

波による柱状構造物の動的応答について

石 田 啓

1. 緒 言

人類社会の生産・消費活動が活発化するに伴い、陸上の天然資源は徐々に消費され、石油のみならず種々の鉱物資源も、いずれは涸渇することが考えられる。こういった状況を打開するための一つの方法として、海洋の資源・エネルギーの開発が考えられ、一部においては、すでに実行に移されている。このような海洋の開発を推進する場合、土木工学の分野が果たすべき役割の一つとして、海洋構造物を安全かつ合理的に設計・建設することが挙げられる。この海洋構造物の分野は、現在の海岸工学と構造力学が重なり合う領域であるため、その研究促進のためには、両分野の人々が相互に協力することが必要であろう。

この小論は、柱状の海洋構造物の波に対する動的応答について述べるものであり、構造力学の分野で、振動解析法として幅広く使用されている伝達マトリックス法および構造特性マトリックス法^{1), 2)}の海洋構造物解析への適用方法を説明するものである。この二つの解法は、それぞれ長所欠点があり、たとえば前者は、変形量と内部応力が直接算出される利点があるが、定常振動の場合にのみ使用できる方法である。また後者は、任意の時間振動を取り扱うことが可能であるが、直接算出されるのは変形量のみであり、内部応力は求めた変形量から算定しなければならない。なお、その他の解法として、モード解析法³⁾や理論的な解法⁴⁾などがあるが、ここでは割愛する。

現在、海洋構造物に関する研究は、OTC や BOSS など多くの論文集に多数発表されているが、小論は、これらを系統的にまとめたものではなく、わずかに著者の知見を要約したものであることを、お断りしておく。

2. 伝達マトリックス法

2-1 一質点系の振動

一質点系の振動計算法は、伝達マトリックス法による振動計算法の基礎となるため、まず一質点系の場合について述べる。

変位 z に比例する復元力 kz と、変位速度 $\dot{z}$ に比例する減衰力 $c\dot{z}$ を有する一質点系の運動方程式は、質点の質量を m 、これに加わる外力を $f(t)$ とすると、

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = f(t) \quad (1)$$

で与えられる。ここに t は時間であり、 $\dot{}$ は時間微分を意味する。外力 $f(t)$ が、振幅 p で角振動数 Ω の単振動の場合、すなわち $f(t) = pe^{j\Omega t}$ の場合には、式 (1) の定常振動解は、 $z = \bar{z}e^{j\Omega t}$ と表わすことができる。

ここに $j = \sqrt{-1}$ であり、複素振幅 $\bar{z}$ は $z = \bar{z}e^{j\Omega t}$ を式 (1) に代入して得られる

$$-m\Omega^2\bar{z} + jc\Omega\bar{z} + k\bar{z} = p \quad (2)$$

より、 $\bar{z} = p / (k - m\Omega^2 + jc\Omega)$ と求まる。ここに z は複素数であるが、その実部および虚部は、それぞれ、 $f(t) = p \cos \Omega t$ および $f(t) = p \sin \Omega t$ の場合の変位を与える。また式 (2) は、時間項 $e^{j\Omega t}$ を除いた慣性力、減衰力、復元力および外力の釣り合いを示すと言えるが、これは、式 (1) の運動方程式が、複素数で表わされた静的な力の釣り合い式に変わることを意味している。一方、外力 $f(t)$ が単振動でない場合の変

位は、外力を t に関してフーリエ級数に展開し、各成分外力による変位を重ね合わせるにより、算定することができる。ただし、式 (1) の形が z に関して非線型の場合には、その方程式の形に応じた適切な近似計算が必要となる。なお回転運動についても、上述の場合と全く同様にして、その回転角を求めることができる。

2-2 伝達マトリックス法による振動解析^{5), 6)}

最初に、外力が単振動の場合の計算法について述べる。

伝達マトリックス法では、図 1 に示すように、実際の部材を、剛性のみを有する梁と、質量のみを有する質点が、交互に組み合わさった多質点系構造物としてモデル化する。したがって梁は部材力のみを受けて変形を生じ、質点は慣性力、減衰力、外力および梁部分から伝えられる部材力を受けて変位と回転を生じる。図 2 に示すように、座標系には部材中立軸方向を x 軸にとった右手座標系を用い、 z 軸方向の変位およびせん断力を、それぞれ w および V_z で示し、 y 軸まわりの回転角とモーメントをそれぞれ ψ および M_y で示す。外力の時間項が $e^{j\omega t}$ の形をとる場合、これらの諸量は、

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{w} e^{j\omega t}, & \psi &= \bar{\psi} e^{j\omega t}, \\ V_z &= \bar{V}_z e^{j\omega t}, & M_y &= \bar{M}_y e^{j\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

の形に表わすことができる。ここに、 $\bar{w}$, $\bar{\psi}$, $\bar{V}_z$ および $\bar{M}_y$ は、それぞれ複素振幅であるが、これらの実部および虚部を、 $\wedge$ および $\vee$ を付けて表わすと、

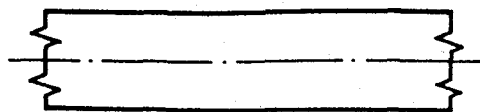
$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \wedge w + j \vee w, & \bar{\psi} &= \wedge \psi + j \vee \psi, \\ \bar{V}_z &= \wedge V_z + j \vee V_z, & \bar{M}_y &= \wedge M_y + j \vee M_y, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。これらの実部および虚部を成分としたベクトルを状態ベクトルと呼び、

$$\{z\} = \underbrace{\left\{ \wedge w, \wedge \psi, \wedge M_y, \wedge V_z \right\}}_{\text{実部}} \underbrace{\left\{ \vee w, \vee \psi, \vee M_y, \vee V_z \right\}}_{\text{虚部}} \underbrace{\left\{ 1 \right\}}_{\text{単位数}}^T \quad (5)$$

で示す。ここに T は、 $\{z\}$ が列ベクトルであることを意味しており、また一つの成分である単位数 1 は、外力を導入するために必要である。

図 3 (a) および (b) は、 $x-z$ 平面内において、質点 i に関する諸量を示したものである。諸量の右上添字 U および L は、質点の上側および下側の量であることを、右下添字 i は、質点 i に関する量であることを意味する。図より、変位の適合条件、回転角の適合条件、 z 方向の力の釣り合い条件、および y 軸まわりのモーメントの釣り合い条件は、それぞれ、



実際の梁

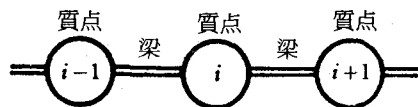


図 1 梁のモデル化

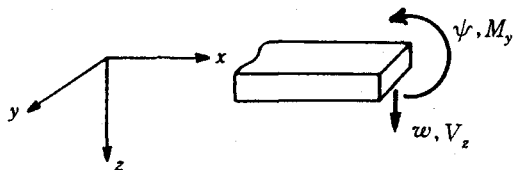


図 2 座標系および変位と力

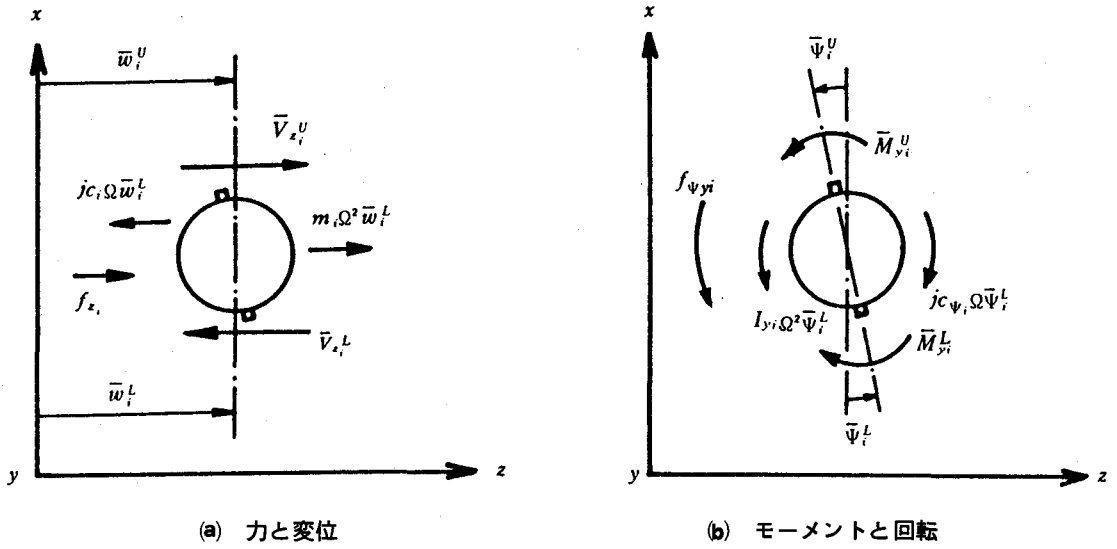


図3 質点*i*に働く力と変位およびモーメントと回転

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{w}_i^U &= \bar{w}_i^L \\
 \bar{\psi}_i^U &= \bar{\psi}_i^L \\
 \bar{V}_{zi}^U + m_i \Omega^2 \bar{w}_i^L - \bar{V}_{zi}^L - j c_i \Omega \bar{w}_i^L + f_{zi} &= 0 \\
 \bar{M}_{yi}^U + I_{yi} \Omega^2 \bar{\psi}_i^L - \bar{M}_{yi}^L - j c_{\psi i} \Omega \bar{\psi}_i^L + f_{\psi yi} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。ここに、 f_z は*z*方向の外力振幅（実数）であり、式(2)の*p*に相当する。また $f_{\psi y}$ は*y*軸まわりの外力モーメントの振幅である。 c および c_{ψ} は、変位および回転による減衰定数であり、 I_y は*y*軸まわりの慣性モーメントである。次に式(6)の各複素振幅に式(4)を代入し、それぞれ実部および虚部に関する条件式に書き変えた後、外力項を導入するための恒等式 $1 \equiv 1$ を合わせて行列表示すると、

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{\bar{w}} \\ \hat{\bar{\psi}} \\ \hat{\bar{M}}_y \\ \hat{\bar{V}}_z \\ -\hat{\bar{w}} \\ \hat{\bar{\psi}} \\ \hat{\bar{M}}_y \\ \hat{\bar{V}}_z \\ 1 \end{array} \right\}_i^U = \left\{ \begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_y \Omega^2 & 1 & 0 & 0 & -c_{\psi} \Omega & 0 & 0 & -f_{\psi y} \\ m \Omega^2 & 0 & 0 & 1 & c_z \Omega & 0 & 0 & 0 & -f_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\psi} \Omega & 0 & 0 & 0 & -I_y \Omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ -c_z \Omega & 0 & 0 & 0 & m \Omega^2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}_i \left\{ \begin{array}{c} \hat{\bar{w}} \\ \hat{\bar{\psi}} \\ \hat{\bar{M}}_y \\ \hat{\bar{V}}_z \\ -\hat{\bar{w}} \\ \hat{\bar{\psi}} \\ \hat{\bar{M}}_y \\ \hat{\bar{V}}_z \\ 1 \end{array} \right\}_i^L \quad (7)$$

$$\text{すなわち, } \{z\}_i^U = [P]_i \{z\}_i^L \quad (8)$$

となる。ここに $[P]_i$ はポイントマトリックスと呼ばれており、質点 i の上側と下側のステートベクトルを関係づける役割をする。

図4は、質点 $i-1$ と質点 i の間の梁に働く部材力および変形量を示したものであり、適合条件および釣り合い条件より

$$\left. \begin{aligned} -\bar{w}_i^L &= -\bar{w}_{i-1}^U + L_i \bar{\psi}_{i-1}^U + \frac{L_i^2}{2EI} \bar{M}_{y_{i-1}}^U \\ &\quad + \frac{L_i^3}{6EI} \bar{V}_{z_{i-1}}^U \\ \bar{\psi}_i^L &= \bar{\psi}_{i-1}^U + \frac{L_i}{EI} \bar{M}_{y_{i-1}}^U + \frac{L_i^2}{2EI} \bar{V}_{z_{i-1}}^U \\ \bar{M}_{y_i}^L &= \bar{M}_{y_{i-1}}^U + L_i \bar{V}_{z_{i-1}}^U \\ \bar{V}_{z_i}^L &= \bar{V}_{z_{i-1}}^U \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

が成立する。ここに E はヤング係数であり、 I は y 軸まわりの断面2次モーメントである。式(9)を実部と虚部に分け、さらに $1 \equiv 1$ を合わせて行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} \hat{-w} \\ \hat{\psi} \\ \hat{M}_y \\ \hat{V}_z \\ \check{-w} \\ \check{\psi} \\ \check{M}_y \\ \check{V}_z \\ 1 \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{-w} \\ \hat{\psi} \\ \hat{M}_y \\ \hat{V}_z \\ \check{-w} \\ \check{\psi} \\ \check{M}_y \\ \check{V}_z \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1}^U \quad (10)$$

$$\text{すなわち, } \{z\}_i^L = [F]_i \{z\}_{i-1}^U \quad (11)$$

となる。ここに、 $[F]_i$ はフィールドマトリックスと呼ばれており、質点 $i-1$ の上側と、質点 i の下側のステートベクトルを関係づける役割をする。ここで、式(11)を式(8)に代入すると、

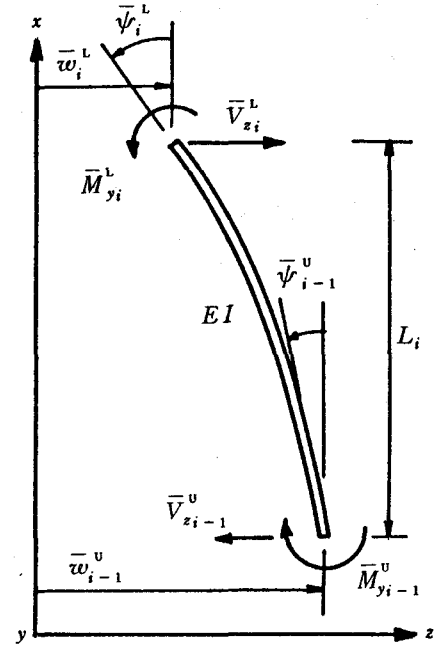


図4 梁に働く力と変位およびモーメントと回転

$$\{z\}_i^U = [P]_i [F]_i \{z\}_{i-1}^U \equiv [U]_i \{z\}_{i-1}^U \quad (12)$$

となり、質点 $i-1$ のステートベクトルに、行列 $[U]_i \equiv [P]_i \times [F]_i$ を乗ずることにより、質点 i のステートベクトルが求まることがわかる。

構造物が図5に示す柱体の場合には、式(12)の関係を、固定端Aから始めて自由端Bまで適用すれば、

$$\{z\}_B = [F]_7 [P]_6 [F]_6 \cdots [P]_1 [F]_1 \{z\}_A \equiv [U]_{AB} \{z\}_A \quad (13)$$

となり、A点とB点のステートベクトルの関係式が得られる。この場合の境界条件式は、 $\bar{w}_A = 0$ 、 $\bar{\psi}_A = 0$ 、および $\bar{V}_B = 0$ 、 $\bar{M}_B = 0$ であり、これらを式(13)に代入した式を解けば、 $\bar{M}_A$ 、 $\bar{V}_A$ および $\bar{w}_B$ 、 $\bar{\psi}_B$ が求まる。すなわち、境界条件を満たすA点およびB点のステートベクトルが求まる。さらに、得られた $\{z\}_A$ と式(12)の関係を用いると、順次各点のステートベクトルが計算できる。

2-3 波力による柱体の横振動と外力項⁷⁾

図6に示すように座標をとり変え、 x 軸方向の柱の変位を ξ 、 x 軸方向の水粒子速度を u 、その加速度を $\dot{u}$ で示す。柱に働く x 軸方向の波力を、相対水粒子速度を用いたモリソン公式で与えると、柱の横振動の方程式は、

$$\begin{aligned} \rho A \xi_{tt} + c_1 \xi_t + EI \xi_{zzzz} = \frac{1}{2} C_D \rho_w D (u - \xi_t) |u - \xi_t| \\ + (C_M - 1) \rho_w A (\dot{u} - \xi_{tt}) + \rho_w A \dot{u} \end{aligned} \quad (14)$$

と表わすことができる⁸⁾。ここに ρ および ρ_w は柱および水の密度、 c_1 は減衰定数、 D は柱の直径、 C_M は慣性係数、 C_D は抗力係数である。式(14)は、 ξ に関して非線型であるが、 $u \gg \xi_t$ と仮定すると、

$$(\rho A + K \rho_w A) \xi_{tt} + (c_1 + 2C'_D |u|) \xi_t + EI \xi_{zzzz} = C'_D u |u| + C'_M \dot{u} \quad (15)$$

となり、方程式は線型となる。ここに $C'_D = C_D \rho_w D / 2$ 、 $C'_M = C_M \rho_w A$ であり、 $K = C_M - 1$ は付加質量係数である。また、式(15)右辺は、剛体の柱に対するモリソン公式と同じ形になる。

次に、微小振幅波理論を用い、 $x=0$ での水面変動を $\eta = a \cos \sigma t$ とし、 $u = a\sigma (\cosh kz / \sinh kh) \cos \sigma t$ および $\dot{u} = -a\sigma^2 (\cosh kz / \sinh kh) \sin \sigma t$ を式(15)に代入した後、式(15)全体を図7に示す分割長 $\Delta z = z_i - z_{i-1}$ の間で積分すると、式(7)の $[P]_i$ に含まれる m_i および c_{zi} は、

$$m_i = (\rho A + K \rho_w A) \Delta z_i \quad (16)$$

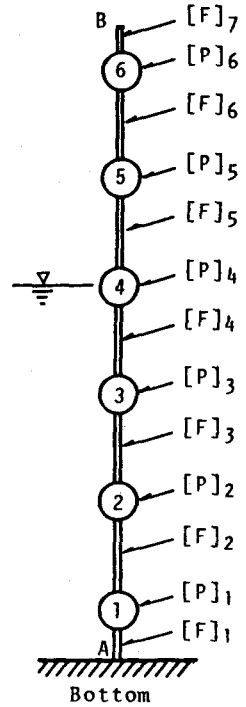


図5 モデル化した柱体

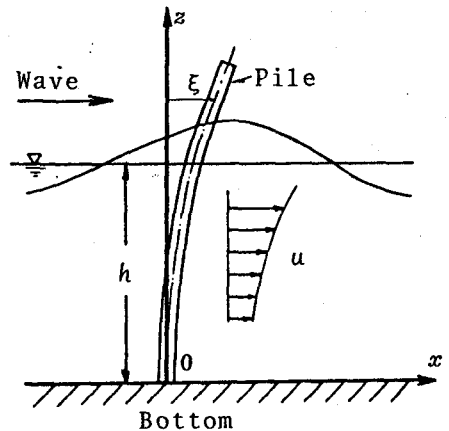


図6 波の場の座標系

$$c_{zi} = c_1 \Delta z_i + 2C'_D a \sigma \{ (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1})$$

$$/ (k \sinh kh) \} |\cos \sigma t| \quad (17)$$

となり、また質点 i に働く x 方向の波力 $f_i(t)$ は、

$$f_i(t) = X_i \cos \sigma t |\cos \sigma t| + Y_i \sin \sigma t \quad (18)$$

となる。ここに、 a は振幅、 σ は角周波数、 h は水深であり、

$$X_i = C'_D (a^2 g k / \sinh 2kh) \{ (\sinh 2kz_i - \sinh 2kz_{i-1})$$

$$/ 2k + \Delta z_i \} \quad (19)$$

$$Y_i = -C'_M (ag / \cosh kh) (\sinh kz_i - \sinh kz_{i-1}) \quad (20)$$

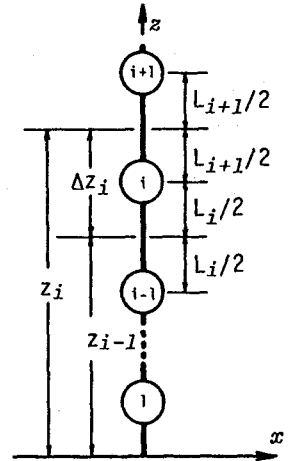


図7 波力の積分区間

である。さらに式(18)の $\cos \sigma t |\cos \sigma t|$ の部分をフーリエ級数に展開し、その第3項までを用いると、式(18)は、

$$f_i(t) = \frac{8}{3\pi} X_i \cos \sigma t + \frac{8}{15\pi} X_i \cos 3\sigma t - \frac{8}{105\pi} X_i \cos 5\sigma t + Y_i \sin \sigma t \quad (21)$$

となり、式(7)の $[P]_i$ の中の外力振幅 f_z として、 $(8/3\pi)X_i$ 、 $(8/15\pi)X_i$ 、 $(-8/105\pi)X_i$ および Y_i が生じ、またこの時の Q は、それぞれ、 σ 、 3σ 、 5σ および σ となる。また $[P]_i$ に含まれる f_{ψ} は、一つの分割区間内の波力の不等分布に起因する外力モーメントの振幅であり、これを考慮した計算を行うことは容易であるが、これが変位に寄与する割合は一般に小さいため、実用上は、 c_{ψ} を含む減衰項と共に無視して差し支えない。さらに、式(17)の c_{zi} に含まれる c_1 の値は、実験値から逆算して与えることができるが、 $2C'_D |u|$ に比べて小さいことから、無視しても大差ない。また式(10)の $[P]_i$ に含まれる L は、図7に示した質点間距離 Δz_i である。

2-4 計算結果および実験結果の一例⁷⁾

写真1 に、下端部を固定した円柱の振動実験状況を示す。円柱は、長さ 60 cm、直径 $D = 3$ cm のウレタンゴム製である。水深は $h = 40$ cm であり、円柱の比重は 1.12、ヤング係数は $E = 500 \text{ kg/cm}^2$ である。

図8に、位相 t/T のとり方を示す。図9は、各位相ごとの柱のタワミ曲線の計算例であるが、水面に近づくほど波力は大きくなるため、一般に振動モードは1次のものが卓越し、高次の振動モードはほとんど混入しない。

図10には、横軸に波の周期をとり、縦軸に変位の最大値 ξ_{max} をとった共振曲線を示すが、 $T = 0.44 \text{ sec}$ の波で共振が生じるのみならず、その3倍の $T = 1.32 \text{ sec}$ および5倍の $T = 2.20 \text{ sec}$ の波によっても共振が生じる。これは、式(21)の $f_i(t)$ に含まれる σ 、 3σ および 5σ の角振動数を持つ成分外力により生じるものである。図11は、慣性力と抗力の比を 2:1 に固定した場合の、各周期ごとの変位の位相変化を示したものであるが、 T を変えると、振動変位は複雑に変化して行く。

図12は、図5の質点6の位置の変位の位相変化について、実験値と計算値を比較したものである。計算では、 $C_D = 1.0$ 、 $C_M = 2.0$ とし、付加質量係数は $K = 0$ 、1 および 2 と変えたものを示した。図(a)、(b)およ

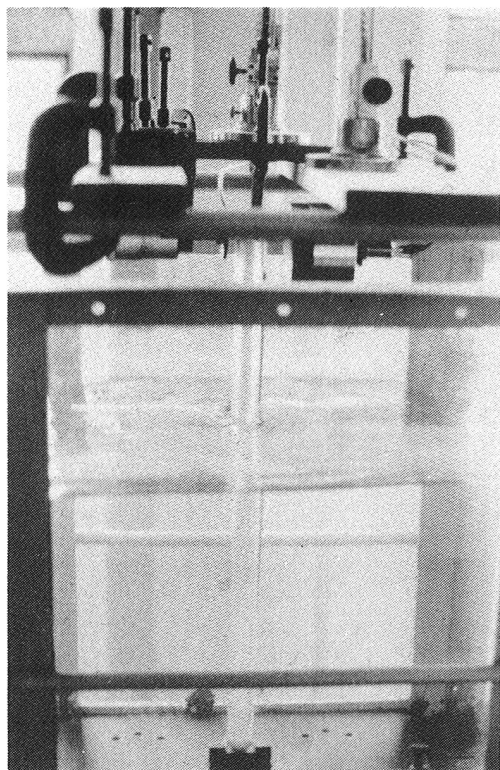


写真1 実験装置

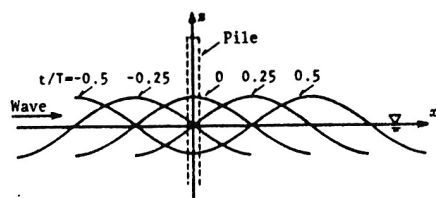


図8 位相 t/T のとり方

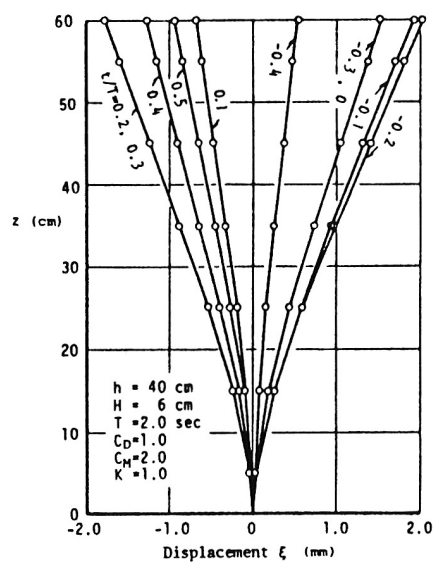


図9 円柱のタワミ曲線

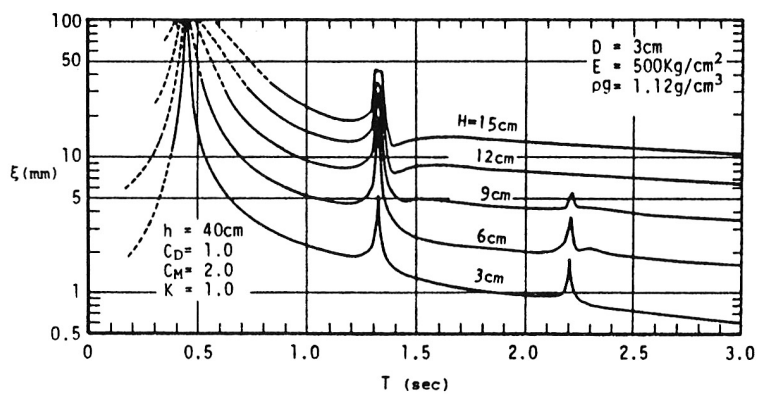


図10 円柱の共振特性

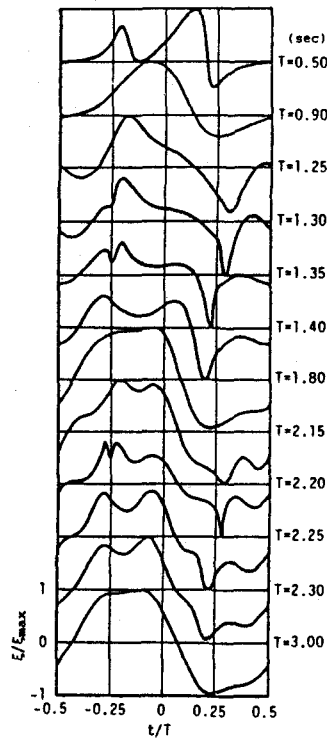


図11 円柱頂部の変位の位相変化

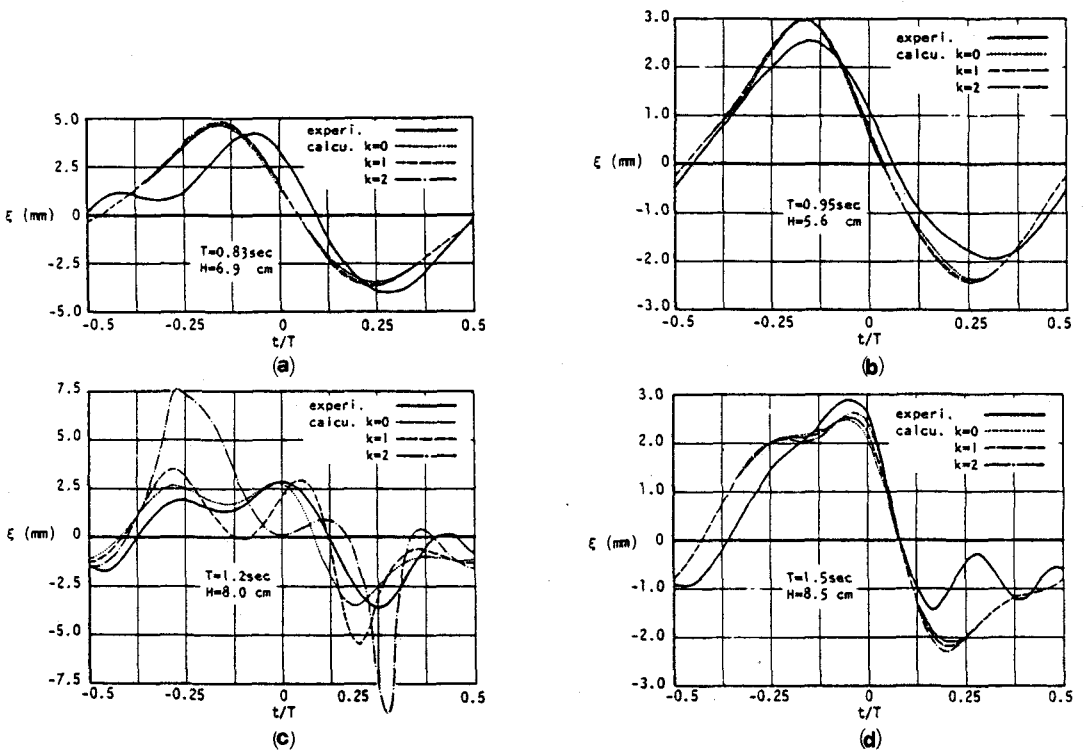


図12 変位の計算値と実験値の比較

び(d)の計算値は、 K を変えてもほとんど変化せず、また実験値とも良く一致している。図(c)は固有振動周期の3倍の周期 $T = 1.32 \text{ sec}$ に近い波であるため、 $\cos 3\sigma t$ の外力による振動が強く混入すること、および実験値は $K = 0$ あるいは1とした計算値に近いことがわかる。

以上、若干の計算例と実験結果を示したが、本計算法の特徴あるいは留意点などを要約すると次のようになる。

- ①伝達マトリックス法は、外力項が単振動か、あるいはその重ね合わせで表現できる場合に有効である。
- ②変位の算出に際し、剛性係数 EI の値が重要であり、付加質量係数 K および減衰定数 c_z の値は、共振点以外では、変位に与える影響は小さく、したがって、通常は、 $K = 1$ 、 $c_z = 2 C_D' |u|$ と固定して良いと思われる。
- ③モリソン公式の波力係数 C_D および C_M は、波動場の Reynolds 数および K. C. 数により変化するが、実用上は、 $C_D = 1.0$ 、 $C_M = 2.0$ と固定して差しつかえないと思われる。

2-5 伝達マトリックス法の応用

2-5-1 プラットフォームへの適用⁹⁾

図13に示すようなプラットフォームの場合は、軸力および軸方向変位をさらに考慮する必要があり、また隅角部では、中立軸の方向が変わるため、コーナマトリックスを用いる必要があるが、他の点は、本質的には、前述の計算方法と同じである。このプラットフォームの共振特性の一例を図14に示すが、横軸は波の周期 T であり、縦軸はB点の変位の最大値 ξ_{max} である。波形勾配は $H/L = 0.1$ と固定し、付加質量係数 K は0.1および2と変えたが、 K の増加に伴い、共振周期 T が増加する。 $T \approx 0.51 \text{ sec}$ において変位が極小値をとるが、これは脚柱ABとCDに働く波力の向きが逆になるため、変位が相殺されるからであり、この特性を利用すれば、共振時の変位を減少させることができる。すなわち、脚柱間隔を、

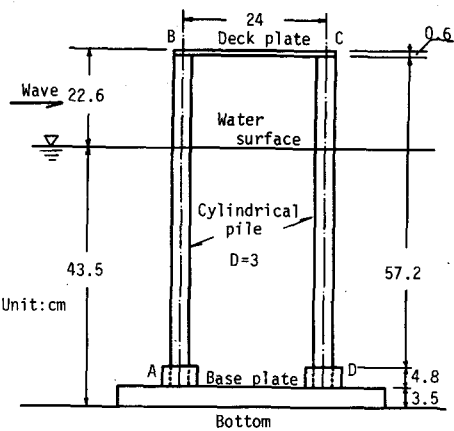


図13 プラットフォーム模型

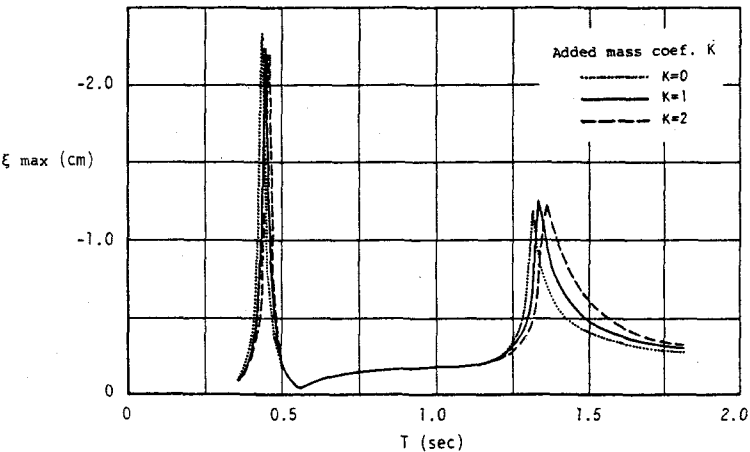


図14 プラットフォームの共振特性

共振を生じる波の波長の約半分に選定すれば、変位は小さくなると言える。

2-5-2 ストークス波理論による柱体の振動¹⁰⁾

モリソン公式の u に微小振幅波理論を適用した場合は、柱体の共振は、固有振動周期の奇数倍の周期の波によって発生することをすでに述べたが、実験によると、偶数倍の周期の波によっても共振が生じる。¹¹⁾この現象は、微小振幅波理論からは説明することは不可能であり、ストークス波理論を用いて始めて説明することができる。これは、ストークス波理論を用いた場合には、抗力項 $u|u|$ の部分から、 $\cos \sigma t$, $\cos 2\sigma t$, $\cos 3\sigma t$, $\cos 4\sigma t$, ……といった振動項が生じるからである。

図15には、ストークス波理論と微小振幅波理論によるそれぞれの計算値および実験値を示すが、円柱の固有振動周期 $T = 0.354 \text{ sec}$ の2倍の $T = 0.71 \text{ sec}$ における共振点において、実線で示したストークス波理論による計算値は、実験値と良く一致していることがわかる。

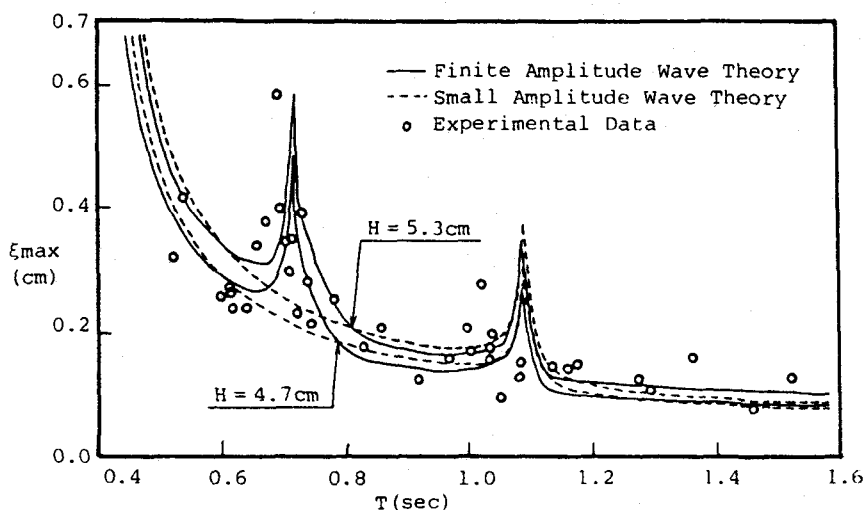


図15 ストークス波理論を用いた場合の小口径円柱の共振特性

2-5-3 大口径柱体の場合¹²⁾

波長に比べて柱体の直径が無視できない程度に大きくなると、入射波は回折・散乱が生じ、波力式としてモリソン公式の使用が不適当となるが、この場合には、式(15)の右辺にMacCamyとFuchsら¹³⁾が提示した回折理論による波力式を適用すれば良い。

図16に、直径 $D = 40 \text{ cm}$ の大口径柱体の振動変位について、回折理論による計算値と実験値との比較を示す。図よりわかるように、共振点付近では、 $K = 1.0$ は大き過ぎるようであり、付加質量を全く無視した $K = 0$ を用いた計算値が実験値に近い。このように、振動変位が大きい場合の付加質量係数¹⁴⁾については、今後さらに検討しなければならない。

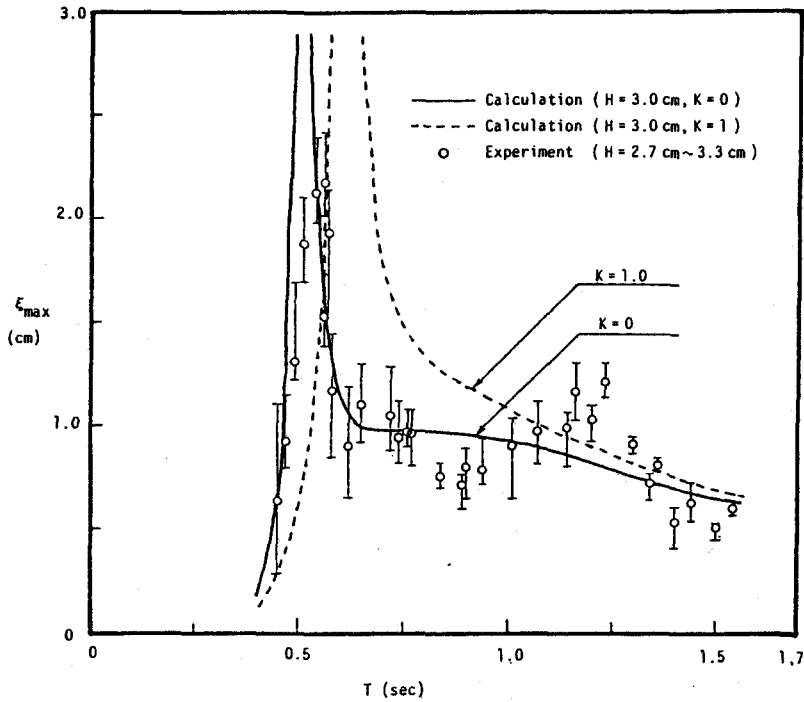


図16 大口径円柱の共振特性

3. 構造特性マトリックス法

3-1 構造特性マトリックス法による振動解析²⁾

伝達マトリックス法は定常振動を取り扱うのに便利であったが、不規則な振動や、過渡的な振動を解析する場合には本計算法が有効である。本計算法では、対象とする部材を梁要素に分割して取り扱うが、図17に、 i 番目の梁要素を示す。梁要素は曲げ変形のみを考慮し、軸方向変形などは無視する。節点 i の変位および回転角を、それぞれ ξ_i および θ_i で示すと、長さ l の梁要素のたわみ $\xi(x)$ は、

$$\xi(x) = \psi_1(x)\xi_{i-1} + \psi_2(x)\xi_i + \psi_3(x)\theta_{i-1} + \psi_4(x)\theta_i \quad (22)$$

と表示される。ここに $\psi_n(x)$ は、各々の節点の単位変形によって生じるたわみであり、

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - 3(x/l)^2 + 2(x/l)^3 \\ \psi_2(x) &= 3(x/l)^2 - 2(x/l)^3 \\ \psi_3(x) &= x(1 - x/l)^2 \\ \psi_4(x) &= (x^2/l)(x/l - 1) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。

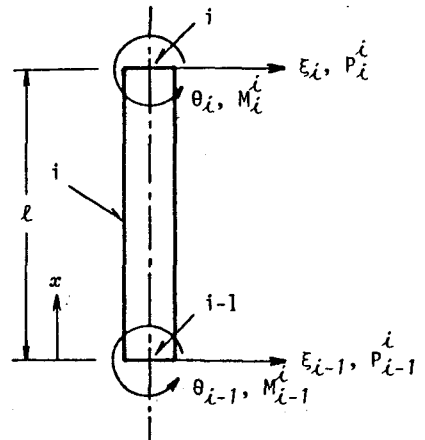


図17 梁要素

梁要素 i の4つの節点変位は、変位ベクトル

$$\mathbf{u}_i = (\xi_{i-1}, \theta_{i-1}, \xi_i, \theta_i)^T \quad (24)$$

で表わす。梁要素に加わる外力およびモーメントは、節点にのみ作用するとして取り扱うが、要素 i に加わる外力とモーメントを、節点 i および $i-1$ に分配したものを P_i^i, M_i^i および P_{i-1}^i, M_{i-1}^i で示し、これらを外力ベクトル

$$\mathbf{F}_i = (P_{i-1}^i, M_{i-1}^i, P_i^i, M_i^i)^T \quad (25)$$

で表わす。外力 $\mathbf{F}_i$ が作用する時の要素 i の満足すべき運動方程式は、

$$[\mathbf{M}]_i \ddot{\mathbf{u}}_i + [\mathbf{C}]_i \dot{\mathbf{u}}_i + [\mathbf{K}]_i \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \quad (26)$$

で与えられる。ここに、 $[\mathbf{K}]_i$ 、 $[\mathbf{M}]_i$ および $[\mathbf{C}]_i$ は、梁要素 i の剛性マトリックス、質量マトリックスおよび減衰マトリックスであり、梁要素に仮想仕事の原理を適用することにより、次のように求まる。

$$[\mathbf{K}]_i = \left[EI \int_0^l \psi_j'' \psi_k'' dx \right]_i = \left(\frac{2EI}{l^3} \right) \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2l^2 & -3l & l^2 \\ & & 6 & -3l \\ \text{Sym.} & & & 2l^2 \end{bmatrix}_i \quad (27)$$

$$[\mathbf{M}]_i = \left[\bar{m} \int_0^l \psi_j \psi_k dx \right]_i = (\bar{m}l)_i \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l \\ & \frac{1}{105}l^2 & \frac{13}{420}l & -\frac{1}{140}l^2 \\ & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l \\ \text{Sym.} & & & \frac{1}{105}l^2 \end{bmatrix}_i \quad (28)$$

$$[\mathbf{C}]_i = \left[\bar{c} \int_0^l \psi_j \psi_k dx \right]_i = \left(\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \right)_i [\mathbf{M}]_i \quad (29)$$

ここに、 $\psi_n'' = d^2\psi_n/dx^2$ 、 $\bar{m}$ は単位長当りの質量、 $\bar{c}$ は減衰定数である。

次に、具体的な構造物への適用について述べるが、ここでは、図18に示すような下部に板バネのついた柱体を対象とし、図示したように7つの梁要素に分割する。各要素の $\mathbf{u}_i$ および $\mathbf{F}_i$ を、 $\mathbf{u}_i = (\xi_{i-1}, \theta_{i-1}, \xi_i, \theta_i)^T = (\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i)^T$ および $\mathbf{F}_i = (P_{i-1}^i, M_{i-1}^i, P_i^i, M_i^i)^T = (\mathbf{f}_{i-1}^i, \mathbf{f}_i^i)^T$ のように $\mathbf{x}_i = (\xi_i, \theta_i)^T$ および $\mathbf{f}_i^i = (P_i^i, M_i^i)^T$ を用いて表わし、それに伴い、 $[\mathbf{M}]_i$ 、 $[\mathbf{C}]_i$ および $[\mathbf{K}]_i$ を部分行列を用いて書き変えらると、式(26)は、

$$\begin{bmatrix} m_{11}^i & m_{12}^i \\ m_{21}^i & m_{22}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{i-1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i-1} \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{i-1}^i \\ \mathbf{f}_i^i \end{pmatrix} \quad (30)$$

のように書き変えられる。各要素 $i = 1, 2, \dots, 7$ に対して式(30)を立て、これらを全て重ね合わせると、

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}] \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (31)$$

が得られる。ここに、

$$\mathbf{u} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_7)^T = (\xi_0, \theta_0, \xi_1, \theta_1, \dots, \xi_i, \theta_i, \dots, \xi_7, \theta_7)^T \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (f_0^1, f_1^1 + f_1^2, \dots, f_i^i + f_i^{i+1}, \dots, f_7^7)^T = (f_0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_7)^T \\ &= (P_0, M_0, P_1, M_1, \dots, P_i, M_i, \dots, P_7, M_7)^T \end{aligned} \quad (33)$$

である。[M]は、全体の質量マトリックスであり、

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & & & & & \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & & & & \\ & m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & \dots & & & \\ & & & \dots & \dots & & \\ & & & & & m_{22}^7 & \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。[C]および[K]は、[M]と全く同じ形の行列であり、式(34)の m_{jk}^i を、 c_{jk}^i あるいは k_{jk}^i に置き変えたものになる。

以上で、構造物全体の運動方程式である式(31)が定まったが、変位ベクトルの時間変化 $\mathbf{u}(t)$ を算出するためには、初期値問題として式(31)を近似的に解かなければならない。その解法には、たとえば、線型加速度法、ニューマークの β 法、ウィルソンの θ 法、ルンゲ・クッタ法などがあるが、これらについては、ここでは省略する。

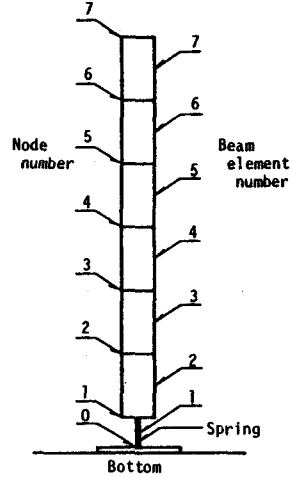


図18 梁要素に分割した柱体

3-2 波による柱体の振動¹⁵⁾

2-3と全く同様に、波力式として相対水粒子速度を用いたモリソン公式を使用するが、式(33)の P_i は、モリソン公式を、図19に示す z_{i-1} から z_i の間で積分することにより、

$$P_i = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \left(\frac{1}{2} C_D \rho_w D u |u| + C_M \rho_w A \dot{u} \right) dz \quad (35)$$

で与えられる。式(33)の M_i は、2-3で述べたように無視しても大差ない。また、式(28)および式(29)の $\bar{m}$ および $\bar{c}$ は、式(16)および式(17)を Δz_i で割ったものとなる。

図18に示した円柱の振動解析結果の一例を図20に示すが、円柱は、長さ60cm、直径4cm、比重1.22であり、下端部のバネの剛性は $EI = 1.93 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ である。水深は $h = 40 \text{ cm}$ であり、静水中における円柱の固有振動周期は、 $T_0 = 0.80 \text{ sec}$ である。図20(a)および(b)の実線および破線は、それぞれ円柱頂部の変位の計算値および実験値であるが、両者は良く一致している。特に、図(a)は、波の周期が $T = 0.84 \text{ sec}$ と固有周期 T_0 に近い場合、時間 t の経過と共に、変位 ξ の振幅は増加して行くが、図(b)の $T = 0.92 \text{ sec}$ の場合は、 T_0 から若干ずれた値であるため、振幅がビートを打ついわゆる噛りが生じていることがわかる。なお、この時の初期値は、計算値および実験値とも、 $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0$ であり、 $\mathbf{u}$ の時間変化は、ニューマークの β 法を用い、 $\beta = 0.25$ および時間間隔 $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ を使用している。

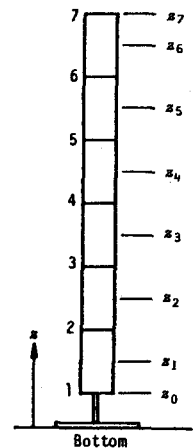
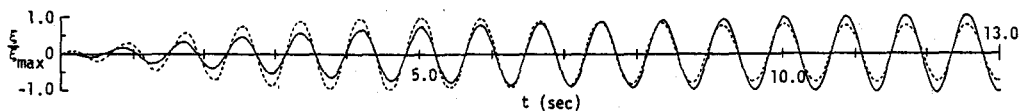
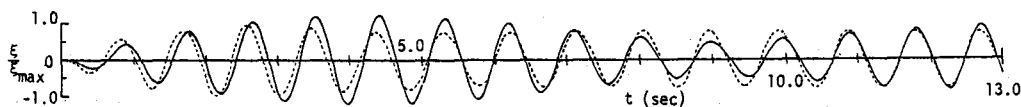


図19 波力の積分区間



(a) $T = 0.84 \text{ sec}$, $H = 1.9 \text{ cm}$, $\xi_{\max} = 4.9 \text{ cm}$



(b) $T = 0.92 \text{ sec}$, $H = 4.1 \text{ cm}$, $\xi_{\max} = 4.9 \text{ cm}$

図20 規則波による円柱の振動変位の時間変化

3-3 不規則波への応用¹⁵⁾

不規則波による柱体の振動は、柱体の設置位置での水面変動 $\eta(t)$ のみを入力データとして算出することができる。すなわち、Reid¹⁶⁾が提示した線型フィルター

$$G_s[\eta(t)] = a_0 \eta(t) + \sum_{n=1}^N a_n [\eta(t+n\tau) + \eta(t-n\tau)] \quad (36)$$

$$G_a[\eta(t)] = \sum_{n=1}^N b_n [\eta(t+n\tau) - \eta(t-n\tau)] \quad (37)$$

において、 a_n および b_n を、微小振幅波の η に対する u および $\dot{u}$ の周波数応答関数のフーリエ係数に選ぶならば、 $G_s[\eta(t)]$ および $G_a[\eta(t)]$ は、不規則波の $u(t)$ および $\dot{u}(t)$ を表わすことになる。この $u(t)$ および $\dot{u}(t)$ を、式(35)のモリソン公式に適用する¹⁷⁾ことにより、構造特性マトリックス法を用いた不規則振動解析が可能となる。

図21は、 η から算出した円柱頂部の変位 ξ と、実験値の ξ とを、それぞれ実線および破線で示して比較したものであるが、両者は良く一致している。なお、この解析に用いた時間ステップの間隔は、 $\tau = \Delta t = 0.02 \text{ sec}$ である。

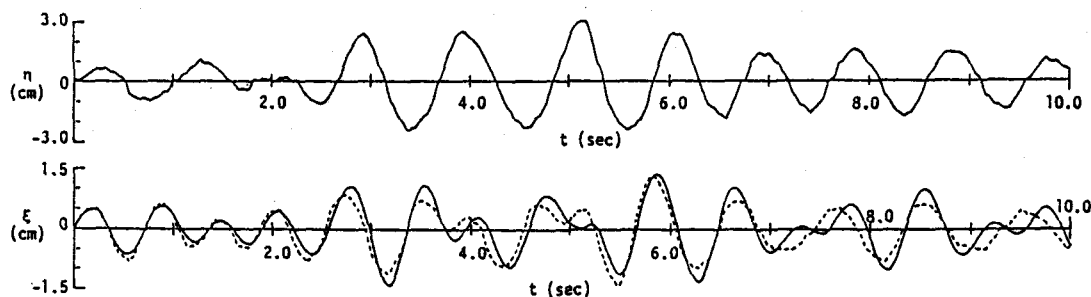


図21 不規則波による円柱の振動変位の時間変化

4. 結 び

以上、マトリックス法を用いた柱状構造物の波浪応答解析法について述べると共に、その動的応答特性について若干説明したが、紙面の都合もあり、柱体の変位速度が水粒子速度に比べて無視できない場合(式(14)を用いる場合)の計算結果や、基本共振点における振動特性あるいは減衰定数に関する考察¹⁸⁾などを加えることができなかった。最後に、有益な助言を賜った金沢大学工学部小堀為雄教授に謝意を表すると共に、小文が読者諸氏にとって何らかの御参考になれば幸いです。

参考文献

- 1) Pestel, E. C. and F. A. Leckie : Matrix methods in elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 2) Clough, R. W. and J. Penzien : 構造物の動的解析, 科学技術出版社, 1978.
- 3) 戸川隼人 : 有限要素法による振動解析, サイエンス社, 1976.
- 4) 石田 啓・加島 卓 : 小口径柱体の波浪振動に関する理論的研究, 土木学会中部支部講演概要集, pp. 78~79, 1984.
- 5) Gaither, W. S. and D. P. Billington : The dynamic response of offshore structures to time-dependent forces, Proc. 9th Conf. Coastal Eng., pp. 453~471, 1964.
- 6) 石田 啓・渡辺公徳・松井輝峰 : 柱状構造物の波浪振動解析に関する研究, 金沢大学工学部紀要, 第14巻, 第1号, pp. 9~17, 1981.
- 7) Hajime Ishida : Dynamic response of vertical pile to periodic waves by transfer matrix method, SEME, pp. 2. 105~2. 114.
- 8) 椎貝博美・関口定男・星野久雄 : ヒンジで支えられた柱状海洋構造物の振動特性, 土木学会論文報告集, 第342号, pp. 153~160, 1984.
- 9) 石田 啓・沢木 一 : 波によるプラットフォームの振動解析に関する研究, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 599~603, 1981.
- 10) 石田 啓・近田美則・細貝隆司 : ストークス波理論による柱体の波浪応答解析法, 金沢大学工学部紀要, 第15巻, 第2号, 1982.
- 11) 樫木 亨・中村孝幸・三木秀樹 : 単円柱構造物の波による振動挙動について, 第24回海岸工学講演会論文集, pp. 367~371, 1977.
- 12) 石田 啓・石川浩司 : 規則波による大口径柱体の動的応答に関する研究, 金沢大学工学部紀要, 第16巻, 第2号, pp. 17~25, 1983.
- 13) MacCamy, R. C. and R. A. Fuchs : Wave forces on piles : A diffraction theory, Beach Erosion Board, Tech. Memo, No. 69, pp. 1~17, 1954.
- 14) 田中良弘 : 円柱海洋構造物の地震応答解析, 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 366~370, 1983.
- 15) 石田 啓・細貝隆司 : 構造特性マトリックスによる柱体の波浪応答解析 — 不規則波への応用 — , 第30回海岸工学講演会論文集, pp. 371~375, 1983.
- 16) Reid, R. O. : Correlation of water level variations with wave forces on a vertical pile for nonperiodic waves, Proc. 6th Conf. Coastal Eng., pp. 749~786, 1957.
- 17) 岩垣雄一・石田 啓・千田哲雄 : 円柱に作用する不規則波力について, 第20回海岸工学講演会論文集, pp. 1~5, 1973.
- 18) 石田 啓・黒崎弘司 : 非線型減衰力を考慮した場合の円柱の波浪振動について, 金沢大学工学部紀要, 第16巻, 第2号, pp. 9~15, 1983.