

有限振幅波の諸理論と適用範囲

磯 部 雅 彦

1. はじめに

有限振幅波理論の中でもストークス波理論とクノイド波理論は特に有名である。本研究会においても非線型波動理論の関連で、椎貝 (1972)、岩垣 (1972)、首藤 (1974)、土屋 (1980) が広い視野に立ってこれに関する特徴ある解説を行なっている。これらに対し本稿では、ストークス波とクノイド波を中心とする摂動解の誘導過程に重点を置き、詳細に至る理論の内容が理解しやすくなるように心掛ける。その上で、有限振幅の保存波の諸理論を概説し、さらにそれらを応用するに際しての適用範囲について述べる。

本稿で用いる摂動法は単純なものであるが、結果として得られるストークス波理論やクノイド波理論はモリソン式を用いた波力の計算などにはそのまま応用できる。また、浅水変形・屈折・回折・変調などの変形を取り扱う際に用いられる摂動法の理解に役立つであろう。

2. 有限振幅波の理論

2-1 基礎方程式

通常の波の取り扱いにおいて、流体は非粘性かつ非圧縮性であり、運動は渦なしであると仮定できる。また、以下においては波形が変化しないで一様水深中を進行する波、すなわち保存波を対象とする。従って、波速と等しい速さで動く移動座標系から見れば、現象は波打ちながら流れる定常流となる。この時、基礎方程式および境界条件は、流れ関数 Ψ を用いて、

$$(\Psi_x^2 + \Psi_z^2) / 2 + gZ + P / \rho = \text{const.} \equiv P_B / \rho \quad (1)$$

$$\Psi_{xx} + \Psi_{zz} = 0 \quad (2)$$

$$\Psi = \text{const.} \equiv 0 \quad (Z = 0) \quad (3)$$

$$\Psi = \text{const.} = Q \quad (Z = N) \quad (4)$$

$$(\Psi_x^2 + \Psi_z^2) / 2 + gN = P_B / \rho \quad (Z = N) \quad (5)$$

と書ける (たとえば, Isobe・Kraus, 1983a, b)。ここに、 X および Z は図-1 に示すようにそれぞれ水平および鉛直座標 (原点は波峯直下の底面上)、 P は圧力、 N は底面からの水面の高さ、 ρ は流体の密度、 g は重力加速度であり、添字は偏微分を表わす。また、 P_B はベルヌイ定数、 Q は移動座標系における流量であり、さらに流れ関数 Ψ と水平および鉛直流速 U および W との間には、

$$U = \Psi_z, \quad W = -\Psi_x \quad (6)$$

なる関係がある。

式(1)は Euler の運動方程式の積分形であるベルヌイの式、式(2)は渦なし条件式である。流れ関数の定義式(6)により連続式は自動的に満たされる。式(3)および(4)は、それぞれ底面および水面が流線となるための式で、いずれも運動学的境界条件式である。

式(5)は水面において圧力が0となるための式で、力学的境界条件式である。

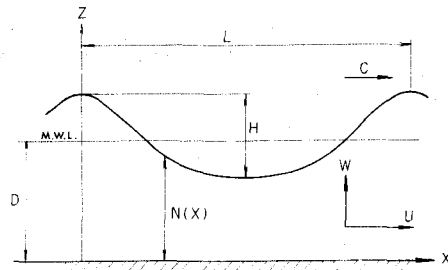


図-1 座標系定義図

式(1)～(5)のうち、式(2)～(5)には未知関数である圧力 P が含まれない。そこで、式(2)～(5)を使ってまず Ψ を求め、その結果を式(1)に代入して P を決定すればよいことになる。これは速度ポテンシャル Φ を用いた場合も同様であり、その場合、 Φ に対する基礎方程式は連続式から得られる $\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0$ となる。このため、Euler の運動方程式とは無関係に解を求めることになるような印象を受ける。しかし、力学的境界条件式(5)を用いたり、Bernoulli の式(1)を使って圧力 P を求めるところで、運動方程式を使ったことになる。つまり、運動方程式を使って U, W を求める方法も、 Ψ または Φ を用いる方法も同値なものである。従来、ストークス波理論では Stokes (1847) を始めとして Φ が用いられることが多く、クノイド波理論では Laitone (1960) を始めとして (U, W) が用いられることが多かった。しかし、これは単に便宜上の問題であり、どの方程式系を用いても同じ結果を得ることができる。

さて、式(2)～(5)を解くのに与えられる独立なパラメータは水深 D 、波長 L 、および波高 H である。これらの任意の値に対する解を求めようとしても、水面形 N も未知であるため、後にわかるように式(4)および(5)が非線型になるので、厳密解は求められない。そこで、有力な解法となるのが摂動法である。

2-2 摂動法とは

ここで波の問題から離れ、摂動法の基本的な考え方について例題を用いて述べる。

今、 ϵ が微小な値であるとして、

$$y^2 = 1 + \epsilon \quad (7)$$

を満たす y (> 0) を、四則演算はできるが平方根を知らない人が(四則演算しかできない電卓で)計算したいとしよう。そこで仮に、

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots \quad (8)$$

の形の解を仮定してみる。これを式(7)に代入して整理すれば、

$$y_0^2 + \epsilon (2y_0 y_1) + \epsilon^2 (2y_0 y_2 + y_1^2) + \dots = 1 + \epsilon \quad (9)$$

となるが、任意の ϵ に対してこの式が成り立つためには、 ϵ のすべてのべきに対する係数が両辺で等しくなければならない。そこでそれぞれの係数を比較することにより、

$$y_0^2 = 1 \quad \therefore y_0 = 1 \quad (10)$$

$$2 y_0 y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = 1/2 \quad (11)$$

$$2 y_0 y_2 + y_1^2 = 0 \quad \therefore y_2 = -1/8 \quad (12)$$

を得る。よって、

$$y = 1 + (1/2) \varepsilon - (1/8) \varepsilon^2 + \dots \quad (13)$$

である。このように級数として解を求める方法を摂動法と呼び、 ε の何乗までの項をとるかが近似の次数となる。

以上のような摂動法の操作をまとめると次のようになる。

- 1) 未知量を適当な微小パラメタ（摂動核）のべき級数に展開する。
- 2) 展開形を解きたい方程式に代入し、摂動核のべきに整理して、各次数の係数を比較することによって各次数での方程式を導く。
- 3) 最低次での方程式から順番に解く。

この方法によって解が求められるためには、まず0次（ $\varepsilon = 0$ ）の方程式（非線型になる場合もある）の解が求められる必要がある。上の例では式(10)である。そこから先は、通常未知量に関して線型な方程式となるので解を得やすい。なお、multiple scale法（たとえば、Mei, 1983）などでは、座標軸などの独立変数も級数展開される。

表-1は式(7)の摂動解と厳密解を比較したものである。 ε の値が小さければ2次近似解でも精度が高いが、 ε が大きいと高次近似解ほど誤差が大きくなる。この問題の場合、 $\varepsilon = 1$ がこれらを分ける境目となるが、それはこの級数の収束半径が1であることによる。複素関数論によりべき級数の収束半径は原点から最も近い特異点までの距離であるが、この場合の特異点は $\varepsilon = -1$ である。従って、正の方向には ε が1より大きくても式(7)の解が存在するにもかかわらず、摂動解は発散してしまい次数を上げるとかえって精度が悪くなるのである。このことはたとえば浅海域におけるストークス波の解に見られ、砕波限界波高に比べて非常に小さな波高の場合にしか収束しない。このことから、摂動法においては摂動核を適切に選ぶことが重要であることがわかる。

表-1 摂動解の精度

ε	0.2	0.5	1	2	5
$\sqrt{1+\varepsilon}$	1.095	1.225	1.414	1.732	2.449
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$1 + \varepsilon/2$	1.100	1.250	1.500	2.000	3.500
$1 + \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8$	1.095	1.219	1.375	1.500	0.375

2-3 ストークス波理論

保存波の計算で与えられる3つの独立なパラメタから、2つの独立な無次元パラメタが作られる。たとえば、相対水深 D/L と波形勾配 H/L である。ストークス波理論では、 D/L は大きくてもよいが、 H/L は小さいものと想定して、 H/L を摂動核とした級数展開を行なって解を求める。以下において2次近似解の誘導を行なうが、3次近似解も含めた詳細な誘導過程がIsobe・Kraus (1983a)に記述されている。

(1) 無次元化

以後の式を簡単にするため、波数 $k = 2\pi/L$ および微小振幅波理論による波速

$C_0 = \sqrt{(g/k) \tanh kD}$ を用いて無次元化する。すなわち、

$$\begin{aligned} x &= kX, \quad z = kZ, \quad \eta = kN, \quad \psi = k\Psi/C_0, \\ q &= kQ/C_0, \quad p_B = kP_B/\rho g \end{aligned} \quad (14)$$

とおき、式(2)~(5)を書き改めれば、

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0 \quad (15)$$

$$\psi = 0 \quad (z = 0) \quad (16)$$

$$\psi = q \quad (z = \eta) \quad (17)$$

$$(\psi_x^2 + \psi_z^2) / (2c_t) + \eta = p_B \quad (z = \eta) \quad (18)$$

となる。ここに、

$$c_t \equiv \coth kD \quad (19)$$

である。

(2) 摂動展開

ストークス波理論では波形勾配に関連する量を摂動核とする。ここでは摂動核 ε を、

$$\varepsilon = kH/2 \quad (20)$$

と定義して、すべての未知量を摂動展開する。すなわち、

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots \quad (21)$$

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots \quad (22)$$

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots \quad (23)$$

$$p_B = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (24)$$

(3) 各次の方程式の誘導

展開形を方程式に代入する際、式を短くするために0次のオーダの解の関数形をあらかじめ考慮に入れてしまう。0次の解は波高が0の場合の解であるから、一様流となるはずである。従って、 b_{00} を定数として

$$\psi_0 = b_{00} z, \quad \eta_0 = kD \equiv d \quad (25 a, b)$$

となる。

式(25a)を考慮して式(2)を式(15)に代入し、 ε のべきについて整理すれば、

$$\varepsilon (\psi_{1xx} + \psi_{1zz}) + \varepsilon^2 (\psi_{2xx} + \psi_{2zz}) + \dots = 0 \quad (26)$$

となり、各次の係数を0とおくことにより、

$$\psi_{1xx} + \psi_{1zz} = 0, \quad \psi_{2xx} + \psi_{2zz} = 0 \quad (27-1, 2)$$

を得る。式(16)も同様にすれば、

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \quad (z = 0) \quad (28-1, 2)$$

となる。

式(17)と(18)については、 $z = \eta$ における関数の値を計算する必要があるが、 η も ε の級数に展開されているので、テイラー展開を用いて注意深く行なう。まず、

$$\eta = d + \Delta\eta \quad (29)$$

とおけば、式(2)および(25b)より

$$\Delta\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots \quad (30)$$

である。そこで $\Delta\eta$ に関してテイラー展開することにより、式(17)の左辺を $z = d$ での値で評価すれば、

$$\psi(x, \eta) = \psi(x, d + \Delta\eta) = \psi^d + (\Delta\eta) \psi_z^d + \dots \quad (31)$$

となる。ここに右肩の d は $z = d$ における値を表わすことにする。式(25a)を考慮し、式(2)および(30)を式(31)に代入して ε のべきに整理すれば、

$$\psi(x, \eta) = (b_{00}d) + \varepsilon (\psi_1^d + b_{00}\eta_1) + \varepsilon^2 (\psi_2^d + b_{00}\eta_2 + \eta_1 \psi_{1z}^d) + \dots \quad (32)$$

を得る。そこで、式(29)および(32)を式(17)に代入して、 ε の各べきに対する係数を比較すれば、

$$b_{00}d = q_0, \quad \psi_1^d + b_{00}\eta_1 = q_1, \quad \psi_2^d + b_{00}\eta_2 + \eta_1 \psi_{1z}^d = q_2 \quad (33-0 \sim 2)$$

となる。

次に、式(18)についても同様にする。まず、

$$\psi_x(x, \eta) = \psi_x^d + (\Delta\eta) \psi_{xz}^d + \dots = \varepsilon \psi_{1x}^d + \varepsilon^2 (\psi_{2x}^d + \eta_1 \psi_{1xz}^d) + \dots \quad (34)$$

$$\psi_z(x, \eta) = \psi_z^d + (\Delta\eta) \psi_{zz}^d + \dots = b_{00} + \varepsilon (\psi_{1z}^d) + \varepsilon^2 (\psi_{2z}^d + \eta_1 \psi_{1zz}^d) + \dots \quad (35)$$

であることから、式(18)の左辺は

$$\begin{aligned} & (\psi_x^2 + \psi_z^2) / (2c_t) + \eta = [d + b_{00}^2 / (2c_t)] + \varepsilon [\eta_1 + b_{00} \psi_{1z}^d / c_t] \\ & + \varepsilon^2 \left[\eta_2 + \left\{ b_{00} (\psi_{2z}^d + \eta_1 \psi_{1zz}^d) + (\psi_{1z}^d)^2 / 2 + (\psi_{1x}^d)^2 / 2 \right\} / c_t \right] + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

となる。そこで、式(29)および(36)を式(18)に代入して、係数を比較することにより、

$$\left. \begin{aligned} d + b_{00}^2 / (2c_t) &= p_0, \quad \eta_1 + b_{00} \psi_{1z}^d / c_t = p_1, \\ \eta_2 + \left\{ b_{00} (\psi_{2z}^d + \eta_1 \psi_{1zz}^d) + (\psi_{1z}^d)^2 / 2 + (\psi_{1x}^d)^2 / 2 \right\} / c_t &= p_2 \end{aligned} \right\} (37-0 \sim 2)$$

を得る。

以上で式(15)～(18)を摂動展開した場合の各次の方程式が求められた。なお、水深および ε の定義より、 $\bar{\eta}$ を周期平均として

$$\bar{\eta} = d, \quad \eta(0) - \eta(\pi) = 2\varepsilon \quad (38)$$

である。これらにも式(2)の展開形を代入すれば、

$$\bar{\eta}_0 = d, \quad \bar{\eta}_1 = 0, \quad \bar{\eta}_2 = 0 \quad (39-0 \sim 2)$$

$$\eta_0(0) - \eta_0(\pi) = 0, \quad \eta_1(0) - \eta_1(\pi) = 2, \quad \eta_2(0) - \eta_2(\pi) = 0 \quad (40-0 \sim 2)$$

となる。これらの2式は通常きちんと書かれないが、書いておく方が以下の議論が理解しやすい。式(39)および(40)を補助的な関係式として、式(27), (28), (33)および(37)を低次のオーダの式から順に解けばよい。

0次オーダの式(39-0)および(40-0)は式(29)により自動的に満足される。また式(33-0)および(37-0)は、 b_{00} が求められたときに q_0 および p_0 を計算するための式となる。なお、この段階では b_{00} の値は不明である。

(4) 1次オーダの方程式の解

式(28-1)を考慮して、式(27-1)の解を変数分離によって求めると、

$$\psi_1 = b_{01}z + b_{11} \frac{\sinh z}{\sinh d} \cos x \quad (41)$$

となる。ここに、 b_{01} および $b_{11}/\sinh d$ は比例定数であり、上式には x に関する周期が 2π で、 $x=0$ を波峯の位置とすることが用いられている。次に、式(41)を式(33-1)および(37-1)に代入し、式(39-1)および(40-1)も考慮して、 $b_{11} \neq 0$ なる解を求めると、

$$\eta_1 = b_{11} \cos x \quad (42)$$

$$b_{00} = -1, \quad b_{11} = 1 \quad (43)$$

$$q_1 = b_{01}d, \quad p_1 = -b_{01}/c_t \quad (44)$$

となる。0次オーダの方程式によって決まらなかった b_{00} がこの段階で求められたが、今度は新たな未知定数 b_{01} が現われている。

(5) 2次オーダの方程式の解

2次オーダの方程式は、式(27-2), (28-2), (33-2), および(37-2)であり、式(39-2)および(40-2)が補助的な関係式となる。まず、式(33-2)および(37-2)に、1次オーダまでの解を表わす式(41)~(43)を代入して整理すれば、それぞれ

$$\psi_2^d - \eta_2 + \frac{c_t}{2} + b_{01} \cos x + \frac{c_t}{2} \cos 2x = q_2 \quad (45)$$

$$\eta_2 - \frac{\psi_2^d}{c_t} + \left(\frac{b_{01}^2}{2c_t} + \frac{c_t^2 - 1}{4c_t} \right) + b_{01} \cos x + \frac{c_t^2 - 3}{4c_t} \cos 2x = p_2 \quad (46)$$

となる。

ここで、式(28-2)を考慮して、式(27-2)の解を変数分離によって求めると、

$$\psi_2 = b_{02}z + b_{12} \frac{\sinh z}{\sinh d} \cos x + b_{22} \frac{\sinh 2z}{\sinh 2d} \cos 2x \quad (47)$$

となる。ただし、式(45)および(46)を考慮して $\cos 2x$ の項までがとられている。このとき、式(39-2)

および(45)より

$$\eta_2 = a_{12} \cos x + a_{22} \cos 2x \quad (48)$$

と書けることは明らかである。式(47)および(48)を改めて式(45)および(46)に代入し、(40-2)も考慮して係数比較法によって各係数を求めると、

$$b_{01} = b_{12} = a_{12} = 0, \quad b_{22} = 3c_t (c_t^2 - 1)/4, \quad a_{22} = c_t (3c_t^2 - 1)/4 \quad (49)$$

$$q_2 = b_{02} d + c_t / 2, \quad p_2 = -b_{02} / c_t + (c_t^2 - 1)/4c_t \quad (50)$$

となる。ここでもまた、新たな未知定数 b_{02} が生じているが、この値は3次オーダの方程式から決定される。結果のみを記すと、

$$b_{02} = (-9c_t^4 + 10c_t^2 - 9)/16 \quad (51)$$

である。

(6) 次元量での解

式(21)~(24)に式(25), (33-0), (37-0), (41)~(44)および(47)~(51)を代入すれば、無次元化された形での2次近似解が表わされる。さらに、それらを式(14)に代入すれば次元量としての解が求められる。その結果は、

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{C_0}{k} \left[\left\{ -1 + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{-9c_t^4 + 10c_t^2 - 9}{16} \right\} kZ + \left(\frac{kH}{2} \right) \frac{\sinh kZ}{\sinh kD} \cos kX \right. \\ \left. + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{3c_t (c_t^2 - 1)}{4} \frac{\sinh 2kZ}{\sinh 2kD} \cos 2kX \right] \quad (52) \end{aligned}$$

$$N = D + \frac{1}{k} \left[\left(\frac{kH}{2} \right) \cos kX + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{c_t (3c_t^2 - 1)}{4} \cos 2kX \right] \quad (53)$$

$$Q = \frac{C_0}{k} \left[-kD + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \left(\frac{-9C_t^4 + 10c_t^2 - 9}{16} kD + \frac{c_t}{2} \right) \right] \quad (54)$$

$$P_B = \frac{\rho g}{k} \left[\left(kD + \frac{1}{2c_t} \right) + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \left(\frac{9c_t^4 - 6c_t^2 + 5}{16c_t} \right) \right] \quad (55)$$

である。

(7) 波速の定義

以上により、移動座標系において波打って流れる定常流は一義的に求められることがわかった。ところで、一定の速度で走る電車の中でこの流れを起こし、外から(固定座標系から)ながめると、電車の速さ C で進む進行波に見える。この時、外から見た流速場を表わすのには、水平流速に一樣流速 C を加え、水平座標を $X_f = X - c_t (t \text{ は時間})$ とするだけでよい。ここで、電車の速さ、すなわち波速は任意であるから、これを決めるために何らかの定義を必要とする。

$U = \Psi_Z$ より式(52)の〔 〕内第1項は移動座標系における一樣流速に対応している。これをちょうど

打ち消すように波速を調節すれば、外から（固定座標系から）見た流速は変動成分のみとなる。これが Stokes (1847) による波速の第1定義であり、式62よりこの値 C^I は次のように表わされる。

$$C^I = C_0 \left[1 + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{9c_t^2 - 10c_t^2 + 9}{16} \right] \quad 60$$

第1定義の場合、波谷から下の平均流速は0となるものの、波谷から上では平均流速が正となるため、いわゆる質量輸送が生ずる。そこで、質量輸送が0となるようにするのが波速の第2定義であり、式64で表わされる流量を打ち消すように波速 $C^{II} = -Q/D$ と決めればよい。

$$C^{II} = C_0 \left[1 + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \left(\frac{9c_t^4 - 10c_t^2 + 9}{16} - \frac{c_t}{2kD} \right) \right] \quad 61$$

これらに対し、土屋・安田 (1974) に始まる一連の研究に用いられている波速の考え方を、別の角度から説明する。今、波がある場所から十分離れたところに静水状態があり、これらが渦なしの流速場であつてつなっているとすれば、ベルヌイ定数は共通である。静水状態を波速 C^{III} で動く移動座標系で記述した場合、底面を基準としたベルヌイ定数は $P_B = \rho g D + \rho (C^{III})^2 / 2$ であり、これを式60と等置することにより、2次のオーダーで

$$C^{III} = C_0 \left[1 + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \left(\frac{9c_t^4 - 6c_t^2 + 5}{16} \right) \right] \quad 62$$

となり、Tsuchiya・Yasuda (1981) の結果と一致する。なお、この定義では、波がある場所での平均水深が静水域での水深に等しいことが仮定されたことになる。

波速 $C = \sigma/k$ ($\sigma = 2\pi/T$ は角周波数) より、波速の定義式60～62は、与えられた水深 D 、周期 T および波高 H から波数 k (波長 L) を求める式となる。波速の違いは波長だけでなく流速場にも影響するが、それらの差は2次オーダーから始まるので、波形勾配が大きくなければ大きな差はない。ただし、もともと2次オーダーから始まる質量輸送については影響は大きい。なお、深海条件 ($kD \rightarrow \infty$) では上記3種の波速は一致する。

どの波速の定義がよいかは明らかでなく、別の条件から決定されるべきものである。工学の分野でよく用いられる Skjelbreia・Hendrickson (1960) の解では第1定義が用いられている。しかし、通常の実験水槽では正味の質量輸送が0となるので、むしろ第2定義が用いられるべきであろう。第2定義を用いた解にはたとえば Tsuchiya・Yamaguchi (1972) がある。

(8) 波速の第2定義を用いた解

波速の第2定義では与えられた水深 D 、周期 T および波高 H から、式61を解いて波数 k を求める。この時、固定座標系における波形 N_f 、および水平・鉛直流速 $U_f \cdot W_f$ は、式62、63および61より、次のようになる。

$$N_f = D + \frac{1}{k} \left[\left(\frac{kH}{2} \right) \cos \theta + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{c_t (3c_t^2 - 1)}{4} \cos 2\theta \right] \quad 63$$

$$U_f = C_0 \left[\left(\frac{kH}{2} \right)^2 \left(-\frac{c_t}{2kD} \right) + \left(\frac{kH}{2} \right) \frac{\cosh kZ}{\sinh kD} \cos \theta + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{3c_t(c_t^2 - 1)}{2} \frac{\cosh 2kZ}{\sinh 2kD} \cos 2\theta \right] \quad (60)$$

$$W_f = C_0 \left[\left(\frac{kH}{2} \right) \frac{\sinh kZ}{\sinh kD} \sin \theta + \left(\frac{kH}{2} \right)^2 \frac{3c_t(c_t^2 - 1)}{2} \frac{\sinh 2kZ}{\sinh 2kD} \sin 2\theta \right] \quad (61)$$

$$\theta = X_f - C^{\text{II}}_t \quad (62)$$

となる。磯部ら（1978）にはこの方針に従った5次近似解が表示されている（ただし、 B_0 の表示式では全体に負の記号一を付ける必要がある）。

(9) 種々のストークス波の解

Stokes（1847）を始めとするストークス波の解といっても、波速の定義および ε の定義の違いにより、少しずつ異なる種々の解がある。本稿では $\varepsilon = kH/2$ としたため、補助的な関係式(40)が得られた。しかし、波形をフーリエ展開した場合の第1成分を A_1 として、 $\varepsilon = A_1 k$ と定義すると、3次近似以上で異なる解が得られる。ただし、ある摂動核を用いて解を求めてしまえば、摂動核相互の関係式を代入することにより、容易に他の摂動核へ変換することができる。また、級数が収束する限り、どの摂動核を用いても近似の次数の範囲内で結果は変わらない。Skjelbreia・Hendrickson（1960）の5次近似解では波速の第1定義と $\varepsilon = A_1 k$ 、Tsuchiya・Yamaguchi（1972）の4次近似解では波速の第2定義と $\varepsilon = A_1 k$ 、Tsuchiya・Yasuda（1981）の3次近似解では式(59)による波速の定義と $\varepsilon = B_1 k$ （ B_1 は速度ポテンシャルの第1調和成分の係数）、磯部ら（1978）の5次近似解では波速の第2定義と $\varepsilon = kH/2$ 、またFenton（1985）の5次近似解でも $\varepsilon = kH/2$ が用いられている。摂動核の定義として $\varepsilon = A_1 k$ や $B_1 k$ を用いると、波高 H と A_1 または B_1 との関係式および波速の定義式を連立させて、波数 k および A_1 または B_1 を求める必要があるため、多少計算が面倒になる。摂動核が異なる解の数値計算結果が有意に異なるのは近似度の不足のためであり、より高次の解を使う必要がある。波速の定義の違いによるものは本質的なもので、境界条件に注意して使い分けるか、その程度の誤差を許容してどれかを使ってしまおうかである。よく使われるのは、最も早く求められたSkjelbreia・Hendricksonの解である。

電子計算機を用いた高次近似解の計算が、Schwartz（1974）、Cokelet（1977）、Nishimuraら（1977）によって行なわれている。この場合、特に限界波高に近い波の計算が目的なので、収束性のよい摂動核の選択が必要となる。たとえば、 $\varepsilon = A_1 k$ をとると、保存波の限界波高より小さな条件でも級数が発散してしまうので用いない方がよい。

2-4 クノイド波理論

クノイド波理論では浅海条件を念頭におき、相対水深 D/L が $(D/L)^2 \approx (H/D) \ll 1$ を満たす程度に小さいと仮定する。以下においては1次近似解の誘導を行なうが、2次近似解までの詳細な誘導過程がIsobe・Kraus(1983b)に記述されている。

(1) 無次元化

クノイド波理論では、水平方向と鉛直方向の長さのスケールが異なるので、それぞれ波長 L および水深 D で無次元化する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} x &= X/L, \quad z = Z/D, \quad \eta = N/D, \quad \psi = \Psi/D\sqrt{gD} \\ q &= Q/D\sqrt{gD}, \quad p_B = P_B/\rho gD \end{aligned} \right\} \quad 63$$

とおいて、式(2)~(5)を書き改めれば、

$$\psi_{zz} + d^2 \psi_{xx} = 0 \quad 64$$

$$\psi = 0 \quad (z = 0) \quad 65$$

$$\psi = q \quad (z = \eta) \quad 66$$

$$(\psi_z^2 + d^2 \psi_x^2) / 2 + \eta = p_B \quad (z = \eta) \quad 67$$

となる。ここに

$$d = D/L \quad 68$$

である。

(2) 摂動展開

クノイド波理論でも摂動核 ϵ のとり方に若干の任意性があるが、ここでは

$$\epsilon = H/D \quad 69$$

ととして摂動展開する。

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \quad 70$$

$$\eta = \eta_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \dots \quad 71$$

$$q = q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots \quad 72$$

$$p_B = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots \quad 73$$

$$d^2 = \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots \quad 74$$

なお、 d^2 は ϵ のオーダーであると仮定されているため、式74のように展開されている。

(3) 各次の方程式の誘導

ここでも $\epsilon = 0$ の場合、すなわち0次の解、が一様流となることから、まず

$$\psi_0 = b_{00} z, \quad \eta_0 = 1 \quad (75 \text{ a, b})$$

のように仮定する。ストークス波の場合と同様に、式70～74を式64～67に代入して ε のべきについて整理し、それぞれの係数を等置すれば、次式を得る。なお、計算中特に注意を要するのは式66および67であり、 $z=1$ のまわりにテイラー展開する必要がある。

$$\psi_{1zz} = 0, \quad \psi_{2zz} + \delta_1 \psi_{1xx} = 0 \quad (76-1, 2)$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \quad (z=0) \quad (77-1, 2)$$

$$b_{00} = q_0, \quad \psi_1^1 + b_{00} \eta_1 = q_1, \quad \psi_2^1 + b_{00} \eta_2 + \eta_1 \psi_{1z}^1 = q_2 \quad (78-0 \sim 2)$$

$$1 + b_{00}^2/2 = p_0, \quad \eta_1 + b_{00} \psi_{1z}^1 = p_1, \quad \eta_2 + b_{00} (\psi_{2z}^1 + \eta_1 \psi_{1zz}^1) + (\psi_{1z}^1)^2/2 = p_2 \quad (79-0 \sim 2)$$

ここに、右肩の1は $z=1$ における値であることを表わす。また、水深および ε の定義より、

$$\bar{\eta}_1 = 0, \quad \bar{\eta}_2 = 0 \quad (80-1, 2)$$

$$\eta_1(0) - \eta_1(1/2) = 1, \quad \eta_2(0) - \eta_2(1/2) = 0 \quad (81-1, 2)$$

なる補助的な関係式を得る。

0次の方程式(78-0)および(79-0)は b_{00} が決定されたときに、 q_0 および p_0 を求めるための式である。

(4) 1次オーダの方程式の解

式(77-1)を考慮して、式(76-1)を解けば、

$$\psi_1 = z f_1(x) \quad 82$$

となる。ここに、 f_1 は z に関する積分定数であり、 x の関数であってもよい。式82を式(78-1)および(79-1)に代入すれば、

$$b_{00} \eta_1 + f_1 = q_1 \quad 83$$

$$\eta_1 + b_{00} f_1 = p_1 \quad 84$$

となる。これらの2式から f_1 を消去して、 $\eta_1 \neq 0$ なる解を求めようとする、

$$b_{00} = -1 \quad 85$$

$$p_1 = -q_1 \quad 86$$

を得る。また、このとき式83は

$$f_1 = \eta_1 + q_1 \quad 87$$

となる。 η_1 および q_1 は未定であり、これらを決定するためには2次オーダの方程式が必要である。

(5) 2次オーダの方程式の解

式82を式(76-2)に代入し、式(77-2)を考慮して解けば、

$$\psi_2 = z f_2(x) - (z^3/6) \delta_1 f_{1xx}(x) \quad 88$$

となる。そこで、式82, 85, 87および88を式(78-2)および(79-2)に代入して整理すれば、

$$f_2 - \eta_2 - (\delta_1/6) \eta_{1xx} + \eta_1^2 + q_1 \eta_1 = q_2 \quad 89$$

$$\eta_2 - f_2 + (\delta_1/2) \eta_{1xx} + (1/2) \eta_1^2 + q_1 \eta_1 + (1/2) q_1^2 = p_2 \quad (90)$$

を得るが、さらに両式を加えれば

$$(\delta_1/3) \eta_{1xx} + (3/2) \eta_1^2 + 2q_1 \eta_1 + q_1^2/2 - q_2 - p_2 = 0. \quad (91)$$

となる。

非線型常微分方程式(91)の解を求めるには、まず両辺に η_{1x} を乗じて積分することによって η_{1x} を求め、さらにもう1度積分するのが常套手段である (たとえば, Mei, 1983)。しかし, κ を母数とするヤコビの楕円関数 cn の微分に関し,

$$[cn^2 u]_{uu} = -6\kappa^2 cn^4 u + 4(2\kappa^2 - 1) cn^2 u + 2(1 - \kappa^2) \quad (92)$$

となることを利用すれば、式(80-1)および(80-2)を満足する式(91)の解が、

$$\eta_1 = cn^2(2Kx) - \overline{cn^2} \quad (93)$$

$$\overline{cn^2} = E/\kappa^2 K - (1 - \kappa^2)/\kappa^2 \quad (94)$$

と書けることがわかる。ここに、 K および E は第1種および第2種の完全楕円積分である。そこで、式(93)を式(91)に代入して整理すれば、 cn^4 および cn^2 の係数から

$$\delta_1 = 3/(16\kappa^2 K^2) \quad (95)$$

$$q_1 = \{-1 - 2(1 - \kappa^2)/\kappa^2 + 3E/\kappa^2 K\}/2 \quad (96)$$

を得る。これで1次の解がすべて求められた。なお、式(91)の定数項および式(93)からは、 η_2 および q_2 を用いて p_2 および f_2 を表わす式が得られるが、 η_2 および q_2 の決定には3次オーダの方程式が必要である。3次オーダ以上での方程式は線型になるので容易に解ける。

(6) 次元量での解

式(70~74)に式(75), (78-0), (79-0), (92), (93~97), (93), (95), (96)を代入し、さらに式(63)および(68)に代入することにより、次元量での解が求められる。その結果は、

$$\Psi = \sqrt{gD} \ Z \left[-1 + \left(\frac{H}{D} \right) \left\{ cn^2 \left(\frac{2KX}{L} \right) - \overline{cn^2} - \frac{1}{2} - \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2} + \frac{3E}{2\kappa^2 K} \right\} \right] \quad (97)$$

$$N = D + H \left\{ cn^2 \left(\frac{2KX}{L} \right) - \overline{cn^2} \right\} \quad (98)$$

$$Q = D \sqrt{gD} \left[-1 + (H/D) \left\{ -1/2 - (1 - \kappa^2)/\kappa^2 + 3E/2\kappa^2 K \right\} \right] \quad (99)$$

$$P_B = \rho g D \left[3/2 + (H/D) \left\{ 1/2 + (1 - \kappa^2)/\kappa^2 - 3E/2\kappa^2 K \right\} \right] \quad (100)$$

$$HL^2/D^3 = 16\kappa^2 K^2/3 \quad (101)$$

である。

(7) 固定座標系における解

ストークス波の場合と同様、移動座標系から固定座標系に戻すためには波速の定義が必要である。ストークス波のところで説明した3種の定義に基づいて波速を計算すると、1次近似解の範囲ではすべて一致し、

$$C = \sqrt{gD} \left[1 + (H/D) \left\{ 1/2 + (1 - \kappa^2)/\kappa^2 - 3E/2\kappa^2 K \right\} \right] \quad (102)$$

となる。この時、固定座標系における波形 N_f 、および水平・鉛直流速 $U_f \cdot W_f$ は、

$$N_f = D + H (\text{cn}^2 \theta' - \overline{\text{cn}^2}) \quad (103)$$

$$U_f = H \sqrt{g/D} (\text{cn}^2 \theta' - \overline{\text{cn}^2}) \quad (104)$$

$$W_f = H \sqrt{g/D} (4KZ/L) \text{cn} \theta' \text{sn} \theta' \text{dn} \theta' \quad (105)$$

$$\theta' = 2K (X_f - Ct) / L \quad (106)$$

となる。ここに、sn, dn は cn と別の種類のヤコビの楕円関数である。

母数 κ を決定するためには、式 (101) および (102) を用いることになる。式 (101) が0次のオーダーまで正しい式となっているのと整合性を保つためには、式 (102) も0次までとればよい。すなわち、

$$L/T \equiv C = \sqrt{gD} \quad (107)$$

である。式 (101) および (107) から、 L を消去すれば、

$$U_r \equiv gHT^2/D^2 = 16\kappa^2 K^2/3 \quad (108)$$

となる。この式は浅海条件でのアーセル数 U_r から楕円関数の母数 κ を決定するための式である。 κ が決定されれば、式 (107) により波長 L が計算できる。そこで式 (103) ~ (106) を用いれば波形や流速が計算できることになる。なお、周期が無限に長い場合、 $U_r \rightarrow \infty$ より $\kappa \rightarrow 1$ 、 $\text{cn} \rightarrow \text{sech}$ であり、孤立波を表わすこととなる。また実際の数値計算では、母数 κ のかわりに補ノーム $\bar{q}$ を用いると便利である (磯部ら, 1978; Isobe, 1985)。

(8) 種々のクノイド波の解

Korteweg・de Vries (1895) を始めとして得られているクノイド波の解にも種々のものがある。その原因の1つが波速の定義の違いであり、2次以上のオーダーの解に影響を及ぼす。他に摂動核の定義、無次元化のための基準水深の違いなどによっても多少異なる解が得られるが、これらについては近似次数の範囲内で互いに一致する。Laitone (1960) の2次近似解では波谷での水深 D_t を基準水深として用い、 $\varepsilon = H/D_t$ となっていて、波速は第2定義である。Chappelear (1962) の3次近似解では波速を第1定義によるものとして別の展開をしている。これに対し、Tsuchiya・Yamaguchi (1972) の3次近似解では波速のみを第2定義に変えた。土屋・安田 (1974) の2次近似解および安田 (1978) の3次近似解ではストークス波の場合の式 (58) に対応する新たな波速の定義が用いられている。磯部ら (1978) は波速の第2定義を用い、数値計算が容易になるように $\varepsilon = H/D$ として3次近似解を求めた (式中、 $2\kappa K = (T_3)^2 \log(1/\bar{q})$ は $2\kappa K = (T_2)^2 \log(1/\bar{q})$ が正しい)。

電子計算機を用いた高次近似解の計算は、Nishimura ら (1977) および Fenton (1979) に
よって行なわれている。また、クノイド波の波長が無限大となった極限である孤立波については、
Fenton (1972), Longuet-Higgins・Fenton (1974) および Pennell・Su (1984) に
よって計算されている。これらは特に限界波高に近い波の計算に役立てられている。

2-5 摂動解の全体像

ストークス波とクノイド波を学ぶと、その他に摂動解はないのかという疑問が湧く。以下ではこの問
題に答えるとともに、両理論の関係を別な角度から明らかにする。

保存波に対する独立なパラメタは水深 D 、波長 L および波高 H の 3 つであり、これからできる独立な
無次元パラメタは 2 つである。ストークス波やクノイド波の理論では、ある 1 つの無次元パラメタにつ
いて級数展開を行なって解を求めた。しかし、独立な無次元パラメタが 2 つあるのだから、2 つのパラ
メタについて 2 重級数に展開するのも自然な考え方である。その場合、2 つのパラメタをアーセル数お
よび相対水深の自乗として、それぞれ、

$$\varepsilon = HL^2/D^3, \quad \delta = (D/L)^2 \quad (109)$$

と定義すると、 ε と δ に関する正則な 2 重級数解が得られる。すなわち、式 63 のように無次元化された
未知量 η , ψ , q および p_θ を、

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{ij}(x) \varepsilon^i \delta^j \quad (110)$$

などと展開し、支配方程式 64~67 に代入して ε と δ について整理し、低次の式から解くことにより、順
次解が求められることが示される (Isobe ら, 1982)。たとえば $\eta_{ij}(x)$ については、

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{01} = 0, \quad \eta_{10} = 0, \quad \eta_{02} = 0, \quad \eta_{11} = (1/2) \cos x, \quad \eta_{20} = 0 \quad (111)$$

のごとくである。

もしも無限の次数まで解を求めたとし、それらを式 (110) に代入すれば、厳密解が得られる。この
様子が図-2 に示されており、式 (110) の 2 重級数の和を求めることは、すべての格子点に対応する
項を加えることになる。ところで、級数が絶対収束する範囲内で加える順序は自由に選べる。そこでま
ず縦方向の和をとり、それから横方向の和をとることにしよう。すなわち式 (110) を

$$\eta_i^{(s)}(x; \delta) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{ij}(x) \delta^j, \quad \eta = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i^{(s)}(x; \delta) \varepsilon^i \quad (112)$$

のように書き改める。右側の式はアーセル数 ε で級数展開された形になっているが、
 $\varepsilon = \delta^{-3/2} \times (H/L)$ であるから波形勾配 H/L で展開されているとも見られる。するとこれはスト
ークス波理論における級数展開と一致していることになる。従って、ストークス波理論における各次数の
解は、2 重級数における縦一列分を含むことになる。また、有限次数のストークス波の解の精度がよく
なるためには、 ε すなわちアーセル数が小さくなればよいことがわかる。

今度は逆に横方向から先に加えることにすれば、

$$\eta_j^{(c)}(x; \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{ij}(x) \varepsilon^i,$$

$$\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^{(c)}(x; \varepsilon) \delta^j \quad (113)$$

となる。クノイド波理論において、 $(D/L)^2 \sim (H/D) \ll 1$ であることと $O(HL^2/D^3) = O(\kappa) = O(1)$ を考えると、 (H/D) および κ はそれぞれ δ および ε で置き変えることができ、その結果は式(113)の下側と一致する。従って、この展開はクノイド波理論と同じであり、各次数の解は2重級数の横一行分を含むことがわかる。さらに、クノイド

波理論の精度が良くなるのは、 δ すなわち相対水深の自乗が小さい場合であることもわかる。

さて、加える順序はこれらに限らず、斜めに加えることもできる。たとえば右下に向かう斜め 45° の方向にまず加え、さらにそれらを加えるものとする。この場合、

$$\eta_k^{(e)}(x, \delta/\varepsilon) = \sum_{j=0}^k (\delta/\varepsilon)^j \eta_{k-j,j}(x), \quad \eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^{(e)}(x, \delta/\varepsilon) \varepsilon^k \quad (114)$$

である。これを物理的に見れば、 (δ/ε) のオーダーが1なのでまずそれについて加え、そのあとで ε について加えるということになっている。ところで、 $\delta/\varepsilon \sim 1$ より $(D/L)^4 \sim H/D$ であるから、ストークス波とクノイド波の仮定の間中にあり、土屋・安田(1978)によって擬ストークス波と呼ばれているものである。なお、加える方向の角度を変えれば無数の解が得られることは明らかである。

ここで同一の次数、たとえば2次近似解で各摂動解の精度を比較してみる。ストークス波とクノイド波は0次を含めてそれぞれ縦3列および横3行の格子点の分の項を含んでいる。しかし、擬ストークス波では三角形で囲まれた6点分の項を含むにすぎず、それらはストークス波の分にもクノイド波の分にも含まれてしまう。このことから、無数の摂動解が存在しオーダーの比較からするとストークス波とクノイド波の中間的なものとなるものの、どちらの波動理論に比べても精度が落ちることがわかる。従って、有用な摂動解はストークス波とクノイド波の2つだけであり、それぞれアーセル数および相対水深が小さい場合に精度が良いと予想される。

2-6 流れ関数法と速度ポテンシャル法

以下では電子計算機を用いて摂動法によらずに保存波の解を求める方法を簡単に紹介する。いずれも解の関数形を仮定し、その中に含まれる係数を最小自乗法などによって決定するものである。関数形はストークス波のものと同じであるが、摂動法と違ってその係数を摂動展開するわけではないので、適用範囲が級数の収束半径に限られることがない。このため、適用範囲が広がり得る。

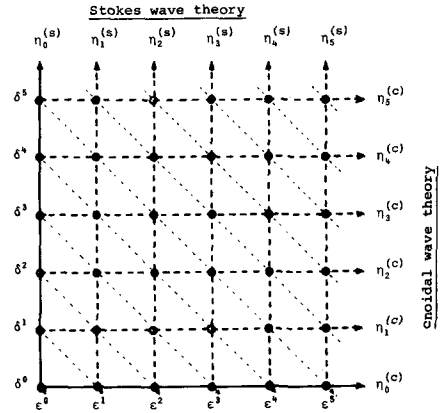


図-2 二重級数解とストークス波・クノイド波との関係

まず、現在までにしばしば用いられてきた Dean (1965) の流れ関数法を中心に説明する。ストークス波の場合の式(2)から類推して、移動座標系における流れ関数を

$$\Psi = B_0 Z + \sum_{n=1}^N B_n \sinh n k Z \cos n k X \quad (115)$$

とおく。ここに B_n ($n = 0 \sim N$) は定数であり、 N は次数である。式 (115) による Ψ は、ラプラス方程式(2)および底面での境界条件式(3)を自動的に満足している。そこで、水面での境界条件式(4)および(5)を満足するように、定数の値を決定すればよいことになる。具体的には、まず与えられる条件が水深 D 、周期 T 、および波高 H であることから、周期を規定するために波速の定義式が必要となる。Dean は波速の第 1 定義を用いて、

$$C = L/T = -B_0 \quad (116)$$

とした。波速の定義式 (116) を考慮すれば、式 (115) を式(4)および(5)に代入した場合に含まれる未知の定数は B_n ($n = 1 \sim N$)、 k ($= 2\pi/L$)、 Q および P_b となるが、水面形 $N(X)$ も未知である。そこで、式(4)を厳密に満たすように $N(X)$ を決定することにし、他方の式(5)に最小自乗法を適用して定数の値を決定すればよい。ただし実際の計算では、 P_b の値を仮定し、 B_n 、 k および Q の値を最小自乗法によって求め、結果として得られる波高が与えられた値に近づくように P_b の値を修正していくようにしている。

限界波高に近い波高になると、保存波に関係するパラメタ、特にエネルギーなどの積分量は波高とともに単調増加するわけではない (たとえば Longuet-Higgins, 1975)。ベルヌイ定数 P_b についても、Cokelet (1977) による厳密な計算結果を見ると、限界波高より若干小さな波高で最大値をとった後、限界波高に近づくにつれて減少する。この関数関係を逆に見れば、限界波高付近では P_b に対して H が 2 価関数となるから、Dean のように P_b を波高のかわりのパラメタとして利用するのは不都合である (Chaplin, 1980)。その点で Rienecker・Fenton (1981) によって提案された計算法の方が優れている。

流れ関数法に対し、速度ポテンシャルに含まれる定数を電子計算機で求める方法が Chappellear (1961) によって提案されている。この方法では水面形もフーリエ級数に展開され、水面における 2 つの境界条件を近似的に満たすように定数が決められる。その点、流れ関数法では運動学的境界条件は厳密に満たされている。しかし、そのために保存波の限界波高を越える大波高の計算を無理にやろうとすると水面形に対する解がなくなり、全く答が得られなくなる。いずれにしても、限界波高付近を除けばどの計算結果も大差ない。Le Méhauté ら (1984) は数値計算された流れ関数の係数を D/L_0 および H/L_0 ($L_0 = gT^2/2\pi$) の近似式で表わすことにより、利用者の便を計っている。

Dean (1965) では、非対称なものも含む測定波形に合わせて流れ関数の係数を決定し、それによって水粒子速度などを求める方法も述べられている。また、Lambrakos (1981) は、波が変形してもよいこととして、拡張速度ポテンシャル法を提案した。さらに Fenton・Rienecker (1982) も、

変形する波への拡張を行なっている。

3. 適用範囲

3-1 計算結果の比較

有限振幅波の諸理論に対する適用範囲の議論に入る前に、数値計算例を比較してみよう。

図-3(a)~(c)は水面波形について、微小振幅波（エアリー波）、ストークス波5次近似解、クノイド波3次近似解、および流れ関数法5次近似解を比較したものである。いずれも波速は第2定義を用いている。まず(a)のような浅海条件では、クノイド波と流れ関数法とが一致するものの、ストークス波では不合理な結果になってしまうことがわかる。(b)のように中間的な水深では3者がほぼ一致する。(c)のような深海条件では、ストークス波と流れ関数法とが一致し、クノイド波は異なってくる。この差はわずかであると思われるが、底面流速を比べるとクノイド波では非常な過大評価となる。

これらのことから、各理論に適用範囲があること、および共通な適用範囲においては解が一致することがうかがえる。これを明らかにするため、次節で理論的な精度について議論する。

3-2 理論的精度の検討

解の精度を理論的に検討する方法は、大別して2通りになる（堀川ら、1977）。その1つは、最近電子計算機を使って求められている高精度の解および対象となる近似解で表わされる物理量を比較するものである。もう1つは、近似解がもともとの支配方程式をどの程度満足するかを調べるものである。後者は間接的にはなるが、近似解のみを使って議論できることと、対象となる方程式の数が限られているという点で便利である。また、堀川らによれば、結果の傾向は変わらない。そこで、以下においては後者の方法の結果をまとめ直して紹介する。

保存波の支配方程式(2)~(5)のうち、水面における

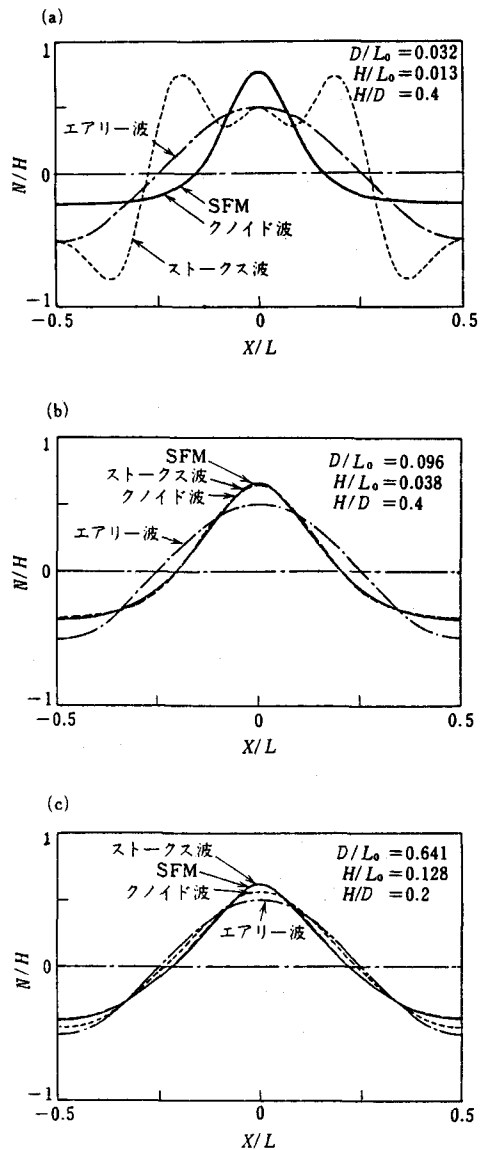


図-3 計算波形の比較例

境界条件式(4)および(5)は非線型であり、近似解によって厳密に満たされることはない（クノイド波ではラプラス方程式(2)も厳密には満たされない）。そこで、近似解をこれらの2式（ただし、式(4)はその微分形）に代入したときの残差 e_K および e_D を定義すると、

$$e_K = (UN_X - W) / \sqrt{1 + N_X^2} \quad (117)$$

$$e_D = \{(\Psi_X^2 + \Psi_Z^2) / 2g + N\} - \{(\overline{\Psi_X^2 + \Psi_Z^2}) / 2g + D\} \quad (118)$$

となる。物理的に見ると、 e_K は水粒子が水面と直角な方向に飛び出す速度を表わし、 e_D は水面における圧力水頭の変動量を表わす。そこでこれらの rms 値を無次元化した量として

$$E_{Krms} = (e_K)_{rms} / U_0 \quad (119)$$

$$E_{Drms} = (e_D)_{rms} / H \quad (120)$$

$$U_0 = \pi H / (T \tanh k_S D) \quad (121)$$

を考える。ここに、 k_S は微小振幅波理論による波数である。これにより、 E_{Krms} と E_{Drms} は代表的な1次の微小量である波高と水面での水平水粒子速度によって無次元化されたことになる。特に E_{Krms} については、従来のDean (1968)、土屋・山口 (1969) および堀川ら (1977) の定義と若干変え、その絶対値が E_{Drms} と同等に考えられるようにしてある。

図-4(a)および(b)は、それぞれストークス波5次近似解およびクノイド波3次近似解に対する等残差

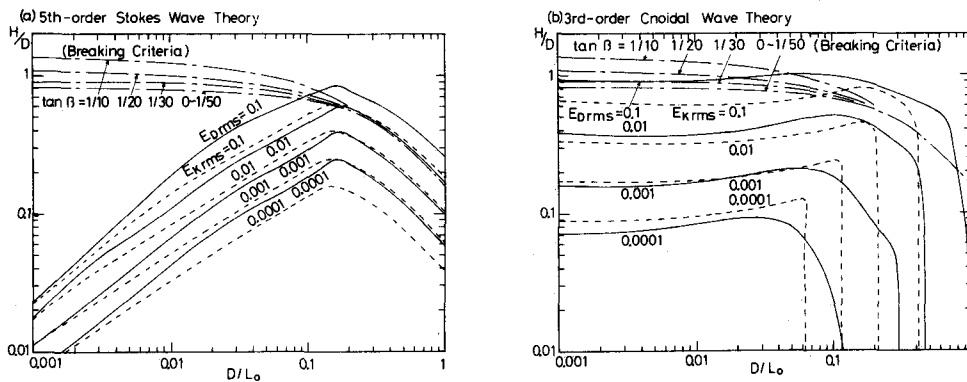


図-4 残差の計算例

線を描いたものである。図中には、合田 (1970) による碎波指標が一点鎖線で示されている。このうち海底勾配 $\tan \beta = 0 \sim 1/50$ については、Yamada・Shiotani (1968) によって数値計算された保存波の限界波高と一致する。 E_{Krms} および E_{Drms} のうちのいずれの指標を用いても類似の傾向がみられ、ストークス波は深海域、クノイド波は浅海域で精度が高いことがわかる。近似の次数に対応して、波高が $1/10$ になると残差はそれぞれ $1/10^5$ および $1/10^3$ 程度になっている。逆に浅海域におけるス

トークス波、および深海域におけるクノイドでは、砕波波高よりもずっと小さな波高でも残差が大きくなってしまいます。これは、摂動核 ε に関する特異点が物理的に意味のない純虚数または負の値となり、これらが原点近くに存在するために、2-2で述べたように解が発散してしまうからである（Nishimuraら, 1977）。これは、2-5からも予想されることである。

図-5はストークス波、クノイド波、および流れ関数法の各次数の解について、 $E_{Drms} = 0.01$ となる限界を描いたものである。流れ関数法では $E_{Krms} = 0$ となるので、全部の波動理論が比較できるように E_{Drms} の方が示されている。概略として、ストークス波は $H/L_0 = \text{一定}$ と $U_r = gHT^2/D^2 = \text{一定}$ の線で囲まれた領域、クノイド波は $H/D = \text{一定}$ と $D/L_0 = \text{一定}$ の線で囲まれた領域で精度が良いと言える。また、図の左下の部分は両者共通して精度が良い部分である。流れ関数法（SFM）は、5次近似でもかなり精度が高く、19次近似では解が得られる範囲内（保存波の存在範囲内で、 $\tan\beta = 0$ の砕波限界に相当）で $E_{Drms} < 0.01$ となる。

以上の結果から、ストークス波は5次まで、クノイド波は3次まで使うことを前提にして、概略の適用範囲を示したのが図-6である。両者の精度が良い左下の領域ではほぼ同じ計算結果が得られるので、用いる関数の簡単なストークス波理論をとることとし、アーセル数 $U_r \equiv gHT^2/D^2 = 25$ を境界とし

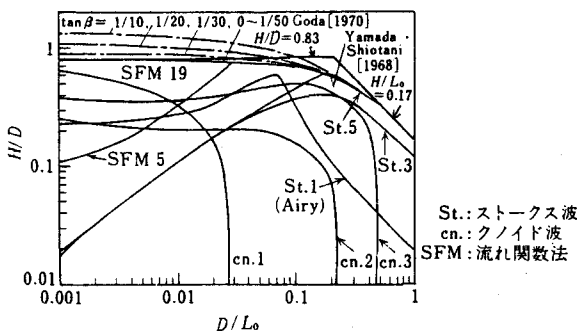


図-5 等残差線の比較

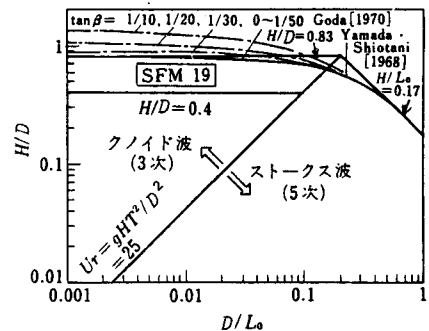


図-6 波動理論の適用範囲

た。これは、Le Méhauté による適用限界（Coastal Engineering Research Center, 1977, p. 2-35）における $HL^2/D^3 \approx 26$ とほぼ一致する。3次近似程度のクノイド波では、波高水深比 $H/D = 0.4$ 程度が適用限界である。流れ関数法 19次近似解ではこれらすべてを含む保存波の存在限界（ $\tan\beta = 0$ の砕波限界）まで精度が高い。ただし、斜面上で砕波する波のように保存波の限界波高を大きく上回る波高に対しては、変形しないという仮定が成立しないために、解を得ることさえもできない。

3-3 実験結果との比較

有限振幅波理論による計算値は、特に水面波形および波峯または波谷通過時の水平水粒子速度について実測値と比べられている。水粒子速度の時間変化が比較できるようになったのは、熱膜流速計やレー

ザードプラー流速計が実用化されてからのことで、比較的最近のことである。

実測値を計算値と比較する際に注意すべきことがいくつかある。その1つは平均流速成分の存在である。通常の実験水槽では正味の質量輸送は0であるから、波速の第2定義を用いて計算値を求めることになる。この場合、冲向きの平均流は高さによらず一定である。しかし、実際には粘性の影響で一定にならない (Longuet-Higgins, 1953)。このような問題に対しては、平均成分と変動成分とを分離して比較するのも1つの方法である。もう1つは、実験で大波高の波を得るのに斜面上の波を用いざるを得ない場合が多く、この時波形は波峯に対して前後非対称に変形してしまうことがある。現地でもこのような波が存在するのだから研究の対象とする必要はあるが、保存波の理論との比較には適当でない。第3に、比較すべき計算値の問題として、従来解の理論的な適用範囲に注意せずに比較されてきた。しかし、基礎方程式に対する誤差の大きい解を用いてもあまり意味がない。

そこでまず、理論的な適用範囲を示す図-6、およびそのもととなる図-5を念頭において、過去に得られたデータとの比較をやり直してみる。水平床上で実験が行なわれたGoda (1964), Le Méhautéら (1968), 岩垣・酒井 (1969), および Tsuchiya・Yamaguchi (1972) の結果と比較した。Le Méhauté らによるクノイド波の計算値には疑問があることもあり、磯部ら (1978) による波速の第2定義によるストークス波5次近似解およびクノイド波3次近似解を用いて再計算した。その結果、Tsuchiya・Yamaguchiの実測値は流速計の応答特性か後流渦と思われる原因で小さくなったものの、他は適用範囲内にあれば、水粒子速度についても図-7の程度の一致を示した。

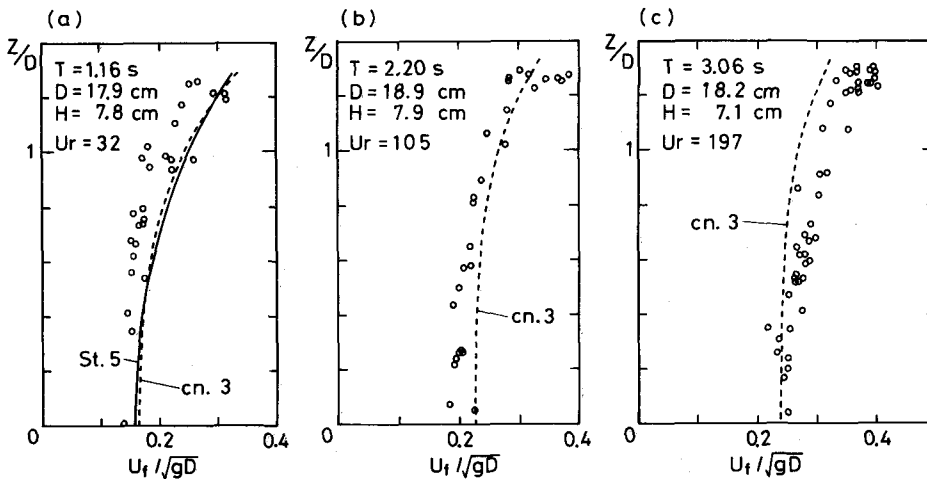


図-7 水平流速の計算値と実測値との比較例

関根・服部 (1985) は波動理論の適用範囲を系統的に調べるため、換算沖波波形勾配 H_0/L_0 が 0.005 から 0.068 の波について、1/20 勾配斜面上の各点で水面変動および水粒子速度を測定した。その結果を各種の計算値と比較し、検討を行なっている。図-8(a)~(c)は、水面変動および波谷と水底の高さにおける水平水粒子速度 (平均流成分を除く) の時間波形について、計算値と実測値の差の rms

値の相対値が0.1となる条件をプロットしたものである。ストークス波に関する(a)を見ると、判断規準が異なるものの、理論的精度から定められた $U_r = 2.5$ という適用限界と傾向が一致している。ところが(b)のクノイド波3次近似解では、左下にプロットされる波形勾配の小さな波については、かなり小さな波高で実測値と合わなくなる。むしろこれについても $U_r = 2.5$ が適用限界となるようにも見える。これはアーセル数が大きくなると実測波形の方が前傾化したりして歪むためであり、岩垣ら(1971)、Stive(1980)、Flickら(1981)などの実験結果と共通している。流れ関数法(SFMB5)の適用範囲についても同様なことと言えるが、測定された水面波形を使って計算する流れ関数法(SFMA9)では、岩垣・酒井(1974)、磯部ら(1979)と同様、砕波点近くまで、適用可能である。

以上のように、波動理論の適用範囲、逆に見れば与えられた波の条件に対して選択すべき波動理論に関し、実験的にもかなり明らかにされてきているが、まだ以下のような検討課題が残されている。1) 深海波の不安定性の問題もあり、実験が行なわれている最大波形勾配は0.07程度であるが、設計条件がこれを上回る場合もあるので、何らかの形で実験を行なう必要がある。2) 斜面上で変形する波については、保存波の理論を準用する方法、あるいは変形する波の実用的な解析法を、実測結果と比較しながらさらに検討する必要がある。3) 斜面上で砕波する波の波高は保存波の限界波高を上回る。このため、保存波の理論の中で最も適用範囲の広い流れ関数法を用いても、この領域に対して解を求めることすらできない。砕波の内部機構については盛んに研究が行なわれているが、さらに進めることにより、適切な波動理論を確立する必要がある。

4. おわりに

ストークス波理論とクノイド波理論を中心に摂動解の誘導法とそれらの相互関係を説明した。本稿で

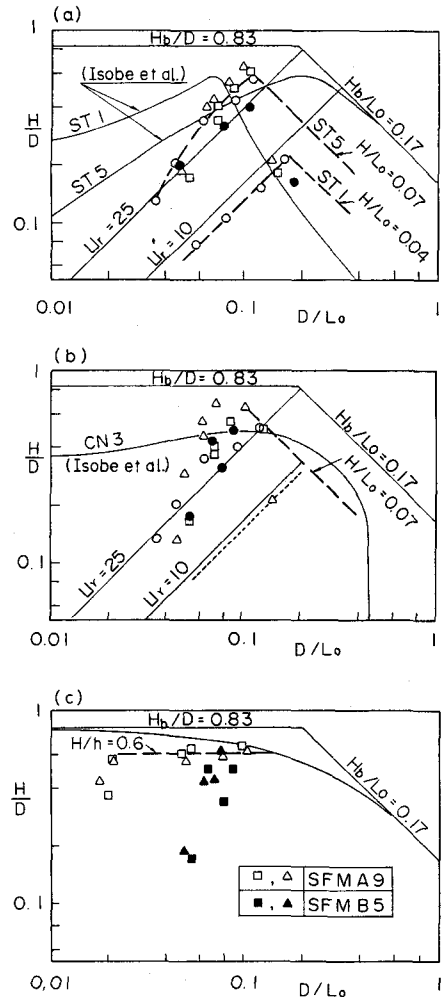


図-8 実験結果から得た波動理論の適用範囲
(○, ●: 水面波形による; □, ■: 波谷の高さでの流速波形による, △, ▲: 水底での流速波形による)

取り扱ったのは保存波のみであるが、変形する波の解析にも摂動法は有力な手法である（たとえば、Mei, 1983）しかも、その基本はストークス波とクノイド波であるので、それらを理解することは、変形する波の理論の理解の助けになるであろう。

波動理論の適用範囲について解説したが、特に無闇に摂動解を用いるとかえって精度が悪くなる場合もあることには注意を要する。今後、さらに系統的な室内実験・現地観測を行なって大波高の場合にも適切な波動理論を確立する必要があるが、その際には波の不規則性も考慮する必要がある。

なお、本稿がとりまとめられたのは、著者が大学院生の頃にストークス波やクノイド波について現在筑波大学の西村仁嗣助教授に明解な御教示を賜ったことによるところが大であり、ここに記して謝意を表させて頂く。

参 考 文 献

- 1) Chaplin, J. R. (1980) : Developments of stream-function wave theory, Coastal Eng. , 3, 179-205.
- 2) Chappellear, J. E. (1961) : Direct numerical calculation of wave properties, J. Geophys. Res. , 66(2), 501-508.
- 3) Chappellear, J. E. (1962) : Shallow water waves, J. Geophys. Res. , 67(12), 4693-4704.
- 4) Coastal Engineering Research Center (1984) : Shore Protection Manual, U. S. Army Corps of Engrs. , U. S. Govt. Printing Office, 3 Vols.
- 5) Cokelet, E. D. (1977) : Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. , A 286, 183-230.
- 6) Dean, R. G. (1965) : Stream function representation of nonlinear ocean waves, J. Geophys. Res. , 70(18), 4561-4572.
- 7) Dean, R. G. (1968) : Relative validities of water wave theories, Proc. Specialty Conf. on Civil Eng. in the Oceans, 1-30 (または, Proc. ASCE, 96 (WW1), 105-119, 1970)
- 8) Fenton, J. D. (1972) : A ninth-order solution for the solitary wave, J. Fluid Mech. , 53, 257-271.
- 9) Fenton, J. D. (1979) : A high-order cnoidal wave theory, J. Fluid Mech. , 94, 129-161.
- 10) Fenton, J. D. (1985) : A fifth-order Stokes theory for steady waves, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng. , ASCE, 111, 216-234.
- 11) Fenton, J. D. and M. M. Rienecker (1982) : A Fourier method for solving

- nonlinear water-wave problems : application to solitary-wave interactions, J. Fluid Mech. , 118, 411-443.
- 12) Flick, R. E. , R. T. Guza and D. L. Inman (1981) : Elevation and velocity measurements of laboratory shoaling waves, J. Geophys. Res. , 86(C5), 4149-4160.
 - 13) Goda, Y. (1964) : Wave forces on a vertical circular cylinder, Experiments and a proposed method of wave force computation, Rep. Port and Harbour Res. Inst. , (8), 1-74.
 - 14) 合田良実 (1970) : 砕波指標の整理について, 土木学会論文報告集, (180), 39-49.
 - 15) 堀川清司・西村仁嗣・磯部雅彦 (1977) : 有限振幅波理論の適用範囲について, 第24回海講論文集, 10-14.
 - 16) 磯部雅彦・西村仁嗣・堀川清司 (1978) : 保存波の摂動解の波高による表示, 第33回年講概要集 (2), 土木学会, 760-761.
 - 17) 磯部雅彦・福田直利・堀川清司 (1979) : 砕波帯における流速場に関する二次元実験, 第26回海講論文集, 41-45.
 - 18) Isobe, M. , Nishimura, H. and K. Horikawa (1982) : Theoretical considerations on perturbation solutions for waves of permanent type, Bull. Fac. Eng. , Yokohama Nat. Univ. , 31, 29-57.
 - 19) Isobe, M. and N. C. Kraus (1983 a) : Derivation of a third-order Stokes wave theory, Hydraulics Lab. Rep. No. YNU-HY-83-1, Dept. of Civil Eng. , Yokohama Nat. Univ. , 37 p.
 - 20) Isobe, M. and N. C. Kraus (1983 b) : Derivation of a second-order cnoidal wave theory, Hydraulics Lab. Rep. , No. YNU-HY-83-2, Dept. of Civil Eng. , Yokohama Nat. Univ. , 43 p.
 - 21) Isobe, M. (1985) : Calculation and application of first-order cnoidal wave theory, Coastal Eng. (投稿中).
 - 22) 岩垣雄一 (1972) : クノイド波理論の実用化, 1972年度 (第8回) 水工研修会講義集, B, B-10-1~B-10-15.
 - 23) 岩垣雄一・酒井哲郎 (1969) : 有限振幅波の水粒子速度に関する実験, 第16回海講講演集, 15-21.
 - 24) 岩垣雄一・酒井哲郎 (1974) : Stream Function Theory による斜面上の砕波の水粒子速度の表現について, 第21回海講論文集, 27-32.
 - 25) 岩垣雄一・酒井哲郎・川島 毅 (1971) : 斜面上の波の水粒子速度の鉛直分布について, 第18回海講論文集, 93-96.

- 26) Korteweg, D. J. and G. de Vries (1895) : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag. , 5, 39, 422-443.
- 27) Laitone, E. V. (1960) : The second approximation to cnoidal and solitary waves, J. Fluid Mech. , 9, 430-444.
- 28) Lambrakos, K. F. (1981) : Extended velocity potential wave kinematics, Proc. ASCE, 107 (WW3) , 159-174.
- 29) Le Méhauté, B. , D. Divoky and A. Lin (1968) : Shallow water waves : A comparison of theories and experiments, Proc. 11th Coastal Eng. Conf. , ASCE, 86-107.
- 30) Le Méhauté, B. , C.-C. Lu and E. W. Ulmer (1984) : Parameterized solution to nonlinear wave problem, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng. , ASCE, 110, 309-320.
- 31) Longuet-Higgins, M. S. (1953) : Mass transport in water waves, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. , A 245, 535-581.
- 32) Longuet-Higgins, M. S. (1975) : Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude, Proc. Roy. Soc. Lond. , A 342, 157-174.
- 33) Longuet-Higgins, M. S. and J. D. Fenton (1974) : On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. II, Proc. Roy. Soc. Lond. , A 340, 471-493.
- 34) Mei, C. C. (1983) : The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley & Sons, New York, 740 p.
- 35) Nishimura, H. , M. Isobe and K. Horikawa (1977) : Higher order solutions of the Stokes and the cnoidal waves, J. Fac. Eng. , Univ. Tokyo, B, 34, 267-293.
- 36) Pennell, S. A. and C. H. Su (1984) : A seventeenth-order series expansion for solitary wave, J. Fluid Mech. , 149, 431-443.
- 37) Rienecker, M. M. and J. D. Fenton (1981) : A Fourier approximation method for steady water waves, J. Fluid Mech. , 104, 119-137.
- 38) Schwartz, L. W. (1974) : Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves, J. Fluid Mech. , 62, 553-578.
- 39) 関根義和・服部昌太郎 (1985) : 波動理論の適用範囲に関する実験的研究, 第32回海講論文集 (印刷中) .

- 40) 椎貝博美 (1972) : 非線型の波動問題, 1972年度 (第8回) 水工研修会講義集, B, B-1-1
~B-1-15.
- 41) 首藤伸夫 (1974) : 非線型波動論, 1974年度 (第10回) 水工研修会講義集, B, B-1-1
~B-1-35.
- 42) Skjelbreia, L. and J. Hendrickson (1960) : Fifth order gravity wave theory,
Proc. 7th Coastal Eng. Conf., ASCE, 184-196.
- 43) Stive, M. J. F. (1980) : Velocity and pressure field of spilling breakers, Proc.
17th Coastal Eng. Conf., 547-566.
- 44) Stokes, G. G. (1847) : On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb.
Phil. Soc., 8, 441-455.
- 45) 土屋義人 (1980) : 有限振幅波の理論, 1980年度 (第16回) 水工研修会講義集, B, B-7-1
~B-7-24.
- 46) 土屋義人・山口正隆 (1969) : せつ動解による有限振幅重複波理論の適用限界について, 第16回
海講講演集, 7-13.
- 47) Tsuchiya, Y. and M. Yamaguchi (1972) : Some considerations on water particle
velocities of finite amplitude wave theories, Coastal Eng. in Japan, 15, 43-57.
- 48) 土屋義人・安田孝志 (1974) : 新しいクノイド波理論の試み, 第21回海講論文集, 65-71.
- 49) 土屋義人・安田孝志 (1978) : 逓減せつ動法による擬 Stokes 波理論, 第25回海講論文集, 6-
9.
- 50) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda (1981) : A new approach to Stokes wave theory,
Bull. Disaster Prevention Res. Inst., Kyoto Univ., 31, 17-34.
- 51) Yamada, H. and T. Shiotani (1968) : On the highest water waves of permanent
type, Bull. Disaster Prevention Res. Inst., Kyoto Univ., 18, 1-22.
- 52) 安田孝志 (1978) : 浅海における有限振幅波理論とその適用に関する研究, 京都大学学位論文,
145 p.