

開水路流れの3次元構造について

玉井 信行

1. はじめに

開水路流れの3次元構造が水理学の分野で話題に上ってきたのは最近のことである。開水路流れを取扱う河川・発電・農業水利技術者の主たる関心は、河道の設計であり、発電のための水路系の設計であり、灌漑水路の設計であった。このような実務の要求に応えるためには、水路の長い距離にわたる流れの速度と水深あるいは圧力の変化を知ることが第一義的に重要であり、1次元解析が伝統的に用いられ、また高いレベルに達している。勿論、従来の水理学においても限定された範囲で3次元流れは取扱われてきた。2次流の概念は100年以上よりあり、わん曲部、水路分岐部、隅角部の2次流などが代表的なものである。しかしながら、2次流を含む流れは非常に複雑であるため、2次流と主流との相互干渉はないとか、2次流が完全に発達した段階のみを考える、とかの理想化が必要であった。

計測技術の進歩と相まって、最近では流れの2次元性及び3次元的な様相が段々と明らかになってきている¹⁾。多点計測法及び流れの可視化法により、乱れの発生過程及び複雑な境界下での流れの実態が明らかになりつつある。さらに、電子計算機の能力の向上に伴って、3次元的なシミュレーションも行われるようになってきた。こうした背景に立ち、流れの3次元性の最近の議論は、最終的に均衡した状態のみでなく、流れの方向への発達・減衰過程を含めて議論を行い、局所的な観点に止まらず流れの場全体の3次元構造に言及しているのが特徴と言える。この講義集においては、開水路の3次元流れの例として直線水路の縦渦、わん曲部の流れを取上げ、乱流モデルと併せて論議することとする。

1.1 解析の方法論

解析の方向性については次の2つに分類できる。

- 1) 流体力学的接近法、あるいは真理探求型接近法
- 2) 工学的接近法、あるいは問題解決型接近法

流体力学的接近法では、現象の背後に潜む真理の探求が最も重要である。2次流を生み出す原因は何か、を探ろうとする研究はこれに分類されるであろう。工学的な方法においては、与えられた時間内に、与えられた課題に対して、経済性も考慮した上での最適解を求めようとする。ここに於ては、本質の解明は次の段階に廻しても、眼前の設計に有用な指針を得ることが求められることもある。

乱流の中には様々なスケールの組織的構造があり、その一番小さなものは滑らかな固体壁付近のバーストである。また、断面全体にわたる2次流による循環が最大のものと考えられ、これらの間の関係を

微視的な観点から追求するのは流体力学的な接近法の例である。しかし、粗面上におけるバースト現象の実態であるとか、バーストと水深規模の運動との関連などは現時点では不明瞭であるので、この講義では力点を後者の工学的接近法に置いて議論を進める。

解析の技法としては

- 1) 解析的（理論的）手法
- 2) 物理的（水理的）実験による手法
- 3) 数学的（数值的）モデルによる手法

に類別できる。ここでは実験および野外観測により観察された結果を示しつつ、理論的研究によりその本質が解明されたと考えられる現象については理論の概要を述べる。最後の章では、最近進歩してきたシミュレーション手法として、乱流モデルの考え方と適用例について述べる。

1.2 2次流の分類

プラントルは2次流を次の2種類に分類した²⁾。第1種の2次流は強い2次流とも言われ、主流自体の偏差が力の場所的な分布に歪みを与え、2次流を発生させるものである。図-1にこれらの例を示す。

わん曲部では水面付近の速い流れと底面付近の遅い流れに対しては半径方向の遠心力が異なり、螺旋流が生ずる。物体の前面では流れが停止することにより圧力の分布が変化し、渦糸の伸長が生ずる。

第2種の2次流は弱い2次流とも言われ、壁面付近のレイノルズ応力の不均質な分布により生ずる。したがって、この種の2次流は層流においては生じないことになる。図-2に示される隅角部の流れ、直線水路の縦渦は第2種の2次流の例であり、壁面に沿う方向には主流は変化しない。

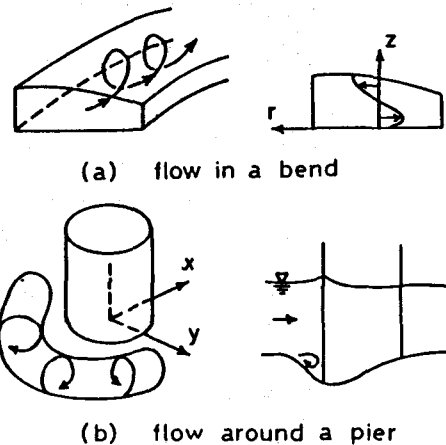


図-1 第1種の2次流の例

2. 直線水路における縦渦

2.1 現象論的特徴

直線水路における流れの水面の縦すじに着目し、交互に回転方向が変化する縦渦との関係を視覚的に具体的に示したのは木下³⁾が最初であると思われる。洪水時の航測写真から水面の泡の動きを立体視することにより流速分布を知る方法は、彼により多くの日本の河川に適用された。縦すじの存在と共に、泡の集まる位置の速度は速く、水面が直接見える位置の速度は遅いことが報告された。図-3に示す写真は、直線の

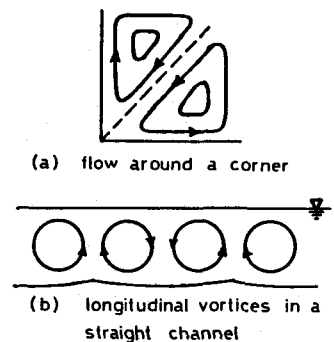


図-2 第2種の2次流の例

実験水路に水を流し、水面に散布したアルミニウム粉末の分布を示すものである。黒く見える位置は上昇する流れにより粉末が傍らに押しやられた箇所である。粉末は大局的に見れば1つの“すじ”となっているが、細部を見ると非常に不規則な形をしている。これは流れが乱流であり、長期的に眺めた一定の運動の上に、時々刻々変動する成分が重なっているためと考えられ、河川における木下の観測も同様な結果を示している。

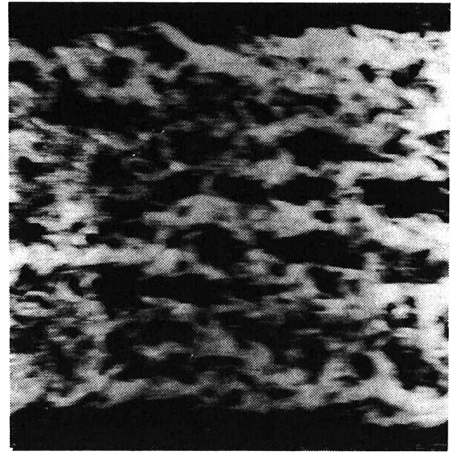


図-3 直線水路の流れの水面に生じたアルミニウム粉末の模様

図-3は水面に現われた模様であるが、流れの中の特徴はどのようなものであろうか。図-4は水路横断方向の速度変化を示すものであり、水深の約2倍の波長でこれが緩やかに波打っていることを示す。この図は長い時間にわたって平均した結果を示しており、断面内の瞬間的な速度はこの値の周りで変動している。水深の2倍の波長で現象が変化するのは水深規模の循環流が対になって存在しているためであると考えられ、この循環流は軸が流れの方向（縦方向）と一致しているので縦渦とよばれる。縦渦によって惹き起される2次流が鉛直上向きの箇所では、底面付近の遅い流体塊が水面に向かって輸送されるので、主流が平均より遅くなる。左右から流れが集まり、2次流が下降する箇所では、収束する流質を下流に流すために主流が平均値より速くなると考えられる。主流の横断方向の変化は、水表面においては平均値の10%を超える例も見られる³⁾。実験室における詳細な流れの追跡も、主として可視化手法を用いて行われている^{4),5)}。

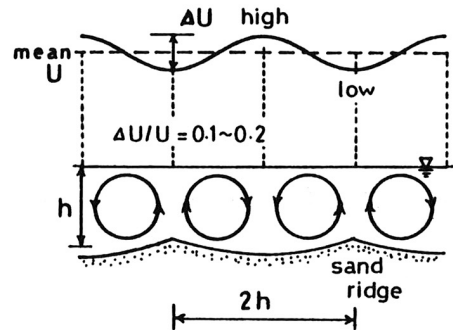


図-4 主流の横断方向分布と縦渦の概念図

図-5には浮遊土砂濃度の分布を概念的に示す。これは実験水路での観測の結果⁶⁾を模式的に示すもので、2次流が上昇する位置では河床付近の高濃度が水面へ向って運ばれ、土砂濃度が全水深にわたって高くなっている。

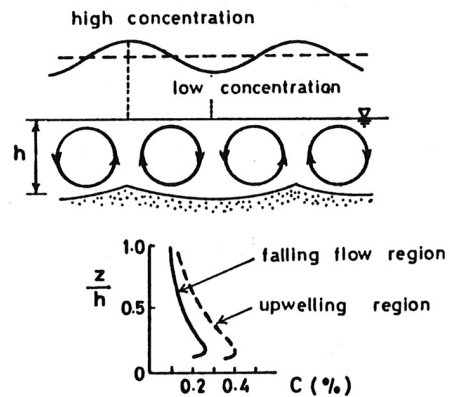


図-5 浮遊土砂濃度の横断及び鉛直分布の概念図

2.2 循環セルの大きさ

直線水路の流れにおいても、断面内に水深規模の循環流れが存在することが多くの観測結果より推測されていることは、前節において見た通りである。この節では安定論に基づいて、この循環セルの大きさを解析した結果を紹介する。林・山田⁷⁾および池田⁸⁾は断面内の渦度分布を論ずることにより縦渦のスケールを論じたが、これらの解析では主流と2次流の相関について言及できない。縦渦流れでは主流速が横断方向に波状性を示すので、ここでは黒木・岸⁹⁾の方法を基に説明する。

図-6に示す座標系と記号を用いて、直線の幅広い長方形断面水路の流れを考える。レイノルズ方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \bar{\tau}_{ij} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j - \rho \overline{u_i u_j} \} \quad (1)$$

ここに、 $\bar{u}_i$ と u_i' はそれぞれ i 方向の平均流速と変動流速、 F_i は外力、 $\bar{\tau}_{ij}$ は粘性せん断応力である。添字については和の慣用記法を用いている。連続の式は平均値、および変動成分に対して次式で示される。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、縦渦の解析に適したように次の変形を行う。

$$\bar{u}_i = U_i + \epsilon u_i \quad (3)$$

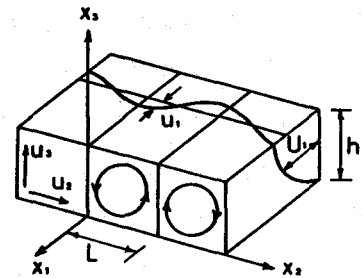


図-6 座標系と流れの模式図

式(3)は時間平均値 $\bar{u}_i$ を主流成分 U_i と2次流の成分 u_i に分離するものである。 ϵ は1より十分に小さい、形式上の係数である。

さらに、せん断応力も主流に起因するもの T_{ij} と2次流に起因するもの τ_{ij} の和で記述する。

$$\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i u_j} = T_{ij} + \epsilon \tau_{ij} \quad (4)$$

式(3)、(4)を式(1)、(2)に代入し、 ϵ のオーダーに従って整理すると、主流と2次流に対する基礎方程式を別々に導くことができる。主流は2次元的な等流と考える。すなわち、 $U_1 = U_1(x_3)$ 、 $U_2 = U_3 = 0$ である。主流に対する基礎式は次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = g S + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \end{array} \right. \quad (5 \cdot 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right. \quad (5 \cdot 2)$$

ここに、 S は水路床勾配、 g は重力加速度である。式(5・1)は等流の条件を示し、式(5・2)は圧力分布を与える。2次流に対する基礎式は次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_3 \frac{dU_1}{dx_3} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \right) \end{array} \right. \quad (6 \cdot 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\tau_{33} - \tau_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \tau_{23} \right] \end{array} \right. \quad (6 \cdot 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right. \quad (6 \cdot 3)$$

式(6)を解くためには、右辺の応力項について実験結果を導入する必要がある。2次流による直応力成分については、隅角部の2次流に関する Perkins¹⁰⁾の測定結果を用いる。

$$\tau_{33} - \tau_{22} = \alpha \tau_{13}, \quad \alpha = 1.0 \quad (7)$$

他の応力項については渦動粘性係数を用いて表現することとする。すなわち、

$$\tau_{ij} = \rho (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

ここに、 $\nu_t = \kappa U_* h / 6 = \text{const.}$ は水深平均の渦動粘性係数、 κ はカルマン定数、 U_* は断面平均の摩擦速度、 h は水深である。

さらに、2次流の流れ関数 ψ を導入して解析を進める。

$$u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (9)$$

式(6・1)，(6・2)の無次元形は次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} - \frac{1}{\hat{R}} \nabla^2 \hat{u} = \frac{d\hat{U}}{d\hat{z}} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \end{array} \right. \quad (10 \cdot 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \nabla^2 \hat{\psi} + \frac{1}{\hat{R}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right)^2 \hat{\psi} = \frac{\alpha}{\hat{R}} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{y} \partial \hat{z}^2} \end{array} \right. \quad (10 \cdot 2)$$

ここに,

$$\begin{aligned}\hat{y} &= x_2/h, \hat{z} = x_3/h, \hat{u} = u_1/U_*, \hat{\psi} = \psi/U_*h, \hat{U} = U_1/U_* \\ \hat{t} &= tU_*/h, \hat{R} = U_*h/\nu_t, \nabla^2 = \partial^2/\partial \hat{y}^2 + \partial^2/\partial \hat{z}^2\end{aligned}\quad (11)$$

主流の鉛直分布は式(5・1)により与えられ

$$\frac{d\hat{U}}{d\hat{z}} = \hat{R}(1 - \hat{z}) \quad (12)$$

となる。また、式10の解は次の形で与えられる。

$$\begin{cases} \hat{u} = u_0(\hat{z}) \cos k\hat{y} \cdot \exp(\sigma \hat{t}) \end{cases} \quad (13 \cdot 1)$$

$$\begin{cases} \hat{\psi} = \psi_0(\hat{z}) \sin k\hat{y} \cdot \exp(\sigma \hat{t}) \end{cases} \quad (13 \cdot 2)$$

ここに、 $k = \pi h/L$ は無次元波数、 L は縦渦の横断面内の大きさを示す代表値、 σ は無次元増幅率である。 $u_0(\hat{z})$ 、 $\psi_0(\hat{z})$ は $\hat{u}$ 、 $\hat{\psi}$ の振幅の鉛直分布を示す。

縦渦が発達するのは $\sigma > 0$ の場合であり、水深規模の循環が存在する k の範囲が次のように求められた⁹⁾。

$$1.63 \leq k \leq 5.45, \quad \text{すなわち} \quad 0.58 \leq L/h \leq 1.93 \quad (14)$$

理論上は水深の $1/2$, $1/3$ という高い波数の循環流も存在し得るが、観測されている事実から推測するに、これらは主要な成分としては発達しないと考えられる。さらに、擾乱の増幅率が最大となる波数 k_m はほぼ π に等しく、卓越する縦渦の横幅は次式で与えられることになる。

$$L = \pi h/k_m \simeq h \quad (15)$$

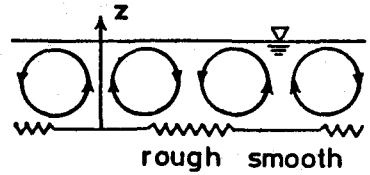
したがって、縦渦の横断方向の波長は水深の2倍となることが結論された。

2.3 定常な2次流に関する解析

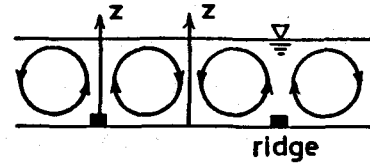
ここでは平衡状態にまで発達した、定常的な2次流の流速場の解析について述べる。図-3に示されるように、縦渦内部の流れは偶然的、間欠的な特徴を持っている。したがって、単純な直線水路で長時間の計測を行っても、縦渦が生じている時間のみを計測することはできず、縦渦の特徴は一般の乱れの中に埋没してしまう。縦渦の強さを増大させ、かつほぼ定常的に縦渦を発生させるために鱗状の底面を用いた例もある¹¹⁾が、ここでは流れの内部の点計測も併せて行われている例を図-7に示す^{12),13)}。図-7(a)は粗面と滑面の帯を横断方向に交互に並べたものであり、粗面の部分で渦動粘性係数が大きく、下降流が見られる。図-7(b)は水深の2倍の間隔で流れの方向に棧を付けたものであり、隣り合う棧の

中間部で下降流が生ずる。図-7(b)の場合には水中の1点と壁面との距離は槽の中央部で大きく、ここで渦動粘性係数が大きくなると考えれば、図-7の(a),(b)の両者で見られる現象は斉合する。

2次流の解析に用いられる基礎方程式は、式(5), (6)の中で時間に関する項を除いたものである。レイノルズ応力の成分は次のように表わされると考える。



(a)



(b)

図-7 安定な強い縦渦を得るための実験法の例

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{13} + \tau_{13} = \rho (\epsilon_y + \nu) \frac{\partial}{\partial x_3} (U_1 + u_1) \\ \tau_{12} = \rho (\epsilon_y + \nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \tau_{23} = \rho (\epsilon_z + \nu) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \rho (\epsilon_y + \nu) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{array} \right. \quad (16.1)$$

$$(16.2)$$

$$(16.3)$$

ここに、

$$\epsilon_z = \epsilon_0 \left(1 + \beta \cos \frac{\pi x_2}{L} \right), \quad \epsilon_y = r \epsilon_z, \quad \epsilon_0 = \kappa U_* x_3 \left(1 - \frac{x_3}{h} \right) \quad (17)$$

式(16), (17)において ν は動粘性係数、 ρ は流体の密度、 κ はカルマン定数、 β は微小な正定数、 r は1より大きな定数である。また、 $dU_1/dx_3 = U_*^2 (1 - x_3/h) / (\epsilon_z + \nu)$ であり、レイノルズ応力については式(7)が成立するものとする。 $\nu/U_* h = 0.002$, $L/h = 1$, $\alpha = 1.0$, $r = 1.5$, $\delta/h = 0.001$ に対して解い

た結果を図-8に実線で示す¹⁴⁾。 δ は対数則を適用する際の仮想的な底の位置である。図-8の破線はダクト内の空気流における中川ら¹²⁾の実験結果を示す。理論計算により求められた結果は β に依存するので、絶対値は実験結果に一致するように β の値を定めている。実験における観測値と理論値はすべての項目につ

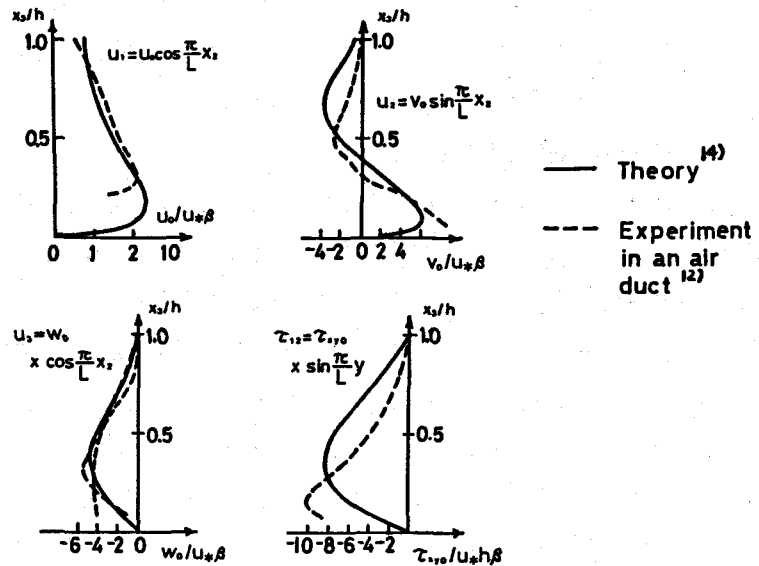


図-8 定常的な2次流の流れの場

き比較的良好一致しており、上昇流と下降流の生ずる位置も実験結果とよく一致している。また、 r の値は2次流の予測結果が実験結果と一番よく一致するように選定した結果が $r = 1.5$ であり、中川ら¹²⁾が指摘しているように、この値は循環セル内の流れを定めるのに重要な働きをしている。

3. わん曲水路の流れ

蛇行流路（連続的なわん曲流路）は河川においてはよく見られる平面形状である。わん曲部は治水・利水の両面において河川技術者の興味を古くから惹いてきたので、多くの研究がある。しかし、従来の研究の多くは単独わん曲における、完全発達域に関するものであった^{15)~18)}。単独わん曲における水深平均の主流速の変化は、特性曲線法を用いて解析された¹⁹⁾。

蛇行流路における研究は実験および理論の両面から行われている。初期の実験は円弧と直線部を組み合わせた水路で行われた^{20), 21)}。平衡河床における実験は、蛇行流路曲線²²⁾および円弧と直線部とを組み合わせた水路²³⁾で行われている。最近の理論では、わん曲水路の中心線形状がLangbeinとLeopold²⁴⁾によって定式化された、いわゆる蛇行流路曲線で表わされるとしている。この結果を用いたのはEngelund²⁵⁾で、摂動法の1次解を得た。この定式化の改良を行い、2次解までが得られている²⁶⁾。わん曲部の流れは蛇行の発達論の見地からも解析されている^{27), 28)}。

これまでに述べたものは水深平均流速を対象としており、いわば2次元理論である。蛇行流路における流れは近年種々の方向から研究が進められている。数値計算については次章に述べることにし、ここでは他の観点からの研究に簡単に触れる。Gottlieb²⁹⁾は長方形断面水路の蛇行流を線形化して解き、緩やかな蛇行流路に対して3次元流況を求めている。長谷川³⁰⁾は交互砂洲上の浅水流の線形方程式を重み付き残差法を用いて解き、砂洲の最高位置の出現位置およびその移動性について論じた。森・岸^{31), 32)}は完全発達域における主流と2次流の相関、およびそれと横断河床形状との関係を論じた。池谷・玉井³³⁾は運動量式の主要な非線形項を含んだ解析を試みた。

3.1 長方形断面の蛇行水路における流れ

実験が行われた水路は単位のわん曲を10個連ねたもので、その2単位を図-9に示す²¹⁾。水路は円弧と直線とで構成されているが、蛇行流路曲線とも十分に一致することが図-9に示されている。蛇行部平均水深は2.93 cm、フルード数は0.42で実験が行われた。

図-10は主流速（水路中心線に平行な速度成分）の鉛直分布が流下方向にどのように変化するかを示したものであり、断面S0とS1は円弧を結ぶ直線水路の midpoint であり、他の断面は円弧入口からの中心角の大きさで呼ぶ。主流速の最大値は水面下に現われ、かつその位置はかなり深く、“樽型”の分布を示すのが特徴である^{20), 21)}。この樽型の流速分布はわん曲部への入口付近では外岸寄りに現われ、流下に従がい出現位置が内岸寄りに移動する。そして次のわん曲部への出口付近では内岸付近に出現することになる。

流れの中の各位置での流向は絹糸を用いたタフト法によって測定した。横断方向の流速は、流速ベクトルに方向余弦を乗じて算出された。図-11に2次

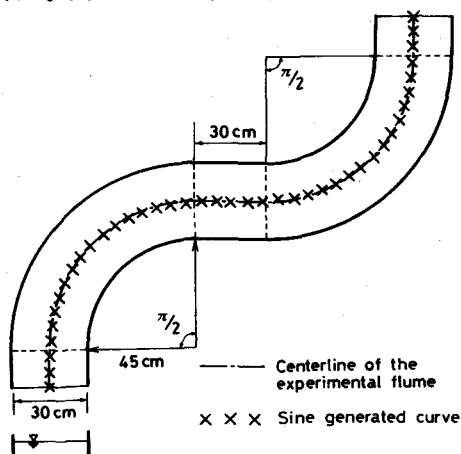


図-9 相隣る単位わん曲部の平面図

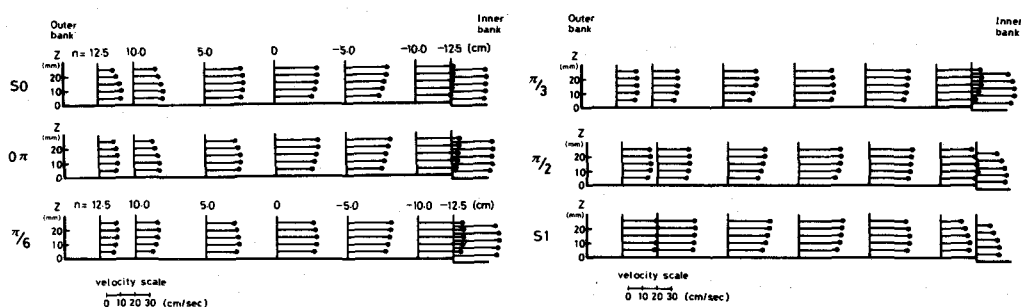


図-10 主流速分布の縦断変化

流による循環セルが流れの方向にどのように変化するかを模式的に示す。断面S0では先行するわん曲で生成された2次流が全断面を占めている。注目しているわん曲で新たに生成される2次流は断面 $\pi/12$ 辺りで、底面付近から発達し始める。単位のわん曲の中間部では、互いに逆向きの流れを持つ2つのセルが共存し、そのわん曲で発達してきた2次流は単位わん曲の出口付近に至って始めて全断面に及ぶことになる。蛇行流路においては、先行するわん曲部で生成された2次流が次のわん曲部へそのまゝ流入し、かなり長い距離にわたり影響が保持されることが分かる。2次流の最大値は主流の最大値の約10%であった。

次に、摂動解と強わん曲と考えられる Rozovskii¹⁷⁾ の

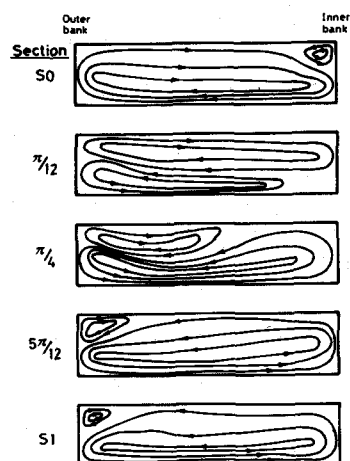


図-11 2次流のセルの縦断方向変化

実験結果との比較を述べる²⁶⁾。実験装置の概要は図-12に示される通りで、幅80cmの長方形断面水路が水路中心までの半径80cmで180°わん曲している。図中に×印で示されるのは蛇行流路曲線であり、理論解はこの蛇行流路に対して計算されている。

実験条件は、わん曲平均水深6.0cm、入口での平均流速0.26m/s、フルード数0.34、シェーゼ係数 $C = 60$ (m-s単位)であった。図-13に水深平均の主流速の横断分布およびその縦断変化を示す。上流端の境界条件としては直線水路部での測定結果を与えている。実験値と理論値との一致度はよく、また摂動の1次解と2次解との間には殆んど差が見られなかったので、図-13では1次解が示されている²⁶⁾。さらに、長方形断面のわん曲部においては水深平均流速の最大値は、わん曲部の全体を通して(断面6.0から8.5まで)内岸に現われることがわかる。

横断面内の水位分布の縦断変化を図-14に示す。原点は各断面における平均水位としている。水位変化に対する1次解は直線であり、図-14を見ると、この解は不十分である。2次解は実験結果と十分に一致していると考えられ、水位分布を再現するには2次までの解が必要であることが分かる。

3.2 平衡河床形断面の蛇行水路における流れ

平衡河床形状とは移動床のわん曲水路に通水し、中央部の数個の単位わん曲の各々の河床形状がほぼ等しくなり、かつ時間的にもほぼ変化しなくなった状態を指す。50%粒径が0.84mmの砂に対して得られた形状を図-15に示す。図中の数字はcm単位であり、0が横断方向の平均値に対応している。内岸側の洲および外岸側の深掘れ部の最大値は、わん曲の頂部に現われるのではなく、それよりやや下流側に出現する。

図-16に最深部における横断方向の河床形状を示す。実線は次の関数を示す。

$$\eta = \epsilon n (a_0 \sin ks + a_1 \cos ks) + \epsilon^2 \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) (a_2 + a_3 \sin 2ks + a_4 \cos 2ks) \quad (18)$$

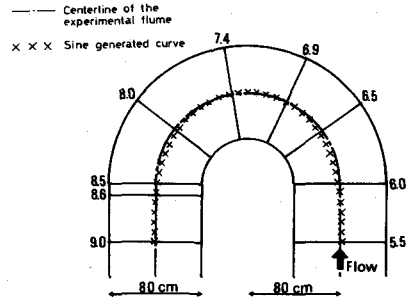


図-12 Rozovskiiの実験水路

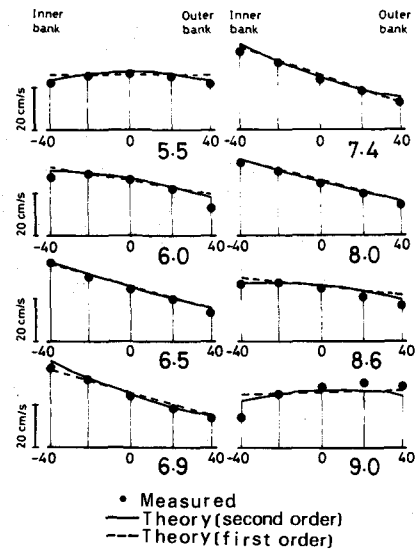


図-13 水深平均主流速の実験値と理論値との比較

$a_0 = 0.673$, $a_1 = 3.11$, $a_2 = 7.36$, $a_3 = 3.71$,
 $a_4 = 2.72$ であり, $\eta = h_b / H_0$, $\varepsilon = B_0 / 2R$,
 $R = L / 2\pi\theta_0$ である。 h_b は平均河床からの偏差,
 H_0 はわん曲平均水深, B_0 は水路幅, L は中心軸に
 沿う単位の蛇行長, θ_0 は蛇行流路曲線と谷線との
 最大偏角である。 $s = s_c / R$, $n = 2n_a / B_0$ であり,
 s_c は中心軸に沿う距離, n_a は中心軸に直交する方
 向の距離である。式(18)は最深部の形状を十分には再
 現できないが, この点は従来用いられてきた関数形
 も同様である。式(18)は断面中央部の盛り上がりを記
 述することができ, 広い範囲にわたり適合性がよい
 ので, 式(18)の関数形に一致させた河床形状をモルタ
 ルで造成し, その上での流れ場の計測を行った結果
 を次に述べる。

図-17, 18に主流の等流速線および流速の横
 断成分の縦断方向の変化を示す³⁴⁾。図-17ではわ
 ん曲への入口部では, 高流速が内岸側に見られる。
 そして, 下流部へ行くに従がい高速部は外岸側へ寄
 り, $\pi/3$ の断面付近では外岸近くに最大流速が出
 現する。それ以後, 高流速部は外岸に存し, 次
 の単位わん曲へと続いてゆく。このように深掘れ部
 が存在すると断面内の最大流速の出現位置は深掘れ
 部へと移動する。これが平衡河床と長方形断面河床
 との大きな差であり, 理論的にも説明がなされてい
 る³⁵⁾。図-18には横断方向の流速成分の分布を示
 す。わん曲の前半部では横断方向成分はほとんどの
 場所で外岸向きであり, 逆にわん曲の後半部では内
 岸向きの横断方向成分が目立っている。これは図-
 17に示される主流の高速域の移動と併せ考えると,
 相隣るわん曲において交互に対岸にある深掘れ部
 に向って流れの集中が生じていることを示している。
 なお, 横断方向の流速成分は主流の10%以下であ
 り, この相対強度は長方形断面水路におけるよりも

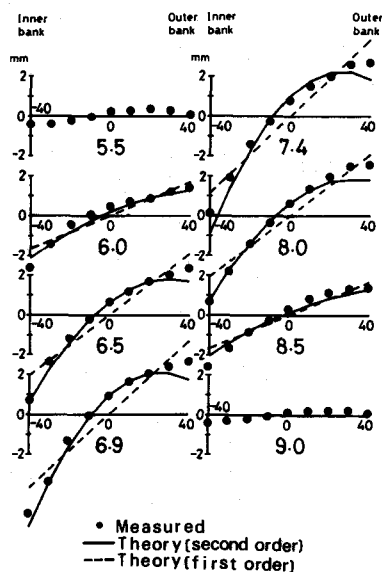


図-14 水面位置の実験値と理論値との比較

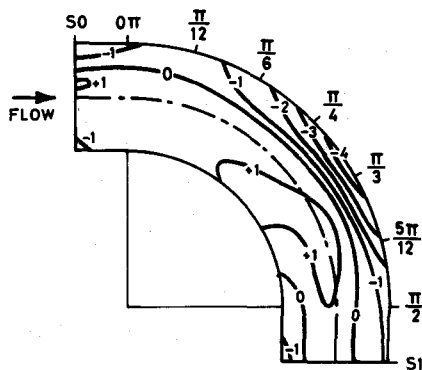


図-15 河床の等高線図

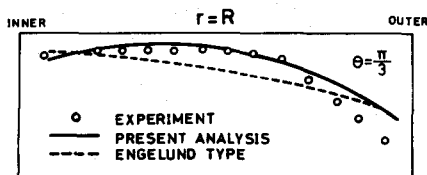


図-16 最深部における河床の断面形

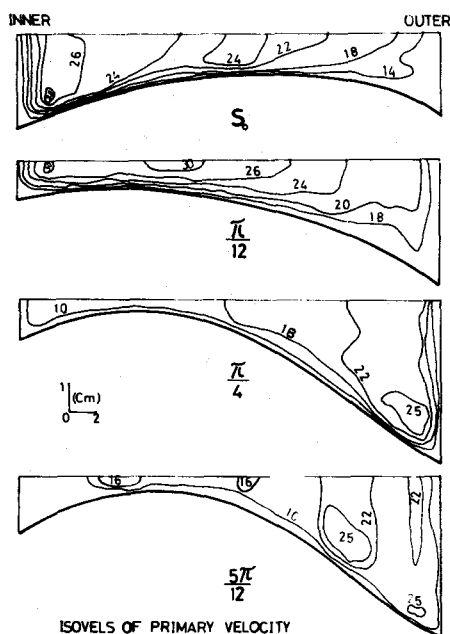


図-17 主流の等流速線 (単位cm/s)

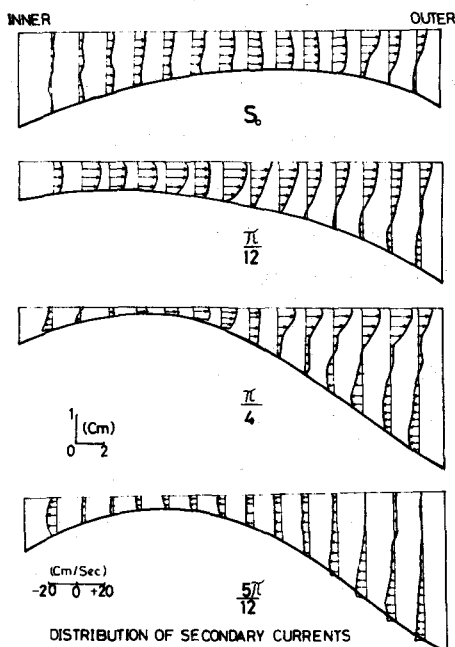
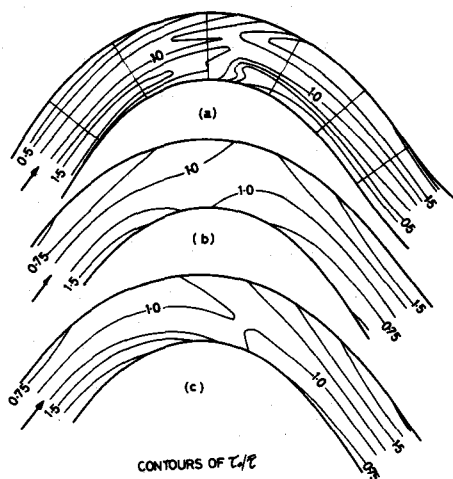


図-18 流速の横断方向成分の分布

小さい。

図-19には底面せん断応力の分布を示す。図-19(a)はHooke²²⁾の実験結果である。図-19(b), (c)はHookeが観測した河床形状を式(18)に当てはめ、係数を最小二乗法で定め、その河床形状に対して流速を理論的に算出し、さらにそれに基づいて底面せん断応力を算出した結果である²³⁾。図中の数字は局所せん断応力と単位わん曲平均のせん断応力との比を表わす。平均値より高い底面せん断応力の領域が単位わん曲の前半部では内岸の半幅を占め、わん曲後半では外岸の半幅を占めるという実験結果は理論解でも再現されている。また、高いせん断応力の帯が外岸へ移行するのは、わん曲の頂点を過ぎた後である点も再現されている。この高いせん断応力は高い流速によってもたらされており、単位わん曲の後半部における深掘れ部への流れの集中が、平衡河床形水路の流れの特徴であることが分かる。



4. 乱流モデル

最近に至るまで、乱流現象を記述する厳密な方程式を解くことは不可能に近いと考えられてきた。不規則に変動する量は統計的にしかその性質を決めることができず、平均化された量を用いて方程式を記述しなくてはならない。また、基礎方程式は非線形であるので、2つの変動量の相関を知る必要に迫られ、最終的には経験則を用いなくてはならないのが普通である。さらに、手法を大別すると、領域内にわたって積分された基礎式を用いるか、偏微分方程式を直接に局所的に解こうとする、かの2つがある。積分型の解法は速度分布に経験則を導入し、境界層のような薄い流れに対して有効に用いられている。偏微分方程式を直接解く方法は“場の方法”とよばれ、基礎式の中に現われる乱れの相関項を空間の各点で明らかにする必要がある。この相関項の数学的表現を与えるものが“乱流モデル”である。

4.1 基礎概念と乱流モデルの分類法

非圧縮性流体に対する連続の式、運動量の式、および温度とか濃度というスカラー量 ϕ の保存式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) + g_i \frac{\rho - \rho_r}{\rho_r} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \overline{u_i \phi} \right) + S_\phi \quad (21)$$

ここに、 U_i は x_i 方向の平均速度成分、 u_i は x_i 方向の乱流成分、 P は平均圧力、 ρ_r は基準密度、 ρ は局所密度、 g_i は x_i 方向の重力加速度、 ν は動粘性係数、 ϕ はスカラー量の平均値、 φ は ϕ の変動量、 r は ϕ の分子拡散係数、 S_ϕ は化学的・生物学的反応による発生項である。横棒は平均値を示す。乱流においては、乱れによる運動量の輸送 $-\rho \overline{u_i u_j}$ とかスカラー量の輸送 $-\rho \overline{u_i \phi}$ が非常に大きく、層流型の輸送項 $\nu \partial U_i / \partial x_j$ とか $r \partial \phi / \partial x_i$ は屢々省略される。添字が重複して用いられているときには、座標軸のすべての方向に関して和をとることを示す。

乱流の計算においては相関 $\overline{u_i u_j}$ と $\overline{u_i \phi}$ を決定することが中心の問題である。これらの相関に関する厳密な式を導くことは可能であるが、その中にはさらに高次の相関項が含まれることとなり、これが繰り返されて止まることがない。これが乱流の完結問題 (closure problem) の内容であり、結局、相関を表わす近似的な関係式 (乱流モデル) を導入して無限の連鎖に終止符を打たざるをえない。

乱流モデルとして最も古く現われたのはブーシネスクによる渦動粘性係数の概念である。一般的にこれを記すと

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (22)$$

となり、 ν_t が渦動粘性係数、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタで $i \neq j$ で 0、 $i = j$ で 1 である。 k は乱れの運動エネルギーで、次式で与えられる。

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}) \quad (23)$$

式(22)の右辺で δ_{ij} を含む項は、 $i = j$ の場合には直応力までを含めて表現できるように一般化したものである³⁵⁾。

さらに、拡散項についても渦動拡散係数 Γ を導入して次のように書くことができる。

$$-\overline{u_i \phi} = \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (24)$$

ν_t と Γ とは流体に固有な係数ではなく、乱れの状態により変化する。これらの比

$$\sigma_t = \nu_t / \Gamma \quad (25)$$

は熱輸送を扱うときには乱流プラントル数とよばれ、物質輸送を扱うときには乱流シュミット数とよばれる。

乱流モデルの分類は、相関を記述するために幾つの輸送方程式を導入するかによって行われる。これは乱れが生成され、減衰してゆく過程をどの程度正確に表わし得るかという精度と、輸送方程式の数とが密接に関係していることが経験的に明らかになってきており、こうした分類が有効と考えられているためである。

4.2 乱流モデルの例

(A) ゼロ方程式モデル

この項では乱れ量についての輸送方程式を用いない、伝統的な解析法の例に触れる。このモデルに分類されるものはすべて渦動粘性係数を利用しており、直接に観測結果を用いたり、平均流との関係を用いたりする。

(i) 渦動粘性係数・渦動拡散係数一定モデル

これは本来的には乱流モデルではないが、従来多くの例で用いられてきた。大局的な性状を予測できる場合もあるが、内部機構を説明するためには不適である。例えば、管路流れでは ν_t は壁面から離れるに従って増大するし、2次元噴流では ν_t は原点からの距離の $1/2$ 乗に比例して増大する。

(ii) 混合距離モデル

これは乱流モデルとよぶことのできる最初のものである。混合距離 ℓ_m を用いて、 ν_t は平均流速の局所的勾配と関係付けられる。

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (26)$$

比較的単純な流れでは l_m は簡単な経験則で与えられるので、混合距離の仮説は現在でも用いられている。自由乱流では l_m は断面内で一定と仮定され、せん断層厚さ δ に比例すると取扱われる。流れの領域は最大の流速差の1%位置で定められるものとした場合の、比例定数の値を表1に示す。

表-1 自由せん断層での混合距離³⁵⁾

流 れ	2 次 元 混 合 層	2 次 元 噴 流	軸 対 称 噴 流	円形(扇形) 噴 流	2 次 元 後 流
l_m / δ	0.7	0.9	0.075	0.125	0.16

壁面境界層では図-20に示される l_m の分布が用いられることが多い³⁶⁾。係数は $\kappa = 0.435$ 、 $\lambda = 0.09$ であり、 δ は最大速度差の1%が出現する位置で定める。完全に発達した円管およびダクト流れではニコラゼの公式が用いられる³⁷⁾。

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4 \quad (27)$$

ここに、 R は管の半径あるいはダクトの半幅（開水路では水深）である。

(B) 1 方程式モデル

ここでは渦動粘性の概念を用いたモデルについて触れる。式(23)で定義される k を用い、乱れ速度の代表スケールを $\sqrt{k}$ で表わす。Kolmogorov と Prandtl は独立に下記の形を提唱した³⁵⁾。

$$\nu_t = C_\mu' \sqrt{k} \, l \quad (28)$$

C_μ' は係数、 l は大規模な乱れを代表する長さの尺度である。 k の分布を定める厳密な式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \left(\frac{u_j u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (29)$$

① ② ③ ④

$$- \beta g_i \overline{u_i \varphi} - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (30)$$

⑤ ⑥

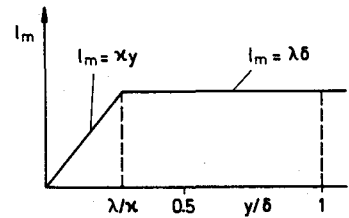


図-20 乱流境界層での混合距離

式29の①項は k の時間的变化を示し、②項は移流による輸送、③項は拡散による輸送、④項はせん断流による生成項、⑤項は浮力による乱れの生成・分配を示し、⑥項は粘性逸散を示す。式29は新たな相関項を含み、このままでは利用できない。通常は、

$$\overline{u_i \left(\frac{u_j u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (30)$$

と近似し、粘性逸散 ϵ は

$$\epsilon = C_D k^{3/2} / \ell \quad (31)$$

で表わされるものとする。乱れによる輸送項は上述のように平均量の勾配で記述できると考えて、次式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ + \beta g_i \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell} \end{aligned} \quad (32)$$

式32はレイノルズ数が大きな場合に対する k の輸送方程式で、経験的な係数値としては C_μ' と C_D との積に対して、 $C_\mu' C_D = 0.08$ 、 $\sigma_k = 1$ がよく用いられる³⁸⁾。

(C) 2方程式モデル

エネルギー含有渦の大きさを特徴づける長さ L も、 k と同様な輸送過程に支配されている。前項での k 方程式に加えて、長さスケールの輸送を考えると2方程式モデルとなる。その中では最も広く用いられている $k-\epsilon$ モデルにつき述べる。

(i) $k-\epsilon$ モデル

このモデルは乱れの運動エネルギー k と粘性逸散率 ϵ に対する輸送方程式を用いる。そして、この k と ϵ の2つの量で代表時間 T と代表長さ L が定まると考えると、 $T = k/\epsilon$ 、 $L = k^{3/2}/\epsilon$ となる。さらに、Kolmogorov-Prandtlの渦動粘性係数に対する概念(式29参照)を用いると、渦動粘性係数、渦動拡散係数は次式で表わされる。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \Gamma = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \quad (33)$$

輸送方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_P$$

$$+ \underbrace{\beta g_i \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}_G - \epsilon \quad (34)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P + G) (1 + C_{3\epsilon} R_f) - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (35)$$

ここに、 $R_f = -G/P$ はフラックス・リチャードソン数である。

(iii) 定数の決定

格子乱流においては $P + G = 0$ であるので、式(34)、(35)における定数は $C_{2\epsilon}$ のみとなる。そこで、格子乱流中における k の減衰を測定することにより $C_{2\epsilon}$ の値が定められた。局所平衡が成立する流れでは $P = \epsilon$ であり、このとき式(33)と(34)より $C_\mu = (\overline{uv}/k)^2$ となる。こうした流れでは $\overline{uv}/k \simeq 0.3$ であり、これより C_μ の値が定められた³⁵⁾。壁面付近では対数速度則が成り立ち、 $P \simeq \epsilon$ であり、移流による ϵ

表-2 $k-\epsilon$ モデルにおける定数³⁹⁾

C_μ	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

の輸送は小さい。このとき式(35)より次式が得られる。

$$C_{1\epsilon} = C_{2\epsilon} - \kappa^2 / \sigma_\epsilon \sqrt{C_\mu}$$

ここに、 κ はカルマン定数である。

$k-\epsilon$ モデルの定数は壁面が存在する境界層流れを中心に定められてきた。したがって、自由乱流の遠方領域などでは修正を要することが知られている。

軸対称噴流においては次式が用いられる³⁵⁾。

$$C_\mu = 0.09 - 0.04 f, \quad C_{2\epsilon} = 1.92 - 0.0667 f \quad (36)$$

ここに,

$$f = \left| \frac{\delta}{\Delta U} \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} - \left| \frac{\partial U_c}{\partial x} \right| \right) \right|^2 \quad (37)$$

U_c は噴流軸に沿う流速, δ は噴流幅, ΔU は断面内の最大流速差である。

また, 噴流や後流の遠方領域では Rodi³⁵⁾による補正関数が用いられる。これは C_μ を乱れの生成項 P と粘性逸散 ε との比の断面内平均値 $\overline{P/\varepsilon}$ で補正したものであり, 図-21 に示される。

乱流モデルとしてはこの他にレイノルズ応力に対する輸送方程式を用いる手法がある。しかし, このモデルは関係する方程式も多く紙面を多くとり, また, 現在研究レベルで発展中であり変化しつつあることもあり, ここでは割愛する。

4.3 乱流モデルの適用例

ここでは $k-\varepsilon$ モデルの適用例につき述べる。

(1) わん曲水路の流れ

Leschziner and Rodi⁴⁰⁾ は中心角度 180° , 長方形断面の単一わん曲に対して $k-\varepsilon$ モデルの計算を行い,

Rozovskii¹⁷⁾の実験結果と比較した。用いられた連続式および r, θ, z 方向の運動量式は次の通りである。ここに, r, θ, z はそれぞれ半径方向, 円周方向, 鉛直方向の座標軸である。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r^2}{\partial r} + \frac{\partial U_z U_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_t \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu_t \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right] - \frac{2 \nu_z}{r^2} U_r \end{aligned} \quad (39 \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r U_\theta}{\partial r} + \frac{\partial U_z U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{U_r U_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left[r \nu_t \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\nu_t}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (39 \cdot 2)$$

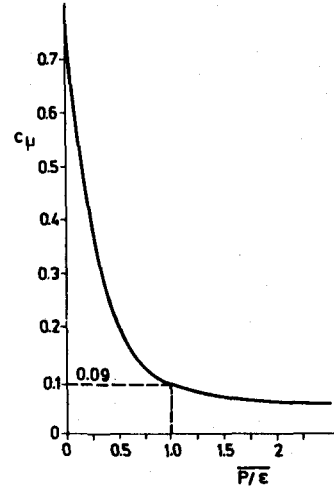


図-21 C_μ に対する補正関数

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r U_r U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_z^2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta U_z}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \nu_t \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \quad (39 \cdot 3)$$

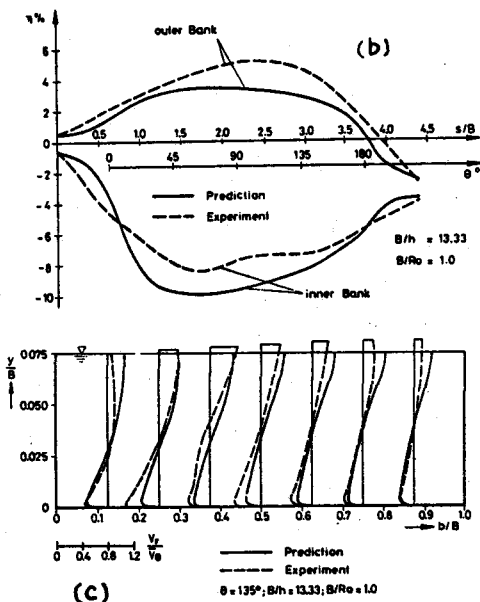
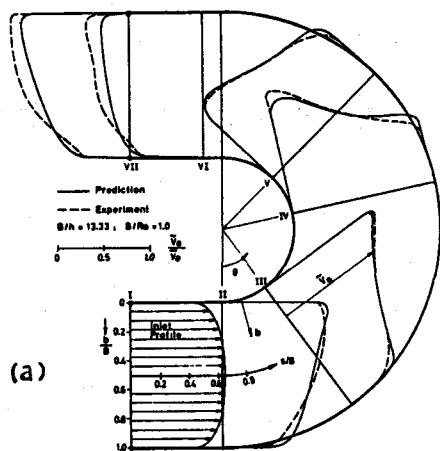


図-2 2 長方形の180°わん曲水路における流れ⁴⁰⁾

ここに、 U_r 、 U_θ 、 U_z はそれぞれ r 、 θ 、 z 方向の速度成分； P はピエゾ水頭に対応する圧力で（静圧＋ gz ）を示す。この計算では逆流は生じないと仮定されており、下流側の条件は圧力のみを通じて上流へ伝わる。この仮定により、式(39)の右辺の拡散項においては θ 方向の勾配はすべて無視されている。

図-2 2 に計算結果と実験結果との比較を示す。(a) は水深平均流速の縦断変化を、(b) は水面位置の変化を、(c) は $\theta = 135^\circ$ の断面における横断方向流速分布を示す。計算は自由水面を有しないダクトの中の流れの条件に対して行われ、圧力0の位置まで水位が上昇するとして水面位置が求められている。計算結果は実験結果とよく一致している。

わん曲部に関する乱流モデルの計算ではその後も、森・岸³²⁾、池田等⁴¹⁾、Tamai・Ikeya⁴²⁾ などが、砂洲の上の流れの3次元性が論じられている。また、Demureu⁴³⁾ は流れのみでなく、長方形断面水路での物質分散の計算も行っている。

(2) その他の例

図-2 3 は2次元水路に正方形のブロックが突出しているときの流れに対するDurst・Rastogi⁴⁴⁾ の計算結果を示す。ブロックの上流側に生ずる流れの変形、ブロック頂部及び後流域の循環流れもよく

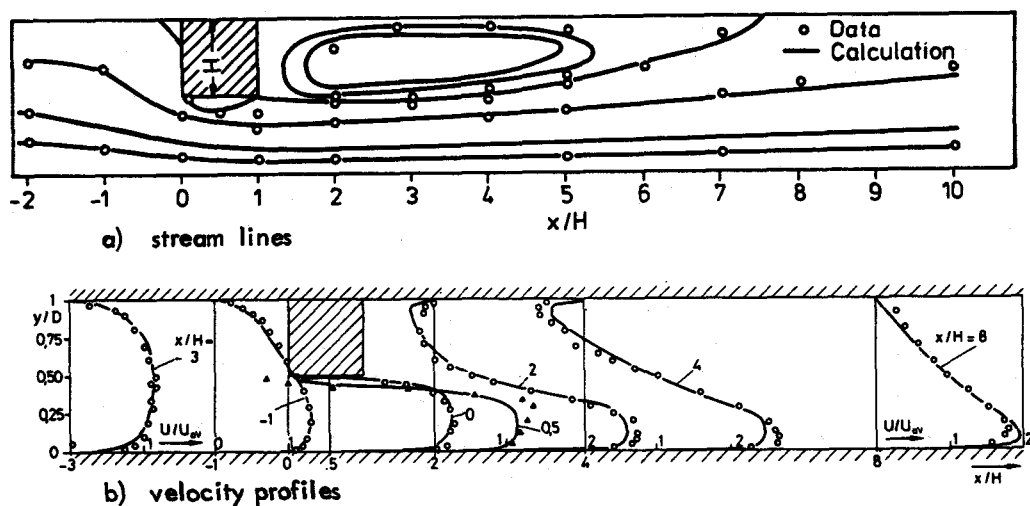


図-2 3 突堤のある2次元水路内の流れ⁴⁴⁾

再現されている。しかし、再付着点以後の挙動を比較してみると、 $k-\epsilon$ モデルによる計算は未だ不十分であることが判明している³⁵⁾。

開水路の流れにおけるもう1つの例として河口部の流れを示す。 $R_f = -G_t / 2(P + G)$ と書き直すと、 $C_{3\epsilon} \approx 0.8$ である。ここに、 G_t は横断方向の乱れエネルギー成分 $\overline{v^2}$ のみによる乱れの生成項である。Svensson⁴⁵⁾が水路幅平均の方程式に $k-\epsilon$ モデルを適用して計算した結果が図-2 4である。細部では実測結果と一致しない点も見られるが、大局的な性状は実測とほぼ一致していることがわかる。

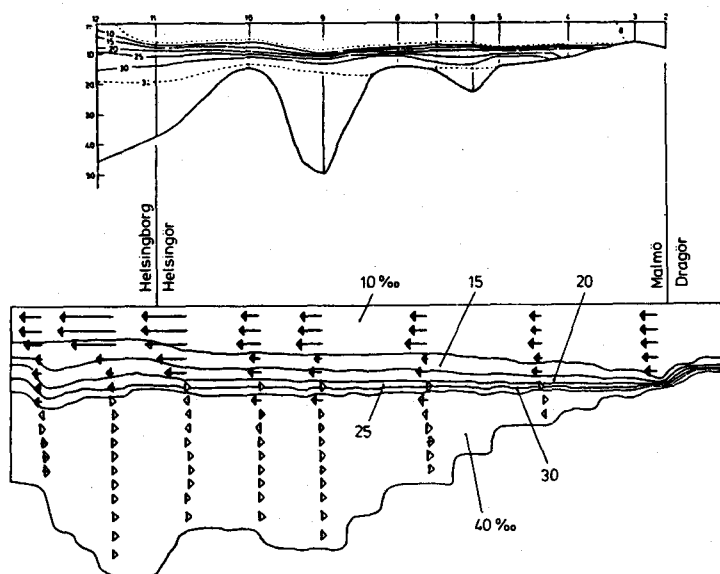


図-2 4 河口部での塩分分布と流れ⁴⁵⁾

参 考 文 献

- 1) 木下良作：航空写真による洪水流解析の現状と今後の課題，土木学会論文集，第345号／Ⅱ-1，pp. 1-19，1984.
- 2) Prandtl, L. : Essentials of Fluid Dynamics, Blackie, London, 1952.
- 3) 木下良作：航空写真による洪水時の流況測定，水工学夏期研修会講義集，土木学会，68-12，40 p.，1968.
- 4) 宇民 正・上野鉄男：大規模乱流構造の可視化と解析(2)，京大防災研年報第26号，B-2，pp. 461-476，1983.
- 5) 今本博健・石垣泰輔：開水路流れの壁面せん断力分布と縦渦に関する実験的検討(1)，京大防災研年報第26号，B-2，pp. 477-487，1983.
- 6) 今本博健・大年邦雄：固液混相開水路流れの水理特性に関する研究(4)，京大防災研年報第25号，B-2，pp. 417-427，1982.
- 7) 林 泰造・山田 正：開水路における縦渦の形成に関する研究，第21回水理講演会論文集，pp. 245-253，1977.
- 8) Ikeda, S. and H. Kikkawa : Secondary circulation in straight channels，埼玉大学工学部建設基礎工学研究報告，第6巻，pp. 1-13，1976.
- 9) 黒木幹男・岸 力：開水路に発生する縦渦の構造の研究，土木学会論文報告集，第312号，pp. 83-92，1981.
- 10) Perkins, H. J. : The formation of streamwise vorticity in turbulent flow, J. Fluid Mech., Vol. 44, pp. 721-740, 1970.
- 11) 木下良作：洪水と流路形態の現地観測，水工学夏期研修会講義集，土木学会，78-A-7，17 p.，1978.
- 12) 中川博次・祢津家久・富永晃宏：二次流を伴う流れの乱流構造について，第26回水理講演会論文集，pp. 469-474，1982.
- 13) Nezu, I. and H. Nakagawa : Cellular secondary currents in straight conduit, J. Hyd. Div., Proc. A S C E, Vol. 110, H Y 2, pp. 173-193, 1984.
- 14) 池谷 毅・玉井信行：直線開水路における縦渦の構造に関する統一的解釈の試み，第37回年次講演会概要集，Ⅱ，pp. 475-476，1982.
- 15) Ippen, A. T. and P. A. Drinker : Boundary shear stress in curved trapezoidal channels, J. Hyd. Div., Proc. A S C E, Vol. 88, H Y 5, pp. 143-179, 1962.
- 16) 村本嘉雄：開水路彎曲流の内部機構Ⅱ，京都大学防災研年報第9号，pp. 525-537，1966.
- 17) Rozovskii, I. L. : Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel Program for Scientific Translations, 233 p.，1961.

- 18) Kikawa, H. , S. Ikeda, H. Ohkawa and Y. Kawamura : Secondary flow in a bend of turbulent stream, Proc. Japan Soc. Civil Engineers, No. 219, pp. 107-114, 1973.
- 19) Kalkwijk, J. P. Th. and H. J. de Vriend : Computations of the flow in shallow river bends, J. Hyd. Research, I A H R, Vol. 18, Nol. 4, pp. 327-342, 1980.
- 20) Yen, B. C. : Characteristics of subcritical flow in a meandering channel, Inst. of Hydraulic Res., Univ. of Iowa, 77p., 1965.
- 21) 玉井信行・池内幸司・山崎 晶 : 連続わん曲水路における流れの実験的研究, 土木学会論文報告集, 第331号, pp. 83-94, 1983.
- 22) Hooke, R. L. : Shear-stress and sediment distribution in a meander bend, U N G I - Report 30, Univ. of Uppsala, 58 p., 1974.
- 23) Tamai, N. and Ali A. Mohamed : Depth-averaged flow fields in meandering channels with alluvial equilibrium bed, 第29回水理講演会論文集, pp. 685-690, 1985.
- 24) Langbein, W. B. and L. B. Leopold : River meanders - Theory of minimum variance, U. S. G. S., Prof. Paper 422-H, 15 p., 1966.
- 25) Engelund, F. : Flow and bed topography in channel bends, Proc. A S C E, Vol. 100, H Y 11, pp. 1631-1647, 1974.
- 26) 池内幸司・玉井信行 : 蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性, 土木学会論文報告集, 第334号, pp. 89-101, 1983.
- 27) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫 : 河川の自由蛇行に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第255号, pp. 63-73, 1976.
- 28) Hasegawa, K. and I. Yamaoka : The effect of plane and bed forms of channels upon the meander development, Proc. J S C E, No. 296, pp. 143-152, 1980.
- 29) Gottlieb, L. : Three-dimensional flow pattern and bed topography in meandering channels, Series Paper 11, Inst. Hydrodynamic and Hydraulic Engineering, Tech. Univ. of Denmark, 79 p., 1976.
- 30) 長谷川和義 : 蛇曲流路における流れと平衡底面形状に関する研究, 土木学会論文報告集, 第338号, pp. 105-114, 1983.
- 31) 森 明巨・岸 力・吉岡正人 : 河道彎曲部における二次流の構造, 第27回水理講演会論文集, pp. 79-84, 1983.
- 32) 森 明巨・岸 力 : 横断勾配を有する一様曲率彎曲部の流れの構造, 第28回水理講演会論文集, pp. 751-755, 1984.
- 33) 池谷 毅・玉井信行 : 平坦固定床蛇行水路における3次元流況の解析, 土木学会論文報告集, 第

342号, pp. 107-113, 1984.

- 34) Tamai, N. and A. A. Mohamed : Velocity profiles in continuous bends over idealized bars, 第39回年次講演会概要集, II, pp. 467-468, 1984.
- 35) Rodi, W. : Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of the Art Review, I A H R, 104 p., 1980.
- 36) Patankar, S. V. and D. B. Spalding : Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 2nd ed., Intertext, London, 1970.
- 37) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory, McGraw Hill, New York, 1969.
- 38) Launder, B. E. and D. B. Spalding : Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, 1972.
- 39) Launder, B. E. and D. B. Spalding : The numerical computation of turbulent flow, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 3, p. 269, 1974.
- 40) Leschziner, M. A. and W. Rodi : Calculation of strongly curved open channel flow, Proc. A S C E, Vol. 105, H Y 10, pp. 1297-1314, 1979.
- 41) 池田駿介・田中昌宏・千代田将明 : 空気蛇行流の乱流特性に関する研究, 土木学会論文集, No. 351, II-2, pp. 77-86, 1984.
- 42) Tamai, N. and T. Ikeya : Three-dimensional flow over alternating point bars in a meandering channel, J. Hydrosience and Hydraulic Eng., 水理委員会, Vol. 3, No. 1, pp. 1-13, 1985.
- 43) Demuren, A. O. : Three dimensional numerical computation of flow and pollutant dispersion in meandering channels, Proc. XXth I A H R Congress, Moscow, Vol. III, pp. 29-36, 1983.
- 44) Durst, F. and A. K. Rastogi : Theoretical and experimental investigations of turbulent flows with separation, Turbulent Shear Flows I, Springer Verlag, Heidelberg, 1979.
- 45) Svensson, U. : Flow investigation on the Öresund with a mathematical model, Univ. of Lund, Dept. of Water Resources Eng., Sweden, Rept. No. 3001, 1976 (文献のものを利用).