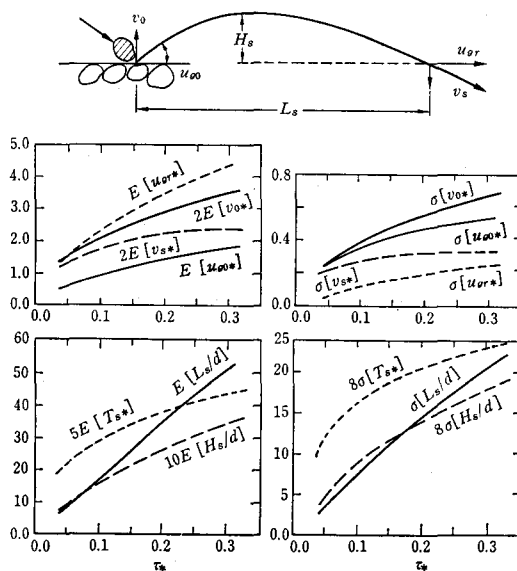


図 15 個々の saltation の特性量

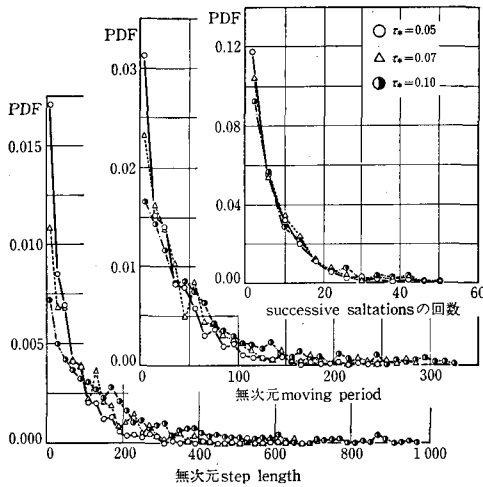


図 16 saltation の継続量の分布性状

砂の規定濃度とも関連して興味深い。また、ここに提案されたモデルの妥当性は 16 ミリフィルム解析を用いた詳細な実験計測によって実証されている。

上に述べたように、流砂の saltation の取扱いに当たって、saltation の不規則性の要因である反発事象をいかに取り入れるか（継続跳躍のモデル化）、全体としての不規則な saltation 粒子群の挙動をどのようにアンサンブル的に表現するか（確率論的モデル化）という問題と、その成果を移動床水理の中でいかに生かすかが重要な課題であるといえよう。そのためには、力学法則にもとづく素過程の確定論的モデルを確率（過程）論的フレームワークによって総合化し現象の全体像を形造るという両手法の結合をはかることが必須である。

掃流砂の確率モデルの構成要素である pick-up rate や平均 step length もまた、それぞれ砂粒の初期移動及び運動機構の力学的考察にもとづいて評価される。著者らは河床に存在する砂粒が転動離脱するものとして運動方程式にもとづく初期移動の解析を行ったが、単位時間の移動確率すなわち p_s の評価に掃流力の変動とその作用継続時間を考慮した確率的取扱いをしており、それによって得られた次の推定式を図 18 に示すように実験値との比較によって検証している（中川，辻本：1975，1980）。

$$p_{s*} \equiv p_s \sqrt{d / (\sigma / \rho - 1) g} = 0.03 \tau_* (1 - 0.035 \tau_{*c} / \tau_*)^3 \quad (34)$$

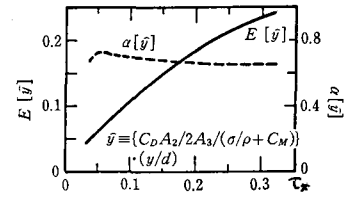


図 17 掃流砂の存在高さの平均値と変動係数

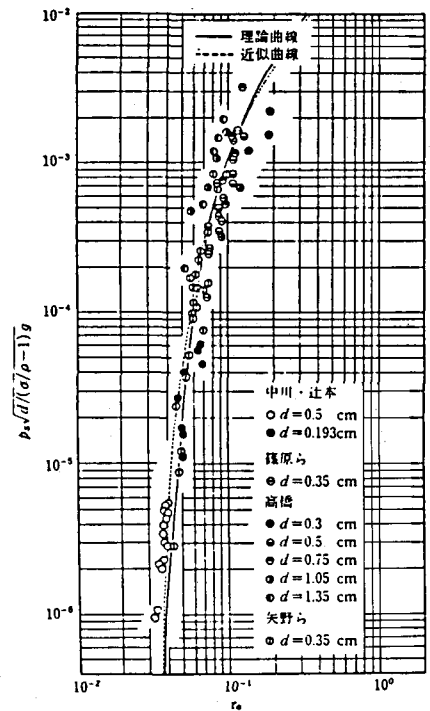


図 18 pick-up rate の近似推定式

ここに、 τ_* ：無次元掃流力、 τ_{*c} ：無次元限界掃流力である。

一方、平均 step length λ については、転動砂礫が床面突起を乗越すという概念から掃流力との関係を導き、これに掃流力が増して突起砂粒及びその周辺砂粒がルーズになることの効果も取入れた物理モデルによって実測値がよく説明できることを示している（中川，辻本：1975）。勿論，上述の継続跳躍の確率モデルからも評価されるが、 λ と τ_* の関係を定式化するために、式（4）及び（6）で、 $x \rightarrow \infty$ で $p_s(x) = p_{s0}$ = 一定とした平衡流砂量式によって、

$$\lambda \equiv \lambda/d = (A_2/A_3) q_{Be*}/p_{s0*} \tag{35}$$

が得られ、式（34）と従来の平衡流砂量式を用いて λ と τ_* の関係を求めたものが図19に示される。図中、曲線（A）はMeyer-Peter-Muller式、（B）、（C）はBagnold式、（D）は芦田・道上式を用いたものである（中川，辻本，富田：1982）。

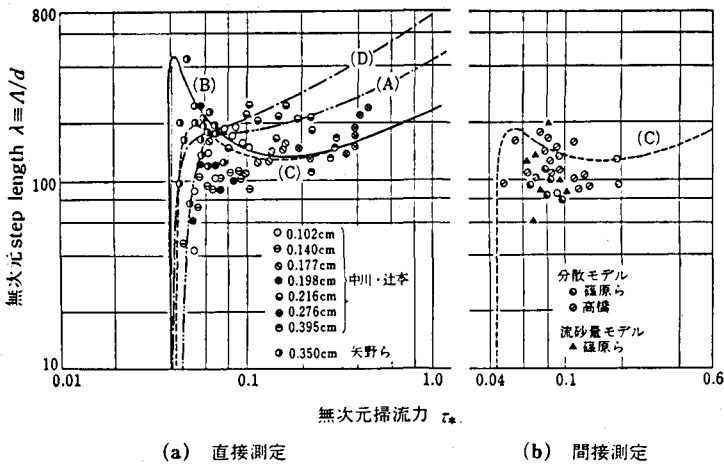


図19 平均 step length と掃流力との関係

8. あとがき

本文では流砂現象に固有な不規則性，非平衡性を組み入れた確率モデルによって種々の移動床過程が合理的に説明できることを示すとともに，個々の砂粒運動に対する確定論的力学と，それらの確率論的な集合の構成という観点からこそ現象のより深い理解が得られることを示した。移動床現象にはこうした考えにもとづくモデルの適用が待たれるケースが多く，今後の流砂問題の解明に役立つことができれば幸いである。

参 考 文 献

- 1) Yang, C.T. and W.W. Sayse : Stochastic model for sand dispersion, Proc. ASCE. Vol. 97, HY 2, pp.265-288, 1971.
- 2) Shen, H.W. and P. Todorovic : A general stochastic model for the transport of sediment bed material, Proc. 1st Int'l Symp. on Stochastic Hydraulics, Pittsburgh, USA, pp.489~503, 1971.
- 3) Hung, C.S. and H.W. Shen : Stochastic models of sediment motion on flat bed, Proc. ASCE, Vol.102, HY 12, pp.1745~1759, 1976.
- 4) 中川博次・辻本哲郎：掃流過程の確率モデルとその一般化，土木学会論文報告集，第291号，pp.73~83，1979.
- 5) 中川博次・辻本哲郎：砂礫の運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程，土木学会論文報告集，第291号，pp.53~62，1979.
- 6) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto : Sand bed instability due to bed load motion, Jour. of Hydraulics Engineering, ASCE, Vol.106, HY 12, pp.2029~2051, 1980.
- 7) Tsujimoto, T. and H. Nakagawa : Sand wave formation due to irregular bed load motion, Proc. Euromech 156: Mechanics of Sediment Transport, Istanbul, Turkey, pp.109~117, 1982.
- 8) Jain, S.C. and J.F. Kennedy : The spectral evolution of sedimentary bed forms, Jour. of Fluid Mechanics, Vol.63, Part 2, pp.301-314, 1974.
- 9) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto : Spectral analysis of sand bed instability, Jour. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.110, No.4, pp.467-483, 1984.
- 10) 中川博次・辻本哲郎・原 稔明：混合砂れき床面の粗粒化過程について，京大防災研年報，第20号B-2，pp.355~370，1977.
- 11) 中川博次・辻本哲郎・細川泰廣：移動床における掃流砂れきの不規則運動性状について，京大防災研年報，第22号B-2，pp.553~573，1979.
- 12) Yalin, M.S. : An expression for bed-load transportation, Proc, ASCE, Vol.89, HY 3, pp.221~250, 1963.
- 13) 土屋義人・渡戸健介・青山俊樹：水流による砂れきの saltation の機構(1)，京大防災研年報，第12号B，pp.475~490，1969.
- 14) 土屋義人・青山俊樹：水流による砂れきの saltation の機構(2)，京大防災研年報，第13号B，pp.191~216，1970.
- 15) 河田恵昭：飛砂・流砂における砂粒の流送機構に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1976.
- 16) 辻本哲郎・中川博次：掃流粒子の saltation の確率過程論的解析，土木学会論文集，第345号，

II - 1, pp. 83 ~ 90, 1984.

- 17) 中川博次・辻本哲郎：水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第244号，pp. 71 ~ 80, 1975.
- 18) 中川博次・辻本哲郎・富田邦裕：河床波スペクトルの発達に関する研究，京大防災研年報，第25号B-2，pp. 451 ~ 471, 1982.