

流域水の挙動の変分性とその応用

— 地下水流れのシミュレーションの評価 —

高 木 不 折

1. 流域水の挙動の変分性

1-1 基礎概念

流域では、その内部に存在する水（すべてを合わせて流域水と呼ぶ）が内的・外的な諸条件に応じて挙動し、各種の水理学的・水文学的な現象を起こしている。すなわち、流域水全体としての挙動の枠内で、その成分水としての河川水・地下水・土壌水などが相互に干渉しながら、それぞれの機構にしたがって運動をし、その結果として、言いかえるなら、流域水全体としての挙動の一面として流出現象などが観察されるのである¹⁾。

洪水現象のように、その現象の原因と結果との対応関係がかなり明瞭で、その現象に関与する要因・要素のうちいくつかのものが特に卓越する場合には、それら卓越する要素のみを取りあげて現象を記述し、その特性について論議することができる。そのような論議では、他の要素の影響は各種の条件あるいは媒介変数として扱われるのが普通である。

しかし、いくつかの要素が複雑に干渉し、しかもそれらのうちどれが主役的な役割を果たしているかが不明瞭なことも少なくない。このような現象の多くは、関与する要素相互の干渉の仕方如何で、われわれの眼に触れる現象の特性が大きく左右されることが多い。このような場合には、卓越する要素としていくつかを特定することが難しく、いわば先に述べたように、要素相互の干渉をも含めた流域水全体としての挙動との関連でその現象を理解することが望まれる。

一方、自然は一つの力学系内では最も安定した状態を追求しつつ変化し、一様化してゆく。平衡状態へ向うこの変化過程もまた一つの力学的なバランスに支配されている。すなわち、流域水も一つの力学系内では何らかのバランスにしたがって運動し、挙動しており、その一面として流出現象が起っているのである。このように考えると「流域水全体としての挙動を支配する法則は何か」ということが問題になる。筆者はこのような問題意識に立って研究を進めてきたが、^{1),2)}次章以下の地下水の問題を考えるに先立って、本章では、まずその基本的な考え方を要約することにする。

1-2 流域と力学系

「多くの成分水の（場所的・時間的な）相互干渉を通じた流域水全体としての挙動……」などと記したが、大きな流域全体で水がそのような挙動をしているわけではない。流域には、流域水が一つの力学系として挙動をするようないくつかの領域が存在している。上流部より個々の力学系へ流れ込んだ水は、その力学系内で流域水全体としての挙動をしたうえで、また次の力学系へと流れ下っているのである。すなわち、実際の流域はこのような力学系の並列および直列の連鎖として構成されているとすることができる。巨視的には上流より下流へと一方向的に見える流れ現象も、このような個々の力学系内での現象を繰り返しており、その力学系の連鎖が一方向になっているのである³⁾。

現象的な意味に限らず、水工計画などにあっても、この力学系という概念は重要なように思われる。実は昔からの水制禦施設などでは、ここで述べた力学系と力学系の境界に建設されたものが非常に多い。狭き部のダム、扇状地頭部の取水口（頭首工）などはその典型でもある。人為的な制禦は、力学系の内部

よりはその境界で行なう方が容易であるからであろう。ところが、今日では、平地地帯での問題など、力学系の内部で水を制禦せねばならないことも多い。こうした事柄に対処するには、その力学系としての挙動を明らかにする必要に迫られることは言うまでもないであろう。

1-3 流域水の挙動の変分性

流域水全体としての挙動と記したが、研究が緒についたばかりの現段階では、あらゆる成分水を取り上げるまでには到っていない。ここでは、流域水の成分として、河川水と地下水のみを考えることにしよう。

図-2 は河川水と地下水とから成る一つの力学系である。この系は地下水の運動領域Gと河川水の領域Sから成っていて、両者は相互に干渉し合いながら、系全体として挙動をしている。河川水は1次元的に扱うものとし、地下水帯は一樣かつ等方性で、Dupuit - Forchheimer の仮定が成立するものとする、よく知られているように河川水、地下水の運動はそれぞれ近似的に

$$B_s \frac{\partial H_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{B_s}{n} H_s^{5/3} \left(- \frac{\partial (H_s + \varepsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \right] - q = 0 \quad (1)$$

$$r \frac{\partial H_g}{\partial t} - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k H_g \frac{\partial (H_g + z)}{\partial x_i} \right\} - r = 0 \quad (2)$$

と記される。ただし、 x_i : 地下水の運動の場に対してとった直角座標 $i = 1, 2$, s : 河川の流れ方向、および地下水領域Gの周辺にそった距離(反時計方向を正とする), z_0 : 基準水平面より不透水層あるいは河床までの鉛直高, t : 時間, $H_g(x_i, t)$: 地下水深 $H_g(x_1, x_2, t)$ の略記, $H_s(s, t)$: 河川水深, k, r : 地下水帯の透水係数と間隙率, n : マニングの粗度係数, ε : 河水のもつ速度水頭, B_s : 河川幅, r : 地下水帯単位面積あたりの水供給強度, q : 河川単位長あたりの地下水帯よりの水供給量である。

さて、河川水、地下水の個々については(1),(2)式のような記述がされるが、これら両者を合わせたこの力学系全体の挙動はどのように記されるだろうか。その誘導についてはすでに発表している^{1),2)}ので詳細は割愛して、その結果のみを記しておこう。実はこの全系としての水の挙動は変分原理

$$\delta \int J dt = \delta \left\{ \int_G L_g dx_i dt + \int_S L_s ds dt \right\} = 0 \quad (3)$$

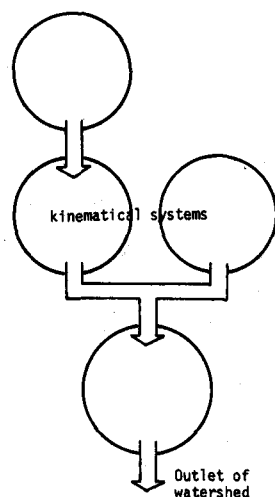


図-1 流域の力学的連鎖の説明図

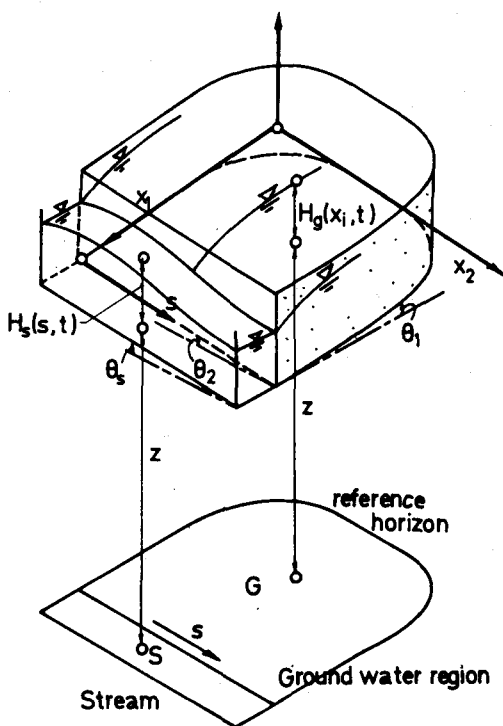


図-2 河川と地下水帯から成る力学系

または,

$$\delta J = \delta \left\{ \int_G L_g dx_i + \int_S L_s ds \right\} = 0 \quad (3')$$

にしたがっていることが示される^{2), 3)}。ここで, L_g, L_s は

$$L_g = r(H_g + z) \frac{\partial H_g^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_i k H_g^* \left(\frac{\partial(H_g + z)}{\partial x_i} \right)^2 - r(H_g + z) \quad (4)$$

$$L_s = B_s(H_s + \epsilon + z_0) \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial(H_s + \epsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{3/2} \quad (5)$$

であって, それぞれ地下水, 河川水の local potential と呼ばれる量であり, $\int_G dx_i$ は面積積分 $\int_G dx_1 dx_2$ の略記, $\int_S ds$ は河川に沿った線積分である。

ところで, (3) あるいは (3') 式を用いるに際しては, H_g^*, H_s^* を一旦固定して, H_g, H_s のみについて変分を考え, その後に補助条件式

$$\begin{aligned} H_g(x_i, t) &\equiv H_g^*(x_i, t) \\ H_s(s, t) &\equiv H_s^*(s, t) \end{aligned} \quad (6)$$

を用いねばならない。この H_g^*, H_s^* は現実に起こる水深分布であって, (3), (3') 式の変分は H_g^*, H_s^* のまわりの微小変位 $\delta H_g, \delta H_s$ に対して考えたものである。すなわち,

$$\begin{aligned} H_g(x_i, t) &= H_g^*(x_i, t) + \delta H_g(x_i, t) \\ H_s(s, t) &= H_s^*(s, t) + \delta H_s(s, t) \\ |H_g^*(x_i, t)| &\gg |\delta H_g(x_i, t)| \\ |H_s^*(s, t)| &\gg |\delta H_s(s, t)| \end{aligned} \quad (7)$$

と考えている。

さて, (3) あるいは (3') 式が成立するための Euler - Lagrange の条件式を記し, これに (6) 式の補助条件を用いると,

$$r \frac{\partial H_g^*}{\partial t} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k H_g^* \frac{\partial(H_g^* + z)}{\partial x_i} \right\} - r = 0 \quad (8)$$

が得られる。さらに, 地下水帯と河川との接する境界でも, 地下水と河川水が干渉し, 両者を合わせた全系に対して J が定留値をとる, すなわち, (3) (3') 式が成立するための河川 (上記の境界 S) での自然境界条件を導き, (6) 式の補助条件を用いると,

$$\begin{aligned} B_s \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial(H_s^* + \epsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \right] \\ + k H_g^* \frac{\partial(H_g^* + z_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_2}{ds} - k H_g^* \frac{\partial(H_g^* + z_0)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_1}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

が導かれる。

上に導かれた(8)式は地下水の流れに対する基礎方程式(2)式と全く同じものである。(9)式の左辺第3, 第4項を注意して見れば, これらが(1)式の $-q$ と同じであることは容易に判ろう。すなわち(9)式は河川水の流れの基礎方程式を与えている。したがってこの力学系内では, (3)式あるいは(3')式が成立するように, 河川水の運動と, 地下水の運動が起こり, さらに両者の干渉が起こっていることが理解できよう。言い換えれば, (3)あるいは(3')式は(1)(2)式を合わせ表現しており, 一つの力学系内での全流域水は(3)あるいは(3')式の変分原理にしたがって挙動をしていると言うことができる。

(3)式の変分原理では, 同じ水深という物理量に対して, H_g^*, H_s^* と H_g, H_s という2種の量を用い, これらの取扱いを変えたうえで(6)式の補助条件式を用いた。このような扱いをするのは, 本来の意味では保存系にしか成立しない変分原理を非保存系に適用するために必要となるものであって, 局所平衡の仮定に基づくものである²⁾。

水深という量は流れの断面積また水の量という幾何学的条件と流れを起こす駆動力としてのエネルギー勾配という力学的条件の両者に含まれていて, (3)式では H_g^*, H_s^* は前者に, H_g, H_s は後者を表現する量に対応している。すなわち, (3)式は, 流れの幾何学的条件を一旦固定したうえで, 力学的条件を変えた場合の J の変分性を主張しているのである²⁾。

1-4 変分原理の物理的意義

(3)式のもつ物理的意義を考えよう。そのために, まず local potential L_g, L_s について考える。 L_g, L_s の内には $H_g^*, H_g, \dots$ やその微分などが含まれている。実際に起こる現象については, $H_g=H_g^*, \partial H_g/\partial x_i = \partial H_g^*/\partial x_i, \dots$ などが成立しているから, 実際に起こる現象に対しての local potential の値も L_g^*, L_s^* と*印を付すことにすると,

$$\begin{aligned} L_g^* &= L_g \Big|_{H_g=H_g^*, \partial H_g/\partial x_i = \partial H_g^*/\partial x_i} \\ L_s^* &= L_s \Big|_{H_s=H_s^*, \partial H_s/\partial s = \partial H_s^*/\partial s} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。この式を展開して整理し直すと,

$$\begin{aligned} L_g^* &= \frac{1}{2} \left[r(H_g^* + z) \frac{\partial H_g^*}{\partial t} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k H_g^* (H_g^* + z) \frac{\partial (H_g^* + z)}{\partial x_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - r(H_g^* + z) \right] + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k H_g^* (H_g^* + z) \frac{\partial (H_g^* + z)}{\partial x_i} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L_s^* &= \frac{1}{3} \left[B_s(H_s^* + \epsilon + z_0) \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial (H_s^* + \epsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left(- (H_s^* + \epsilon + z_0) \right) \right] - q(H_s^* + \epsilon + z_0) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial (H_s^* + \epsilon + z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \cdot (H_s^* + \epsilon + z_0) \right\} \\ &\quad + q(H_s^* + \epsilon + z_0) \end{aligned} \quad (12)$$

と書かれる。(11)式の右辺〔 〕の項は実は地下水帯単位面積単位時間当りで起こる力学的エネルギーの

損失 ΔE_g の符号を変えたものに等しいことが示される。また、右辺最後の項は地下水帯単位面積に流れの flux によって単位時間に持ち込まれるエネルギーに相当している。同様に、(12)式について考えると、右辺の〔 〕の項は河川単位長単位時間当りのエネルギー損失 ΔE_s の符号を変えたものに相当する。さらに、最後の2項は河川の単位長に流れの flux によって持ち込まれるエネルギーであることは容易にわかつく。すなわち、 L_g^*, L_s^* はエネルギー損失（係数がかかっているが）と energy flux との和に他ならない。ところで、 L_g, L_s は L_g^*, L_s^* と全く同じ構造であるから、やはり H_g, H_s の仮想変位に対してのエネルギー損失と energy flux との和であることは言うまでもない。

ところで、(3) (3) 式の汎関数 J は L_g の地下水帯全域 G についての積分と、 L_s の河川全長にわたる積分の和、すなわち、対象とする力学系全体についての積分になっている。その積分に際して、河川と地下水帯の接する境界では、energy flux が互に消去し合うことを考えると、結局 J は 図-3 に示すように、

$$J = -\frac{1}{2} \int_G \Delta E_g dx_i - \frac{1}{3} \int_S \Delta E_s ds + (\text{energy flux into the system}) \quad (13)$$

になっていることがわかる。すなわち、(3) (3) 式の変分原理は、一つの力学系内でのエネルギー損失（負号がついているが）と系内に流れによって持ち込まれるエネルギーの和の停留性を意味しているのである²⁾。ただ、ここで注目すべきは、系内でのエネルギー損失といっても、(13)式に示されるように、地下水帯と河川で起こるエネルギー損失には、それぞれ $1/2, 1/3$ という係数がかかっている。これは、地下水の流れは導水勾配に比例するのに対して、河川の流れはその $1/2$ 乗に比例するという流れ機構の違いに基づくものである。言い換えれば、このような機構の違いのために、系全体の挙動において、地下水と河水との果す役割が異なり、その重みがこれらの係数に反映していると考えられる²⁾。

以上のようにして、ここで考えてきた変分原理は、いくつかの制約条件はあるものの、実はエネルギーの次元で考えていることがわかつく。なお、この方法を用いると、流出現象のいろいろな問題を解明し、解釈することができるが^{3),4)} その例は参考文献に譲り、次章では、地下水流れのシミュレーションの評価法の基礎として用いた例について考察しよう。

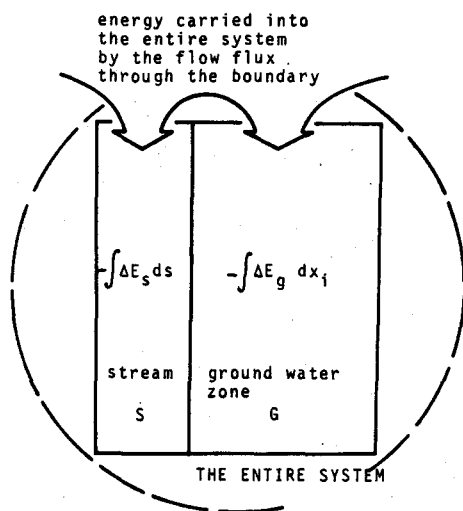


図-3 汎関数の物理的意義

2. 地下水流れのシミュレーションの評価

2-1 概説

ある地域の地下水のようすを解明するために数値シミュレーションがよく行なわれる。通常は地下水の流れに関する基礎方程式が記述され、これをしかるべき初期・境界条件について対象とする地下水帯に対して積分することによって水頭分布の時間的・場所的發展を算定している。その際必要な貯留係数・透

水係数（透水量係数）などの構造パラメーターは、計算結果が対象とする領域内部での観測水頭値と十分な精度で一致するように同定過程を通じて決定されてきた。最近では数値解析の方法やこの同定の仕方についていろいろな試みが提案されている。しかしながら、問題が与えられた諸条件に対して、系内部の地下水の水頭値を求めようというものである以上、初期・境界条件如何で得られる解が異なったものとなることは言うまでもない。しかも、実際にはこれらの条件の実際が十分に判明していないことが多く、そのような条件の下で同定されたパラメーターの値、ひいてはシミュレーションの結果の正しさが十分な説得力を持ちえないことも少なくないのである。

本章では、このように初期・境界条件あるいは各種パラメーターの値が十分には判らないまま、行なわれ結論づけられている地下水のシミュレーションは、どの程度の精度を持っているのかを検討する方法論を考えることにする⁵⁾。言うまでもなく、地下水頭の場所的・時間的の分布や流れの方向、地形地質的条件など、いろいろな側面からの検討を経たうえでの専門の研究者や技術者の判断はそれ自身、そのシミュレーションに対して一つの評価を与えるものである。ここで考えようとする立場は、そのような評価の仕方を否定するものではない。むしろ基本的な評価としては専門技術者の判断を積極的に受け入れたうえで、なおかつそのシミュレーションの結果をより客観的に評価することができないかを問題とすることにする⁵⁾。そのために、前章で論議した変分原理を用いることにしよう。

2-2 基礎方程式の変分表示

被圧地下水帯を考えるに際して、地下水帯について鉛直方向に積分した2次元の形式で基礎方程式を記すと、

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\} + r \quad (14)$$

となる。ここに、 x_i ：ここでは水平面にとった座標、 t ：時間、 $h(x_i, t)$ ：水頭値、 S ：貯留係数、 T ：透水量係数、 r ：地下水帯単位面積当たりの水供給強度である。

いま、水頭値 h が、実際に起こる水頭値 $h^*(x_i, t)$ とその周辺の微小仮想変位 $\delta h(x_i, t)$ から成るものとし、

$$h(x_i, t) = h^*(x_i, t) + \delta h(x_i, t) \\ |h^*(x_i, t)| \gg |\delta h(x_i, t)| \quad (15)$$

と考える。この δh を (14) 式の両辺に乗じて整理すると^{*}、

$$\frac{1}{2} S \frac{\partial (\delta h)^2}{\partial t} = -S \delta h \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{2} T \delta \left\{ \sum \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right\} + r \cdot \delta h \\ + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ T \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \delta h \right\} \quad (16)$$

* ここでは T は場所の関数、 S は簡単のため一定としている。 S が場所の関数の場合にはえられる local potential の一部が異なるだけで基本的には同じものとなる。

となる。この両辺を S で除したうえで、(16)式を対象とする領域、対象とする時間について積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i &= -\delta \int_G \int_G \mathbf{L}_g dx_i dt \\ &+ \oint_C \frac{T}{S} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_1}{ds} \right\} \delta h ds dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{G,I} (\delta h)^2 dx_i \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

がえられる。 $\mathbf{L}_g$ は前章で述べた local potentialであるが、ここでは S で除してあり、

$$\mathbf{L}_g = \frac{\partial h^*}{\partial t} h + \frac{1}{2} \frac{T}{S} \left\{ S \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \frac{r}{S} h \quad (18)$$

である。また、(17)式中の C は地下水帯の周辺境界であり、 I は初期時の値を意味している。 s は C に沿って反時計方向に測った距離である。なお、(17)式右辺の変分の扱いは前章と同様である。

(17)式では右辺第1項は内部積分の変分項、第2項は境界積分項、第3項は初期時の積分項となっている。通常の地下水の解析では、与えられた境界条件・初期条件に対して内部の地下水頭を求めることになるが、境界条件・初期条件が正しく与えられている場合には、第2項、第3項ではそれらの条件を満たす比較関数を用いればよいわけで、これらの項では $\delta h = 0$ 、すなわち、これら2項はゼロとなる。また、現実にかかる水深分布に対しては、系内部の到る処で $\delta h = 0$ であるべきであるから、(17)式の左辺もゼロとなり、結局

$$\delta \int_G \mathbf{L}_g dx_i \cdot dt = 0 \quad (19)$$

が成立せねばならない。言いかえれば、与えられた条件の下で地下水頭を求めるということは、実は(19)式が成立するような h の分布を求めることである。ただ、前章で記したとおり、(19)式を用いるにあたっては、補助条件式

$$h(x_i, t) = h^*(x_i, t) \quad (20)$$

を用いねばならない。

2-3 シミュレーションの誤差の原因

地下水の流動のシミュレーションをする場合にはいろいろな形で誤差が入ってくる。その誤差の原因を分類すると以下になるよう。

モデル構造にかかわるもの： まず地下水の流れの機構がダルシー則にしたがうのかという問題がある。

多孔質体内の流れについてはフォルヒハイマー則など、他のいくつかの記述がされている。ただ、実際の広域地下水の動きがダルシー則にしたがわないことを積極的に実証するに足る資料はなく、ダルシー則に基づいた計算結果が実際の現象を表現するかどうかで判断せざるをえないのが実状である。従来の多くの研究結果によれば、巨視的にはダルシー則が成立するものと考えられている。

つぎに問題となるのは、地下水帯の地層・地質条件に係わるものである。実際の地下水帯は複雑な形状をしているので、これをどのように判断してモデルが組み立てられているかということである。

この問題は数学的には、基礎微分方程式の積分領域をどのように設定するかということでもある。
 構造パラメーターに関するもの： 方程式に含まれる構造パラメーター、通常は貯留係数 S や透水量係数 T が十分な精度で評価されているかどうかという問題で、地下水帯の地形・地質条件とも深く係った問題である。

各種条件： 初期条件・境界条件・水供給条件・漏水条件・揚水条件が正しく評価されているか否か。

その評価が正しくないと当然シミュレーションの結果には大きな誤差を生じる。

数値計算上の問題： 数値解析をするための要素分割（時間的・場所的）の仕方如何のほか、偏微分方程式を数値的に解く過程でいろいろな形式で誤差を生じる。

以上のようないろいろな誤差の原因が考えられはするが、ここではモデル構造は十分正しく、したがって、地下水の流れについては、これまで記してきた各式が成立するものと考えるとともに、数値解析上の誤差については考えないこととする。すなわち、構造パラメーター、各種条件の評価が十分でないことによるシミュレーションの誤差のみを考えることにしよう。

2-4 シミュレーションの誤差構造

以下、地下水のシミュレーションの誤差を考えてゆくが、それに先立って、(17)式を見直しておこう。 δh を h と現実にかかる水深 h^* との間の誤差であると見れば、(17)式の左辺はある時刻における対象とする地下水帯全領域での誤差の2乗の合計（の1/2）、言い換えれば系全体としての誤差であると見做すことができる。

(1) 構造パラメーターの誤差に基づく誤差

シミュレーションにあたって、他の諸条件はすべて正しく与えられているが、構造パラメータ S 、 T の評価が十分ではなく、それらの近似値 S_0 、 T_0 を用いて計算が行なわれた場合を考えよう。この近似値を用いて求められた地下水の水頭の近似解を $h_0(x_i, t)$ と記し、 T/S 、 $1/S$ 、 h などの正しい値と近似値との差をプライムを付して、

$$\begin{aligned} h(x_i, t) &= h_0(x_i, t) + h'(x_i, t) \\ T/S &= (T/S)_0 + (T/S)' \\ 1/S &= (1/S)_0 + (1/S)' \end{aligned} \quad (21)$$

と記すことにしよう。

この場合には、初期条件・境界条件は正しく与えられているのであるから、(17)式右辺の第2、第3項はゼロとなっている。すなわち、

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = - \delta \int_G L_g dx_i dt \geq 0 \quad (22)$$

となっている。したがって、(19)式を解けば正しい解が求められることになる。しかしながら、構造パラメーターが正しくないままに(19)式を解いて近似解 h_0 を求めたということは、(19)式を解くに際して、(18)式の local potential を用いるかわりに

$$L_{g0} = \frac{\partial h_0^*}{\partial h} h_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{S_0} \right) \left\{ \Sigma \left(\frac{\partial h_0}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \left(\frac{1}{S_0} \right) r h_0 \quad (23)$$

を用いて

$$\delta \iint \mathbf{L}_{g0} dx_i dt = 0 \quad (24)$$

を満す解 h_0^* を求めたことに相当する。ただし、(24)式を解くにあたっては前と同様に、補助条件式

$$h_0(x_i, t) \equiv h_0^*(x_i, t) \quad (25)$$

を用いることは言うまでもない。以上のように考えると、(22)式は

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = -\delta \iint \mathbf{L}_{g0} dx_i dt - \delta \iint \mathbf{L}_g' dx_i dt \geq 0 \quad (26)$$

と書き改められる。ただし、

$$\mathbf{L}_g' = \mathbf{L}_g - \mathbf{L}_{g0} \quad (27)$$

である。ここで近似解 h_0^* は(24)式を満すことを考えれば、この近似解 h_0^* と正しい解 h^* との誤差 h' (これは(26)式では δh に相当している)の分布は

$$\delta \iint \mathbf{L}_g' dx_i dt = 0 \quad (28)$$

を満すはずである。ただし、この場合には h_0^* は近似解として既知であるから(27)式の $\mathbf{L}_{g0}$ にはこの値を用いたときの値 $\mathbf{L}_{g0}^*$ を用いばよく、変分の扱いもこれまでのものと同じである。この場合には $\mathbf{L}_g'$ を求めると、

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_g' = & \frac{\partial h'^*}{\partial t} h' + \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{T}{S} \right) \left(\frac{\partial h'}{\partial x_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{S} \right) r h' + \Sigma \left(\frac{T}{S} \right)' \frac{\partial h_0^*}{\partial x_i} \frac{\partial h'}{\partial x_i} \\ & + (\text{変分演算に際して消える項}) \end{aligned} \quad (29)$$

の形式となる。(28)式が成立するための条件式を求め、これに補助条件式 $h' \equiv h'^*$ を用いると、誤差が満すべき式として

$$\frac{\partial h'^*}{\partial t} - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{T}{S} \right) \frac{\partial h'^*}{\partial x_i} \right\} - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{T}{S} \right)' \frac{\partial h_0^*}{\partial x_i} \right\} - \left(\frac{1}{S} \right)' r = 0 \quad (30)$$

が求められる。したがって、この式を解けば原理的には誤差の分布が算定されることになるが、実際には (T/S) などの値は未知であるから正しい誤差の分布は求めることはできない。

以上述べたとおり、構造パラメーターのみが誤差を含んでいる場合には、その近似解 h_0 を求めると、正しい解 h^* との差の系全体としての合計、すなわち、シミュレーションの誤差は

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = -\delta \iint \mathbf{L}_g' dx_i dt = E_1 (\geq 0) \quad (31)$$

の形式をしていることがわかる。

(2) 初期条件の誤差に基づく誤差

初期条件以外はすべて正しく与えられた場合に、方程式を解いて近似解 h_0 をえた場合について考えよう。この場合にも前項の議論と同様に、(17)式は

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = -\delta \iint_G \mathbf{L}_g dx_i dt + \frac{1}{2} \int_{G,1} (\delta h)^2 dx_i \geq 0 \quad (32)$$

となる。近似解に対する local potential $\mathbf{L}_{g0}$ を用い、 $\mathbf{L}_g$ と $\mathbf{L}_{g0}$ との差を(27)式の形式で $\mathbf{L}'_g$ と記せば、この場合には、

$$\mathbf{L}'_g = \frac{\partial h'^*}{\partial t} h' + \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{T}{S} \right) \left(\frac{\partial h'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial h'^*}{\partial t} h_0 + \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\frac{T}{S} \right) \frac{\partial h_0^*}{\partial x_i} h' \right\} \quad (33)$$

となり、(32)式は

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = -\delta \iint_G \mathbf{L}'_g dx_i dt + \frac{1}{2} \int_{G,1} (\delta h)^2 dx_i = E_2 \geq 0 \quad (34)$$

と書かれる。前項での議論と同様に、初期条件の誤差分を初期条件として $\delta \int \mathbf{L}'_g dx_i dt = 0$ を解けば、それがこの場合の誤差分布となる。いずれにしても、初期条件だけが誤差を含んでいる場合には、系全体としての水頭分布には(34)式の形式で誤差が入っていることになる。

(3) 境界条件の誤差に基づく誤差

他の条件はすべて正しく判っているが、境界条件のみが誤差を含んでいる場合について考えよう。この場合も、これまでの議論と同様に

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i &= -\delta \iint_G \mathbf{L}'_g dx_i dt \\ &\quad + \oint \frac{T}{S} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{dx_2}{ds} - \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{dx_1}{ds} \right\} \delta h ds dt \\ &= E_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となる。なお、この場合の $\mathbf{L}'_g$ は形式的には(33)式と全く同じものとなることが示される。

(4) シミュレーションの誤差の物理的意義と同定過程

これまで述べてきたように、いろいろな原因に基づく誤差の場所的・時間的分布を求めるためには、原理的には誤差に対する所定の条件に対して、

$$\delta \iint_G \mathbf{L}'_g dx_i dt = 0 \quad (36)$$

を解けばよいことになる。そのためには、正しいパラメーターや正しい条件が必要となるが、それが判明している場合には近似解を求める必要はないわけで、実際にはシミュレーションの誤差の分布を求めることはできない。

いずれにしても、以上の議論を省みれば、パラメーター、初期条件、境界条件、またここでは取り上げなかったが、揚水条件などいくつかの誤差が同時に含まれている場合にも、 $\mathbf{L}'_g$ が定義され、系全体としてのシミュレーションの誤差は総合的には

$$\frac{1}{2} \int_G (\delta h)^2 dx_i = E \geq 0 \quad (37)$$

の形式をとることが結論づけられる。

この構造の基礎は(17)式にあるが、その誘導過程は前章で述べた変分原理の場合と全く同じであって、 $\mathbf{L}_g$ のもつ物理的意義も前章で記したものと同じである。ただ誤差という立場から見て、(17)式の右辺第

2項をも含めて考えると、この第2項は(13)式の inflow flux の項に相当する項と消去しあい、結局は、ある時点での誤差(17)式の左辺は、初期時の誤差とその時刻までに全系で生じるエネルギー損失の和という構造をしていることがわかる(本章の L_g は次元的には前章の L_g を S で除したものになってはいるが、その本質は同じものである)。このようにして、シミュレーションの誤差は基本的にはエネルギーの次元を持っていることが示される²⁾。

以上の事柄を基礎とすれば、広域地下水のシミュレーションにおける同定手法としては(17)式の左辺を最小とすることを考えるのが最も自然であり合理的であろう。しかも、そのような評価は力学的にはエネルギーという次元で同定することに他ならない。これまでも、地下水のシミュレーションの同定に際しては、系内に設けられた観測井での実測水頭値と計算値の差の2乗の合計を最小とするような手法が提案されてきた^{6),7)}。その手法はもともと誤差論的な立場から提案されたものである。しかし、その手法は基本的には(17)式が示すようにエネルギーという次元で同定していることに相当している。言いかえれば、(17)式は水頭の誤差の2乗の合計を最小とする評価基準に物理的な意義づけをするものであるとも言えよう。詳細は割愛するが、(17)式を用いると、実はシミュレーションの精度はどんなに克明に同定をしても、初期条件・境界条件・揚水条件などの精度以上にはなりえないことも示される⁵⁾。

2-5 対象領域内部の誤差出現の確率

(37)式を少し違った観点から見れば「種々の誤差に基づくシミュレーションの誤差 E が対象領域全体 G にばらまかれている」と解釈することができる。ここでは、この誤差がどのような確率構造にもとづいて領域内部にばらまかれているかを考えよう。

(1) 領域内部における誤差確率

まず、系全体としての誤差 E は既知であるとする。また、対象領域全体 G を面積 g の等しい N 個の細胞領域 g_i から成るものと考え、個々の微小な領域では水頭値はある代表値で与えられ、その微小な細胞領域内部では一様であると仮定しよう。このように考えると、(37)式は

$$\sum \frac{1}{2} \int_{g_i} (\delta h)^2 dx_i = E \geq 0 \quad (38)$$

と記される。

そこで、全体としての誤差 E を N 個の細胞領域に配分する問題を考える。このとき、個々の細胞領域での誤差はある離散的な値 ϵ_j のみを取りうるものとする。まず、 N 個の細胞領域のうち、誤差が

$$\frac{1}{2} \int_{g_i} (\delta h)^2 dx_i = \frac{1}{2} (\delta h)^2 \cdot g = \epsilon_j \quad (39)$$

となる細胞領域の数が n_j 個であるとする、

$$\sum n_j = N \quad (40)$$

$$\sum \epsilon_j n_j = E \quad (41)$$

の条件が成立せねばならない。全体 N 個の細胞領域のうち n_1 個は誤差 ϵ_1 、 n_2 個は ϵ_2 、……というように E の誤差を配分させる方法は

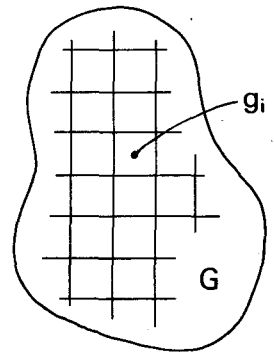


図-4 全領域 G と細胞領域 g_i

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (42)$$

通りある。すなわち、実際には領域内部のそれぞれの細胞領域で誤差はやりとりをするが、その配分は P を最大とするものになっていると考えるのが自然である。(40) (41) 式の条件の下で P を最大とする ϵ_i の確率分布 $p(\epsilon_i; E)$ は周知のように、

$$p(\epsilon_i; E) = \frac{n_i}{N} = \frac{1}{f} e^{-\beta \epsilon_i} \quad (43)$$

$$f = \sum_i e^{-\beta \epsilon_i} \quad (44)$$

で与えられる。⁸⁾ この式は、全体 N ケの細胞領域のうち ϵ_i という誤差を持つ領域の個数 n_i を与えるものであるが、個々の細胞領域についてみれば、 ϵ_i という誤差出現の確率を与えるものでもある。ただ、この確率は、全体の誤差が E である場合の値であるという意味で条件付確率の形式 $p(\epsilon_i; E)$ で記してある。さらに、(43) (44) 式での β の値は(41)式の条件が成立するように定められる。

(2) 誤差表現の最小単位とパラメーター β

(43) (44) 式のパラメーター β の値を調べておこう。(44)式の f を β で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = - \sum \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i} \quad (45)$$

したがって、 ϵ の平均値 $\bar{\epsilon}$ すなわち

$$\bar{\epsilon} = E/N \quad (46)$$

は

$$\bar{\epsilon} = \sum \epsilon_i \cdot p_i = \frac{\sum \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}}{f} = - \frac{\partial f}{\partial \beta} / f = - \frac{\partial}{\partial \beta} \{ \log_e f(\beta) \} \quad (47)$$

と書かれる。

さて、 ϵ_i の値を表示するに際しては何らかの最小単位が必要となろう。そこで、その最小単位を ϵ_0 と記すことにすると、 ϵ_i の値は離散的な値

$$0, \epsilon_0, 2\epsilon_0, 3\epsilon_0, \dots$$

しかとりえないことになる。このようなときには、 f の値は

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \sum e^{-\beta \epsilon_i} = 1 + e^{-\beta \epsilon_0} + e^{-2\beta \epsilon_0} + e^{-3\beta \epsilon_0} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_0}} \end{aligned} \quad (48)$$

ゆえに、

$$\log_e f(\beta) = - \log_e \{ 1 - e^{-\beta \epsilon_0} \}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \{ \log_e f(\beta) \} = - \frac{\epsilon_0 e^{-\beta \epsilon_0}}{1 - e^{-\beta \epsilon_0}} \quad (49)$$

前の(47)式と合わせて、結局

$$\beta = \frac{1}{\epsilon_0} \log_e \left(1 + \frac{\epsilon_0}{\bar{\epsilon}} \right) \quad (50)$$

がえられる。この式はパラメーター β の値を ϵ_i 、測定の最小単位 ϵ_0 と、誤差の平均 $\bar{\epsilon} = E/N$ で表現するものである。

2-6 地下水シミュレーションの確率論的評価

実際のシミュレーションでは同定が行なわれるが、同定を終えても、観測井の地点で何らかの誤差は避けられないのが普通である。以下では同定作業など種々の判断過程を経て最終的な形でシミュレーションが結論づけられた後になお残されている誤差を対象とする。

前節では系全体としての誤差 E が既知であるとしたが、実際にはこの E が判っていないのであって、シミュレーションの誤差の評価とは、この E の値を評価することに他ならない。その評価のための手掛りとしては、われわれはいくつかの観測井での観測値と計算値しか持っていない。すなわち、この観測井での誤差を知ったうえで、系全体としての誤差 E を探ることが問題となる。

(1) 誤差の確率論的評価

N ケの細胞領域から成る対象領域に、 J, K, L (簡単のため3ヶ所としておく)という観測井があって、それぞれの観測値はその井戸が存在する細胞領域の水頭を代表するものとする。いま、構造パラメーターや諸条件にある誤差が含まれたままでシミュレーションを行なったところ、これらの井戸地点で、それぞれ、

$$\frac{1}{2} (\delta h)^2 \cdot g = \epsilon_j, \epsilon_k, \epsilon_l \quad (51)$$

の誤差があったとする。このような事柄が同時に起こる事象を ϵ_{jkl} と記せば、全体としての誤差が E_m の場合に、事象 ϵ_{jkl} が起こる同時確率は、(43)式によって、

$$p(\epsilon_{jkl} : E_m) = e^{-\beta(\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l)} / f^3 \quad (52)$$

となる。ただし、 f は(44)式で与えられ、上式と f 内のパラメーター β は E_m の値に対するものである。

つぎに、系全体についての誤差 E が E_m である確率を $p(E_m)$ とすると、「 $E=E_m$ であって、かつ ϵ_{jkl} が起こる確率」は、

$$p(\epsilon_{jkl} : E_m) \cdot p(E_m) \quad (53)$$

となる。したがって、 E として $E_1, E_2, E_3, \dots, E_M$ という M ケの可能な状態・値が考えられるものとする、「3本の井戸での誤差が $\epsilon_j, \epsilon_k, \epsilon_l$ である」との条件の下で、系全体の誤差が E_m である確率 $p(E_m : \epsilon_{jkl})$ は Bayes の定理によって、

$$p(E_m : \epsilon_{jkl}) = \frac{p(E_m) \cdot p(\epsilon_{jkl} : E_m)}{\sum_i^M p(E_i) \cdot p(\epsilon_{jkl} : E_i)} \quad (54)$$

となる。

(54)式には $p(E_i)$ が含まれているが、この量は未知であって、このままでは(54)式を算定することはできない。しかし、このように事前確率について全く無知の場合には、考えうるすべての事象 E に対して同等の確率を与えるのが合理的であり、公平であろう。すなわち、 E について可能な M ケの状態 $E_1, E_2,$

$E_3, \dots, E_M$ の生起する確率を

$$p(E_1) = p(E_2) = \dots = p(E_M) \quad (55)$$

と考えると, $p(E_m : \epsilon_{jkl})$ は

$$p(E_m : \epsilon_{jkl}) = \frac{p(\epsilon_{jkl} : E_m)}{\sum_i^M p(\epsilon_{jkl} : E_i)} \quad (56)$$

となる。

上式中の $p(\epsilon_{jkl} : E_m)$ は(52)式で与えられ, それに対する $\beta = \beta_i$ は $E = E_i = N\bar{\epsilon}_i$ に対応する $\bar{\epsilon}_i$ と ϵ 測定の最小単位 ϵ_0 で(50)式によって与えられる。上式は E_m に対する確率で表示されているが, 単位細胞での平均誤差 $\bar{\epsilon}_m = E_m/N$ に対して記すならば,

$$p(\bar{\epsilon}_m : \epsilon_{jkl}) = \frac{p(\epsilon_{jkl} : \bar{\epsilon}_m)}{\sum_i^M p(\epsilon_{jkl} : \bar{\epsilon}_i)} \quad (57)$$

である。

上では3本の井戸の場合について記したが, 井戸が $J_1, J_2, \dots, J_k$ と k 本あり, それぞれで $\epsilon_{j1}, \epsilon_{j2}, \dots, \epsilon_{jk}$ の誤差がある場合には, このような事象を $\epsilon_{j12\dots k}$ と記せば,

$$\begin{aligned} p(\bar{\epsilon}_m : \epsilon_{j12\dots k}) &= \frac{p(\epsilon_{j12\dots k} : \bar{\epsilon}_m)}{\sum_i^M p(\epsilon_{j12\dots k} : \bar{\epsilon}_i)} \\ &= \frac{(1 - e^{-\beta_m \epsilon_0})^k \cdot \exp(-\beta_m \sum_s^k \epsilon_{js})}{\sum_i^M (1 - e^{-\beta_i \epsilon_0})^k \cdot \exp(-\beta_i \sum_s^k \epsilon_{js})} \end{aligned} \quad (58)$$

となる。ただし,

$$\beta_i = \frac{1}{\epsilon_0} \log_e \left(1 + \frac{\epsilon_0}{\bar{\epsilon}_i} \right) \quad (59)$$

である。

以上のようにして, われわれは「対象領域内のいくつかの観測井での誤差 ϵ_j を知ったうえで, 系全体としての誤差, あるいはその平均値 $\bar{\epsilon}$ を確率的に評価する指標」に到達した。

(2) シミュレーションの誤差確率

図-5は前節の議論にしたがって, 観測井の数が3本の場合について(58)式の確率 $p(\bar{\epsilon} : \epsilon_{jkl})$ を計算したものである。この確率は $\bar{\epsilon}$ が M 通りの値 $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_M$ しかとらないとしているので, 本来離散的な棒グラフとして示すべきものであるが, これを連ねて示してある。また, ここでは $\epsilon_0 = 0.5, 0.25$ としているが, その次元は $[L^4]$ である。式(51)からわかるように, ϵ, ϵ_0 には細胞領域の面積 g が含まれているが, 一方, β にも g が関係し, $\beta\epsilon$ は無次元数である。さらに, ここでは, $\epsilon_0 = 0.5$ のものについては $M = 100$, $\epsilon_0 = 0.25$ のものについては $M = 200$ とし, そのうち $\bar{\epsilon} = 1 \sim 50$ までの計算値が示されている。

式(58)は $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ が同じであれば, $\epsilon_j, \epsilon_k, \epsilon_l$ の個々の値に拘らず同じになるので, 図では $\epsilon_j + \epsilon_k$

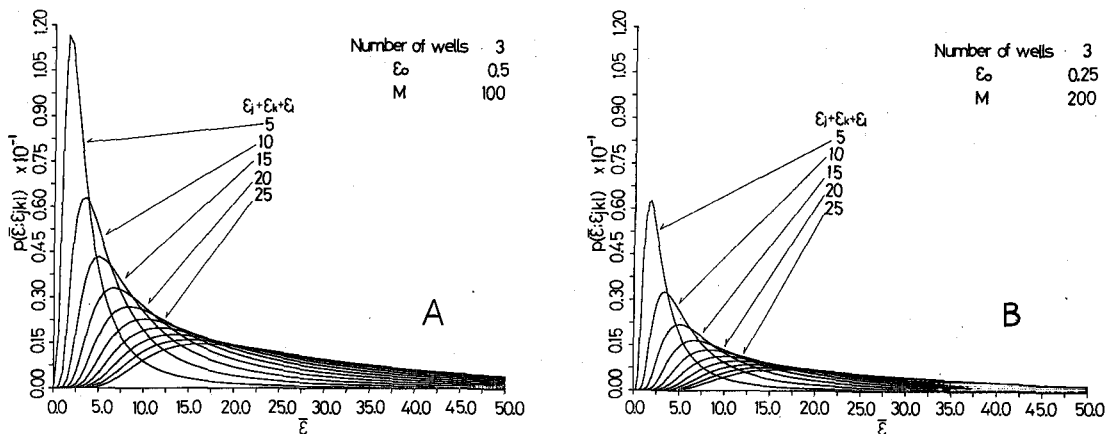


図-5 シミュレーション誤差の確率

ϵ_l の値をパラメーターとして記してある。また、この図では $\bar{\epsilon} = (\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l) / 3$ で最大値をとることは自明である。

図から判るように $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ ，すなわち観測井での誤差が小さいときには分布はシャープなものとなり、シミュレーションの誤差 $\bar{\epsilon}$ が大体どの程度であるかを判断することができる。これに対して $\epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$ の値が大きくなると、分布はピークが低く、 $\bar{\epsilon}$ の広い範囲に広がって、シミュレーションの誤差が小さいのか、あるいは非常に大きいのかすら判断しえなくなることがわかる。

図-5のA図($\epsilon_0 = 0.5$)とB図($\epsilon_0 = 0.25$)の両者を比較すると ϵ_0 の選択の仕方で確率の値がかなり異なっているように見える。しかし、これはA図では $\bar{\epsilon}$ が0, 0.5, 1.0, ……の値しか取りえないのに対し、B図では $\bar{\epsilon}$ が0, 0.25, 0.5, ……の値を取りうるために外見上見られる差異である。

図-6はシミュレーションをチェックする観測井の本数によって、 $p(\bar{\epsilon}, \epsilon_{jkl})$ がどのように変わるかを示したものである。比較しやすいように、ここでは個々の観測井での誤差がすべて $\epsilon = 3$ の場合について示してある。この図から観測井の数が1, 3, 5, 7本と増すにしたがって、確率分布はシャープとなり、シミュレーションの結果の精度をより高い精度で判定しうることが判ろう。

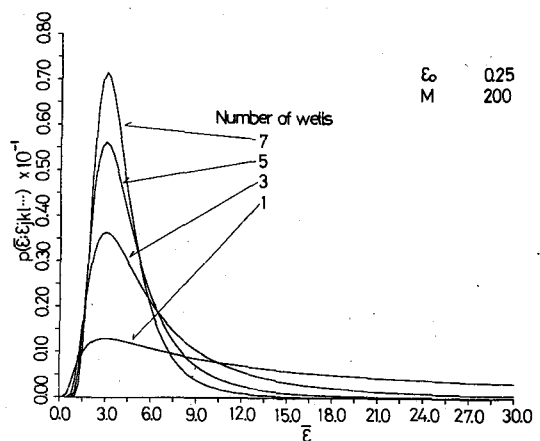


図-6 シミュレーション誤差の確率

2-7 シミュレーションの結果の判定

以上述べてきた手法によって、ある地域での地下水のシミュレーションの結果を確率的に評価することができる。しかし、何度か述べてきたように、このような評価は、専門技術者が総合的な判断に立って結論づけた結果に対して考えるべきであろう。十分な根拠もなく、ただ誤差の2乗和が小さいからと言って誤差が小さいと判断するのは危険である。誤差を考えるより先に、その基準となる地下水の平均的挙動をしっかりと把握する必要があるからである。そのためには、地質・地形の分布状態、地下水流動の方向など、できる限り多くの情報について検討したうえでその結果の評価を考えるべきであろう。

つぎに、その評価にあたっては、なお重要な問題が残されている。それは、ここで述べた確率評価によって、そのシミュレーションが「非常に良い」とするか、「まあまあだ」とするか、あるいは「だめだ」と判断するかという問題である。実際上はこれが一番大切なことであるが、その判断基準は基本的には他に求めるべきものであろう。すなわち、そのシミュレーションの目的が何であるか、何らかの計画に用いるためのブループリントの一つであるのか、具体的な工事などに関連して詳細を把握しようとするのか、そのシミュレーションに要求される精度との関連で判断されるべきであらう。

2-8 まとめ

地下水のシミュレーションに現われる誤差の構造を検討するとともに、シミュレーションの誤差を確率的に評価する一試案を示した。ここで示したのは、ある瞬間の時点での系内の誤差の評価法にすぎない。しかし、この方法を誤差の時間発展をも含めて評価する方法に拡張することもできる。このような検討をさらに進めることによって、地下水の挙動を要求される精度で明らかにさせるためには、どのような観測網を作る必要があるか、またどの程度まで詳しく同定するべきであるかなどの問題を明らかにする糸口が把握されるのではないかと考えている。

ここでは、地下水のシミュレーションを例にあげて考えたが、流域水全体としての挙動のもつ変分性は、流出現象を解釈する上でも、あるいは実際の問題を数値解析するうえでも有用な手段となりうるものと考えている。

参考文献

- 1) F. Takagi : A Study on the Behaviour of Basins Water by means of the Variational Technique, Proc. of JSCE, Vol. 185, Jan. 1971, pp. 71 ~ 81.
- 2) 高木不折：流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義，土木学会論文報告集，第 227 号，昭 49.7，pp. 27 ~ 32.
- 3) 高木不折，F.G. ローデ：地下水流出の流域における特性変化と場所的スケール，土木学会論文報告集，第 270 号，昭 53.2，pp. 99 ~ 108.
- 4) 高木不折，松林宇一郎：流域水の挙動に関する変分原理の実用化とその問題点，土木学会論文報告集，第 274 号，昭 53.6，pp. 31 ~ 40.
- 5) 高木不折，原田守博：地下水の流動に関するシミュレーションの誤差構造とその確率的評価，土木学会論文集，第 345 号／Ⅱ-1，昭 59.5，pp. 395 ~ 403.
- 6) Neuman, S.P. and S. Yakowitz : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1. Theory. Water Resour. Res., Vol. 15, No. 4, pp. 845 ~ 860, 1979.
- 7) Neuman, S.P., G.E. Fogg and E.A. Jacobson : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 2. Case study. Water Resour. Res., Vol. 16, No. 1, pp. 33 ~ 58, 1980.
- 8) Neuman, S.P. : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 3. Improved solution method and added perspective. Water Resour. Res., Vol. 16, No. 2, pp. 331 ~ 346, 1980.
- 9) たとえば，ランダウ，リフシッツ（小林秋男ほか共訳）：統計物理学(上)，岩波書店，1957.