

ソリトンスpekトル理論の海岸工学への応用

安 田 孝 志

1. 緒 言

海の波は、大気と海洋の相互作用を媒介する海面境界過程のエネルギーの主要部分を占めると同時に、数千km以上を伝播するうねりに象徴されるエネルギーの水平輸送をも中心的に担っており、海水運動系において果たす役割は大きい。また、海の波を場の運動として捉えれば、それは分散波から長波までの多様な運動形態を持つ場に規定された無数のモードの集合と見なせる。さらに、これらのモード支配パラメータを一般化座標とし、その上に張られた位相空間内で海の波を捉えれば、その統計物理学的記述も可能となる。

このように、海の波は物理学的に極めて興味ある対象であり、幅広い分野でその研究が進められているが、とりわけ、これらの波の“sink”になっている沿岸域を主要舞台とする海岸工学の分野における研究は活発である。海岸工学においては、外力の予知および制御を合理的に行う必要性から、主要な外力である風波やうねりの表示法の確立が重要課題となっている。そのために、スペクトル解析法や波別解析法によってこれらの表示が試みられて来たことは周知の通りである。前者は、力学理論としての側面を持っているため、統計量が同時に力学的巨視量になるという優れた特色を有している。しかしながら、非線形性が卓越して来るに伴ってその限界が現れ、非線形干渉によるパワースpekトルの変化のために統計的記述が困難となるだけでなく、砕波現象やそれに至る過程での粒子性を強めて来る波の伝播特性の説明が不可能となって来る。このため、単弦波モードからのせつ動展開によって非線形性を評価する非線形spekトル法¹⁾が試みられて来たが、永年項の処理やspekトル幅および非線形性の増大に伴う計算の繁雑さのために、その適用は深海域における海洋波浪に留まっている。これに対し、後者は、spekトル解析法のような適用上の制約を受けず、1波ごとの独立性の強い、いわば粒子的構造を持った浅海域における波浪に対して有効となっているが、統計量が対象とする波の力学的諸量と概念的に結び付いているに過ぎないため、統計量の推定値から力学的特性を直接評価することは出来ないという問題を抱えている。また、こうした手法に依る限り、海の波の確率的構造の究明や力学理論に基づく巨視的記述は困難であり、統計物理学などの手法の導入は望めない。

上述のいずれの手法もそれぞれ問題点を抱えており、豊かな可能性を持つ海岸工学の未来を展望したとき、これらの問題点を解消した合理的な海の波の表示法を確立することは、海岸工学の最重要課題の1つとして位置付けられねばならないであろう。そして、その確立への過程は、海の波を物理学的に捉え直すことから始まるものと思われる。幸にして、Zabusky および Kruscal²⁾に端を発した非線形波動に関する近年の活発な研究によって、基準モードへの分解が困難と考えられていた複雑な非線形波動に非線形基準モードであるソリトンモードが存在することが明らかにされて来た。しかも、Zabusky らのソリトンモードの発見は、Korteweg および de Vries³⁾によって水の波の方程式として導かれたいわゆるKdV 方程式の数値シミュレーション⁴⁾に負っており、その適用性も Zabusky および Galvin⁵⁾の水利実験結果との比較によって検証され、海の波のソリトンモード表示が試みられて何ら不思議のない状況にある。事実、Peregrine⁵⁾によってうねりのソリトンモード表示が示唆されているにも拘わらず、実際のソリトンモード表示の試みは、津波のような局在波の時間発展を扱った Segur⁶⁾ および Hammack⁷⁾ らの例の他には、著者らによる例^{8),9),10)}が

あるに過ぎない。これには種々の原因があると思われるが、KdV方程式の初期値問題の解法として最も一般的な逆散乱法の適用上の制約⁶⁾や、Ursell数が無限大となる極限波のソリトンを基準モードとして有限なUrsell数の不規則波を表示することに矛盾を感じるなどが主な原因と考えられる。

著者らは、非線形性が卓越して来る浅海域から極浅海域にかけては、非線形性と分散性が平衡することによって、ソリトンを基準モードとするコヒーレントな力学的秩序が形成されているとの観点から、現地波浪のソリトンモード表示を試み、その適用性を広範な海象下において明らかにして来た。これによって、海の波を粒子的に捉える著者らの試みは、周波数を重要なパラメータとし、平均海面周りの周期的水位変動を波動の前提として来た従来の観点とは大きく異なるものであるが、一応の裏付けを得ることが出来た。このことは、ソリトンを基準モードとしたときの数々の利点；例えば、せつ動展開が不用、モード支配パラメータが不変、現地波浪への周期性仮定が不用、および砕波現象の記述が容易になるなど、によって、上述の従来の手法の問題点が容易に解消されうること示唆するものと言えよう。

以上の観点から、ここでは、海の波を統計物理学的に、かつ簡潔に記述することを目指すことによって、ソリトンモード表示が必然となることを示すと同時に、これによって海の波の微視的および巨視的状态の統一的記述が可能となり、ソリトンモード表示が海岸工学に十分応用される可能性のあることを明らかにしたい。

2. 波動方程式

2-1 海の波の基礎方程式

ここで扱う海の波として偶然外力に独立な一様水深場のうねりを考え、大気圧による渦度の生成がなく、波動運動下では底面での粘性効果がStokes Layerに局限されることに加え、非粘性扱いによって波動運動の本質が失われない点を考慮すれば、このときの流体力学の基礎方程式は、図-1のように座標を定めることにより、一定圧力下の非回転波動場の仮定の下に次式のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0 \\ \Phi_t + (\Phi_x^2 + \Phi_z^2) / 2 + gz' \Big|_{z=h+z'} &= 0 \\ \eta_t + \Phi_x \eta_x - \Phi_z \Big|_{z=h+z'} &= 0 \\ \Phi_z \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 Φ ；速度ポテンシャル、 z' ；平均水面周りの水位変動、 h ；平均水深、および g ；重力の加速度である。

2-2 波動方程式の誘導

上述のうねりに対して、さらに、分散性と非線形性の平衡関係および時間発展型進行波を仮定すれば、¹¹⁾
Gardner - Morikawa 変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t^*, \quad x^* = x/h, \quad t^* = t\sqrt{g/h}, \quad z^* = z/h, \quad \varepsilon = (h/L)^2 \quad (2)$$

およびせつ動解

$$z'/h (= \varepsilon \eta) = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \dots \quad (3)$$

$$\Phi/h\sqrt{gh} = \varepsilon^{1/2}\Phi_1 + \varepsilon^{3/2}\Phi_2 + \dots \quad (4)$$

を式(1)に適用することによって、式(1)は次式のように書き換えられる。

$$\eta_\tau + 3\eta\eta_\xi/2 + \eta_{\xi\xi\xi}/6 = \varepsilon F(\eta, \eta_\xi, \Omega_\tau, \dots) + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

$$\Omega_\xi - \eta = \varepsilon(\eta_{\xi\xi}/2 + \eta^2/2) + O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

ここに、 L ；代表波長であり、 Ω と Φ の関係は次式のように書かれる。

$$\Phi/h\sqrt{gh} = \varepsilon^{1/2}(\Omega - \varepsilon z^{*2}\Omega_{\xi\xi}/2 + \dots) \quad (7)$$

式(5)において $\varepsilon=0$ とすれば、周知のKdV方程式が、このときの海の波の最低次の波動方程式として、次式のように導かれる。

$$\eta_\tau + 3\eta\eta_\xi/2 + \eta_{\xi\xi\xi}/6 = 0 \quad (8)$$

図-2¹²⁾は、初期波として単弦波を与えたときの一樣水深場での進行波の波形変化に関する実験結果と上述の式(5)および(8)による数値シミュレーション結果との比較を示したものである。孤立波やクノイド波の波形に関する高次項の補正が微小であることは良く知られているが、この図からも、ソリトン分裂を伴う伝播過程の波形に対する高次項の補正は小さく、その記述にKdV方程式を用いても何ら本質を失うものでないことがわかる。そこで、極力簡潔に海の波を記述する立場から、KdV方程式をここで用いるべき波動方程式とし、以下では、海の波をKdV方程式に支配される場の運動として捉え、その表示を試みる。

3. ソリトンモードに基づく波動解

3-1 波動解に対する観点

海の波を単にKdV方程式の波動解として表示するのであれば、所定の波形を与えてKdV方程式の初期値問題を解けば良いことになる。勿論、この種の問題の一般的解法である逆散乱法の適用上の制約条件を越えた拡張¹⁴⁾が試みられてはいるものの、数十分間に及ぶ波形記録に直接逆散乱法を拡張適用することは現状では不可能と言わざるを得ない。しかしながら、仮に可能になったとしても、これによって得られる成果は、与えた波形に関するものに過ぎず、KdV方程式に支配される波動場全般に及ぶものではない。

ここでは、KdV方程式の初期値問題をその都度解くことによって必要な理論的表示を導くのではなく、

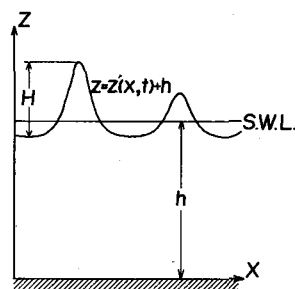


図-1 座標系および記号

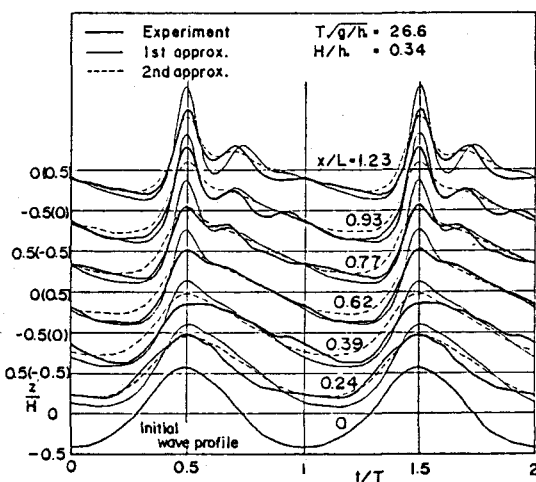


図-2 単弦波のソリトン分裂過程に関する高次項の影響

海の波をKdV方程式に支配される場の運動として捉えると同時に、そこに一定の基準モードを見出し、場の運動をこれら無数のモードの励起状態と考える原子論的視点からその表示を試みる。この観点によって、海の波の表示問題は、励起されているモードの状態を知ることには帰着される。したがって、こうした基準モードを見出すことが出来れば、基準モードを規定するパラメータを一般化座標とし、その上に張られた位相空間において海の波を統計物理学的に記述することが可能となろう。こうした観点から、以下では非線形不規則波動場を簡潔に表示する基準モードをKdV方程式の基本解から見出し、これを基にした表示を試みる。

3-2 KdV方程式の基本解

単弦波からのStokes展開によってKdV方程式の波動解を導けば、それは次式のように表される。

$$\eta = A \cos \theta + (3A^2/4\gamma) \cos 2\theta + (27A^3/64\gamma^2) \cos 3\theta + \cdots \quad (9)$$

ここに、 $\gamma = (2\pi h/L)^2$ および $\theta = 2\pi x/L - \omega t$ であり、 A ; Ursell 数、および ω ; 角周波数。上式は、KdV方程式に支配される場においても単弦波が基準モードとなり得ることを示すが、同時に、計算の繁雑さもさることながら、モード数が不確定という欠点も併せて示している。

KdV方程式の波動解を厳密解として導けば、それは次式のクノイド波解となる。

$$\eta = A \left[\text{cn}^2 \left\{ (\sqrt{3A}/2k) \vartheta \right\} - (E/K + k^2 - 1)/k^2 \right] \quad (10)$$

ここに、 $\vartheta = (x/h - ct/h)$ 、 c ; 波速、 K および E ; 第1種および第2種完全楕円積分、 k ; 楕円積分の母数、および cn ; Jacobi の cn 関数である。これから、式(10)は、楕円関数に依ってはいるものの、モード数を確定出来、同一の波動を式(9)に比べてはるかに簡潔に表示していることがわかる。式(10)において周期を無限とすれば、次式の孤立波(ソリトン)解が得られることは周知の通りである。

$$\eta = A \text{sech}^2 \left\{ (\sqrt{3A}/2) \vartheta \right\} \quad (11)$$

このことからすれば、クノイド波の方がソリトンよりも一般的であると考えられるが、戸田¹⁵⁾によって導かれたJacobiの dn 関数と双曲線関数 sech との関係

$$\text{dn}^2 \chi = (\pi/2K')^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{sech}^2 \left\{ (\pi K/K') (\chi/2K - l) \right\} - k/2KK' + E/K \quad (12)$$

を用いれば、式(10)は sech によって次式のように表示される。

$$\eta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a \text{sech}^2 \left\{ (\sqrt{3a}/2) \vartheta - l\pi K/K' \right\} - (4aK'^2/3\pi^2) \{ 3(E/K) + 2k^2 - 2 \} \quad (13)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \vartheta &= \varepsilon^{-1/2} (\xi - c^* \tau) = (x/h - ct/h), \quad c = 1 - (2aK'^2/\pi^2) \{ 3(E/K) + k^2 - 2 \}, \\ a &= A(\pi/2kK')^2, \quad \varepsilon = (h/L)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

これは、振幅 A のクノイド波は振幅 a のソリトンの級数和で表されることを示す。そして、 $k \geq 0.98$ になると、1ヶのソリトンがクノイド波の1つの山と完全に対応するようになり、クノイド波は相互に独立なソリトンの連なりとして漸近的に表されるようになる⁸⁾。このことは、ソリトンのような粒子性波動を基準モードとしても周期性波動の表示が可能であり、ソリトンの方がクノイド波よりも一般的な基本解となる

ことを示すものと考えられる。

3-3 基本解による不規則波の表示

式(9)の単弦波モードによる不規則波表示は、モード間干渉項を励起させることによって原理的に可能ではあるが、干渉項や永年項の処理が極めて繁雑になり、簡潔に海の波を表示する立場とは矛盾したものになる。勿論、スペクトルの帯域幅が特に狭い場合には、単弦波の振幅を非線形 Schrödinger 方程式の下で変調させる¹⁶⁾ことによって安定な波動解が導かれるが、通常のスペクトルを有する不規則波に対しては極めて困難である。また、クノイド波を基準モードとする表示についても、高々2種類の基準モードを有す不規則波の場合に成功している¹⁷⁾に過ぎず、3ヶ以上のクノイド波モードによる不規則波の表示は不定問題となっている。¹⁸⁾

これに対し、局在波動場の条件下ではあるが、KdV方程式の多ソリトン解は種々の方法^{19), 20)}で導かれており、また、クノイド波のソリトンモード表示が可能であることを考えると、ソリトンを基準モードとした不規則波の表示は十分可能と判断されるだけでなく、簡潔に海の波を表示する立場に矛盾しない唯一つの手法とさえ言えよう。そこで、いま対象としている海の波は、無数のソリトンを基準モードとした力学的秩序、すなわち、ソリトン構造を持つとの仮定の下に、平均海面 η の波形の連続条件を満足させたその表示を、KdV方程式の厳密解として次式のように導く。²¹⁾

$$\eta = (4/3) (\log F)_{\xi\xi} - \eta_0 \quad (15)$$

ここに、

$$\eta_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (2/3\zeta) (\log F)_{\xi} \Big|_{-\zeta}^{\zeta} \quad (16)$$

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \det \left| \delta_{ij} + \frac{2B_i}{B_i + B_j} f_i \right|, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \exp \{ B_i (\xi - c_i \tau - \tilde{\delta}_i) \}, \quad B_i = \sqrt{3A_i}, \\ c_i &= A_i/2 - 3\eta_0/2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

であり、 A_i ；振幅に相当するソリトンの固有値、 δ_{ij} ；Kroneckerのデルタ、 c_i ；固有値 A_i を持つソリトンの波速、 $\tilde{\delta}_i$ ；ソリトンの時空間上の位置を与える位相定数、および η_0 ；波形の連続条件を満足させるために導入される積分量である。

ここでは前述したようにうねり性の不規則波浪を考えていることから、 $\tau = \tau_0$ における各ソリトンの波峯の座標を ξ_i としたとき、各ソリトンの波峯間隔に対し、

$$|\xi_i - \xi_j| > \beta, \quad e^{-\beta} \ll 1, \quad -\infty < \dots < \xi_i < \xi_j < \dots < +\infty \quad (19)$$

の関係が成立するものと仮定すれば、式(17)は漸近的に次式のように書き換えられる。

$$F = \prod_{i=1}^{\infty} \{ 1 + f_i \exp(-B_i \Delta_i) \} \quad (20)$$

ここに、

$$\Delta_i = -(1/B_i) \log \left\{ \prod_{l=1}^{i-1} (B_l - B_i)^2 / (B_l + B_i)^2 \right\} \quad (21)$$

さらに、式(20)を式(15)に代入すれば、式(19)の関係が満足されるとの仮定の下で、KdV方程式の基本解(ソリトンモード)に基づく不規則波の漸近表示が次式のように導かれる。

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - \eta_0, \quad \vartheta_i = (\sqrt{3A_i}/2)(\xi - c_i \tau - \delta_i), \quad \delta_i = \tilde{\delta}_i + \Delta_i \quad (22)$$

この表示は、時間発展型のKdV方程式の $\tau \rightarrow \infty$ における漸近解に形式的に一致しているが、漸近解表示に依る限り、発展型式に独立となる。²¹⁾ また、式(22)は、式(19)の下で式(15)の厳密解に漸近的に一致するだけであるが、 β がソリトン幅パラメータによって、

$$\beta = 2/B_i + 2/B_j \quad (23)$$

のように与えられるとするならば、通常の現地波浪を対象とする限り、式(15)よりもむしろ合理的な表示となる。²²⁾

したがって、式(19)の下では、KdV方程式に支配される場のいかなる運動もソリトンの連なりとして式(22)によって漸近表示出来、しかも、エネルギー準位分布に関わる固有値 $\{\mathbf{A}\}$ および空間分布に関わる位相定数 $\{\delta\}$ のみによって一義的に決定されることになる。

式(22)の表示は既に十分簡潔であるが、さらに使い易いように、Schmidtの方法によって、次式の正規直交関数列表示に書き換える。

$$\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N A_i \psi_i(\vartheta_i) - \eta_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N A_i \sum_{l=1}^i c_{il} \phi_l(\vartheta_i) - \eta_0 \quad (24)$$

ここに、

$$\psi_i = \operatorname{sech}^2 \vartheta_i$$

$$\phi_1 = \psi_1 / \|\psi_1\|,$$

$$\phi_l = |F| \cdot G(\phi_1, \dots, \phi_{l-1})^{-1/2} \cdot G(\phi_1, \dots, \phi_l)^{-1/2}, \quad (l \geq 2)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & & (\phi_1, \phi_l) \\ \vdots & & \vdots \\ (\phi_{l-1}, \phi_1) & \cdots & (\phi_{l-1}, \phi_l) \\ \psi_1 & \cdots & \psi_l \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$G(\phi_1, \dots, \phi_l) = \begin{vmatrix} (\phi_1, \phi_1) & \cdots & (\phi_1, \phi_l) \\ \vdots & & \vdots \\ (\phi_l, \phi_1) & \cdots & (\phi_l, \phi_l) \end{vmatrix}$$

$$c_{il} = D_{li} (d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{NN})$$

であり、 $(\phi_l, \phi_j); \int_0^\infty \phi_l \phi_j d\xi$ で定義される内積、および D_{li} ; 次式の行列 $[D]$ の d_{li} 要素の余因子である。

$$\left. \begin{aligned}
 [D] &= \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ d_{N1} & \cdots & d_{NN} \end{bmatrix} \\
 d_{li} &= \frac{\sum_{j=i}^{l-1} d_{ji}(\psi_l, \psi_j)}{\|\psi_l - \sum_{j=1}^{l-1} \phi_j(\psi_l, \phi_j)\|}, \quad (l > i \geq 1) \\
 d_{li} &= 1 / \|\psi_l - \sum_{j=1}^{l-1} \phi_j(\psi_j, \phi_l)\|
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

4. ソリトンモードに基づく内部特性表示⁹⁾

4-1 速度ポテンシャルの誘導

ソリトンを基準モードとした場合、モード数だけでなく、固有値 A_i および積分量 η_0 が共に不変量となるため、波速 c_i も不変量となり、各ソリトン是一定速度で伝播することになる。この結果、各ソリトンに対して、

$$\sigma_i = \xi - c_i \tau \quad (27)$$

の変換が可能となる。いま、各ソリトンの波形を表す η_i およびこれに対応する速度ポテンシャル Ω_i が共に σ_i の関数であるとするれば、次式の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned}
 \partial \eta_i / \partial \tau &= -c_i \partial \eta_i / \partial \sigma_i, \quad \partial \eta_i / \partial \xi = \partial \eta_i / \partial \sigma_i \\
 \partial \Omega_i / \partial \tau &= -c_i \partial \Omega_i / \partial \sigma_i, \quad \partial \Omega_i / \partial \xi = \partial \Omega_i / \partial \sigma_i
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これより、式(6)および(7)から導かれる Φ と η の関係式

$$(\partial \Phi / \partial x) / \sqrt{gh} = \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \left\{ \eta^2 / 2 + (1/2)(1 - z^{*2}) \partial^2 \eta / \partial \xi^2 + \partial \Omega / \partial \tau \right\} + \dots \quad (29)$$

に式(27)および(28)の関係を適用すれば、ソリトンモードに基づく速度ポテンシャルの表示が次式のように導かれる。

$$\begin{aligned}
 (\partial \Phi / \partial x) / \sqrt{gh} &= \sum_i \eta_i - \eta_0 + \left(\sum_i \eta_i - \eta_0 \right)^2 / 2 + (1 - z^{*2}) / 2 \sum_i \partial^2 \eta_i / \partial \sigma_i^2 \\
 &\quad - \sum_i c_i (\eta_i - \eta_0) + \dots
 \end{aligned} \quad (30)$$

これから、ソリトン構造を持つ波の内部特性は、個々のソリトンの固有値に直接支配される粒子性と同時に、波形の連続条件を通して ensemble 特性に依存する周期性を併せ持つことがわかる。

4-2 水粒子速度の表示

式(30)に式(22)を代入し、 A_i^2 のオーダーまで評価すれば、Euler座標での水平および鉛直水粒子速度 u および w はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - \eta_0 + \sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \left[\frac{\eta_0}{2} + \frac{A_i}{2} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} - \frac{9}{4} A_i \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\sum_i A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right)^2 - \eta_0^2 + \frac{1}{2N} \eta_0 \sum_i A_i \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right) \sum_i \sqrt{A_i^3} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \tanh \vartheta_i \left[2 + \left\{ \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} A_i (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_i - 1) \right. \\ & \left. + 2 \sum_j A_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j + 2 \eta_0 - A_i \right] \end{aligned} \quad (32)$$

さらに、Lagrange 座標での水平および鉛直水粒子速度 U および W は、それぞれ次式のようにになる。

$$\frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{u}{\sqrt{gh}} + 2 \sum_i \sum_j \frac{\sqrt{A_i A_j}}{c_i} \tanh \vartheta_i \Big|_0^\infty \tanh \vartheta_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j + \eta_0 \sum_i \sqrt{3 A_i^3} \tanh \vartheta_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{W}{\sqrt{gh}} = & \frac{w}{\sqrt{gh}} - \left(\frac{z}{h} \right) \left[\sum_i \sum_j \frac{A_j^2 \sqrt{3 A_i}}{c_i} \tanh \vartheta_i \Big|_0^\infty \operatorname{sech}^2 \vartheta_i (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_j - 2) \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \eta_0 + \sum_j A_j^2 \operatorname{sech}^2 \vartheta_j (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_j - 2) - \sum_i \sum_j \frac{A_i \sqrt{3 A_j^3}}{c_i} \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_j \tanh \vartheta_j \right] \end{aligned} \quad (34)$$

4-3 質量輸送速度の表示

4-1 において示したように、式 (28) を仮定することによって速度ポテンシャルを導いているため、Stokes の波速の定義を用いた場合に生じる水粒子速度の束縛はなく、非線形効果によって Euler および Lagrange の両座標において質量輸送速度が定義されることになる。

いま、観測時間を T^* とすれば、Euler 座標での質量輸送速度 $\bar{u}$ は、次式で定義される。

$$\bar{u} = \frac{1}{T^*} \int_0^{T^*} \frac{u}{\sqrt{gh}} dt^* \quad (35)$$

これに、観測時間内に含まれる N ケのソリトンのみからなる式 (31) の表示を代入すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = & \frac{1}{2T^*} \int_0^{T^*} \left(\sum_i^N A_i \operatorname{sech}^2 \vartheta_i \right)^2 dt^* - \frac{1}{2} \eta_0^2 - \frac{1}{2T^*} \left\{ 1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \sum_i^N \frac{\sqrt{3 A_i^3}}{c_i} \\ & \times \left\{ 2 \tanh \vartheta_i \Big|_0^{T^*} - \tanh \vartheta_i (3 \operatorname{sech}^2 \vartheta_i + 2) \Big|_0^{T^*} \right\} \\ & - \sum_i^N c_i \left\{ \frac{\eta_0}{N} + \sqrt{\frac{A_i}{3}} \frac{2 \tanh \vartheta_i}{c_i T^*} \Big|_0^{T^*} \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

Lagrange 座標での質量輸送速度 $\bar{U}$ も同様に、観測時間内の U の平均値として定義すれば、それは次式で表示される。

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{U}}{\sqrt{gh}} = & \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} + \frac{2\eta_0}{T^*} \sum_i^N \frac{1}{c_i^2} \sqrt{\frac{A_i}{3}} \left\{ \frac{\sqrt{3}A_i}{2} c_i t^* \operatorname{sech}^2 \vartheta_i + \tanh \vartheta_i \right\} \Big|_0^{T^*} \\
& - \frac{2}{T^*} \sum_i^N \sum_j^N \frac{A_j}{c_i c_j} \sqrt{\frac{A_i}{3}} \tanh \vartheta_i \Big|_0^{T^*} \operatorname{sech}^2 \vartheta_j \Big|_0^{T^*} + \frac{2}{T^*} \sum_i^N \sum_j^N \frac{\sqrt{A_i A_j^3}}{c_i} \\
& \times \int_0^{T^*} \tanh \vartheta_i \tanh \vartheta_j \operatorname{sech}^2 \vartheta_j dt^*
\end{aligned} \quad (37)$$

5. ソリトンモード表示の現地波浪への適用

5-1 観測記録のソリトン分解・合成

所定の現地波浪のソリトンモード表示を行うには、まず、ソリトン構造が形成されているとの仮定の下に、観測波形をソリトンモードに分解し、各モードごとに固有値 A_i および位相定数 δ_i を決定しなければならない（ソリトン分解）。ついで、こうして計算された A_i および δ_i の値を式 (22) に代入し、ソリトンモードに基づく波形の表示を行う（ソリトン合成）。こうしたソリトン分解・合成は、所定の現地波浪を一般化座標 $\{\mathbf{A}, \boldsymbol{\delta}\}$ 上に張られた位相空間の点として位置付けると同時に、その点上でソリトンモードを励起することと捉えられ、これによって、後述されるように巨視的記述の見通しが良くなる。

具体的には固有値 $\{\mathbf{A}\}$ を計算するには、式 (24) の右辺が完全正規直交関数系であることを利用し、これと観測波形 Y との内積演算を行えば良く、その結果、 $\{\mathbf{A}\}$ が次式のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{N1} \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (Y + \eta_0, \phi_1) \\ \vdots \\ (Y + \eta_0, \phi_N) \end{Bmatrix} \quad (38)$$

位相定数 $\{\boldsymbol{\delta}\}$ については、 $\{\mathbf{A}\}$ とは独立に各ソリトンの波峯の位相を観測記録から直接決定出来るため、ソリトン分解は式 (38) を解く問題に帰着される。式 (38) は $\{\mathbf{A}\}$ に対して形式的に解けた形になっているが、右辺の ϕ_i および η_0 が $\{\mathbf{A}\}$ の関数でもあるため、実際のソリトン分解は、式 (38) を $\{\mathbf{A}\}$ に関する非線形連立方程式として解くことによって行われる。

5-2 ソリトンモード表示の精度^{10), 23)}

図-3 は、日本海の大湊海岸におけるうねりの観測波形とそのソリトン合成波形との比較であり、表-1 に観測時の風速、碎波率および Ur 数を後出の観測波のものと併せて示す。なお、測点1 (P.1) および

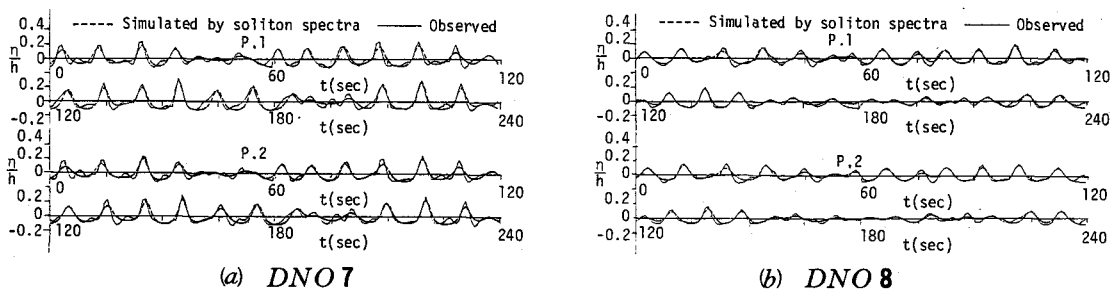


図-3 観測波形とソリトン合成波形との比較

2(P.2)の間隔は8.75mであり、水深は共に5.7 mであった。また、図-4は、測点1でのソリトン合成波を測点2まで伝播させ、そこでの観測波形と比較したものである。これらの結果から、ここで対象としたようなうねりに対しては、その伝播を含めた波形のソリトンモード表示の精度は十分良好であり、ソリトン構造が形成されているものと判断される。

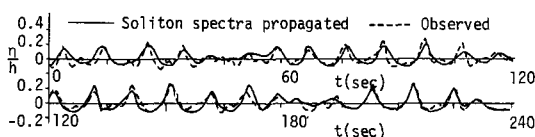
図-5は、発達期(DNO27)、最盛期(DNO31)および減衰期(DNO34)の広範な海象下にある水深6.2 m地点での観測波形に関して同様な比較を行ったものである。ここで用いているソリトンモード表示は砕波を伴わないうねりを適用対象としたものであるのに対し、表-1に示されるようにこれらの観測波はいずれも砕波を伴っているが、ソリトンモードによる波形表示がこれらの波に対しても実用上十分可能であるものと判断される。

図-6は、堀川らによる太平洋に面した阿字ヶ浦海岸における砕波帯外の水平水粒子速度の観測結果と式(31)によるソリトンモード表示結果との比較を示したものであり、図-7はこのときの波形に関する比較を示したものである。なお、水粒子速度の測定は、水深2.28 mの地点に電磁流速計を海底から0.62 mの高さに固定して行われた。これから、観測波形に歪が生じている部分にソリトン合成波形との相違が見られ、その影響が水粒子速度にも現れているが、波形のソリトンモード表示精度が良好である限り、水粒子速度についても同程度の表示精度を期待出来ることがわかる。

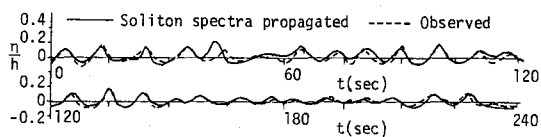
・図-8は波浪水槽内での質量輸送速度に関する実験結果と式(38)によるソリトンモード表示結果との

表-1 観測条件

DNO	観測年月日	入射角 (度)	砕波率 (%)	風速 (m/s)	Ur
7	1981.3. 7	0	0	2	45.9
8	" 3. 8	0	0	2	17.6
27	" 3.15	29	30	14	4.7
31	" 3.16	0	100	19	18.0
34	" 3.17	0	60	11	11.1

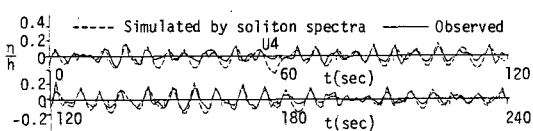


(a) DNO 7

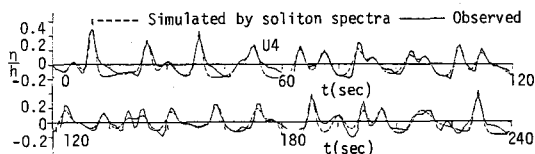


(b) DNO 8

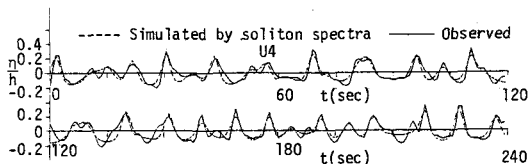
図-4 測点2での観測波形と伝播波形との比較



(a) DNO 27



(b) DNO 31



(c) DNO 34

図-5 発達期から減衰期にわたる観測波形とソリトン合成波形との比較

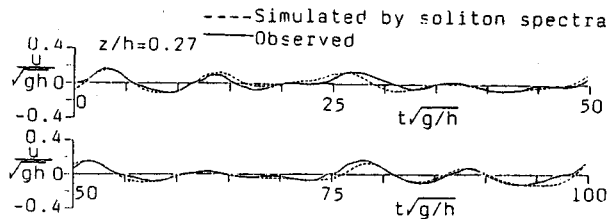


図-6 水平水粒子速度のソリトンモード表示と観測結果との比較

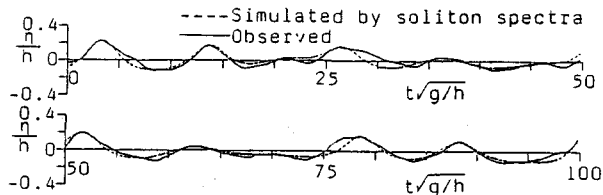


図-7 観測波形とソリトン合成波形との比較

比較を示したものであり、図-9はこのときの波形に関する同様な比較を示したものである。これから、理論結果は若干過大な値を与えているが、水槽内に残っていると考えられるもどり流れなどの影響を考慮すれば、質量輸送のような高次の現象に対してもソリトンモード表示が十分可能であると判断される。

以上の比較より、ソリトンモードに基づく不規則波の表示精度は内部特性も含めて良好であり、この表示法がうねりのような現地波浪に対して十分な適用性を持つことが明らかとなった。しかも、この表示法が広範な海象下の波浪に対しても一定の精度を示した事実は、浅海域における広い範囲の波浪においてソリトンを基準モードとした安定な力学的秩序が形成されていることを示唆するものとも言えよう。

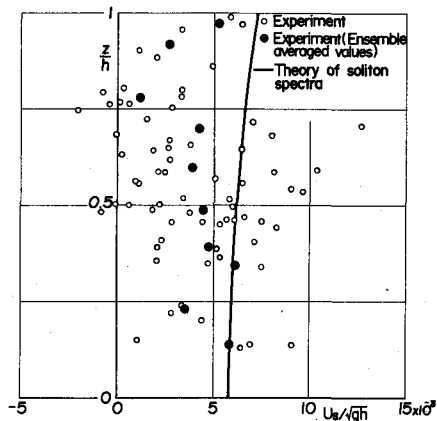


図-8 質量輸送速度のソリトンモード表示と観測結果との比較

6. ソリトンモードに基づく現地波浪の巨視的特性²⁴⁾

6-1 不規則変数の定義

ここで扱う波は、前章までの結果より、無数のソリトンの連なりと考えられ、その微視的状态は一般化

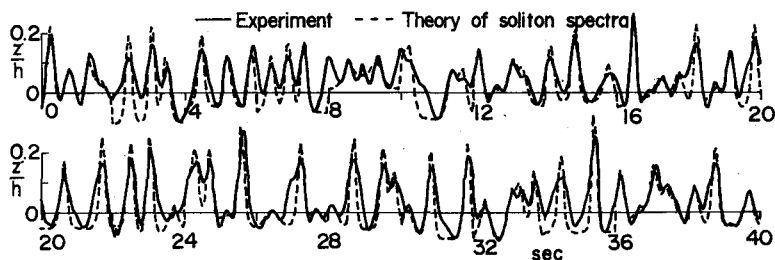


図-9 測定期間中の実測波形とソリトン合成波形との比較

座標 $\{A, \delta\}$ によって確定出来るので、一般化座標上の位相空間においてその巨視的記述も行われる。いま、十分大きな数 N を考え、無限に続くソリトンの連なりから N 個のソリトンの連なりを観測波として取り出し、この N ソリトン系によって海の波の巨視的状态が記述されるものとする。 N は十分に大きいため、伝播に伴う状態変化への偶然性の介入は無視出来、有限時間内では孤立系として扱える。これに対し、単弦波モードからソリトンモードへの遷移機構が未解明であることに加え、ソリトンモードの励起が偶然外力下で行われることなどから、 N ソリトン系の初期状態を与える位相空間内の初期点の座標 $\{A, \delta\}_0$ は不確定量となる。すなわち、初期点の座標の決定のみが偶然現象として扱われ、これ以降の系の状態変化は位相空間内の軌道曲線上で確定現象として記述される。

このように、海の波を閉じた N ソリトン系として位相空間で捉えることにより、海の波の不規則性は初期点の座標 $\{A, \delta\}_0$ が不規則変数であることに基づくものであり、その巨視的特性は初期点の位相空間内の分布特性、すなわち、統計的特性として評価されるものであることが明らかとなる。

ただし、ここでは、 $\{A\}_0$ と $\{\delta\}_0$ の間に若干の相関が存在するものと考え、位相定数 δ_j から確定量を除去したソリトン間隔 $T_j = \delta_{j+1} - \delta_j$ ($j=1, \dots, N$) を新たに定義して、一般化座標 $\{A\}_0$ および $\{T\}_0$ 上にそれぞれ相関係数 ρ で結合された N 次元位相空間を張り、これら 2 つの位相空間によって海の波を捉える。

6-2 固有値分布

ソリトンの固有値は不変量であるため、その固有値分布も保存され、 N が十分に大きければ、その分布は母集団分布と一致する。したがって、観測記録から得られた固有値の確率変数によって、対象とする波浪の統計的特性の評価が可能となる。

ここで、固有値の確率密度関数 $f_A(a)$ を次式のように与える。

$$f_A(a) = \sum_k p(k) \delta(a - \alpha_k) \quad (39)$$

ここに、 $p(k)$; 固有値分布、 δ ; Dirac のデルタ関数、 α_k ; $p(k)$ における k 番目の階級値、および a ; 固有値 A の標本平均 μ_A および標本分散 σ_A^2 によって標準化された不規則変数であり、次式で表される。

$$a_j = (A_j - \mu_A) / \sigma_A \quad (40)$$

なお、エントロピー最大条件を用いて固有値分布 $p(k)$ を理論的に決定出来るが、その詳細²⁵⁾は割愛する。

6-3 ソリトン間隔分布

ソリトンの間隔 T_j を、その標本平均 μ_T および標本分散 σ_T^2 によって次式のように標準化された不規則変数で考えることにする。

$$t_j = (T_j - \mu_T) / \sigma_T \quad (41)$$

まず、図-10に示すようにソリトンの固有値 a_j と間隔 t_j の相関関係からのずれを確率誤差項 ϵ_j と考えて

$$t_j = a_j + \epsilon_j \quad (42)$$

と定義する。 a および t は規準化測度であるため、

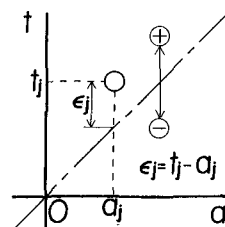


図-10 確率誤差項 ϵ_j の定義

確率誤差項の平均値および分散はそれぞれゼロおよび $2(1-\rho)$ で与えられる。ここで、確率誤差項の確率分布は正規分布に従うとして理論展開の簡略化を図る。なお、この仮定の妥当性については、後述するように現地波浪の観測データを用いて検証する。

ついで、確率誤差項と固有値の結合確率密度関数について考える。 a と ε の規準化測度 z との結合確率密度関数 $f(a, z)$ はおのおのの確率密度関数 $f_A(a)$ および $f_E(z)$ を用いて次式で表される。

$$f(a, z) = f_A(a) f_E(z) \quad (43)$$

ここに、

$$f_E(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp[-z^2/2] \quad (44)$$

である。さらに、式(43)に次の非特異変換をほどこす。

$$u = \mathbf{X}v + \mu \quad (45)$$

ここに、

$$u = \begin{bmatrix} a \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a \\ z \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho-1 & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

であり、一般に μ は平均値ベクトルおよび $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \Sigma$ は共分散行列と呼ばれる。ただし、 $\mathbf{X}^T$ は行列 $\mathbf{X}$ の転置行列である。これより、固有値 a と確率誤差項を ε の結合確率密度関数 $f(a, \varepsilon)$ は次式で与えられる。

$$f(a, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} f_A(a) \exp\left[-\frac{\{(-\rho)a + \varepsilon\}^2}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (47)$$

ソリトンの間隔 t の特性関数 $\phi_T(u)$ は、式(42) および(47) より、

$$\phi_T(u) = \exp\left[-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ipau] f_A(a) da \quad (48)$$

となる。これをフーリエ逆変換すると、ソリトンの間隔の確率密度関数 $f_T(t)$ が次式のように導かれる。

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \sum_k p(k) \exp\left[-\frac{(t-\rho\alpha_k)^2}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (49)$$

6-4 観測記録の標本分布

ここでは、前述の図-3(a)に示したDNO7の観測記録を用い、そのソリトン分解によって定められた初期点 $\{\mathbf{A}\}_0$ および $\{\delta\}_0$ の標本分布を求め、その理論分布との比較によって現地波浪の巨視的特性を明らかにする。

図-11は、式(40)によって標準化した固有値の初期点 $\{\mathbf{A}\}_0$ の標本分布を示す。このときの現地波浪がソリトン構造を持つならば、 $\{\mathbf{A}\}$ は位相空間において不動点となり、その標本分布は保存されるはずである。しかしながら、観測記録には種々の擾乱の影響が含まれていることもあり、測点P.1からP.2への伝播の間に固有値の分布に若干の変動が生じ、完全に保存されているとは言い難い。とは言え、この程度の変動は誤差内と考えれば、標本分布は保存されていると見ることが出来、ソリトンモードに基づく巨視的

描像に矛盾は生じない。

図-12は、初期点 $\{A\}_0$ および $\{T\}_0$ から式(42)を用いて得られた確率誤差項の標本分布と、その標本平均および分散を母数とする正規分布との比較を示す。標本分布の方がやや負側へ偏っているが、全体的には正規分布にはほぼ対応していると言える。なお、正規分布の仮説に対するカイ2乗適合度検定は、標本の大きさ628および有意水準5%でこの仮説が許容されることを示し、この面でも、前節でのソリトン構造を基にした巨視的描像に矛盾のないことが理解される。

図-13は、このときの初期点 $\{A\}_0$ と $\{T\}_0$ の相関係数 $\rho = 0.261$ および前述の図-11に示した $\{A\}_0$ の標本分布を式(49)に適用してソリトン間隔の理論分布を求め、これと観測記録からの標本分布とを比較したものである。図中の実線は理論分布を示す。両者の対応は良好であり、これからも前節での取り扱いの妥当性が検証される。

以上の結果は、ソリトンモードに基づく表示によって、海の波の巨視的特性に対しても矛盾のない描像が得られることを示している。したがって、前章での結果と併せれば、ソリトンモードを基にした海の波の微視的および巨視的一貫記述が可能になるものと判断され、その海岸工学への応用も十分期待出来よう。

7. 結 語

ソリトンスペクトル理論の応用について述べるように依頼されながら、その基礎的記述に拘泥し、応用に至る前で紙数が尽き、羊頭拘肉の感は歪めないが、これは著者の力量不足によるものであり、お許し頂きたい。

とにかく、ソリトンを基準モードとした海の波の扱いによって、簡潔かつ一貫した微視的および巨視的記述が可能となり、浅海域の波浪にはソリトンモードに基づくコヒーレントな力学的秩序が形成されていると見なせるようになるということは示せたように思われる。この扱いが海の波の物理学に矛盾したものではないければ、その工学的応用までの道はなお険しいが、将来においては何らかの成果が期待出来よう。

最後に、本文は京都大学防災研究所土屋義人教授を代表者とする研究グループ RT^2 における活動および京都大学大学院博士課程篠田成郎君との共同研究による成果であり、土屋教授を初めとする同グループのメンバーおよび篠田君に深謝する。また、貴重な観測記録を貸与頂いた東京大学工学部堀川教授を代表とする波浪観測グループの皆様にも感謝致します。

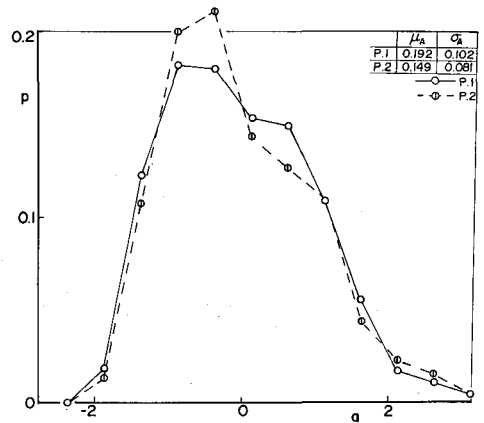


図-11 固有値の標本分布の保存性

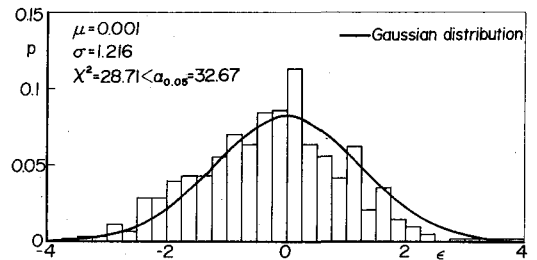


図-12 解率誤差項の標本分布と正規分布との比較

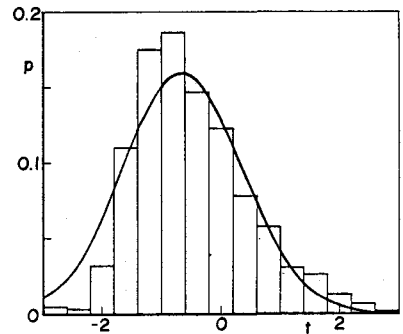


図-13 ソリトン間隔に関する標本分布と理論分布との比較

参考文献

- 1) Tick, L. J.: A non-linear random model of gravity waves, Part 1, Jour. Math. Mech., Vol. 8, 1959, pp. 643 - 652.
- 2) Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. : Interactions of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett., Vol. 15, 1965, pp. 240 - 243.
- 3) Korteweg, D. J. and de Vries, G. : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., Vol. 39, 1895, pp. 422 - 443.
- 4) Zabusky, N. J. and Galvin, C. J. : Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, Jour. Fluid Mech., Vol. 47, 1971, pp. 811 - 824.
- 5) Peregrine, D. H. : Breaking waves on beaches, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 15, 1983, pp. 149 - 178.
- 6) Segur, H. : The Korteweg-de Vries equation and water waves. Part 1. Solutions of the equation, Jour. Fluid Mech., Vol. 59, 1973, pp. 721 - 736.
- 7) Hammack, J. L. and Segur, H. : The Korteweg-de Vries equation and water waves. Part 2. Comparison with experiments, Jour. Fluid Mech., Vol. 65, 1974, pp. 289 - 314.
- 8) 土屋義人・安田孝志・武山保徳：相互干渉を無視した場合のソリトンスpekトルの理論，第28回海岸工学講演会論文集，1981，pp. 89 - 93.
- 9) 安田孝志・土屋義人・篠田成郎：ソリトンスpekトル理論による海岸波浪の内部特性表示，第29回海岸工学講演会論文集，1982，pp. 36 - 40.
- 10) 土屋義人・安田孝志・山下隆男・武山保徳：海岸波浪のソリトンスpekトル表示，第29回海岸工学講演会論文集，1982，pp. 41 - 45.
- 11) Gardner, C. S. and Morikawa, G. M. : Similarity in the asymptotic behaviour of collision free hydromagnetic wave and water waves, Report NYO-9082, Courant Inst. Math. Sci., 1969.
- 12) Yasuda, T., Yamashita, T., Goto, S. and Tsuchiya, Y. : Numerical calculations for wave shoaling on a sloping bottom by K-dV equation, Coastal Eng. in Japan, Vol. 25, 1982, pp. 1 - 23.
- 13) Fenton, J. : A ninth-order solution for the solitary wave, Jour. Fluid Mech., Vol. 53, 1972, pp. 257 - 271.
- 14) Choudhury, J. : Inverse scattering method for a new integrable nonlinear evolution equation under nonvanishing boundary conditions, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 51, 1982, pp. 2312 - 2317.
- 15) Toda, M. : Waves in nonlinear lattice, Progr. theor. Phys. Suppl., No. 45, 1970, pp. 174 - 200.
- 16) Hashimoto, H. and Ono, H. : Nonlinear modulation of gravity waves, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 33, 1972, pp. 805 - 811.

- 17) Nakamura, A. and Matsuno, Y.: Exact one- and two-periodic wave solutions of fluids of finite depth, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 48, 1980, pp. 653 - 657.
- 18) Hirota, R. and Ito, M.: A direct approach to multi-periodic wave solutions to nonlinear evolution equations, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 50, 1981, pp. 338 - 342.
- 19) Hirota, R.: Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett., Vol. 27, 1971, pp. 1192 - 1194.
- 20) Wadati, M. and Toda, M.: The exact N-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation, Jour. Phys. Soc. Japan, Vol. 32, 1972, pp. 1403 - 1411.
- 21) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda: Waves in shallow water from soliton modes (in preparation).
- 22) 安田孝志・永田真人・土屋義人: 多ソリトン解による非線形不規則波浪の表示, 第31回海岸工学講演会論文集, 1984 (印刷中).
- 23) 土屋義人・安田孝志・山下隆男・大下哲則・篠田成郎: 不規則波の質量輸送速度の表示とその適用性, 第29回海岸工学講演会論文集, 1982, pp. 46 - 50.
- 24) 土屋義人・安田孝志・篠田成郎: ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の統計的特性, 第30回海岸工学講演会論文集, 1983, pp. 69 - 73.
- 25) 安田孝志・三島豊秋・土屋義人: エントロピーによる多ソリトン系のエネルギー分布, 第31回海岸工学講演会論文集, 1984 (印刷中).