

水資源の最適管理

—DCL手法による貯水池操作—

竹 内 邦 良

1. はじめに

水資源とは、降水、河川水、湖沼水、地下水等の総称である。水資源は再生可能な資源の代表的なものであるが、三つの大厄を伴っている。too much, too little and too dirty がそれぞれある。この三悪を律するのが水資源管理であり、それぞれ治水、利水、環境保全とよばれる。

水資源管理には政策・制度・組織整備があり、それにもとづいた基本計画、施設設計、施工、運用などがある。またそれに付随した管理機構整備もある。然しながらここで取り扱うのは水資源管理のための既設施設、それも貯水池の管理方法に限った問題である。したがって水資源管理という総合的課題にとっては限られた一側面にすぎないが、市民生活に直接影響を持つ、最も実面的な側面であり、既設設備を生かすも殺すも運用次第という意味で、極めて重要な問題である。

最適の定義

最適問題は最適が定義されてはじめて特定されるものであるが、水資源管理問題では最適の定義が最も難しい。良く最適ということはあり得ないと言われるのは、何が最適かを一般的に定義することは出来ないという現実を表現したものである。最適評価規準の dimension としては、どの時点で、誰にとって、何に関して (when, who, what) の少なくとも三つの座標軸を考えねばならない。またそのそれぞれの要素は vector 量である。すなわち価値体系は高次の vector space をなしており、特定の評価規準はその中の一点を指定したものにすぎない。したがってある点に関して最適であるからと言って、他の点に関しては一般に最適にはならない。

評価 vector の各要素の具体的内容を挙げる。

when : 文字通り評価時点のこと。治水事業の改修途上における安全性評価は、ともすれば省略されがちであるが、これは評価時点を完成時にすることの容易さによるもので、大きな失策をもたらしかねない。用水型産業の再配置とか、水源地の開発、あるいは海外技術協力の効果など大きな計画については、何年先の効果を見るかで大いに評価が違ってくる。

who : 誰が犠牲を払い、誰が便益を享受するかということ。国や自治体の場合でもどの範囲の納税者か。受益者には直接受益者もあれば間接受益者もいる。また評価時点により、受益者は異ってくる。犠牲には納税、徴収、土地を追われ、職を失うなどの他、自然環境の破壊、質の低下のように全市民、後世代が該当者になる場合も多い。

what : 水資源管理の目標そのものであり、経済効率の向上、環境保全、社会厚生 of 向上、安全性などがこれに当たる。安全性を評価する場合には、システムが正常に機能する確率、すなわち狭義の安全性(度)と、一旦正常機能が停止した場合の悪影響の回避力、対応能力、回復力など(総称してresilience という)の両方を考えねばならない。これに対しともすれば異常時の影響や正常への復帰力などは無視されがちであるが、これも安易さの故である。後者については、異常時のシステム管理を取り上げて risk management と呼ばれる。例えば超過渇水、超過洪水を想定した計画、fail safe な design などがこれに当る。

以上のように計画案、設計管理案等を評価するときは経済性、社会性、環境保全、安全性などを見なくてはならないと同時に、いつの時点での、誰にとつてのということとその評価が全く異つたものとなることを承知していなくてはならない。

我が国で考案・検討された各種の貯水池管理手法

本稿では既設の貯水池の利水管理を目的とした手法を紹介する。といつても貯水池の最適管理手法は数多く、枚挙にいとまがないので、複雑な現実の水資源システムに適用可能なものの例として筆者の発案になる DCL 手法に限って説明する。したがつてこれは文献 1)、2) に発表した論文の解説版である。ここではそこに掲載されていない simulation 結果も掲げ、解りやすいものにしたい。その前に主として我国における各種提案の概要を見ておく。

貯水池管理の方法には①利水に伴う(経済)評価関数を用いるものと、②評価関数はいらず需要を満足出来る割合やその確保確率を規準に考えるものがある。DCL は評価関数を用いるものであり、同じく筆者による渇水持続曲線(DDC)を用いる方法は評価関数を用いないものである。最適という限りはまず前者を考えるのが基本と考えられるので、とりあえず DCL を取り上げる。DDC については、文献 3)~5) を参照されたい。

最適化手法にも各種あるが、最も良く用いられるのが Bellman⁶⁾ の整備・完成になる Dynamic Programming (DP) 手法である。その欧米での応用については 5 章の参考文献に多少の説明を加えた。我が国では高棹⁷⁾ による洪水用貯水池の最適管理の研究への応用が草分けであろう。この中で高棹らは、各時点での予測ハイドログラフにもとづいて最適な洪水調節をしていく適応制御方式と、あらかじめ想定しておいた洪水パターンとそれに対する最適操作の中から、該当すると予想されるものを各時点で選びながらいく型紙方式、という 2 つの考えを打ち出している。高棹・池淵・小尻⁸⁾ はこの適応制御方式の考え方を利水に応用したもので、その unique な点は、考慮期間内の最低給水率(給水量/需要量)および最低水質(目標水質/実水質)を最大にするという minimax 問題を DP で解く方式を提案している点である。彼等はさらに 9) において最低給水率、最低水質の最大化ではなく、それ等がすべての時点で許容水準を上廻る確率を最大にする、という目標設定にも発展させている。これらはいずれも確定的 DP を用いて解かれているが、後者は確率 DP と同じ概念の解を与える点

で独創的な手法である。

神田らは型紙方式を利水問題に適用している^{10), 11)}。この方法は型紙渇水流況を渇水期の期間長と終了時点(d, t_d)とその間の最大累加不足量 V_d の三変数で表わし、それに応じた貯水池の最終水位低下速度 C と、その速度に達するまでの時間長 T の最適値 C_*, T_* をあらかじめ計算して用意しておき、現実には気象状況に応じた型紙渇水を選んで運用するというものである。操作方式を、ある時間内に一定水位低下速度にもっていくという形で考えている点がuniqueである。なお室田・神田は最適放流量 C_i^* を、初期貯水量 z_i^0 と、平均流入量 $\bar{q}_i$ の線型和とする一種のlinear decision ruleについて、その係数と貯水池リスポンスの関係を検討している^{12), 13)}。

この他にも関連した操作方法は多々あるが、最もorthodoxと言える、経済的評価関数を用いた例は我国には必ずしも多くない。中沢らが土木研究所で行なった研究¹⁴⁾は、経済評価関数を用いるとともに確率DPを応用した、数少ない例の一つである。この論文で紹介されている日本における渇水被害の計量の試みは興味深い。諸外国においても渇水被害の計量化は熱心に試みられているが、本稿のDCLの適用例で用いたもの(図-3)は1967年米国New Englandでの渇水被害をRussellら¹⁵⁾が計量したものにもとずいている。しかしながら多くの場合評価関数を特定することは困難であり、また全く評価関数を設定出来ない場合も少なくない。しかしながら、適当な評価関数を仮定して得られた解であっても、最終的なdecision makingの重要な参考になる。

2. DCLによる貯水池管理の考え方とモデル

DCLはDynamic Programming Coupled with Linear Programmingの略である。この手法は水資源の時間的配分にDPを、空間的配分(目的間配分)にLPを用いて、多段階決定問題にすぐれたDPと、電算機による高速解にすぐれたLPの、長所を組み合わせ、短所を補わせるものである。

なぜDPそのままではなく、LPと組み合わせねばならないかについては、DPの弱点であるcurse of dimensionality(次元の呪)と、計算時間について見てみなければならない。4章で取り上げる、アメリカ・ノースカロライナ州の例のように、貯水池が5つ、独立に考えねばならない流入量が2つ、それに、決めなければならない放流・分流・給水量が13ある場合には、それぞれの変数を5つのレベルで離散化して扱うとしても、各変数の各レベルの組み合わせの総数は $5^{5+2+13} (\approx 10^{13})$ である。現在の東大のスーパー・コンピュータは、200~600 MFLOPS($\times 10^6$ 回/sec)の演算ができるということであるが、それでも1回の最適組み合わせ発見のために 10^5 secのオーダーの時間がかかる。DPの計算ではこれを何度も繰返さねばならないのであるから、これだけでもう非現実的な方法ということになる。しかもこの程度の複雑さは決してめずらしいものではないし、各変数を5段階のレベルに離散化するというのは、ほとんど最低限の簡略化と言わねばならない。ここにDPとLPを結合させる必然性があるわけである。

貯水池水の価値

貯水池に単位量の水を貯留しておいた場合、将来得られるであろう利益（貯水価値）と、それを放流した場合得られる利益（利水価値）がわかれば、貯水池管理は容易である。放流した場合の利益が、貯水池水の価値を上廻れば放流するし、逆であれば放流せずに貯めておけば良い。

DCL手法はこの考え方に基づいて、貯水池に貯留されている水の価値を、各貯水池の貯水状況別に算定しておき、その価値を規準に放流量・給水制限率等を決定するというものである。まず、貯水池水の価値という考え方から説明をはじめ。

貯水池の水の価値というのは必ずしも簡単な概念ではない。現在の貯水量が S であるとき、1単位の水を現時点で使わず貯留しておいて、後に使った場合に予想される将来の期待利益、これを $\lambda_t(S)$ と書くことにする。ここに t は現時点を表わす。ここで、“現状からはじめて最適決定を繰り返したときに得られる将来の期待利益”という、確率DPの基本概念を導入すると、 $\lambda_t(S)dS$ は、現在の貯水量 S からはじめて、将来最適に貯水池を操作した場合に期待される総利益の現在価値、 $G_t(S)$ と、現在単位量使用した後残る貯水量 $(S-dS)$ からはじめて、将来最適に操作した場合の期待利益の現在価値 $G_t(S-dS)$ の差であらわされる。すなわち

$$\lambda_t(S) = \frac{dG_t(S)}{dS} \quad (1)$$

である。これが現時点で利水に供した場合に期待される利益に比較して、大きければ貯留しておくし、小さければ放流することになる。

通常一つのシステムに貯水池は複数存在し、各貯水池をどのように利用するかは治水効果、無効放流の最小化などを考える場合極めて重要である。したがって S は各貯水池の貯水量を表わすvector量 S であり、 $\lambda_t(S)$ 自身も各貯水池の貯水価値を要素とするベクトル関数 $\lambda_t(S)$ である。すなわち

$$\lambda_t(S) = (\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \dots, \lambda_{Mt}) \quad (2)$$

$$\lambda_{pt} = \lambda_{pt}(S_{pt}; S_{1t}, \dots, S_{p-1t}, S_{p+1t}, \dots, S_{Mt}) \quad (3)$$

ここに M は貯水池数、 S_p は貯水池 p の貯水量、と表わされ、貯水池 p の貯水価値は、貯水量 S_p のみによるのではなく、他のすべての貯水池の貯水量によると、考えねばならないことを示している。この場合(1)式は

$$\lambda_{pt} = \frac{\partial G_t(S)}{\partial S_{pt}}, \quad p = 1, \dots, M \quad (4)$$

と書き表わされる。

DCL手法は λ_{pt} を、各貯水池、各時点毎に、 $S_{1t}, \dots, S_{Mt}$ の関数として算定する方法に他ならない。

確率DPの定式化

貯水池管理では流入量が確率変数であり、また多くの場合水需要も確率変数である。しかもそれ等はいずれも多次元であり、 t 期($t, t+1$ 時点間)の流入量には確率変数ベクトル I_t 、水需要にも確率変数ベクトル D_t を用いなければならない。但しここでは簡単のため需要 D_t は、時間 t で決まっている定数パラメータ・ベクトルとして話を進める。

t 時点の状態変数が S_t, I_t であるとき、放流量をベクトル u_t としたときに被むる t 期の損失(直接損失)を $L_t(u_t; S_t, I_t)$ とする。この放流の結果、次の時期初頭の貯水量が、

$$S_{t+1} = T(u_t, S_t, I_t) \quad (5)$$

となるとすると、 S_{t+1} よりはじめて最適操作をした場合の $t+1$ 期以降の累加期待損失 $G_{t+1}(S_{t+1})$ がわかっていれば、放流量 u_t は最小値問題

$$\min_{u_t, S_{t+1}} \{ L_t(u_t; S_t, I_t) + G_{t+1}(S_{t+1}) \} \quad (6)$$

の解として求めることが出来る。この最小値を $f_t(S_t, I_t)$ と書き、 I_t の生起確率を $p_t(I_t)$ とすると、その期待値は

$$G_t(S_t) = \theta \cdot \sum_{I_t} p_t(I_t) \cdot f_t(S_t, I_t) \quad (7)$$

となる。ここに θ は時間的割引係数であり、1時間毎の割引率を r とすると $\theta = 1/(1+r)$ と表わされる。以上がこの問題に対する確率DP表現のあらすじである。ここでさらに、流入量の持続特性が無視出来ず、 t 期の流入量 I_t は $t-1$ 期の流入量 I_{t-1} に影響されることを考慮に入れなければならない場合には

(6)式参照

$$\left\{ \begin{array}{l} f_t(S_t, I_t) = \min_{u_t, S_{t+1}} \left\{ L_t(u_t; S_t, I_t) + G_{t+1}(S_{t+1}, I_{t+1}) \right\} \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_t(S_t, I_{t-1}) = \theta \cdot \sum_{I_t} p_t(I_t | I_{t-1}) \cdot f_t(S_t, I_t) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(u_t, S_{t+1}; S_t, I_t) \leq 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

としなければならない。

不等式(10)は最小値問題(8)に課せられた制約条件の一般形である。この中には第1に貯水量や流量が貯水池容量や水路の容量で制約されていること、第2には貯水量、放流量、取水量等の間の連続の方程式

(5), 第3には放流量 u_t , 次期の貯水量 S_{t+1} などに課せられた社会的要請にもとづく制約条件その他が含まれている。(8)式において S_{t+1} が決定変数のように扱われているが, これは後段で説明するようにDCL手法を特徴づけている, 他のDPと大きく異なる点である。

3. DCLモデルの解き方

上のDPにおいては, (8)式の最小値問題を, 様々な組み合わせの状態量 (S_t, I_t) について, 高速で解くことが出来なければ, 最適化手法として実用に供するとは言えない。そこで(8)および(10)をすべてpiecewise linearな関数で線形に書き直し, LPによりこの最適解を求めることにしたい。

部分変数を用いた非線形関数の折れ線近似

例えば損失関数の代表的な形式として

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq b \\ a(x-b)^2 & b \leq x \end{cases} \quad (11)$$

を考えてみる。ここに a, b は正の定数, x は不足量である。この曲線の $0 \leq x \leq 5b$ 区間を $(0, b)$, $(b, 3b)$, $(3b, 4b)$, $(4b, 5b)$ の4区間に分けて折れ線近似すると, 以下のように書き表わされる。

$$\begin{cases} x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} \\ y = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} + c_4 x^{(4)} \end{cases} \quad (12)$$

ここに $x^{(i)}$ は x の第 i 区間目の部分変数で,

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \begin{cases} x & 0 \leq x \leq b \\ b & b \leq x \leq 5b \end{cases} & x^{(2)} &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq b \\ x-b & b \leq x \leq 3b \\ 2b & 3b \leq x \leq 5b \end{cases} \\ x^{(3)} &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 3b \\ x-3b & 3b \leq x \leq 4b \\ b & 4b \leq x \end{cases} & x^{(4)} &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 4b \\ x-4b & 4b \leq x \leq 5b \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

である。また係数 c_i は部分変数 $x^{(i)}$ で表わされる部分の折れ線の傾きで,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0, \quad c_2 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2b} = 2ab \\ c_3 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{7}{2}b} = 5ab, \quad c_4 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{9}{2}b} = 7ab \end{array} \right. \quad (14)$$

である。ここに係数 c_i には、

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4 \quad (15)$$

なる関係にあるが、これは不足量 x が大きくなるにつれ、損失は加速的に増大するという意味であり、単位水量当りの損失は、不足の度合とともに大きくなることを示している。このような現象は限界効用逓減の法則 (law of diminishing marginal utility) と呼ばれ、現実経済でこの法則が成立している場合は数多くある。この条件下では次のような好ましい現象が生じる。すなわち、(15) のような条件を満足する折れ線近似の損失関数が複数個あって、それを正の加重で加えた関数を目標関数とする最小値問題を考えると、これをLPで解く場合に、必ず $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ の順で、前の変数が最大値に達してから次の変数が正の値を取ることになり、 $x^{(1)}, x^{(2)}$ がまだ最大値に達していないのに $x^{(3)}$ が正の値を取るような不都合は生じない。したがってLPの制約条件(10)の中には(13)式はすべてではなく、その定義域を示す

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x^{(1)} \leq b \\ 0 \leq x^{(2)} \leq 2b \\ 0 \leq x^{(3)} \leq b \\ 0 \leq x^{(4)} \leq b \end{array} \right. \quad (16)$$

だけを加えておけばよいことになる。このような条件の成立する関数を一般に convex function と呼ぶ。より厳密に表現すれば、関数 $g(x)$ が x に関して、 x のある範囲内で convex であるとは、その範囲内の任意の点 $x = x_1$ および x_2 たいして、

$$p g(x_1) + (1-p) g(x_2) \geq g(p x_1 + (1-p) x_2), \quad 0 < p < 1 \quad (17)$$

が成立するということである。ここに x はベクトルであっても同様である。このような convex function の折れ線近似を含むLPを convex LP と言うこともある。

不足水量ではなくて利水量（供給量）を考えても、供給量の増加に伴って損失は減少していくが、そ

の減少割合は供給量が多くなれば、だんだん減少していく。したがって、損失関数 L は利水量ベクトル u に関して convex である。ところが、累加損失関数 G は本質的に各時点での損失関数 L の和であるから、損失関数 L が利水量ベクトル u について convex であるときには、貯水量の期待累加損失関数 G も、貯水量 S について convex になっているはずである。この推論ははなはだ数学的厳密さに欠けているが、その具体的意味は貯水量が多いときほど、1 m³ 当りの貯水池水の価値は低いということであるから、現実には極めて正しいことである。したがって、関数 L も G も、それぞれの変数ベクトル u 、 S の各要素を部分変数の和であらわして折れ線近似し、その和を目標関数として LP を適用することが出来る。なおこのとき、制約条件式 $\Gamma(u_t, S_{t+1}; S_t, I_t) < 0$ の中に非線形不等式が含まれている場合には、これについても同様の線形近似をしておかねばならない。

ここで関数 G_t の折れ線近似については、もう少し具体的に示しておきたい。関数 G_t は、計算の各段階では(9)式により、離散化された S_t の様々な組み合わせに対して数値が与えられている。貯水池 p の貯水量を表わす変数 S_{pt} を、 K_p 個の部分変数の和であらわし、

$$S_{pt} = S_{pt}^{(1)} + S_{pt}^{(2)} + \dots + S_{pt}^{(K_p)}, \quad p = 1, \dots, M \quad (18)$$

$$0 \leq S_{pt}^{(k)} \leq S_p^k - S_p^{k-1}, \quad k = 1, \dots, K_p \quad (19)$$

ここに $S_p^0 = 0$ とする。また各折れ線の勾配——これを貯水量の累加損失係数とよぶ——を $\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ 、 $p = 1, \dots, M$ 、 $k = 1, \dots, K_p$ とすると、 G_t は、

$$\begin{aligned} \hat{G}_t(S_t) = & g_{ot} + \eta^{(1)} S^{(1)} + \dots + \eta^{(K_1)} S^{(K_1)} \\ & + \eta_{2t}^{(1)} S_{2t}^{(1)} + \dots + \eta_{2t}^{(K_2)} S_{2t}^{(K_2)} \\ & + \dots \\ & + \eta_{Mt}^{(1)} S_{Mt}^{(1)} + \dots + \eta_{Mt}^{(K_M)} S_{Mt}^{(K_M)} \end{aligned} \quad (20)$$

と近似的に表わすことが出来る。これから明らかなように $\eta_{pt}^{(k)}$ は(4)で与えられる真の偏微係数 λ_{pt} の第 k 区間での近似値 $\hat{\lambda}_{pt}$ に相当するものである。

ここで、折れ線近似に用いた部分変数ベクトルをあらためて u_t 、 S_t と書き、部分変数の係数を L_t については C_t 、 G_t については H_t 、 Γ_t については A_t と書くことにすると、線形化された(8)、(10)は以下のように書きあらわされる。

$$f_t(S_t, I_t) = \min_{u_t, S_{t+1}} \left[C_t \ H_{t+1} \right] \begin{bmatrix} u_t \\ S_{t+1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{subject to } \mathbf{A}_t \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{S}_{t+1} \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_t \quad (22)$$

ここに

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \left(n_{1t}^{(1)}, \dots, u_{1t}^{(J_1)}, u_{2t}^{(1)}, \dots, u_{2t}^{(J_2)}, u_{3t}^{(1)}, \dots, u_{Lt}^{(J_L)} \right) \\ \mathbf{S}_{t+1} = \left(S_{1t+1}^{(1)}, \dots, S_{1t+1}^{(K_1)}, S_{2t+1}^{(1)}, \dots, S_{2t+1}^{(K_2)}, S_{3t+1}^{(1)}, \dots, S_{Mt+1}^{(K_M)} \right) \\ \mathbf{H}_{t+1} = \left(\eta_{1t+1}^{(1)}, \dots, \eta_{1t+1}^{(K_1)}, \eta_{2t+1}^{(1)}, \dots, \eta_{2t+1}^{(K_2)}, \eta_{3t+1}^{(1)}, \dots, \eta_{Mt+1}^{(K_M)} \right) \end{cases} \quad (23)$$

L は決定変数の数である。なお、関数 G_{t+1} は

$$\hat{G}_{t+1}(\mathbf{S}_{t+1}) = g_{0t+1} + \mathbf{H}_{t+1} \cdot \mathbf{S}_{t+1} \quad (24)$$

と線形化されているが、(21)の最小値問題の中では、定数 g_{0t+1} は不用であるから、省かれている。

DCL 計算の進め方

DP の計算は、はじめ十分大きな整数 N に対し、期待累加損失 $G_{N+1} = 0$ すなわち $\mathbf{H}_{N+1} = 0$ を仮定し、これを境界条件として、後進型で計算を進める。離散化された状態量ベクトル $(\mathbf{S}_N, \mathbf{I}_N)$ の様々な組合わせに対する f_N が決まれば、(7)式より期待累加損失関数 G_N を折れ線近似することにより $\mathbf{H}_N$ が求まる。その $\mathbf{H}_N$ を用いて $t = N-1$ 段階の計算に移り、再び $(\mathbf{S}_{N-1}, \mathbf{I}_{N-1})$ の様々な組み合わせに対する f_{N-1} をもとめれば、それにもとづいて G_{N-1} 、つづいて $\mathbf{H}_{N-1}$ が計算され、 $t = N-2$ 段階に移る。計算は相続く 2 年の同季節の累加損失係数 $\mathbf{H}_T$ が相等しくなったとき、すなわち月別の操作ルールを計算しているときには、

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{t+12} \quad (25)$$

となった時点で終了する。

最後に線形化された関数 G_t の係数 $\eta_{pt}^{(k)}$ の決め方について述べる。式(4)、(20)から明らかにように

$$\eta_{pt}^{(k)} = \left. \frac{\partial G(\mathbf{S}_t)}{\partial S_{pt}} \right|_{S_{pt} \in (S_p^{k-1}, S_p^k)} \quad (26)$$

であるが、右辺の値は貯水池 p の貯水量 S_{pt} および、その他すべての貯水池の貯水量に依存するものである。したがってこの値を差分近似するためには、 S_{pt} が区間 (S_p^{k-1}, S_p^k) を変化する間の、 $S_{1t}, \dots, S_{p-1t}, S_{p+1t}, \dots, S_{Mt}$ を指定しなければならない。それでは p 以外の貯水池の貯水量として

は何を取るのが適当であろうか。一つの方法は、貯水池 p 以外の貯水池の貯水量は、 S_{pt} が第 k 区間 (S_p^{k-1}, S_p^k) にあることを条件とした期待状態にあると考える方法である。これは、貯水池群が最適に操作された場合には、各貯水池の貯水量配分は、季節によりほぼ同一のパターンを取るであろうという予想に基づくものである。 S_{pt} が区間 (S_p^{k-1}, S_p^k) に属する状態にある場合の貯水池 m の期待貯水量を $\bar{s}_{mt|pk}$ と書き、

$$\begin{cases} \bar{S}_{t|pk}^+ = (\bar{s}_{1t|pk}, \dots, \bar{s}_{p-1t|pk}, S_p^k, \bar{s}_{p+1t|pk}, \dots, \bar{s}_{Mt|pk}) \\ \bar{S}_{t|pk}^- = (\bar{s}_{1t|pk}, \dots, \bar{s}_{p-1t|pk}, S_p^{k-1}, \bar{s}_{p+1t|pk}, \dots, \bar{s}_{Mt|pk}) \end{cases} \quad (20)$$

と表わすことにすると、(20)は

$$\eta_{pt}^{(k)} = \{G_t(\bar{S}_{t|pk}^+) - G_t(\bar{S}_{t|pk}^-)\} / (S_p^k - S_p^{k-1}) \quad (21)$$

より近似計算することが出来る。

この計算方法の大きな利点は、計算時間が大巾に短縮出来ることである。すなわち(8)の最小値問題を、 (S_t, I_t) のすべての組み合わせについて解く必要はなく、貯水池 p の貯水量 S_{pt} が区間 (S_p^{k-1}, S_p^k) にあるときには、他の貯水池の貯水量としては $\bar{s}_{mt|pk}$ の場合についてのみ、すなわちベクトル $\bar{S}_t$ の各成分の組み合わせとしては、(21)式の $\bar{S}_{t|pk}^+, \bar{S}_{t|pk}^-$, $p = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, K_p$ についてのみ計算すれば良い。

反面この方法は、条件付期待貯水量 $\{\bar{s}_{mt|pk}\}$ を推定せねばならないという難問をかかえている。

最適操作をした場合貯水量配分は、最適操作が決まらないうちにわかるわけがない。したがって例えば図-1のflow chartに示すように、

- ①まず適当な操作ルールを仮定して、そのルールに従って操作された場合の貯水量状態 $(1)\bar{S}_t = (1)\{\bar{s}_{mt|pk}\}$ をsimulationにより求め、それを用いて第1回の最適計算を始めることにする。つづいて、
- ②この条件付期待貯水量の仮定をもとに、(21)の判定規準に従って最適操作 $(1)H_t = (1)\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ を求める。
- ③それを用いて貯水池群操作のsimulationを行ない、あらためて条件付期待貯水量 $(2)\bar{S}_t = (2)\{\bar{s}_{mt|pk}\}$ を求める。

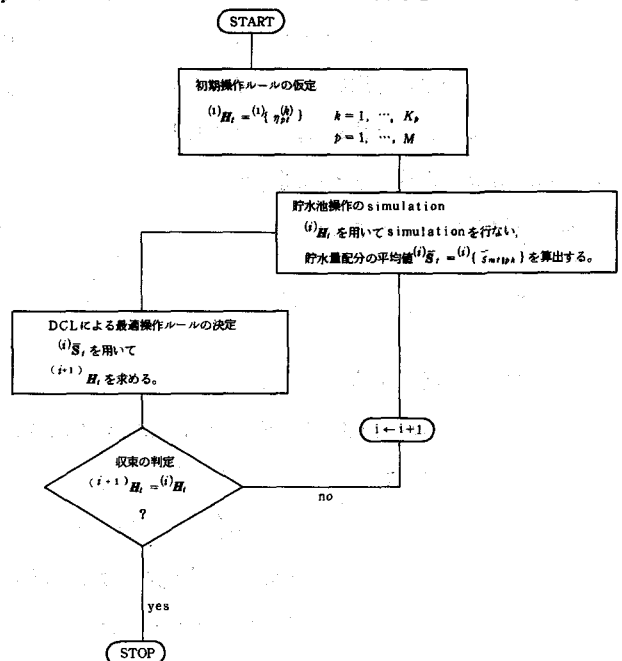


図-1 DCLの計算手順

④次にこの新しい条件付期待貯水量をもとに、再び最適操作 $^{(2)}H_t = ^{(2)}\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ をもとめる。

⑥計算は、新しく求められた操作ルール $^{(i)}H_t = ^{(i)}\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ が前回のもの $^{(i-1)}H_t = ^{(i-1)}\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ と等しくなったとき、収束し終了する。このとき、新しい $^{(i)}H_t$ を用いて simulation により求めた条件付期待貯水量 $^{(i)}\bar{S}_{pt} = ^{(i)}\{\bar{s}_{mt|pt}\}$ は、前回の $^{(i-1)}\bar{S}_{pt} = ^{(i-1)}\{\bar{s}_{mt|pt}\}$ と相等しくなっているはずである。これらは随分大変な計算過程に見えるが、その実 $\{\bar{s}_{mt|pt}\}$ が、解 $\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ に与える影響はさほど大きくはなく、4, 5回のDP-simulationの繰り返しで収束すると考えて良い。

なお②のLPの最小値問題を多数の状態変数 (S_t, I_t) の組合わせについて解く作業を効率的・高速で行うために、 (S_t, I_t) が変った場合でも変化するのは b_t のみであることに注目して、②の双対問題を作って双対LPで解く方法が工夫されているが、それについては文献2)を参照されたい。

4. アメリカ・ノースカロライナ州の広域利水管理問題への適用例

以下にDCL手法の具体的適用例を挙げ、その実用性を例証したい。そのためのケース・スタディ地域としては、十分複雑なシステムを含むものでなくてはならないが、アメリカ・ノースカロライナ州の広域利水システムは、十分この目的に叶うものである。

システムの概要と管理条件

図-2はノースカロライナ州のNorthern Piedmont Crescent (アパラチア山麓三ヶ月地帯)

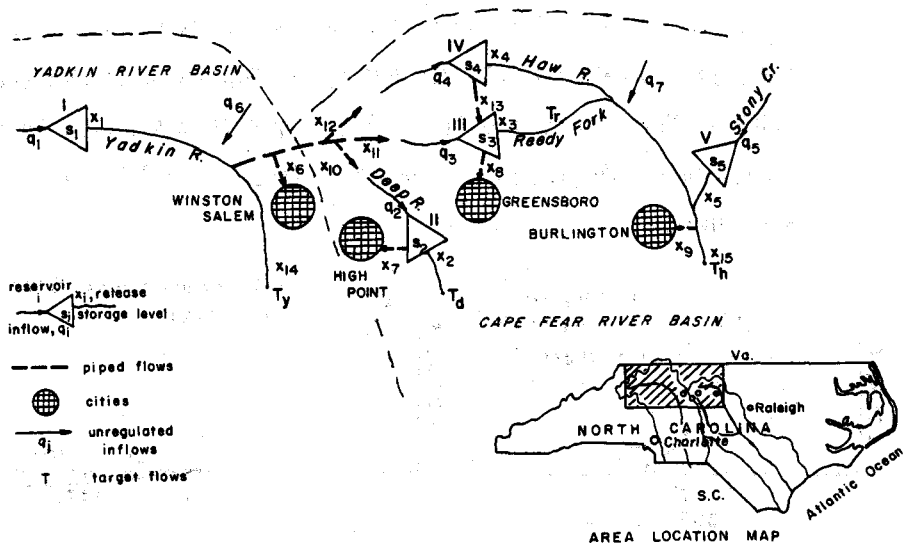


Fig. 2 A proposed regional water resource system for the North Carolina Piedmont Triad area.

とよばれる地域で、Yadkin River, Cape Fear River 両流域源頭に近い部分の広域水資源システムである。この図から流域面積の見当をつけることはむずかしいが、Winston-Salem 市と

Greensboro 市の距離は約 40 km であるから、都市の集中しているベルト地帯は約 80 km, T_y, T_d, T_h でしめされた、水量・水質の規準地点から上流の流域面積は 6~7000 km² である。域内人口は 1970 年時点で約 60 万人、西暦 2000 年には倍増すると考えられている。年平均降雨量は 1300 mm 程度、規準地点での合計年平均流出量は約 2.5 億 m³ (80 m³/s) である。雨は冬から春にかけて多く、秋はやや少ない。流出もそのパターンに対応している。計画は 2000 年時点のもので、西の Yadkin River 流域は流域面積も広く人口も少なくないことから、東の Cape Fear River 流域への大規模な送水が計画されている。検討の対象となる貯水池は、既設・計画合わせて大小 14 個あり、合計貯水量は約 5.5 億 m³、うち給水用は 2.5 億 m³ である。図には 5 つの貯水池が描かれているが、これは 14 個のものを管理上結合させ、5 グループに分けて検討する方針を取っているからである。流入量も図のように $q_1 \sim q_7$ を考慮しなくてはならないが、各大流域内では流域面積比で流量が決るものと考え、独立の確率変数としては、 $I_1 \sim I_2$ の 2 つを考えた。以上で状態変数は 5 + 2 の 7 個ということになる。次に決定変数としてはダム放流量 5、流域変更を伴う送水・分水が 4 ルート、4 市への都市給水それに 3 規準地点での流量 (1 つはダム放流量と同じ) と合計 15 あるが、規準地点流量は上流での放流量、配水量によって決まってくるので、独立な決定変数は 13 個である。現実的な複雑さを備えたシステムとしては、十分な例と考えられる。

貯水池の利用目的としては利水のみを考えた。これは、洪水調節容量はあらかじめ定められた量だけ確保しておくということである。利水では都市給水と、下流への放流のみが問題になっている。両目的の評価関数は図-3 a, b に示すとおりである。送水コストは $x_{10} \sim x_{12}$ が \$10/MG, x_{13} が \$5/MG である。なお 1 MG は約 3875 m³ であるからこれは非常に安い。都市用水の需要は西から 2.8, 1.6, 3.2, 2.2 m³/s, 4 都市合計で約 10 m³/s (85 万 m³/日), 下流への放流量は常時各時点での年平均の 50%, 3 地点合計で約 40 m³/s, 西から 28, 3, 8 m³/s を目標とした。時間単位は月とした。月毎の割引率には 0.5 % を用いた。

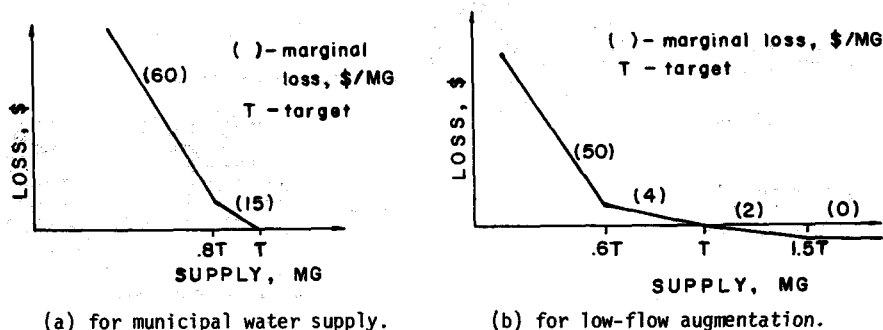


Fig. 3 Loss functions.

計算過程

まず決定変数 $x_1, \dots, x_{15}$ で部分変数の和であらわさねばならないものは、直接損失関数 L_i にふくまれていて、その損失関数を折れ線近似しなくてはならないものである。それ以外は部分変数に分け

る必要がない。すなわち、

- i) 部分変数に分ける必要のない変数: $x_1, x_4, x_5, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}$
- ii) 部分変数に分ける必要のある変数: $x_2, x_3, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{14}, x_{15}$

このうち x_2, x_{14}, x_{15} は損失関数図-3 bに対応するので4つの部分変数の和とし、他は図-3 aに対応するので2つの部分変数の和とする。

次に状態変数では、累加損失関数 G_t の折れ線近似の為に、各貯水量 $S_{1t}, \dots, S_{5t}$ を部分変数に分けねばならない。この計算では各々4つの部分変数の和で表わした。すなわち(18)式において $K_1 \sim K_5 = 4$ である。

部分変数ではないが、独立な流入量 I_{1t}, I_{2t} もそれぞれ5つのレベルを取るものとし、離散量化した。 I_1 によりYaskin River流域の q_1, q_6 が、 I_2 によりCape Fear River流域の $q_2 \sim q_5, q_7$ が決まるものとした。

制約条件は、各貯水池と下流への放流量に関する連続の式が7本、貯水池容量と、パイプ容量に関するものが5本と2本で計7本。それ以外はすべて、部分変数の導入に伴って必要になる(18)式に相当するもので、上限を持った部分変数の総数は、決定変数で18、貯水量で20、したがってこの問題のLP表示(22)式の A_t マトリックスは 52×54 という大きなものになる。 u_t は 34×1 、 S_{t+1} は 20×1 である。

計算は先にふれた双対simplex法を用い、図-1のflow chartに従って行なった。この結果1つのLP解を求めるのに、IBM360/75で平均わずか0.045 secであった。東大のスーパー・コンピュータであればおそらく1000倍以上の速度と考えられる。この位高速になれば G_t の線型近似は、 $G_t(S_t, I_t)$ のすべての組み合わせ、 $5^7 \approx 7.8 \times 10^4$ 個の値をすべて計算し、それに対して最小自乗法近似をして G_t としても、1段階の計算に1 secそこそこしかかからないということになる。したがって現在この程度の粗さの計算をおこなうのであれば、(20)、(23)式に導入した期待渇水量の仮定、および図-1のflow chartのような繰り返し計算は不要であろう。このことは逆に、この方法を用いれば、より高い精度、すなわちより細かい折れ線近似が可能になるということである。

図-4は期待貯水量の仮定を変えた収束計算の、収束状況を示したものである。4回の繰り返しで十分高い精度に達していることがわかる。

計算結果

得られた H_t すなわち $\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ 、 $p=1, \dots, 5$ 、 $k=1, \dots, 4$ はそのまま貯水池の操作ルールである。というのは、各時点での最適操作および水配分は、その時点での貯水量 S_t と流量 I_t それに $\{\eta_{pt}^{(k)}\}$

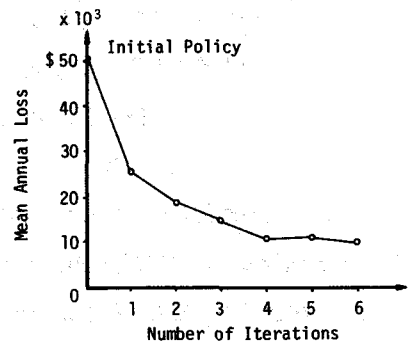


Fig. 4 Number of Iterations And Achievement of Optimality.

を最小値問題のLP(2), (2)に代入することにより直ちにもとめられるからである。

図-5は $\{\eta_{pt}^{(k)}\}$ のかわりに、その符号を変えたもの $\{-\eta_{pt}^{(k)}\}$ を用いて、

$$B_{pt} = -\eta_{pt}^{(1)} S_{pt}^{(1)} - \eta_{pt}^{(2)} S_{pt}^{(2)} - \dots - \eta_{pt}^{(K_p)} S_{pt}^{(K_p)} \quad (29)$$

を図示したものである。 B_{pt} は貯水池 p の、時間 t における、貯水池水 S_{pt} の将来の期待累加利益（被害軽減額）、すなわち貯水池水の価値を示している。3月、6月、9月、12月のもののみ示しているが、6月、9月が貯水池水の価値が高く、12月、3月が低いのは冬から春が雨期で秋が乾期であることに対応している。なお貯水量が満杯の場合の、合計約2.5億 m^3 の価値を平均値で見ると、一番低い12月で\$170,000、一番高い9月で\$420,000あるから、\$1=300円とみると、0.2~0.5円/ m^3 （\$2.7/MG~\$6.8/MG）となっている。また高い9月でも、1 m^3 当りの限界効率が高いのは貯水量が少ない場合、多くなると12月、3月と雨期とさほど変わらないことも読み取れる。貯水池2,3,4の価値が高く1,5が低いのは、前者の水量が不足すると流域間送水を要するからであろう。

最後にこのルール・カーブに従って実流量を用いて40年間simulationを行った結果を示す。図-6は月損失量で描いた結果である。non-hedging rule というのは貯水池に水がある限り必要なだけ放流するというルールで、将来のためにとっておくことをしない方式である。これルールに比べると最適化したものは大きな被害を大巾に軽減してくれ、年平均被害額で1/30になっている。

これは、確率的最適化のなみなみならぬ有効性を示していると同時に、かりに評価関数が設定しにくくあいまいな場合であっても、最適化の努力を忘れてはならないことを、意味していると言えよう。

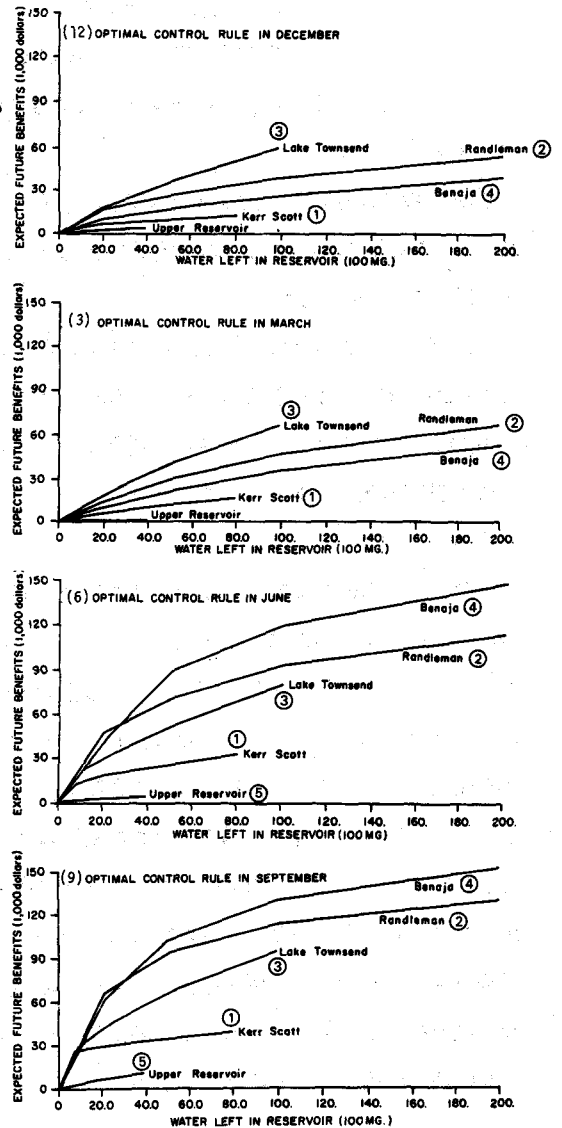


Fig. 5 Expected Future Benefits in Each Reservoir in Each Month Estimated by DCL Method.

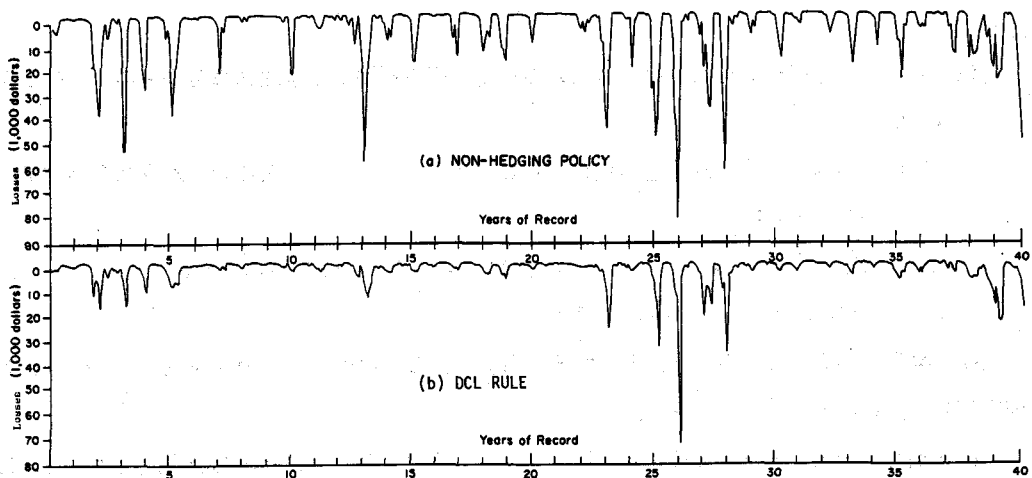


Fig. 6 Simulated monthly losses of system under alternative policies.

参 考 文 献

水資源の計画・管理の分野には星の数ほどの論文と提案があり、ここに取り上げたDCLおよび1.で概観した日本のものは、その一例にすぎない。文献紹介は16), 17)にくわしいが、ここでは以下に貯水池操作に限った、またとくに unique な提案を含むものだけに絞っていくつか取り上げておく。なお貯水池理論, 流量 simulation などは、ここに挙げないが貯水池操作の理論と極めて関連の深い分野であり、目を通す必要がある。

貯水池操作にはじめてDPを用いたのは18)の著者 Littleで、Hoover Damの発電計画に適用された。その後この手法は19)の Hall and Buras 等により大いに発展した。確率DPによる最適操作の方法としては20)の Schweig and Cole の論文が最も具体的でわかりやすい。DPを用いると計算時間が膨大になるいわゆる curse of dimensionality を避けるために、沢山の方法が考案されているが、21)の Young によるMC DPは、モンテカルロ simulation と、確定的DPを合体させたもの、Chow らによる23)のDDDPは、DPの発案者である Bellman が、計算の効率化のために当初から提案していた successive approximation 法を Larson が22)の state increment DP に改良したものを基本にしたものである。あらかじめ最適に近いと考えられるルートの周辺で最適化を進め、真の最適解に近づこうとするもので、状態変数を決めると決定変数も決ってしまうような場合 (invertible system の場合) に顕著な効果を示す。なお本稿で紹介したDCL手法は、以上のいずれも適用できないほど複雑な現実のシステムに対して、考案されたものである。

- 1) Takeuchi, K. and D. H. Moreau : Optimal Control of Multiunit Interbasin Water Resource Systems, Water Resour. Res. , 10(3) pp. 401-414, June 1974.
- 2) 竹内邦良：貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適操作手法, 土木学会論文報告集, No. 222, pp. 93-103, 1974.
- 3) 吉川・竹内：渇水特続曲線の性質とその応用, 土木学会論文報告集, No. 234, pp. 61-71,

1979.

- 4) 竹内・吉川：渇水持続曲線法実用化のための検討と応用例第23回水理講演会論文集, pp. 257 - 262, 1979.
- 5) 竹内・富田・伊藤：給水用貯水池のためのDDCルール・カーブ, 第28回水理講演会論文集, 2月, pp. 21 - 26, 1984.
- 6) Bellman, R. E. and R. E. Dreyfus : Applied Dynamic Programming, (Princeton, N. J. : Princeton Univ. Press, 1962)
- 7) 高棹・瀬野：ダム群による洪水調節に関する研究(1), DPの利用とその問題点, 京大防災研究年報第13号B, pp. 83 - 103, 1970.
- 8) 高棹・池淵・小尻：水量からみたダム群のシステム設計に関するDP論的研究, 土木学会論文報告集, No. 241, pp. 39 - 50, 1975.
- 9) 高棹・池淵・小尻：ダム貯水池における利水時のオンライン・リアルタイム操作, 第26回水理講演会論文集, 2月, pp. 379 - 385, 1982.
- 10) 神田・畑：渇水期間における利水用貯水池の実時間操作方法, 第25回水理講演会論文集, 2月, pp. 285 - 292, 1981.
- 11) 神田・岡本：渇水流況の分類 利水用貯水池の管理を対象として, 第29回水理講演論文集, 2月, pp. 299 - 304, 1985.
- 12) 室田・神田：利水用単一貯水池の最適操作計画に関する方法論, 土木学会論文報告集, 2月, pp. 83 - 92, 1976.
- 13) 室田・神田：水量と供給信頼度を評価基準とする貯水池の流量調整機能の解析, 土木学会論文報告集, 6月, pp. 47 - 62, 1976.
- 14) 中沢・今村・石崎・中村：渇水時の水管理に関する計画学的研究, 土木研究所資料, No. 1508, 1975.
- 15) Russell, C. S., D. G. Arey, and R. W. Kates, Drought and Water Supply, (Baltimore, Md. : Johns Hopkins Press, 1970), pp. 130 - 134.
- 16) 池淵周一：水資源開発と渇水コントロール, 水工学シリーズ80-A-5, pp. A-5-1-A-5-29, 1980.
- 17) 土木学会関西支部：水資源システムの分析・計画・管理および保全に関する最近の技術, 第4編 ダム貯水池の効果的な操作・運用, pp. 115 - 154, 1983.
- 18) Little, J. D. C. : The use of storage water in a hydroelectric system, Oper. Res., 3, 187, 1955.
- 19) Hall, W. A. and N. Buras : The dynamic programming approach to water resources development, J. Geophys. Res., 66(2), 517, 1961.

- 20) Schweig, Z. and J. A. Cole : Optimal control of linked reservoirs, *Water Resour. Res.* , 4(3), 479, 1968.
- 21) Young, G. K. , Jr. : Finding reservoir operating rules, *J. Hydraul. Div. Amer. Soc. Civil Eng.* , 93 (HY 6), 297, 1967.
- 22) Larson, R. E. : State Increment Dynamic Programming, (New York : American Elsevier Publishing Co. Inc. , 1968)
- 23) Heidari, Manoutchehr, Ven Te Chow, P. V. Kokotovic and D. D. Meredith : Discrete Differential Dynamic Programming Approach Water Resources Systems Optimization, *Water Resour.* 7(2), April 1971.