

密度流現象—その再訪と展望—

早 川 典 生

1. はじめに

この水工学に関する夏期研修会では、密度流に関する講義が既に第2回（1965年）において、今は故人となられた嶋祐之¹⁾、柏村正和²⁾両先生によりなされており、以後記録によれば密度流に関連した講義は10回にのぼっている。この間1975年には水理委員会密度流小委員会の優れたレビューが発表されている^{3), 4)}。この間の研究の進展を概観すると以下のものであろう。密度流という言葉・研究テーマは昭和30年以前には水理学にはなく、むしろ海洋学の分野で今日で言う地衡流の意味に用いられていたようである⁵⁾。密度流が density current と呼ばれて研究者の注目を浴びるにいたったのは、1953年 IAHR の Minnesota convention 以来であるように思われ、それは丁度水利用が高度化し、水資源開発が急速に進み、やがては工業開発に伴う水質環境保全への関心の高まりの時期と一致している。密度流という項目はこのようにして昭和38年発行の水理公式集にとりいれられ、以後、密度流研究は質・量共に拡充されていった。前述したように水理委員会のレビューは極めて優れた、程度の高いものである。また密度流に関しては既に優れた成書も刊行されている⁶⁾。この10年間に密度流に関する研究はさらに進展し、この講義シリーズで取り上げられた例にも見る通り、取扱われている問題が広がる傾向も見せている。筆者は密度流を自己の研究テーマの一つとしてきたが、これら最新のテーマ・研究手法に必ずしも精通している者ではない。むしろ古い手法、古い問題の方が得意な分野といえるかもしれない（従って“再訪”）。どちらかといえば密度流研究の主流に乗り出すことをためらっていた自己の過去の研究を反省しながらいくつかの問題を議論し、将来の展望を考えてみようというのがこのノートの意図である。

1975年の水理委員会のレビューは、第一篇界面安定・不安定、第2篇界面抵抗、第3篇界面形状、第4篇地下密度流である。このうちで地下密度流に関しては筆者は経験が乏しいのでこれを省き、ほぼこの順序に沿って密度流を論じて見ようとするものである。なおこれらのテーマに関する研究例はあまりに多く、筆者一人がすべてに目を通すのは不可能でもあり、網羅的に参考文献を載せることも紙面が許さない。その意味でこのノートはあくまで一つの管見であることを付記しておきたい。

2. 界面現象

密度流においてはほとんどの場合二つの性質の異なる流体が相接して流れる場合をとり扱うので、両者の間には内部境界面、すなわち界面が存在する。二つの流体がお互いに混り合わない場合（水と空気、

または水と油)には、界面は空間上に明確に定義できるが、相互に混り合う場合にはその定義には任意性が生じる。現在のところ、実験水槽で目視で観測された内部境界面、密度勾配の最も急な面、上下層の中間密度層面、などが便宜上用いられている。いずれにしても二種の流体を隔てる内部境界面を定義することができ、それをここでは界面と呼ぶ。界面においては、界面波の発生、運動量の伝達、物質の連行など、密度流流れを支配する現象が見られる。これらの現象のうち、ここでは特に界面波の発生条件と連行現象の定式化について考察を加える。

2.1 界面波の安定問題

成層密度流の界面には界面波が発生し、その界面波は界面を通しての物質ならびに運動量の輸送に重要な役割を果す。界面波の発生は古くから流体力学的安定問題として研究されてきた。有名な Kelvin-Helmholtz 型の安定条件は、非圧縮・非粘性・非回転の条件の下に図 1 に示す流れについて以下のように求められている。

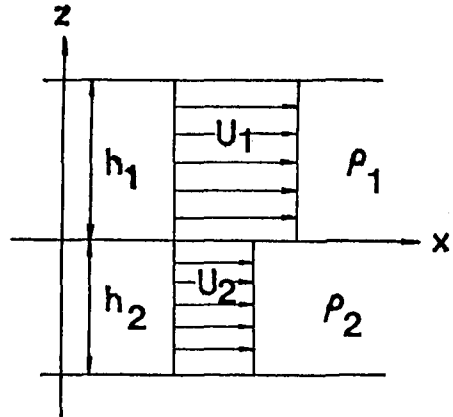


図 1 不連続分布二層流模式図

$$(U_1 - U_2)^2$$

$$\leq \frac{[\rho_1 \coth(kh_1) - \rho_2 \coth(kh_2)] [g(\rho_2 - \rho_1) + Tk^2]}{-k\rho_1\rho_2 \coth(kh_1) \coth(kh_2)} \quad (1)$$

ここで U_1 , U_2 は各々上下層の一樣と見なされている速度, ρ_1 , ρ_2 は各々上下層の密度, h_1 , h_2 は各々上下層の水深, k は波数, g は重力加速度, T は表面張力である。この解の密度流の問題への適用にあっては、図 1 に示す密度分布・速度分布が非現実的であるという難点がある。

一般に連続的な速度分布・密度分布を有する密度流の安定問題は数多く考えられるが、この種の問題で最も有名であり、後に続く数々の研究の先駆けとなったのは、Taylor⁷⁾ と Goldstein⁸⁾ の非粘性問題の研究である。非粘性問題に限っても数多くの研究例があげられるが、その中でも金字塔というべきは、特定な流速分布・密度分布の指定を必要としない一般的な安定条件を導いた Miles の研究成果である⁹⁾。この安定条件の導出は原論文のほかに、水理委員会のレビューにも紹介がある。

それでは粘性の効果はどの程度であろうか。理論的に粘性を考慮した解を求めるのは大変難しく研究例も少ない。元来 Taylor をはじめとして、多くの連続成層密度流の安定問題の研究例が非粘性解を取り扱っているのは、対象とする現象が主として大気の実験であるからではなかろうか。それに対して水理学で取り扱う現象は、河口の塩水楔にせよ貯水池の泥流にせよ、スケールは大きくとも流速が極めて小さいことが予想され、粘性の影響も考慮する必要があるのではないだろうか。水理学の分野で最初にこの問題に取り組んだのは Keulegan¹⁰⁾ である。しかしながら彼の解析は厳密なものではなく、そのために得られた結果も安定性を決定する有名なパラメーター、クーリガン数、の導出にとどまっている。

粘性を考慮した二層密度流の安定問題は Hayakawa and Unny¹¹⁾, 西田と吉田¹²⁾, Hayakawa¹³⁾によって解かれている。前二者の解いた問題は全く同一であり、密度差の小さい二層流体の流れが、無限領域の中で連続流速分布形を保って流れているものである(図2)。以下にその解析を述べるが、粘性の効果はレイノルズ数の小さい時にのみ有効であると思われるので、Hayakawa and Unny の低レイノルズ数の解析を特に詳しく述べる。

図2で示される流れの安定度問題は、二次元攪乱の流れ関数 ψ_j を次式のように表すことによって定式化される。

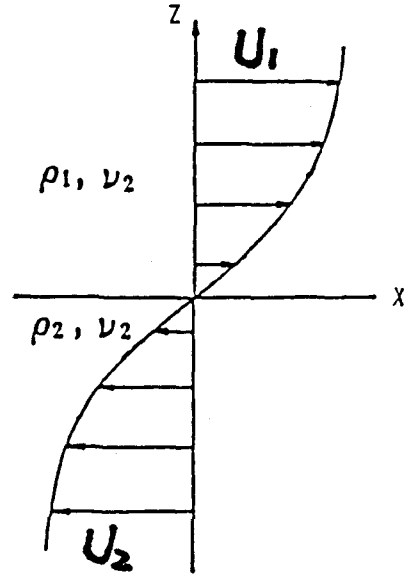


図2 二層流速分布図

$$\begin{aligned} \psi_j(x, z, t) \\ = \varphi_j(z) \exp[ik(x - cUt)] \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$, c は無次元波速、 U は代表流速、添字 $j = 1, 2$ は各々上下層の値を示す。式(2)を用いて Navier-Stokes 方程式を線型化すると、次の Orr-Sommerfeld 方程式が得られる。

$$(w_j - c)(\varphi_j'' - \alpha_j^2 \varphi_j) - w_j' \varphi_j = -(i/\alpha_j R_j)(\varphi_j''' - 2\alpha_j^2 \varphi_j'' + \alpha_j^4 \varphi_j) \quad (3)$$

ここで $w_j = U_j/U$, $\alpha_j = k\delta_j$, δ_j は上下層の代表長さ、 $R_j = U\delta_j/\nu_j$, ν_j は各層流体の動粘性係数、プライムは無次元化された z 方向座標 $\eta_j = z/\delta_j$ に関する微係数である。上下層の代表長さ δ_j は混合層境界層型流速分布を考える時には異った値を採用する必要がある。境界条件は上下層遠方において次式のようなである。

$$\phi_1 = \phi_1' = 0, \quad \eta_1 \rightarrow \infty \quad (4)$$

$$\phi_2 = \phi_2' = 0, \quad \eta_2 \rightarrow -\infty \quad (5)$$

界面においては z, x 方向流速の連続性、および切線応力と法線応力の連続性が順に以下のように書ける。

$$\phi_1 = \nu^{1/2} \phi_2 \quad (6)$$

$$\phi_1' + \frac{w_1'}{c - w_0} \phi_1 = \phi_2' + \frac{w_2'}{c - w_0} \phi_2 \quad (7)$$

$$\phi_1'' + \alpha_1^2 \phi_1 = \rho \nu^{1/2} (\phi_2'' + \alpha_2^2 \phi_2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_0^2}{c-w_0} \alpha_2 \phi_2 = (c-w_0) \phi_2' + w_2' \phi_2 + \frac{1}{i\alpha_2 R_2} (\phi_2''' - 3\alpha_2^2 \phi_2^2) \\ - \frac{1}{\rho} \left[(c-w_0) \phi_1' + w_1' \phi_1 + \frac{1}{i\alpha_1 R_1} (\phi_1''' - 3\alpha_1^2 \phi_1') \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $w_0 = w_1(0) = w_2(0)$, $\rho = \rho_2/\rho_1$, $\nu = \nu_2/\nu_1$, c_0^2 は次式で与えられる無次元数である。

$$c_0^2 = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{g}{kU^2} + \frac{kT}{U^2} \frac{1}{\rho_2} \quad (10)$$

式(3)～(10)は安定問題に特有な固有値問題であり、固有値としての複素波速 c の虚数部が負であれば攪乱は安定、零ならば中立、正ならば不安定となる。式(3)～(10)において、二層の流体の密度差は小さく、動粘性係数に差は認められないと仮定する。すなわち、

$$\rho = 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1), \quad \nu = 1 \quad (11)$$

を採用し、 ε の高次の項を無視すると、 $\delta = \delta_1 = \delta_2$, すなわち $\eta = \eta_1 = \eta_2$, $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, $R = R_1 = R_2$ と置くことができ、式(3)～(10)は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} (w_j - c) (\phi_j'' - \alpha^2 \phi_j) - w_j'' \phi_j \\ = (-i/\alpha R) (\phi_j''' - 2\alpha^2 \phi_j'' + \alpha^4 \phi_j) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi_1, \phi_1' = 0 \quad \eta \rightarrow \infty \quad (13)$$

$$\phi_2, \phi_2' = 0, \quad \eta \rightarrow -\infty \quad (14)$$

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \eta = 0 \quad (15)$$

$$\phi_1' = \phi_2', \quad \eta = 0 \quad (16)$$

$$\phi_1'' = \phi_2'', \quad \eta = 0 \quad (17)$$

$$\frac{c_0^2}{c-w_0} \alpha \phi_2 = \frac{-i}{\alpha R} (\phi_2''' - \phi_1'''), \quad \eta = 0 \quad (18)$$

無次元数 c_0^2 はリチャードソン数, R_i , との間に次式の関係がある。

$$c_0^2 = \frac{\varepsilon g}{kU^2} = \frac{R_i}{\alpha} \quad (19)$$

式(12)～(18)の問題は有限なレイノルズ数 R に対して無限遠の境界条件(13), (14)を満たすような漸近解を用いて数値積分が可能である。計算例を Hayakawa and Unny は自由境界層流速分布と $\tanh$ 型流速分布に対して、西田らは $\tanh$ 型流速分布に対して与えている。図3は西田らの計算による中立安定曲線であり、安定限界に対する粘性の影響はレイノルズ数の小さい領域に限られていることを

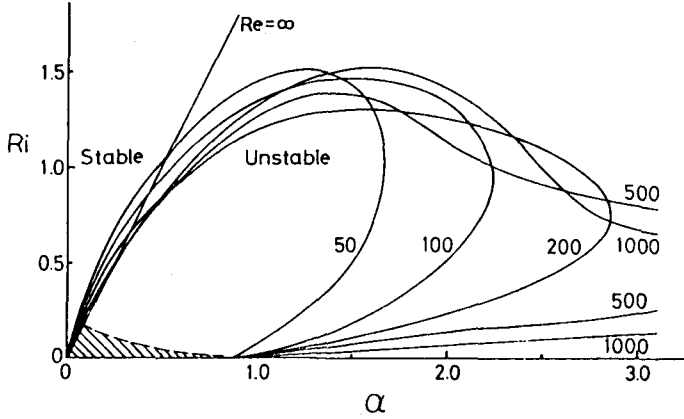


図3 二層流中立安定曲線¹²⁾

示している。そこで $\alpha R = 0$ の極限の Hayakawa の解を紹介する。

元来、一様流体の混合層型流速分布の線型安定度問題には有名な Tatsumi and Gotoh¹⁴⁾の解がある。その解では任意の R に対してある値以上の α では不安定解が存在すること、特に $\alpha R \rightarrow 0$ の極限では中立安定曲線は $R \propto \alpha$ の関係を満たすこと、すなわちいわゆる臨界レイノルズ数は存在しないこと、を示した。彼等の解析に従い、式(12)の解を αR のべき級数として次式のように表す。

$$\phi_j = \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} (i \alpha R)^n \phi_{j1}^{(n)} + \text{const} \sum_{n=0}^{\infty} (i \alpha R)^n \phi_{j2}^{(n)} \quad (20)$$

ここで $\phi_{j1}^{(n)}$, $\phi_{j2}^{(n)}$ は各々境界条件(13), (14)を満足する特殊解であり、以下の方程式を満す。

$$\phi_j^{(0)''''} - (\alpha^2 + \beta_j^2) \phi_j^{(0)''} + \alpha^2 \beta_j^2 \phi_j^{(0)} = 0 \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \phi_j^{(n)''''} - (\alpha^2 + \beta_j^2) \phi_j^{(n)''} + \alpha^2 \beta_j^2 \phi_j^{(n)} \\ = i \alpha R \left[(w_j - \delta_{1j}) (\phi_j^{(n-1)''} - \alpha^2 \phi_j^{(n-1)}) - w_j'' \phi_j^{(n-1)} \right], n \geq 1 \end{aligned} \quad (21b)$$

ここで δ_{1j} はクロネッカーの δ であり、 β_j は次式で与えられる。

$$\beta_1 = \alpha \left[1 + i(R/\alpha)(1-c) \right]^{1/2} \quad (22a)$$

$$\beta_2 = \alpha \left[1 - i(R/\alpha)c \right]^{1/2} \quad (22b)$$

式(20)を境界条件(15)～(18)に代入すると波速 c に関する固有値方程式を得ることができ、 αR の0乗の項を記せば次式のような。

$$\left[\alpha^2 + (\beta_1 + \beta_2) \alpha + \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1 \beta_2 \right]$$

$$= [c_0^2 / 2 \alpha (c - w_0)] (\beta_2 - \beta_1) (2 \alpha + \beta_1 + \beta_2) \quad (23)$$

式(23)で $c_0^2 = 0$ の場合は Tatsumi and Gotoh の解である。流速分布が $\tanh$ 型であるとする $w_0 = 0.5$ であり、この時の中立安定曲線を図4に示す。図は c_0^2 の小さい値に対しては、中立安定曲線は $\alpha \propto R$ で表わされることを示しており、この場合も Tatsumi and Gotoh の結論と同様に、与えられた c_0^2 の値に対して中立安定解には最小の R は存在しないことになる。

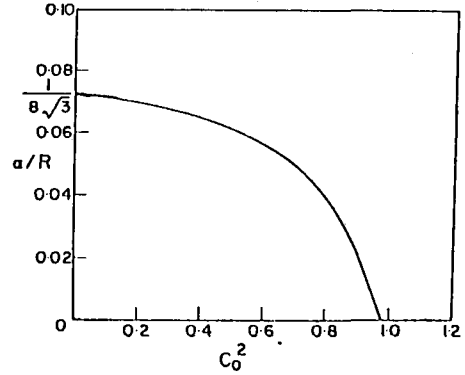


図4 二層流中立安定曲線 ($\alpha R \rightarrow 0$)

二層流の安定度問題に関する実験観察は Ippen and Harleman¹⁵⁾ によって、下層流について行われ、式(1)で $kh_1 = \infty$, $T = 0$, $U_1 = 0$ とし、さらに実験的に界面波の波速の満たす条件 $kh_2 = 2$ を確めて、安定限界として次式を得ている。

$$F_d = U / \sqrt{(\Delta \rho / \rho) g h_2} < 1 \quad (24)$$

Keulegan は同じく下層密度流の実験と前述の半経験的理論展開から、Keulegan 数 $\theta = (\nu g \Delta \rho / \rho)^{1/3} / U$ を用いて次のような安定限界を得ている。

$$\theta_c = \begin{cases} 0.127, & R \leq 450 \\ 0.178, & R > 450 \end{cases} \quad (25)$$

その後二・三の成果も発表されているが、式(24)の右辺の値の修正にとどまっているようである。

Hayakawa は図1で与えられるような不連続な速度、密度分布の流れに対して、式(1)への粘性による修正項を理論的に導いた。この論文では速度分布が不連続であるという不自然さはあるものの、攪乱速度には連続性が保たれると仮定して粘性問題の解を得ている。解法は、風波の発生の先駆的研究であった Jeffreys¹⁶⁾ の研究に従っており、粘性逸散が小さいという仮定のもとに次式のような安定限界を得ている。

$$F_d^{-2} \geq (\alpha/2) [1 - 16 \alpha^2 / R + (s^2/4) / (2 \alpha + s/2)^2] \quad (26)$$

ここで s は層流型の界面抵抗係数を $f = s/R$ と表した時の定数 s である。

式(25)の Keulegan 数は F_d と R の間に次式の関係がある。

$$\theta = F_d^{-2/3} R^{-1/3} \quad (27)$$

従って式(24), (26) 共に $\theta - R$ の関係として描くことができる。図5はそのようなプロットであり、式(26)で与えられる粘性の効果は、 $R < 10$ の領域でしか現れないことがわかる。

式(26)は図1に示すように非現実的な速度分布により導かれているが、これを図3,4のより現実的な場合の結果と比較して見ると、 $c_0^2 = 0$ の近傍で α/R と c_0^2 の関係を直線で代表させると次式のような関係を得る。

$$F_d^{-2} \propto \alpha (1 - 8 \sqrt{3} \alpha / R) \quad (28)$$

式(28)は式(26)と比べて第2項のべき数は異なるものの、似たような結果を示しており、係数値が異なるのは採用された流速分布の相異によるのではないと思われる。

界面波の線型安定性問題はこのような研究が進んでいるが、界面波はいったん発生すると、非線型性の影響を強く受けるもののようであるが¹²⁾、このような問題の理論的研究は未だなされたことがなく、これからの問題である。

2.2 界面の運動学と連行現象

密度流を決定する界面現象は前述したように、界面を通しての物質の輸送、すなわち連行、と界面を通しての運動量の輸送すなわち界面抵抗である。後者の問題の研究は界面抵抗を実験的に求めるアプローチと、理論的に求めるアプローチがある。筆者はこの問題には経験が乏しいのでここでは議論をしないこととする。

連行現象は最初に Ellison and Turner¹⁷⁾ が半経験的に示して以来、最も成功した概念であったといえよう。今日では、静止している層から運動している層へ、単位面積当たり運動している層の代表流速に比例する連行量が発生するという概念は極めて一般的であり、広く応用されている。またその比例定数がリチャードソン数(あるいは密度フルード数)の関数であるというのも一般に認められている概念のようである。しかしながら、連行係数の概念が、上下層共に一般に流れがある場合、あるいは両層に全く流れの無い場合にどのように拡張されるかは、僅かに玉井¹⁸⁾ の研究があるだけであり、明確とはいえないように思われる。ここでは、連行現象の一般的な概念を導くためには、界面の運動学を研究する必要があるという認識の上に立って、連行現象の定式化の予備的考察を試み、問題点を明らかにしようとするものである。

図6に示すように、密度分布を有する二層の流れを考える。 $z = 0$ は固定床、 $z = H$ は自由表面である。以下に固定床、自由表面および界面 $z = \eta(x, z, t)$ の満たすべき運動学的境界条件について考察する。固定床においては法線方向流速 $w = 0$ である。自由表面においては良く知られている自由表面

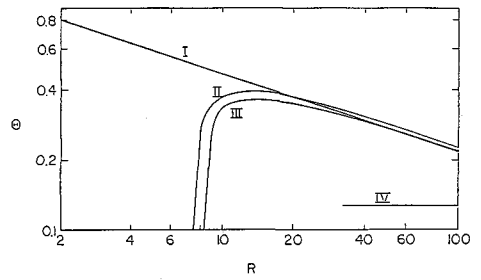


図5 二層流中立安定曲線
(I : (24), II : (26) $s = 5$,
III : (26) $s = 0$, IV : (25))

の条件を満たさねばならない。

$$w = \frac{\partial H}{\partial t} + U_H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad z = H \quad (28)$$

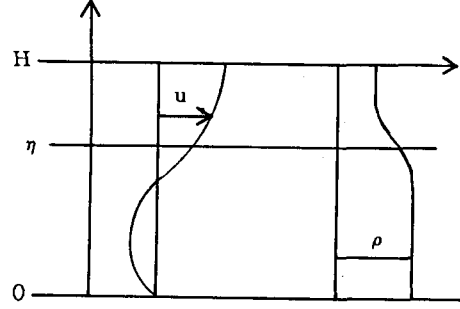


図6 二層流模式図

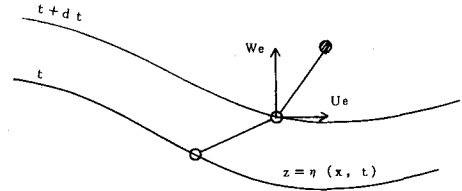


図7 界面と水粒子の運動

界面 $z = \eta(x, t)$ においては連行現象，すなわち物質の移動がある。界面 $z = \eta(x, t)$ にあった流体粒子が，界面の移動速度 $\bar{u}_\eta$ に $\bar{v}_e = (u_e, w_e)$ だけ足した速度を有するものとする。図7において時刻 t に界面上白丸印の位置にあった流体粒子は時刻 $t + dt$ に黒丸印の位置に達したとする。この流体粒子の軌跡と時刻 $t + dt$ における界面位置との交点を図中にやはり白丸印で示す。この $t + dt$ 時刻における流体粒子の位置と界面位置の差は連行速度 $\bar{u}$ によって発生する。従って界面における流体速度 $\bar{u}$ は次式のように書ける。

$$\bar{u}(x, \eta, t) = \bar{u}_\eta(x, \eta, t) + \bar{v}_e(x, \eta, t) \quad (29)$$

時刻 t における界面位置を位置ベクトル $\bar{x} = (x, \eta)$ で表すと，時刻 $t + dt$ において位置ベクトル $\bar{x} + \bar{u}_\eta(\bar{x}, t) dt$ も界面である。界面を表す式 $z = \eta(x, t)$ を $f(\bar{x}, t) = z - \eta = 0$ と書いて，Taylor 展開を用いることにより次式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= f(\bar{x} + \bar{u}_\eta(\bar{x}, t) dt, t + dt) \\ &= f(\bar{x}, t) + \partial f / \partial t \cdot dt + \bar{u}_\eta \cdot \nabla f dt + O(dt^2) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{u}_\eta \cdot \nabla f \right) dt + O(dt^2) \end{aligned} \quad (30)$$

すなわち界面条件式として次式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{u}_\eta \cdot \nabla f = 0 \quad (31)$$

式(31)は $f = z - \eta$ と式(29)を代入することにより次式のように表される。

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w_e + u_e \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (32)$$

連行現象の概念を用いるために，質量保存の平均流方程式を導くことを考える。乱流における質量保存則は，渦動拡散係数 K_x, K_y, K_z を用いて次式のように書ける。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

この式を上層 ($z = \eta$ から $z = H$ まで) 積分し、式 (28) と式 (32) を用いると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^H \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^H \rho u dz = K_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_H - K \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{\eta} + \rho w_e \quad (33)$$

いま自由表面より空気中に拡散される量はないものとする、右辺第 1 項は消滅する。また上式を上層の平均密度 ρ_1 および平均流速 U_1 で書き表すと次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 h_1) + \gamma \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 U_1 h_1) = \rho_0 w_e - K \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=\eta} \quad (34)$$

ここで $h_1 = H - \eta$, $\gamma = \int_{\eta}^H (\rho u / \rho_1 U_1) d(z/h_1)$, ρ_0 は界面における密度である。

式 (34) は連行量すなわち右辺、は決定論的な連行速度に起因する量と、拡散による量の和よりなることを示している。同様の式を下層についても考えることができ、これらの式により色々な流れの条件について考察することができる。

3. 二層成層流の流れ

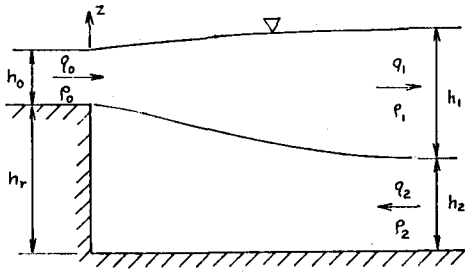
二層成層流の流れは応用面において、塩水楔、選択取水、放水路における流れ等に関係している。水理学的には急変流と漸変流に分けることができる。急変流の問題は放水路あるいは貯水池への放流に関して重要な問題であるが、実用と結びついた研究例に乏しいように思われる。漸変流の問題は特に塩水楔がその例であるが、定常状態の場合については研究が進んでいるが、非定常な連行を伴う場合、あるいは緩混合の場合についての研究は未だ研究例が少ないように思われる。急変流の問題としては内部跳水、堰を越える流れ、内部サージ (又は密度フロント) 等が考えられるが、古い問題のようでありながら漸変流程には研究が進んでいないようである。ここでは急変流の例として主として内部跳水、漸変流解析を新しい問題に用いた例として密度フロントを紹介する。

二成層密度流の問題はしばしば、重力加速度を相対密度差を乗じた値に置き換えれば、開水路自由表面流れと同一であると言われる。確かに界面抵抗の特有な関数形や界面における連行現象を除いてはそう言える場合が多いかもしれない。しかしながらこの考え方を過信すべきではない。与えられた問題に対して最初は厳密な方程式により取り組むべきである。

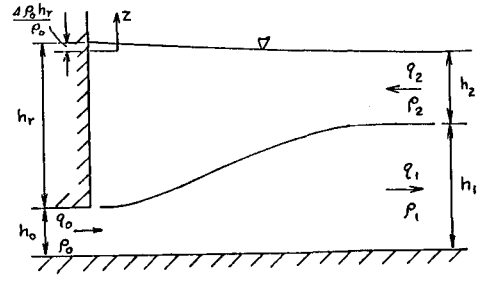
3.1 急変流の問題^{19), 20)}

内部ジャンプと称される流れには、いくつかの応用例が考えられる。その 2 例を図 8 に示す。すなわち、二次元水路中に表層放水 (a) または底層放水 (b) される場合である。

検査断面を上流端は放出口断面位置、下流端は静水圧分布の仮定できる位置に定めると、表層放水の



(a) 表層流



(b) 下層流

図8 内部跳水模式図

運動量力積方程式は上層および下層について各々以下のようである。

$$\frac{\rho_1 q_1^2}{h_1} - \frac{\rho_0 q_0^2}{h_0} = \frac{1}{2} \rho_0 g h_1^2 - \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 - \frac{(h_r - h_2)}{2} (\rho_0 g h_0 + \rho_1 g h_1) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2 q_2^2}{h_2} &= \rho_0 g h_0 h_r + \frac{1}{2} \rho_2 g h_r^2 - \rho_1 g h_1 h_2 - \frac{1}{2} \rho_2 g h_2^2 \\ &\quad - \frac{(h_r - h_2)}{2} (\rho_0 g h_0 + \rho_1 g h_1) \end{aligned} \quad (36)$$

同様に底層放水の運動量方程式も上層および下層について各々以下のようである。

$$\frac{\rho_2 q_2^2}{h_2} = \frac{1}{2} \rho_2 g h_r^2 - \frac{1}{2} \rho_2 g h_2^2 - \frac{h_1 - h_0}{2} (\rho_2 g h_r + \rho_2 g h_2) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 q_1^2}{h_1} - \frac{\rho_0 q_0^2}{h_0} &= \frac{1}{2} \rho_0 g h_0^2 + \rho_2 g h_r h_0 - \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 - \rho_2 g h_1 h_2 \\ &\quad + \frac{(h_1 - h_0)}{2} (\rho_2 g h_r + \rho_2 g h_2) \end{aligned} \quad (38)$$

式(35)～(38)において、運動量係数はすべて1とおき、界面における圧力は上下流端の静水圧値の平均値であるとした。また界面を通して連行される流体(q_2)は、運動量を界面を通して輸送しないものとした。この仮定は全く正しいとは言いきれないのであるいは検討を要するかもしれない。

方程式としてはこの他に質量保存式と体積保存式があり、以下のように書ける。

$$\rho_0 q_0 + \rho_2 q_2 = \rho_1 q_1 \quad (39)$$

$$q_0 + q_2 = q_1 \quad (40)$$

この二式を用いると、表層放水および底層放水各々の問題について4方程式が得られる。今上流端の水理量が分っており、主として下流端の水理量が未知な場合を考えると、独立変数は $\rho_0, q_0, h_0, h_r, \rho_2$ 、従属変数は $\rho_1, q_1, h_1, h_2, q_2$ となり、未知数の数が方程式の数より多くなる。これは連行さ

れる量 q_2 を考えた当然の結果であり、問題を閉じるためには、界面における連行量を決定する情報が必要であり、このような情報は“ブラック・ボックス的”アプローチである運動量力積方程式からは得られない。もち論、下流端の状態から q_2 , h_2 , $h_1 + h_2$ のいずれかが与えられたものとして解を求めることもできるが、そのような解は実現されるかどうかの保証がない。

式(39)と式(40)から q_2 を消去すると次式を得る。

$$\Delta \rho_0 q_0 = \Delta \rho_1 q_1 \quad (41)$$

ここで $\Delta \rho_0 = |\rho_0 - \rho_2|$, $\Delta \rho_1 = |\rho_1 - \rho_2|$ である。式(40)と(41)を用いて q_2 と $\Delta \rho_1$ を消去し、さらに上下層の運動量方程式から h_r を消去し無次元化し、上下層の相対密度差 $\Delta \rho_0 / \rho_2$ の乗じた項を微小として無視すると、上下層双方に通用する方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} H_2 H_d \left\{ H_d^2 - Q - \frac{4 F_0^2 Q (Q - 1) (H_2 + H_d)}{H_2 (2 H_2 + H_d - 1)} \right\} \\ + 2 F_0^2 Q \left\{ (Q - 1)^2 H_d + H_2 (Q^2 - H_d) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

ここで $Q = q_1 / q_0$, $H_2 = h_2 / h_0$, $F_0 = q_0 / \sqrt{(\Delta \rho_0 / \rho_0) g h_0}$, $H_d = (h_0 + h_r - h_2) / h_0$ である。与えられたパラメーター F_0 , H_2 に対して式(42)は共役水深比 H_d を、流量比 Q をパラメーターとして与える。 $Q = 1$ の場合は式(42)は連行をともしない内部跳水の良く知られた結果になることは容易に確かめられる。

$$H_d = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 F_0^2} \right) \quad (43)$$

自由水面の変化 $\Delta h = h_1 + h_2 - h_0 - h_r$ はこのように統一的に書くことができなくて、表層放水では次式で

$$\Delta h = \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} \left\{ \frac{h_1}{Q} - h_0 - 2 h_0 \frac{F_0^2 (Q - 1)^2}{H_2 (2 H_2 + H_d - 1)} \right\} \quad (44)$$

底層放水では次式で与えられる。

$$\Delta h = - \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} 2 h_0 \frac{F_0^2 (Q - 1)^2}{H_2 (2 H_2 + H_d - 1)} \quad (45)$$

すなわち自由水面の変化は相対密度差のオーダーであり、表層放水では正、底層放水では負である。

図9に式(42)により計算した結果を $H_2 = \infty$ の場合について示す。式(42)は図9で二つの漸近線 $H_d = Q^2$, $H_d = \sqrt{2} F_0 Q^{1/2}$ を持つが、 $Q = 1.0$ の曲線式(43)より上の部分だけが現実的であると考えられる。

図10は実験値と計算値の比較である。図から通常の実験範囲では共役水深は連行の無い場合、式(43)と大きくは違わないことを示している。また図で実験的に観察されたという潜りジャンプにつ

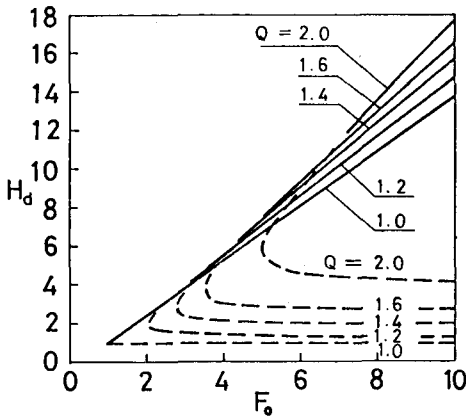


図9 連行を伴う内部跳水の共役水深 ($H_2 = \infty$)

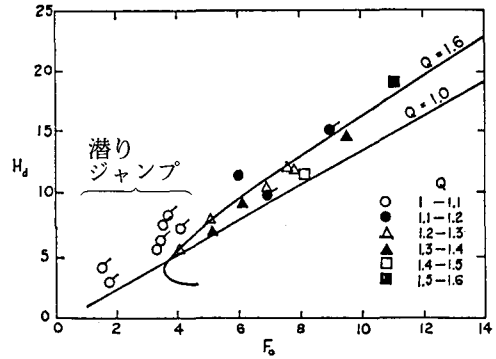


図10 共役水深の実験値との比較

いては、本解析を外れている。近年、内部跳水の実験範囲を拡張し、また経験的に方程式系を閉じようとする試みも発表されている^{21), 22)}。図8に戻って考えるならば、上流側の一部の条件をゆるめて下流側を規定する場合、自由水面ではなく被圧している場合、等未解決の問題もいくつか残されているようである。

3.2 漸変流の問題

二層漸変流の問題の基礎式は、玉井により与えられている¹⁸⁾。ここでの研究課題は第一に連行量と界面抵抗係数をどのように評価するかであり、研究成果の集積を見ている。塩水くさびの計算にあたっては、河口付近の流れに議論の余地があるようであるが(例えば福岡他²³⁾)、実用的には確立されたと言えるであろう。非定常な場合、連行を伴う場合についても数は少ないが計算例が発表されている(例えば須賀²⁴⁾)。ここでは塩水くさびとは著しく流れの条件の異なる例として、フロント流れについて漸変流解析を応用した例を紹介する。

フロント(密度フロント)は密度の急変する界面を伴う流れである。普通には防潮門を開けた時に侵入して来る塩水塊のようなものを示す。このように通常は非定常で急変流の性格を有する流れである。

(英語では gravity current が一般的な呼称であるが、日本語のフロントは若干語感が異なるように思える。)ここではそのような例ではなく、図11のように表層に軽い流体塊があり、重い流体との間に静止した密度急変面を作って静止している場合を考える。このようなフロントの形成例は、河口沖の河川水と海水の接触点に見られる。あるいは潮目と呼ばれている現象もこのフロントの一種であろう。このようなフロントは、その存在が確認されており^{25), 26)}、海域における河川水または一般に排水の

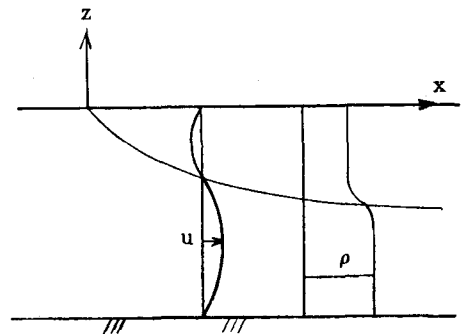


図11 密度フロントの流れ

拡散に重要な役割を果たすことが予想されるが、力学的に解析を試みた例は Garvine によるもの²⁷⁾ だけのものである。ここではフロントを水槽実験で発生させ、その界面形状を漸変流として解析した例を紹介する²⁸⁾。

用いた実験水槽は、図 12 に示すような、長さ 3.8 m、幅 9.3 cm、高さ 40 cm のアクリル製である。水槽の一端から塩水を、ノズルから水道水を、互いに逆向きに流入させ、gravity current の先端が停止し続ける条件を実験的に見出した。本実験では、あらかじめ塩水を所定の流量で流しておき、次に淡水ノズル口を開いて gravity current を発生させた。その先端の位置がほぼ定常に保たれた時点で、流速、密度、界面形状を測定した。測定法および実験結果の詳細は原論文に譲るとして、ここでは漸変流解析に関する部分を述べることにする。

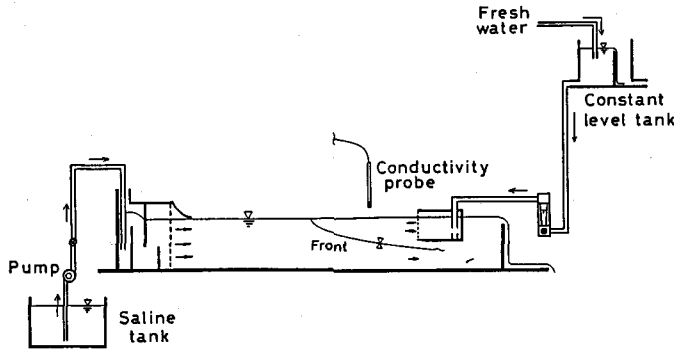


図 12 密度フロント実験装置図

実験はすべて界面波が発生・碎波し、連行が観察できる条件下で行った。測定・観察の結果は目視界面と密度急変点とがほぼ一致した。図 13 に実験により求めた界面を通しての連行係数とリチャードソン数との関係を示す。図には本実験と流れの状況が類似している下層密度流の実験例も併せて示している。ややばらつきはあるものの福岡らの示した式²⁹⁾

$$E = 0.003 R_i^{-3/2} \quad (46)$$

で近似できるようである。

フロントの生成条件を検討するために、この流れに定常漸変二層流の解析を適用する。上層の値には

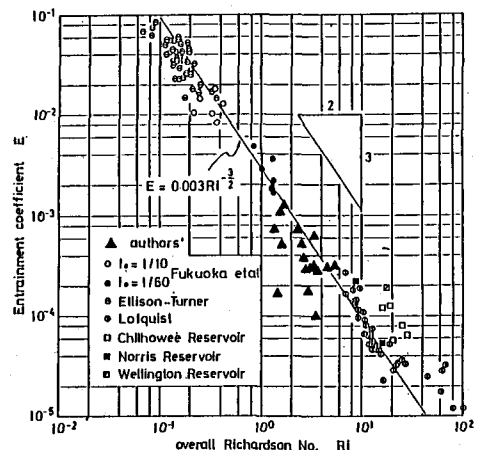


図 13 密度フロントの連行係数

添字 1, 下層の値には添字 2 を用いると, 上下層の体積・質量の保存則は各々次のように書ける。

$$\frac{dq_1}{dx} = w_1 - w_2 = -\frac{dq_2}{dx} \quad (47)$$

$$\frac{d(\rho_1 q_1)}{dx} = \rho_2 w_1 - \rho_1 w_2 = -\frac{d(\rho_2 q_2)}{dx} \quad (48)$$

ここで q は単位幅当りの流量, w_1, w_2 は各々上向き, 下向きの連行速度である。運動量保存則は以下のように書くことができる。

$$\left(1 - \frac{q_1^2}{gh_1^3}\right) \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} = -\frac{q_1}{gh_1^2} \frac{dq_1}{dx} - \frac{\rho_2 w_1}{\rho_1 gh_1} \left(\frac{q_1}{h_1} - \frac{q_2}{h_2}\right) - \frac{\rho_2}{\rho_1 gh_1} \frac{f_i}{2} \left(\frac{q_1}{h_1} - \frac{q_2}{h_2}\right) \left|\frac{q_1}{h_1} - \frac{q_2}{h_2}\right| - \frac{h_1}{2\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} \quad (49)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{dh_1}{dx} + \left(1 - \frac{q_2^2}{gh_2^3}\right) \frac{dh_2}{dx} = -\frac{q_2}{gh_2^2} \frac{dq_2}{dx} - \frac{\rho_1 w_2}{\rho_2 gh_2} \left(\frac{q_2}{h_2} - \frac{q_1}{h_1}\right) - \frac{h_1}{\rho_2} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{1}{gh_2} \frac{f_i}{2} \left(\frac{q_1}{h_1} - \frac{q_2}{h_2}\right) \left|\frac{q_1}{h_1} - \frac{q_2}{h_2}\right| - \frac{h_2}{2\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx} - \frac{1}{gh_2} \frac{f_b}{2} \frac{q_2}{h_2} \left|\frac{q_2}{h_2}\right| \quad (50)$$

ここで f_i, f_b は各々界面および底面の抵抗係数である。連行速度 w_1, w_2 については, 玉井にならい¹⁸⁾, 次式を仮定した。

$$w_1 = E_1 |q_1| / h_1, \quad w_2 = E_2 |q_2| / h_2 \quad (51)$$

以上の基礎式を差分化して計算した。境界条件は下層上流端の条件 $q_{20}, h_{20}, \rho_{20}$ 及び上層ノズル側条件 $\rho_{10}, q_{10}, h_{10}$ である。界面抵抗係数は金子の式

$$f_i = a\Psi^{-1/2} \quad (\Psi = R_{e_2} F d_2^2) \quad (52)$$

を用い, 実験の界面形状が再現できるように係数 a の値を変えた。図 14 に界面形状の計算例を示す。本実験においてフロント先端部には, いわゆる head の形成が見られたが, 本計算法ではもちろん, この様なタイプの形状は再現できない。しかしながら, 平均的な界面形状及びフロント先端位置は, 本計算によって再現することが可能であった。本例はいわば“逆さにした”塩水くさびの例であると言えよう。

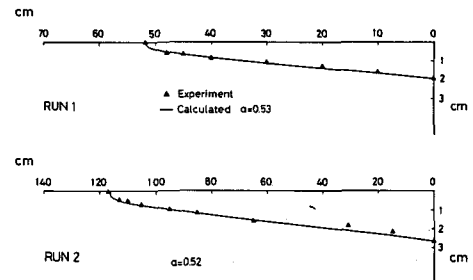


図 14 密度フロント界面形状

4. 密度噴流

密度流の問題の中で、密度噴流の問題は研究例の極めて多いテーマである。その応用範囲は、発電所冷却水のいわゆる温排水の拡散、工場廃水や下水処理場処理水の拡散、河川水の海域への拡散、貯水池内への濁水の流入、大気中の排煙の拡散、と広い範囲に、しかも近年注目を浴びてきた問題にわたっている。従って密度噴流の問題を限られたスペースと時間でレビューするのは容易ではない。ここでは、1970年前後を中心にして発展してきた実用的解析に焦点をあて、その展望を述べることにする。

密度噴流は周囲流体と異なる密度を有する流体が、運動量を有して排出される時の流れであり、密度差の無い場合は噴流 (jet) と呼ばれ、運動量を有せず密度差のみを有する流体が排出される場合はブルーム (plume) と呼ばれる。両方を兼ね備えている場合を密度噴流 (buoyant jet 又は forced plume) と呼ぶが、その解析手法は噴流との類似性を利用し、流速分布や密度分布に相似性を仮定して基礎偏微分方程式を積分し、流速分布や密度分布の特性値に関する常微分方程式として解くいわゆる積分法が用いられる。ここでも積分法について解説する。

密度噴流の問題は大別して、水中噴流、表層噴流、壁面噴流に分けられる。これらの問題に関する長い研究の歴史の中で、前二者について実用的な解析手法を確立させたのは、表層噴流では MIT の Harleman らによる成果、水中噴流では Caltech の Brooks らによる成果であったように思われる。多くの研究上の競争相手の中からこれらの二者が卓抜した成果を残したのは、彼等の優れた人材と誇り高い伝統もさることながら、米国人の研究に対する底力を持った pragmatic approach が成功した好例であったように思われる。もっとも我が国では、温排水に対する考え方が厳しく、水中放流は危険だとして避けられていた節もある。すなわち同時期 (1960 年代) に、電力中央研究所では、温排水の遠方領域における拡散の差分形で先駆的な成果を上げていたのである。以下に各問題別に主要な研究をレビューし、問題点を探ることとする。

4.1 水中噴流

水中若しくは大気中に噴出される密度噴流の研究は、他の問題の研究より古い歴史を有している。現在につながる研究の先駆けは、Priestly and Ball³⁰⁾ と Morton et al³¹⁾ によるものであったと思われる。この 2 論文はその後の研究の方向に全く異った考え方を示し、今日に至るまでの数多くの研究者に大きな影響を与えた。すなわち解析に当って流速分布、密度分布に相似仮定を用い、断面内で積分して流量、運動量、密度欠損束について解くという方法は一般的であるが、Morton et al は流量は噴流の拡がりと共に代表流速に比例して増えていくという連行の概念を用いたのに対し、Priestly et al は運動量方程式のほかにエネルギー方程式を用い、レイノルズ応力の関数形を仮定した。両者の考えはそれぞれに followers を従えたが、前者の考え方が次第に優勢となり、特に Fan and Brooks³²⁾ は Abraham の論文の討議の中で、この考えによる積分法を簡潔に示し、以後研究を積重ねて実用的な段階にこぎつけた。

ここでは Fan and Brooks の解析法を簡単に記す。今、図 15 に示すように周囲流体が安定な密度

勾配を有し、原点の円孔から噴流を排出するものとする。噴流は周囲水を連行しながら上昇する。噴流の中心軸の原点からの距離を s とすると、噴流内の中心軸方向流速分布は正規分布であり、中心軸からの距離 r を用いて次式のように書ける。

$$u(s, r) = U(s) \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \quad (53)$$

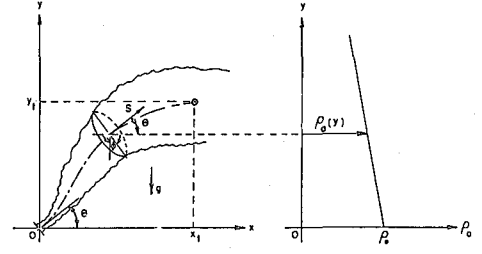


図 15 水中噴流模式図

連続の方程式を断面内で積分して、連行の概念を用いれば噴流流量 $Q (= 2\pi \int_0^\infty u r dr)$ に関して次式を得る。

$$\frac{dQ}{ds} = 2\pi\alpha bU, \quad Q = \pi U b^2 \quad (54)$$

ここに α は連行係数である。運動量方程式にブーネスク近似を用い、静水圧分布を仮定して断面内で積分すると、水平方向、鉛直方向に関して次式を得る。

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{ds} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho u (u \cos \theta) r dr d\varphi = \frac{d}{ds} \left(\frac{U^2 b^2}{2} \cos \theta \right) = 0 \quad (55)$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho u (u \sin \theta) r dr d\varphi = g \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\rho_a - \rho) r dr d\varphi \quad (56)$$

ここに ρ_a は周囲流体の密度である。噴流内密度分布についても次の相似分布を仮定する。

$$\frac{\rho_a(s, r) - \rho(s, r)}{\rho_0} = \frac{\rho_0 - R(s)}{\rho_0} \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2 b^2}\right) \quad (57)$$

式(57)を用いると式(56)は次のように書き直せる。

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{U^2 b^2}{2} \sin \theta \right) = g \lambda^2 b^2 \frac{\rho_0 - R}{\rho_0} \quad (58)$$

密度欠損は保存されることから次式が導かれる。

$$\frac{d}{ds} \{ U b^2 (\rho_0 - R) \} = 0 \quad (59)$$

物質濃度についても同様な式が成り立つ。

$$\frac{d}{ds} (C U b^2) = 0 \quad (60)$$

式(54), (55), (58), (59), (60)は、未知数 U, b, θ, R, C に関する方程式であり解くことができる。これらの方程式は解析的に解くことができず数値的に解かざるを得ない。なお $\lambda = 1.16$ および連行係数 α については、噴流とプルームの両者に適用するものとして次式が採用される³³⁾。

$$\alpha = 0.057 + \frac{0.083}{F_d^2}, \quad F_d^2 = \frac{U^2}{(\rho_a - \rho_0) g b / \rho_0} \quad (61)$$

実際にこの計算法を適用するに当っては、排出口付近では形成領域として取り扱う必要もありうる。

図16はこの計算法により、一様密度場に水平に噴出した場合の計算結果を示したものである、このように周囲流体が静止している場合の密度噴流の拡がり計算法には問題が少ない。未解決の問題はむしろ、密度噴流が上昇を止めた後にどのように水平方向に拡がるかである。こうした問題およびここで述べた密度噴流のその他の問題は Koh and Brooks³³⁾ に詳しい。

4.2 三次元噴流

重力と排水口の向きと周囲流れの方向が同一平面を作らない場合、密度噴流の中心軸は空間中に三次元曲線を描く。このような密度噴流を三次元噴流と称する。このような流れは Hirst³⁴⁾ により積分法を用いて解かれた。ここでは Hirst の与えた積分法方程式の導出を示すが、自然座標系のとり方だけは Hirst と少し異なるものを採用する。すなわち、三次元曲線である噴流中心軸を一つの座標軸として自然座標系を組み立てると、一般に直交曲線座標系にはならない。その意味ではこの解は近似解でしかない。Hirst は明らかにその点に気付いていなかったようであるが、ここではその近似度が明らかになるような自然座標系を用いて導出する。

図17に示すように噴流中心軸に沿った距離を s とする。図で周囲流れは y 軸に平行に一様流速 u_∞ で流れているものとする。密度噴流の排出口は図の原点にあるが、その向きは必ずしも y 軸と z 軸で作る面と平行ではないものとする。また周囲流体は鉛直方向 (z 軸方向) に密度分布を有することができる。

中心軸を s 軸とし、 s 軸に沿った接線ベクトルを i_s とする。 s 軸に直角な面内で s 軸からの距離を r とする。空間内の任意の一点はこの面内にあり、距離 r および方位角 ϕ で定義される。ここで ϕ としてこの面内にある中心軸の主法線ベクトル i_n から時計回りの角度を採用する。この面には $i_\beta = i_s \times i_n$ で定義される陪法線も存在し、空間の任意の点において r の増加する方向の単位ベクトル i_r と、 ϕ の増加する方向の単位ベクトル i_ϕ は次のように表すことができる。

$$i_r = i_n \cos \phi + i_\beta \sin \phi, \quad i_\phi = -i_n \sin \phi + i_\beta \cos \phi \quad (62)$$

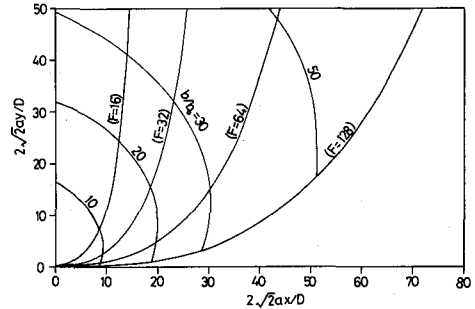


図16 水中噴流中心軸軌跡および噴流幅の拡がり（噴出方向は水平、周囲流体が均一密度の場合）

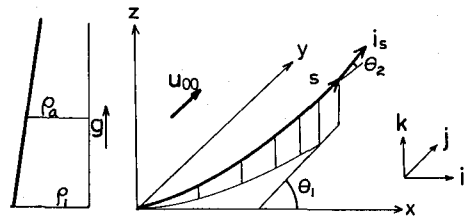


図17 三次元噴流中心軸軌跡

任意の点の位置ベクトル $\mathbf{R}$ は次式で表される。

$$\mathbf{R} = \int_0^s \mathbf{i}_s ds + r \mathbf{i}_r \quad (63)$$

これより s 軸の微小変位に対する $\mathbf{R}$ の変化は式 (61) と Seret-Frenet 公式を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} &= \mathbf{i}_s + r \left(\frac{d\mathbf{i}_n}{ds} \cos \phi + \frac{d\mathbf{i}_\beta}{ds} \sin \phi \right) = \mathbf{i}_s \left(1 - \frac{r \cos \phi}{R} \right) \\ &\quad + \frac{r \cos \phi}{\sigma} \mathbf{i}_\beta - \frac{r \sin \phi}{\sigma} \mathbf{i}_n \end{aligned} \quad (64)$$

ここで R, σ は中心軸の曲率半径および振り半径であり、次式で定義される。

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \quad \sigma = -\mathbf{i}_n / \left(\frac{d\mathbf{i}_\beta}{ds} \right) \quad (65)$$

ここで $d\theta$ は $\mathbf{i}_s$ と $\mathbf{i}_{s+ds}$ の作る角度である。

式 (64) から $\partial \mathbf{R} / \partial s$ が $\mathbf{i}_s$ と平行でないため、一般に直交曲線座標系は存在し得ない。つまり式 (64) の右辺第二・三項が metric tensor の非対角成分を作るのである。従って振り半径が十分大きければ、すなわち次式の成立する範囲では、 $\partial \mathbf{R} / \partial s$ は近似的に $\mathbf{i}_s$ に平行であり、 (s, r, ϕ) は直交曲線座標系を成しているといえる。

$$\frac{r}{\sigma} \ll 1 \quad (66)$$

この場合線素の長さは次式のように求められる。

$$h_s = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \cdot \mathbf{i}_s = 1 - \frac{r \cos \phi}{R}, \quad h_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \cdot \mathbf{i}_r = 1, \quad h_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \cdot \mathbf{i}_\phi = r \quad (67)$$

基礎方程式として定常状態を考えれば次式が得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (68)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} t) = 0 \quad (69)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} c) = 0 \quad (70)$$

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_0} g \mathbf{k} \quad (71)$$

ここで、 $\mathbf{v}$ は速度ベクトル、 t は水温、 c は塩分濃度もしくはトレーサー濃度であり、 ρ は密度、 ρ_∞ は周囲水の密度、 ρ_0 は排出口での密度である。密度は水温と塩分濃度の関数として次式で与えられるものとする。

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (t - t_0) - \gamma (c - c_0)] \quad (72)$$

方程式(68)～(71)は s, r, ϕ 座標系で書ける。しかしながら運動方程式(71)は i_s, k, j の方向について書いた方が都合である。その際中心軸軌道に特有な θ_1, θ_2 (図17) が用いられる。 θ_1 は i_s の水平面成分が x 軸となす角であり、 θ_2 は i_s が水平面となす角である。すべての従属変数は ϕ に無関係であり、 ϕ 方向速度 $w = 0$ であると仮定し、基礎方程式を ϕ について平均する。次にすべての変数を平均量と乱れ成分に分けて時間平均し境界層近似を行うと、 s 方向流速成分 u, r 方向流速成分 v 、周囲水との密度差 $\Delta\rho = \rho - \rho_\infty$ を用いて基礎方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial (rv)}{r \partial r} = 0 \quad (73)$$

$$u \frac{\partial t}{\partial s} + v \frac{\partial t}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{rv' t'})}{\partial r} \quad (74)$$

$$u \frac{\partial \Delta\rho}{\partial s} + v \frac{\partial \Delta\rho}{\partial r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{r \Delta\rho' v'})}{\partial r} \quad (75)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g S_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{ru' v'})}{\partial r} \quad (76)$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) S_2 = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g - q^* \frac{C_2}{R_2} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{ru' v'})}{\partial r} S_2 \quad (77)$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) C_2 S_1 = q^* \left(\frac{C_1 C_2}{R_1} - \frac{S_1 S_2}{R_2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{ru' v'})}{\partial r} C_2 S_1 \quad (78)$$

ここで、プライム'をつけた量は乱流成分、 $—$ は時間平均を表わし、 $C_1 = \cos \theta_1, S_1 = \sin \theta_1, C_2 = \cos \theta_2, S_2 = \sin \theta_2, R_1 = ds/d\theta_1, R_2 = ds/d\theta_2, q^* = u^2 - (r/4) (\partial v^2/\partial r + \partial v'^2/\partial r)$ である。

これらの式を軸対称の条件 $v = \partial v/\partial r = 0$ ($r = 0$) および無限遠での条件 $u \rightarrow u_\infty S_1 C_2$ ($r \rightarrow \infty$) を用いて r 方向について積分すると次式を得る。

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty u r dr = E = - \lim_{r \rightarrow \infty} (rv) \quad (79)$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty u (t - t_\infty) r dr = - \frac{dt_\infty}{ds} \int_0^\infty u r dr - \lim_{r \rightarrow \infty} [\overline{rv' t'}] \quad (80)$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty u \frac{\Delta\rho}{\rho_0} r dr = - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_\infty}{ds} \int_0^\infty u r dr - \lim_{r \rightarrow \infty} [\overline{rv' \Delta\rho'/\rho_0}] \quad (81)$$

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty u^2 r dr = \int_0^\infty \frac{\Delta\rho}{\rho_0} r dr g S_2 + E u_\infty S_1 C_2 - \lim_{r \rightarrow \infty} [\overline{ru' v'}] \quad (82)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^\infty u^2 r dr \right) S_2 = \int_0^\infty \frac{\Delta\rho}{\rho_0} r dr g - \lim_{r \rightarrow \infty} [\overline{ru' v'}] S_2 - q \frac{C_2}{R_2} \quad (83)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^\infty u^2 r dr \right) C_2 S_1 = Eu_\infty - \lim_{r \rightarrow \infty} [ru'v'] S_1 C_2 - q \left(\frac{C_1 C_2}{R_1} - \frac{S_1 S_2}{R_2} \right) \quad (84)$$

ここで、 $q = \int_0^\infty u^2 r dr - \frac{1}{4} E^2 - \frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow \infty} [r^2 u'^2]$ 、 ρ_0 は排出口の密度である。最後の2式はその前の式を用いて次のように書き換えることができる。

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\theta_2}{ds} = \frac{C_2 \int_0^\infty \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g r dr - Eu_\infty S_1 S_2}{q} \quad (85)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta_1}{ds} = \frac{Eu_\infty C_1}{q C_2} \quad (86)$$

すなわちこれら2式は θ_1 、 θ_2 を与える式である。

周囲水の乱れの影響を無視し、軸方向流速 u とスカラー量 t 、 $\Delta \rho$ に次のような相似分布形を仮定する。

$$u = \Delta u_m(s) e^{-r^2/b^2} + u_{12}, \quad u_{12} = u_\infty S_1 C_2 \quad (87)$$

$$\Delta \rho = \Delta \rho_m(s) e^{-r^2/(\lambda b)^2}, \quad t - t_\infty = \Delta t_m(s) e^{-r^2/(\lambda b)^2} \quad (88)$$

これにより式(79)～(85)は次のように書ける。

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p b^2}{2} \right) = E \quad (89)$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\lambda^2}{2} \frac{\Delta \rho_m}{\Delta \rho_0} \left(\frac{\Delta u_m}{\lambda^2 + 1} + u_{12} \right) b^2 \right] = - \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho_\infty}{\Delta \rho_0} \right) \frac{p b^2}{2} \quad (90)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p b_2}{4} \right) = Eu_{12} + \frac{\Delta \rho_m}{\rho_0} \frac{b^2}{2} \lambda^2 g S_2 \quad (91)$$

$$\frac{d\theta_2}{ds} = \left(\frac{\Delta \rho_m}{\rho_0} \frac{b^2}{2} \lambda^2 g C_2 - Eu_\infty S_1 S_2 \right) / q \quad (92)$$

ここで、 $p = \Delta u_m + 2 u_{12}$ 、 $q = (1/4) (b^2 p_2^2 - E^2)$ であり、添字0をつけた値は排出口での値である。

連行量 E について Hirst は次式を与えている。

$$E = \left(a_1 + \frac{a_2}{F_0^2} S_2 \right) (b |u_m - u_{12}| + a_3 u_\infty b \sqrt{1 - (S_1 C_2)^2}) \quad (93)$$

ここで、 $F_0^2 = u_m^2 / (\Delta \rho_m b g / \rho_0)$ 、 $u_m = \Delta u_m + u_{12}$ であり、 a_1, a_2, a_3 は $a_1 = 0.057$ 、 $a_2 = 0.97$ 、 $a_3 = 9.0$ の常数である。

以て式(89)～(92)および(86)は Δu_m 、 b 、 $\Delta \rho_m$ 、 θ_1 、 θ_2 について解ける。中心軸軌道は次式から求まる。

$$\frac{dx}{ds} = C_1 C_2, \quad \frac{dy}{ds} = S_1 C_2, \quad \frac{dz}{ds} = S_2 \quad (94)$$

式(89)～(92)および(86)はさらに順に以下のように無次元化できる。

$$\frac{dQ}{dS} = \varepsilon \quad (95)$$

$$\frac{dM}{dS} = \varepsilon u_{12} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{F_0^2} B^2 \left(\frac{\Delta \rho_m}{\Delta \rho_0} \right) S_2 \quad (96)$$

$$\frac{d\theta_2}{dS} = \frac{1}{\left(M - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right)} \left[\frac{\lambda^2}{2} \frac{B^2}{F_0^2} \left(\frac{\Delta \rho_m}{\Delta \rho_0} \right) C_2 - \varepsilon u_0 S_1 S_2 \right] \quad (97)$$

$$\frac{d\theta_1}{dS} = \frac{\varepsilon u_0}{\left(M - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right)} \frac{C_1}{C_2} \quad (98)$$

$$\frac{d\Delta}{dS} = -Q T_0 S_2 \quad (99)$$

ここで、 $S = s/D$, $Q = pb^2/(2u_0 D^2)$, $\varepsilon = E/(u_0 D)$, $M = (pb)^2/(2u_0 D)^2$, $u_{12} = u_{12}/u_0$, $B = b/D$, $F_0 = u_0^2/(\Delta \rho_0 g D/\rho_0)$, $u_0 = u_\infty/u_0$, $\Delta = \frac{\lambda^2}{2} B^2 \left(\frac{\Delta \rho_m}{\Delta \rho_0} \right) \left(\frac{\Delta u_m/u_0}{\lambda^2 + 1} \right)$, $T_0 = \frac{D}{\Delta \rho_0} \frac{d\rho_\infty}{dz}$ である。

この式により計算を支配する無次元数は u_0 , F_0 , T_0 である。計算例は紙面の都合で省略するが、一般にこの種の三次元噴流の計算において、流れに少しでも向かうように噴出させると式(98)がどこかで無限大になり、計算に工夫を要する。それにしても全く流れに向う場合、 $\theta_2 = 180^\circ$ の場合は、このような計算法が通用できるとは思えないが、研究例がなく全く未解決の問題である。

4.3 表層密度噴流

この問題は温排水の拡散予測法として注目を浴び、極めて多くの研究例を見ている。最も一般的で実用的な研究として知られているのは、Stolzenbach and Harleman^{34), 35)} によるものであろう。その積分型方程式は玉井⁶⁾により紹介されているが、ここではその導出を示し問題点を探ろうとするものである。

流れは図18に示すように、周囲流れのある無限

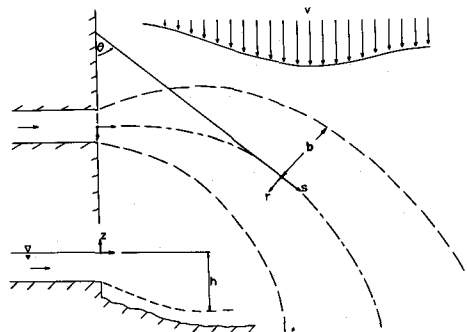


図18 表層密度噴流模式図

水域に、開水路から温水を噴出させたものとする。乱流噴流の通常の仮定と小密度差の条件の他に、底層では噴流により惹き起された流れは存在せず、周囲流れも小さいものと仮定すると、定常乱流状態の基礎方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{R} = 0 \quad (100)$$

$$\frac{\partial uu}{\partial s} + \frac{\partial vu}{\partial r} + \frac{\partial wu}{\partial z} + \frac{uv}{R} = \beta g \int_z^{-\infty} \frac{\partial \Delta T}{\partial s} dz - \frac{\overline{\partial u'v'}}{\partial r} - \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z} - \frac{2u'v'}{R} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial uv}{\partial s} + \frac{\partial vv}{\partial r} + \frac{\partial vw}{\partial z} - \frac{u^2}{R} + \frac{v^2}{R} \\ = \beta g \int_z^{-\infty} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} dz - \frac{\overline{\partial v'v'}}{\partial r} - \frac{\overline{\partial v'w'}}{\partial z} - \frac{u'u'}{R} - \frac{v'v'}{R} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\frac{\partial u \Delta T}{\partial s} + \frac{\partial v \Delta T}{\partial r} + \frac{\partial w \Delta T}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{v' \Delta T'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w' \Delta T'}) \quad (103)$$

ここで、 u, v, w は図 18 に示す s, r, z 方向流速であり、 R は中心軸の曲率半径、 ΔT は周囲水よりの温度上昇である。 β は密度の温度変化率 ($1/\rho$) $\partial \rho / \partial T$ であり一定と見なされる。自由表面の境界条件としては自由水面の運動学的境界条件の他に、表面応力 ($-\rho \overline{u'w'}$, $-\rho \overline{v'w'}$) および表面熱伝達 $\overline{w' \Delta T'}$ を与えることができる。また噴流の中心軸 $r = 0$ では対称性から以下の性質がある。

$$v = \overline{v'^2} = \overline{u'v'} = \overline{v'w'} = 0, \quad \overline{v' \Delta T'} = 0, \quad r = 0 \quad (104)$$

積分型方程式を導くには u と ΔT に相似分布形を仮定する。原論文では³⁵⁾ 形成領域と確立領域に分けて導出してあるが、このノートの目的のためには確立領域についてのみ議論する。相似分布形は次式のように書くことができる。

$$u = u_c f(\zeta_r) f(\zeta_z) + V \cos \theta \quad (105)$$

$$\Delta T = \Delta T_c t(\zeta_r) t(\zeta_z) \quad (106)$$

ここで $\zeta_r = |r|/b$, $\zeta_z = -z/h$, b は噴流水の水平方向拡がり幅、 h は鉛直方向拡がり幅であり、この二量は s の関数である。分布関数 f, t に Stolzenbach らは ζ の有限値で 0 になる関数形を、同時期に発表された Stefan らは Gauss 分布型を採用している³⁶⁾。

周囲流体の流速は小さいと考えているので曲率半径 R は大きい。また噴流の性格として $v \ll u$ であるので、式 (100) ~ (102) 中 $1/R$ を乗じた項で残るのは式 (102) 中の u^2/R の項だけである。式 (100), (101), (103) は中心軸より片側だけの噴流断面 ($0 < \zeta_r < n$, $0 < \zeta_z < m$)、式 (102) は両側断面 ($-n < \zeta_r < n$, $0 < \zeta_z < m$) で積分すると次式を得る。

$$\frac{d}{ds} [hb(u_c I_f^m I_f^n + mn V \cos \theta)] = [\alpha_z I_f^n b - \alpha_r I_f^m h] u_c \quad (107)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} [hb(u_c^2 I_{ff}^m I_{ff}^n + 2 V \cos \theta u_c I_f^m I_f^n + mn V^2 \cos^2 \theta)] \\ & = V \cos \theta [\alpha_z I_f^n b - \alpha_r I_f^m a] u_c - \beta g I_t^n J_t^m \frac{d}{ds} (\Delta T_c h^2 b) + nb \frac{\tau_{ws}}{\rho} \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} & hb(u_c^2 I_{ff}^m I_{ff}^n + 2 V \cos \theta u_c I_f^m I_f^n + mn V^2 \cos^2 \theta) \frac{d\theta}{ds} \\ & = V \sin \theta (\alpha_r I_f^m h - \alpha_z I_f^n b) u_c + n \frac{b \tau_{wr}}{\rho} \end{aligned} \quad (109)$$

$$\frac{d}{ds} [hb \Delta T_c (u_c I_{ff}^m I_{ff}^n + V \cos \theta I_t^m I_t^n)] = -k I_t^n b \Delta T_c \quad (110)$$

ここで m, n は Stolzenbach らのような有限領域でだけ 0 でない値を持つ分布関数の場合は 1, ガウス分布の場合には適当な定数値, 例えば 3, ととることができる。 α_z, α_r は各々噴流断面の底面と側面における連行係数であり次式で与えられるものとする。

$$\alpha_r = -I_f^m \varepsilon / 2, \quad \alpha_z = (I_f^n \varepsilon / 2) \exp(-5 R_i), \quad R_i = \frac{\beta g \Delta T_c h}{u_c^2} \quad (111)$$

ここで ε は密度差のない噴流の拡がり率 (0.22) である。 τ_{ws}, τ_{wr} は水表面における風応力であり, k は水表面における熱伝達係数である。定積分値 I, J は次のように定義される。

$$I_f^m = \int_0^m f(\zeta) d\zeta, \quad I_{ff}^m = \int_0^m f(\zeta) t(\zeta) d\zeta, \quad J_t^m = \int_0^m \int_\zeta^m t(\zeta) d\zeta \quad (112)$$

式 (107) ~ (110) は未知数として $u_c, \Delta T_c, b, h, \theta$ の 5 個を含んでおり問題は閉じていない。この点が水中噴流と表層噴流の際だった相違である。これは水中噴流では, その拡がりは一箇の長さスケールで規定されるのに対し, 表層噴流ではその非対称性のために二箇の値を要するためである。この難点を Stolzenbach et al は, v の分布に次の仮定をして, r 方向方程式 (102) を半断面について積分して新しい方程式を得ている。すなわち,

$$v = \left(\frac{db}{ds} - \varepsilon \right) u \zeta_r^{1/2} \operatorname{sgn}(r) \quad (113)$$

と置くことにより次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left[\frac{db}{ds} - \varepsilon \right] \left[hb \left(u_c^2 I_{ff}^m \int_0^n f^2(\zeta) \zeta^{1/2} d\zeta + 2 V \cos \theta u_c I_f^m \int_0^n f(\zeta) \zeta^{1/2} d\zeta \right. \right. \\ & \left. \left. + mn V^2 \cos^2 \theta \right) \right] = \beta g \Delta T_c h^2 J_t^m \end{aligned} \quad (114)$$

表層密度噴流に関する研究は国内でも主として大学研究者を中心に極めて盛である。その中でも林・有田³⁸⁾の研究は、式(113)のような仮定を用いずに、連続方程式から v を求めて式(114)に代るものを得ている。すなわち連続の方程式(100)を r について $0 \sim r$, z について $0 \sim mh$ で積分すると次式を得る。

$$v = u_c \left[\frac{db}{ds} \zeta_r f(\zeta_r) - \frac{\alpha_r}{I_f^m} F(\zeta_r) - \frac{\alpha_r}{I_f^m} \frac{b}{h} \left\{ G(\zeta_r) - \frac{e^{-CR_i}}{\sqrt{1.5 CR_i + 1}} F(\zeta_r) \right\} \right] f(\zeta_z) \quad (115)$$

ここで F は f の原始関数、 C は定数で G は次式で与えられる。

$$G(\zeta_r) \equiv e^{-CR_i} \int_0^{\zeta_r} \exp(-(1.5 CR_i + 1) \zeta^2) d\zeta \quad (116)$$

この式を用いて式(114)に相当するものを求めることができる。紙面の都合もあるのでこれ以上の記述は省略するが、有田は各種モデルの比較を行い、林・有田のモデルの優位性を報告している³⁹⁾。

参 考 文 献

- 1) 嶋 祐之：密度流論，水工学シリーズ 65-11，土木学会水理委員会，1965.
- 2) 柏村正和：河口密度流論，水工学シリーズ 65-20，土木学会水理委員会，1965.
- 3) 水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象，土木学会論文報告集，No. 242，pp. 73-90，1975.
- 4) 水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象，土木学会論文報告集，No. 243，pp. 99-109，1975.
- 5) 日高孝次：海流，岩波全書，1955.
- 6) 玉井信行：密度流の水理，新体系土木工学第 22 巻，技報堂，1980.
- 7) Taylor, G.I.: Effect of variation of density on the stability of superposed streams of fluids, Proc. Roy. Soc., A 132, pp. 499-523, 1931.
- 8) Goldstein, S.: On the stability of superposed streams of fluids of different densities, Proc. Roy. Soc., A 132, pp. 524-548, 1931.
- 9) Miles, J.W.: On the stability of heterogeneous shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 496-508, 1961.
- 10) Keulegan, G.H.: Interfacial stability and mixing in stratified flows, J. of Research, Nat. Bureau of Standards, 43, pp. 487-500, 1949.
- 11) Hayakawa, N. and T.E. Unny.: Viscous stability of parallel streams of superposed fluids, Physics of Fluids, Vol. 17, No. 5, pp. 879-882, 1974.

- 12) 西田修三・吉田静男：二層流の安定性解析，第29回海岸工学講演会論文集，pp.550-554，1982.
- 13) Hayakawa, N.: A note on interfacial stability of two-layered flow, J. Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.3, No.1, pp.15-22, 1985.
- 14) Tatsumi, T. and K. Gotoh.: The stability of free boundary layers between two uniform streams, J. Fluid Mech., Vol.7, pp.433-441, 1960.
- 15) Ippen, A. T. and D.R.F. Harleman: Steady-state characteristics of sub-surface flow, Nat. Bureau of Standards, Circulation No.52, pp.79-93, 1951.
- 16) Jeffreys, H.: On the formation of water waves by wind, Proc. Roy. Soc. of London, Vol. A107, pp.189-206, 1925.
- 17) Ellison, T.H. and J.S. Turner: Turbulent entrainment in stratified flows, J. Fluid Mech., Vol.6, pp.423-448, 1955.
- 18) 玉井信行：連行を考慮した漸變成層流の基礎方程式について，土木学会論文報告集，No.324，pp.95-102，1982.
- 19) Hayakawa, N.: An analytical study of two-layered, rapidly varied flow, 土木学会論文報告集，No.230，pp.83-89，1974.
- 20) 早川典生・H. Stefan.: 混合を伴う内部ジャンプについて，第17回水理講演会講演集，pp.44-49，1973.
- 21) 玉井信行・有田正光：表層放出二次元密度流の流動形態分類および最終上層厚について，第28回水理講演会論文集，pp.121-127，1984.
- 22) 室田 明・中辻啓二・中村圭二郎：内部跳水に観られる反転流動の混合機構に及ぼす役割，第29回水理講演会論文集，pp.419-424，1985.
- 23) 福岡捷二・福嶋祐介・守屋祥一・新庄高久：河口密度流の流動機構と塩水くさびの河口条件，土木学会論文報告集，No.327，pp.61-71，1982.
- 24) 須賀堯三：一次元二層不定流の数値計算，第24回海岸工学講演会論文集，pp.544～548，1977.
- 25) Garvine, R. W.: Dynamics of small-scale oceanic fronts, J. Phys. Oceanogr., Vol.4, pp.557-569, 1974.
- 26) 柳 哲雄・武岡英隆・秋山秀樹：河口フロントの生成・維持機構(1)，1984年度日本海洋学会春季大会講演要旨集，pp.110，1984.
- 27) Garvine, R. W.: An integral hydrodynamic model of upper ocean frontal dynamics: Part. 1, Development and analysis, J. Phys. Oceanogr., Vol.9, pp.1-18, 1979.
- 28) 中村由行・早川典生・椎名 弘・福嶋祐介：密度フロントの形成・維持機構，第33回海岸工学

講演会論文集, 1986.

- 29) 福岡捷二・福嶋祐介・中村健一: 2次元貯水池密度流の潜り込み水深と界面形状, 土木学会論文報告集, No.302, pp.55-65, 1980.
- 30) Priestly, C.H.B. and F.K. Ball: Continuous convection from an isolated source of heat, Quarterly J. Roy. Met. Soc., No.1, Vol.81, pp.144-157, 1955.
- 31) Morton, B.R., G.I. Taylor and J.S. Turner: Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proc. Roy. Soc. London, No.1, Vol.234, pp.1-23, 1956.
- 32) Fan, L.N. and N.H. Brooks.: Discussion of "Horizontal jets in stagnant fluids of other density" by G. Abraham, J. Hyd. Div., Proc. ASCE, Vol.92, pp.423-429, 1966.
- 33) Koh, R.C.Y. and N.H. Brooks.: Fluid mechanics of waste-water disposal in the ocean, Annual Review of Fluid Mech., Vol.7, pp.187-211, 1975.
- 34) Hirst, E.: Buoyant jets with three-dimensional trajectories, J. Hyd. Div., Proc. ASCE., Vol.98, pp.1999-2014, 1972.
- 35) Stolzenbach, K.D. and D.R.F. Harleman.: An analytical and experimental investigation of surface discharges of heated water, R. M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, Tech. Report No.135, Dept. of Civil Engrg., M.I.T., 1971.
- 36) Stolzenbach, K.D. and D.R.F. Harleman.: Three-dimensional heated surface jets, Water Resources Res., Vol.9, No.1, pp.129-137, 1973.
- 37) Stefan, H. and P. Vaidyaraman.: Jet type model for the three-dimensional thermal plume in a crosscurrent and under wind, Water Resources Res., Vol.8, No.4, pp.998-1004, 1972.
- 38) 林 泰造・有田正光: 温度密度流の拡がりに関する予測モデルの研究, 第20回水理講演会論文集, pp.161-172, 1976.
- 39) 有田正光: 三次元表層密度噴流の拡がり予測モデルと各種モデルとの比較, 第28回海岸工学講演会論文集, pp.485-489, 1981.