

閉鎖水域における風成流の解析

富 所 五 郎

1. はじめに

近年、内陸の湖沼に代表される閉鎖水域の水質汚濁は、¹⁾ 大きな社会問題になっているが、この水質予測には水域の流れ特性を知ることが必須条件である。²⁾

閉鎖水域に流れを起す原因としては、(1)風、(2)水域の流出・流入、(3)セイシュ、(4)潮汐、(5)水平方向の密度差などが挙げられるが、対象とする水域を我国の大部分の湖沼としてその最大水平長を数十kmとすると、その流れは主として風によって生ずる。風によって起される流れを普通吹送流と呼んでいる。しかし、最大長が数十kmの閉鎖水域では数時間で吹寄せが起り、これによる水面こう配による傾斜流も発生する。この傾斜流も含め吹送流と呼ぶこともあるが、ここでは風により直接起される流れを吹送流とよび、これに吹寄せに伴う傾斜流などを含めた流れを風成流と呼び、これを区別することにする。この風成流は、水面では風の方向の流れ、つまり順流であるが、水底附近では逆流となる三次元性を示す。したがって、この解析モデルとしては、何らかの方法で水平流速の鉛直方向の変化を考慮することが必要である。

閉鎖水域の風成流の解析モデルとして、現在多くのモデルが提案されているが、これらは大きく分けると、(1)エクマンタイプモデル、(2)層モデル、(3)その他の三次元解析モデルである。^{3), 4)} (1)は、流れの基礎式の圧力項、鉛直渦動粘性項、コリオリ項のつり合い式を鉛直方向に積分し、解析的に基礎式を二次元に変換することが基本特徴である。これには、基礎式に、上に挙げた三項の他に、非定常項、慣性項（非線形項）、水平渦動粘性項のいくつかを考慮するモデルも提案されている。(2)は、水域をいくつかの層に分けるが、この層を固定するかしないかにより、さらに(a)層位モデル（multi-level model）と層モデル（layer-model）に分けられる。これらは、各層で鉛直方向に平均した水平流速成分、水面上昇量、層厚などを最終的な未知量とするモデルである。(3)は、以上のモデルに対して、空間に関する三次元関数である水平流速成分や密度などをそのまま未知量とする解析モデルである。

現在提案されている数値計算法は大きく分けて、(1)差分法（格子点法）、(2)ラグランジュ法、(3)スペクトル法、(4)有限要素法であり、それぞれ特徴を持っているが、⁵⁾ 上の解析モデルの数値計算法としては、(1)と(4)であり、他の二方法は全く用いられていない。

閉鎖水域における風成流の解析に関連する問題は、本研修会においても、井上（1980）、岩佐（1981）らにより湖沼や貯水池を対象とした、また堀江（1980）により沿岸海域を対象とした層モデルとして取り扱われている。そこでここでは、上述の解説との重複をさけるためと、我国の大部分の湖沼における風成流は規模が小さいため三次元性が強いことより、湖沼を中心とした風成流の三次元解析モデルを中心として、それらによる解析例を含めて解説する。なお、ここでの三次元モデルは、鉛直方向の運動方程式に代って静水圧分布近似式を用いるもので、慣用に従ってこれを三次元モデルとしている。

2. 風成流の基礎式

閉鎖水域の流れを支配する方程式には、水域の最大長を数十kmとすると、コリオリ力は考慮する必要があるが、場所によるその変化は無視してよい。また、流れは普通乱流であり、この時の基礎式は運動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial u}{\partial z}) + fv \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial v}{\partial z}) - fu \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (A_h \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_h \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_v \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{\rho}{\rho_0} \cdot g \quad (2.3)$$

連続式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

乱流拡散方程式：

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{L}T = \frac{\partial}{\partial x} (H_h \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (H_h \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (H_v \frac{\partial T}{\partial z}) \quad (2.5)$$

状態方程式：

$$\rho = F(T) \quad (2.6)$$

である。ここに、

$$\mathcal{L} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

で、 $x-y$ 面は静水面にとり、 x 軸は東を、 y 軸は北を、 z 軸は鉛直上方を正としている（図2-1）。また、 u 、 v 、 w は x 、 y 、 z 軸方向の流速成分、 p は圧力、 ρ 、 ρ_0 はそれぞれ水温 T 、平均水温 T_0 に対する水の密度、 A_h 、 A_v はそれぞれ水平、鉛直渦動粘性係数、 f はコリオリ係数で $f = 2\Omega \sin \varphi$ （ Ω は地球の自転角速度、 φ は水域の平均緯度）、 g は重力加速度、 H_h 、 H_v はそれぞれ水平、鉛直方向の熱の拡散係数である。上式においては、密度変化は重力項にのみ影響を与えるとする Boussinesq 近似を用いている。さらに、乱れ場は水平方向に等方であるとして、 A_h 、 H_h は x 、 y 方向に等しいとしている。

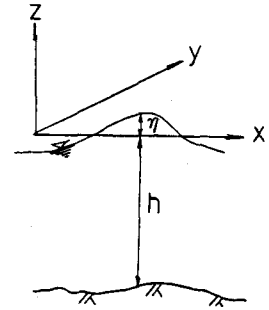


図2-1 座標系

上式を無次元化するために、つぎの変数を採用する。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{D}, \quad h^* = \frac{h}{D}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{D} \\ u^* &= \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{U}, \quad w^* = \frac{w}{U} \cdot \frac{L}{D}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 g D} \\ t^* &= ft, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

ここに、 L は代表水平長、 D は代表水深、 U は代表流速である。上式を代入した式(2.1)～(2.6)は、簡単のため(*)を落して記すと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + R_0 \mathcal{L}u = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (E_h \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_h \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_v \frac{\partial u}{\partial z}) + v \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + R_0 \mathcal{L}v = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (E_h \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_h \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_v \frac{\partial v}{\partial z}) - u \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + R_0 \mathcal{L}w = -Q (\frac{\partial p}{\partial z} + \rho) + \frac{\partial}{\partial x} (E_h \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_h \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_v \frac{\partial w}{\partial z}) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + R_0 \mathcal{L}T = \frac{\partial}{\partial x} (F_h \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (F_h \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (F_v \frac{\partial T}{\partial z}) \quad (2.12)$$

$$\rho = F(T) \quad (2.13)$$

となる。ここに、 $R_0 = U/fL$ = Rossby number, $F_r = U/\sqrt{gD}$ = Froude number, $E_h = A_h/fL^2$ = horizontal Ekman number, $E_v = A_v/fD^2$ = vertical Ekman number, $Q = gL/fUD$, $F_h = H_h/fL^2$, $F_v = H_v/fD^2$ の無次元量である。

つぎに、方程式を簡単にするために、上の式の各項の比較を行う。閉鎖水域として、我国の中規模程度の湖沼を対象とすることになると、 U , L などの有次元量は

$$\left. \begin{aligned} U &\sim 10 \text{ cm/s}, L \sim 10^6 \text{ cm}, D \sim 10^3 \text{ cm}, g = 10^3 \text{ cm/s}^2, t = 10^4 \text{ s} \\ f &\sim 10^{-4} \text{ 1/s}, A_h, H_h \sim 10^4 \text{ cm}^2/\text{s}, A_v, H_v \sim 10 \text{ cm}^2/\text{s}, \eta = 1 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

程度であろう。これらの値より、式(2.8)～(2.13)の無次元量は、

$$\left. \begin{aligned} R_0 &\sim 10^{-1}, R_0/F_r^2 \sim 10^3, Q \sim 10^9 \\ E_h, F_v &\sim 10^{-4}, E_v, F_v \sim 10^{-1} \\ \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} &\sim \frac{\partial \eta}{\partial x} \sim 10^{-3}, \frac{\partial p}{\partial z} \sim \frac{\partial h}{\partial z} \sim 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

となり、この他の物理量は全て $O(1)$ 程度の大きさである。したがって、式(2.10)においては、 Q の掛かっている項に対し、他の項は非常に小さいため無視でき、式(2.10)は

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho = 0 \quad (2.16)$$

と静水圧近似できる。他の式についても各々の項に対し最大 10^4 程度の差がみられる。しかし、式(2.14)の値は概略値であり、物理量によってはこれらの値を中心にして $1/10 \sim 10$ 程度の範囲で変化することもあるため、上式以外の近似は行わないのが一般的である。式(2.16)は、水面における大気圧を零とする条件のもとに積分すると

$$p = \int_z^\eta \rho dz \quad (2.17)$$

となり、静水圧分布式となる。この式より、水平方向の圧力勾配は、水面勾配 $\partial \eta / \partial x$, $\partial \eta / \partial y$ と同程度の大きさになることがわかる。

z 軸方向の流速 w は、連続式を $-h \sim z$ の範囲で積分すると

$$w(z) = \int_{-h}^z \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dz \quad (2.18)$$

となり、 u 、 v が既知となると、この式より決定できる。さらに、連続式は $-h \sim \eta$ の範囲で積分し、水面における運動学的条件を用いると

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0 \quad (2.19)$$

となる。

以上、式 (2.8), (2.9), (2.12), (2.13), (2.17), (2.18), (2.19) が閉鎖水域の流れの基礎式である。しかし、これ以上の式の展開は各々の解析モデルにより異なるので、各解析モデルのところで行う。

3. エクマンタイプモデル

このモデルは、水域の水温（密度）が鉛直方向に、一定か、不連続成層状態にあるかにより、さらに、(1) 一層モデル、(2) 二層モデルに分けられる。

3-1 一層のエクマンタイプモデル⁶⁾

2章で示した基礎式をさらに簡単にするために、つぎの仮定を設ける。①水温は一定で、流れは定常とする。②現象変化は小さく緩やかであるとして非線形（慣性）項は無視する。③水域は浅く、底面摩擦が支配的であるとして、水平渦動粘性項を無視する。④鉛直渦動粘性係数を鉛直方向に一定とする。この時の基礎式は

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (3.2)$$

$$p = \rho_0 g (\eta - z) \quad (3.3)$$

および、式 (2.4) の連続式である。また、境界条件は

$$\text{水面 } z = \eta \quad \text{で} \quad A_v \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x, \quad A_v \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y \quad (3.4)$$

$$\text{水底 } z = -h \quad \text{で} \quad u = v = w = 0.0 \quad (\text{no-slip}) \quad (3.5)$$

である。ここに、 τ_x 、 τ_y は風による水面せん断応力を水の密度で割った x 、 y 成分である。上式を無次元化するために、

$$u^* = \frac{fL}{gD} u, \quad v^* = \frac{fL}{gD} v, \quad w^* = \frac{fL^2}{gD^2} w, \quad \Delta^* = \frac{fL}{A_v g} \tau_x, \quad \Gamma^* = \frac{fL}{A_v g} \tau_y \quad (3.6)$$

の外は、式 (2.7) の変数を採用する。これらの式を代入して無次元化した式 (3.1), (3.2) を積分し、(*) を落して記すと

$$u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \cos mz (C_2 e^{mz} - C_4 e^{-mz}) - \sin mz (C_1 e^{mz} - C_3 e^{-mz}) \quad (3.7)$$

$$v = \frac{\partial p}{\partial x} + \cos mz (C_1 e^{mz} + C_3 e^{-mz}) + \sin mz (C_2 e^{mz} + C_4 e^{-mz}) \quad (3.8)$$

となる。ここに、 $m = (fD^2/2A_v)^{\frac{1}{2}}$ 、 C_1, C_2, C_3, C_4 は水面と水底の境界条件より決められる積分定数である。さらに、上式を水底から水面まで積分して流量を求め、これらより、 x, y 方向の平均流速 $\bar{u}, \bar{v}$ を求めると

$$\bar{u} = h_1 \frac{\partial p}{\partial x} + h_4 \frac{\partial p}{\partial y} + h_2 \Gamma + h_3 \Delta \quad (3.9)$$

$$\bar{v} = -h_4 \frac{\partial p}{\partial x} + h_1 \frac{\partial p}{\partial y} + h_3 \Gamma - h_2 \Delta \quad (3.10)$$

となる。ここで、水面上昇量は小さいとして $\eta \approx 0.0$ としている。つぎに、これらの平均流速に対し、

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{v} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.11)$$

なる流れ関数を導入する。上式は、鉛直方向に積分された連続の条件

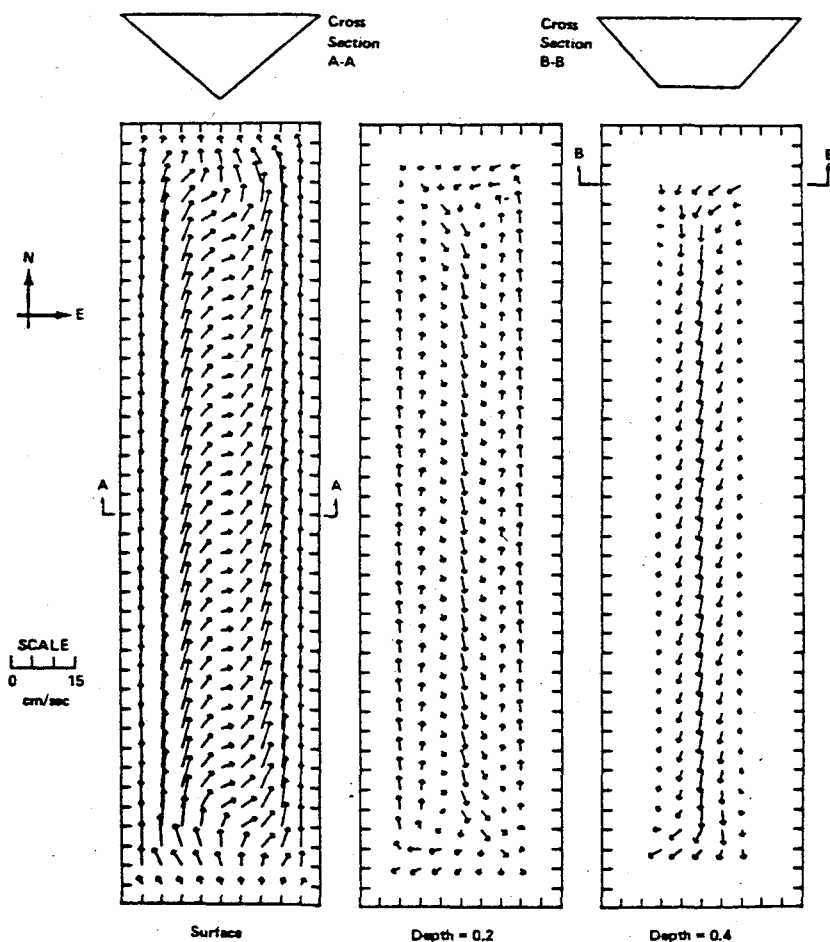


図3-1 流速分布(風向S)

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}h) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}h) = 0 \quad (3.12)$$

を満足している。式 (3.11) の $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ を式 (3.9)、(3.10) に代入した式より p を消去すると、 ψ を未知量とする

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial y} + c \quad (3.13)$$

が得られる。上式はエクマンタイプモデルの最終的な展開式であり、与えられた岸の条件のもとに、各種の数値計算法を用いて解かれる。水面上昇量は、 ψ が既知量となると式 (3.9) ～ (3.11) を用い計算できる。さらに、 w も式 (2.18) の u 、 v に式 (3.7)、(3.8) を代入した式を用い計算できる。上述の誘導は、Liggett に従っているの、この詳細と、各係数 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 、 a 、 b 、 c については、彼の文献 6) を参照されたい。

Liggett らは、上の解析モデルを、図 3-1 に示す、水平長 125 × 500 km、最大水深 80 m の長方形湖に一樣な南風を吹かせる場合に適用している。この時の風の応力は、1 dyne/cm²、 $f = 0.0001$ 1/s である。図において、表面流速ベクトルは、水深の浅い岸附近で風の方角になっているのに対して、水深の大きい湖中央では風の方角に対し時計廻り方向にずれている。これは、コリオリ力の影響によるものである。

以上のモデルでは ψ を未知量としているため、水域に流入がある場合、その指定が難しい。余越ら⁷⁾は、最終的な基礎式として、 $p = \eta - z$ を代入した式 (3.9)、(3.10) および (3.12) に有限要素法を適用する解析モデルを提案している。この解析モデルは、 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 η を未知量としているために、Liggett の方法に対し未知量数が多く、計算機容量や計算時間の点で不利であるが、岸における境界条件の指定が正確に、かつ容易に行える。図 3-2 は、諏訪湖に風速 3 m/s の SW の風が一樣に吹いた時の解析結果で、この時の風の応力は 0.13 dyne/cm²、 $f = 0.000086$ 1/s である。図において、湖中央の水面流速ベクトルは風向に対し時計廻り方向にずれている。これは、諏訪湖ほどの規模の湖においてもコリオリ力の影響があることを示すものである。鉛直方向に平均した水平流速は、風に沿う水深の浅い岸附近で順流で、水深の大きい湖中央で逆流となり、二つの水平環流が起っている。また、ここには示していないが、水底附近の水平流速は逆流となっており、諏訪湖ほどの浅い湖（最大水深 6.5 m 余、平均水深 4.0 m 程）でも、水平環流ばかりでなく鉛直環流も起っている。

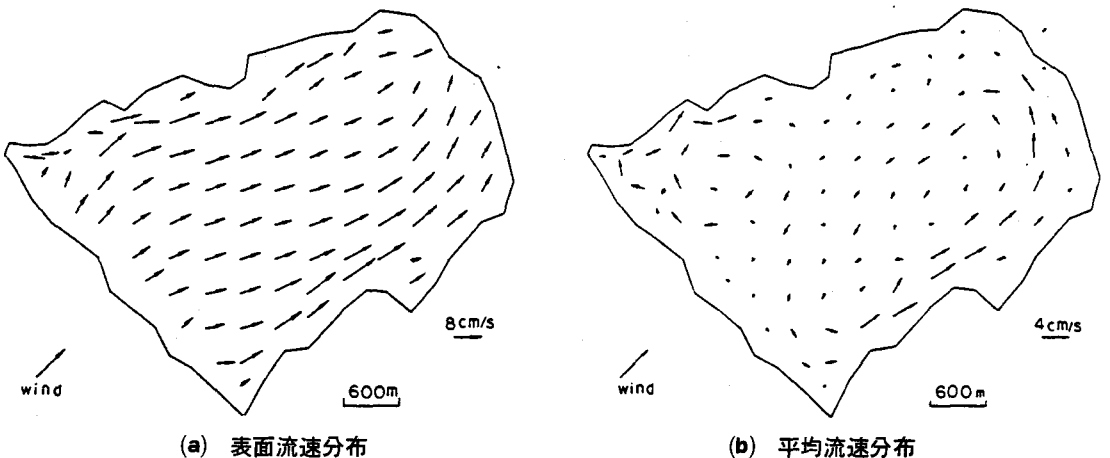


図 3-2 諏訪湖の流速分布 (風速 3 m/s)

上述のLiggettらの解析モデルは、非定常解析や非線形項、水平渦動粘性項、鉛直渦動粘性係数の鉛直方向への変化などを考慮する解析に適用できない欠点を有するが、この欠点を修正する方法が提案されている。WittenとThomas⁸⁾は、鉛直渦動粘性係数が水面より水底に直線的、または指数関数的に減少する時の解析モデルを提案している。また、Liggettらは時間変数をラプラス変換⁹⁾や解析的に積分して¹⁰⁾処理する非定常解析モデルを提案しているが、前者は現象が振動する場合や時間遅れを伴う問題には不適であり、¹¹⁾後者は各時間ステップで圧力勾配を一定としている点で問題である。さらに、Chengは慣性項を考慮した非定常解析モデル¹²⁾を提案しているが、このモデルは時間変数を差分を用いて処理しており、この処理法より非線形性の強い問題には不適である。

上述のエクマンタイプモデルは、層モデルや他の三次元モデルに比し、最終的な基礎式の未知量数が少なく、計算機容量や計算時間の点で有利である。その反面として、エクマンタイプモデルは、上に挙げたそれぞれの欠点の他につぎに述べる共通の欠点を有する。それは、岸において $\bar{u} = \bar{v} = 0.0$ としても、 u や v は必ずしも零とならずに、水面で順流で水底附近で逆流となることが多いことである。このために、水深の大きい鉛直な岸を有する水域では、この影響を小さくするために、岸附近に斜面を設けて岸の水深を小さくし、また湖の中央部と同程度の鉛直渦動粘性係数を用いて、実質的に $u = v = 0.0$ となるようにしている。しかし、このように岸を変えると、この影響がまた問題となる。

3-2 二層のエクマンタイプモデル

3-1では、水温が水域全体で一定、つまり一層状態と仮定したが、我国の湖沼は、その最大水深が10mを越えると6月頃より水温成層が形成され始め、9月下旬頃の冷却期には、変水層の薄い典型的な二層状態となる。

Leeらは、このような水域に適用できるモデルとして、一層モデルを発展させた二層のエクマンタイプモデル¹³⁾を提案している。このモデルは、変水層の位置に仮想的な内部境界面を設けて、この境界面を通して伝達されるのは運動量だけであるとして、密度を上、下層でそれぞれ一定不変として取扱っている。未知量は、上、下層についての流れ関数、水面上昇量、および静水面から内部境界面までの水深 d であるが、式(3.7)などに対応する式の係数に未知量 d が含まれているために、基礎式の解法はイテレーション法に依らねばならない。さらに、実際の水域では、岸近くの水深の浅い部分では下層が水底に達せず、一層状態と二層状態が混在する場合が多いが、このような水域に対して、Liggettは一層モデルと二層モデルの併用を提案している。しかし、この場合には内部境界面の位置により節点を移動させるか層数を変化させることが必要となり、大変な計算となる。

4. 層モデル

このモデルについては、第16回の本研修会において、堀江¹⁴⁾により、沿岸海域を対象にして詳しい解説がなされているので、ここではこのモデルの特徴と、湖の解析例について述べることにする。

4-1 層モデル (layer-model)

水域を鉛直方向に移動可能な内部境界面により何層かに分け、一般にはこの境界面を通して伝達される物理量は運動量のみであるとし、各層内で密度をそれぞれ一定不変とする。そして、最終的な基礎式の未知量は、各層内の鉛直方向に一定とした水平流速成分、層厚、水面上昇量である。このモデルの特例である一層モデルは、鉛直一層二次元モデルと称せられ潮流解析によく用いられるモデルであるが、湖沼の風成流解析モデルとしてもよく用いられる。このモデルについても、第16回の本研修会において、井上¹⁵⁾により詳細に

解説され、解析例も挙げられているので参照されたい。

また、このモデルは二層以上の場合には多層モデル (multi-layer model) と称せられるが、この場合には、層数の決定や水底と層間のせん断応力の評価が問題となる。多層モデルの解析例としては、二層モデルについては多少報告されているが³⁾、三層以上については皆無である。これは、二層のエクマンタイプモデルと同様に、層の位置変化に対応して節点の位置や層数を変える必要が生じ、計算がかなり困難であるためと思われる。

4-2 層位モデル (multi-level model)

別名で「多面モデル」と称せられるこのモデルでは、水域は固定した何層かに分けられるが、層モデルと異なり全ての物理量が境界面を通して伝達されるとしている。最終的な基礎式の未知量は、各層内の鉛直方向に一定とした流速成分、密度、および水面上昇量であり、鉛直流速や水圧は、未知量が既知となると、これらより簡単に計算できる。このモデルでも、層数の決定や底面や境界面のせん断応力の評価が問題になるが、層位置が固定であるため、4-1のように節点の移動や層数の変更などの操作は必要ない。

この解析例としては、Simons がオンタリオ湖を対象にした四層モデル¹⁶⁾が有名であるが、ここでは水平長が我国の中規模程度の湖沼に近い Kösen 湖を対象にした Wittmiss¹⁷⁾の解析結果の一部を図4-1に示す。Kösen 湖は、スウェーデン南部に位置し、面積 11 km²、最大水平長 7 km、最大水深 27 m で、南東部の島の多い区域が浅瀬となっている。解析法は Simons の方法により、湖を水面下 6 m までは 2 m ごとの三層に、それ以下を一層の四層に分けている。第一層の流れは、岸附近の浅瀬で順流で、水深の大きい湖中央では風向に対し時計廻り方向にずれている。また、図4-2は観測値と解析結果の比較を行っているが、両者はよい一

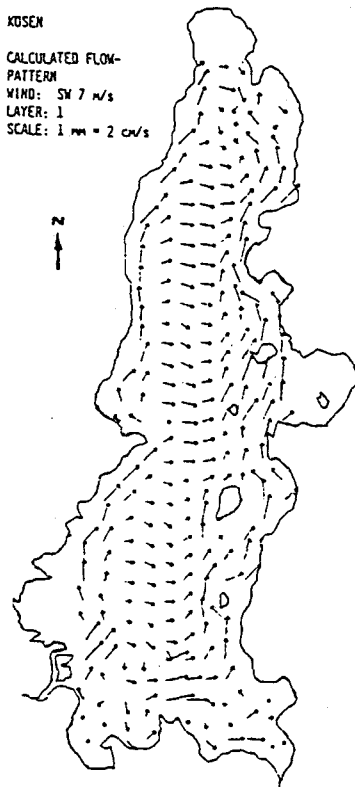


図4-1 流速分布

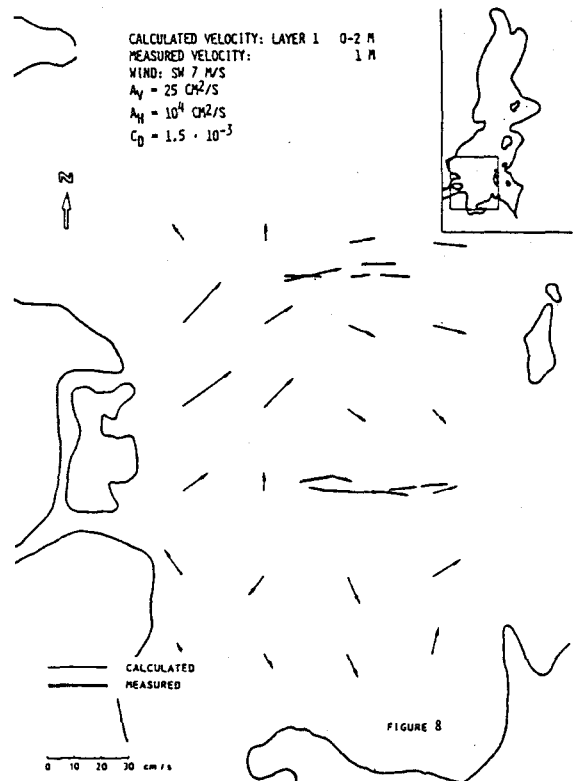


図4-2 観測値との比較

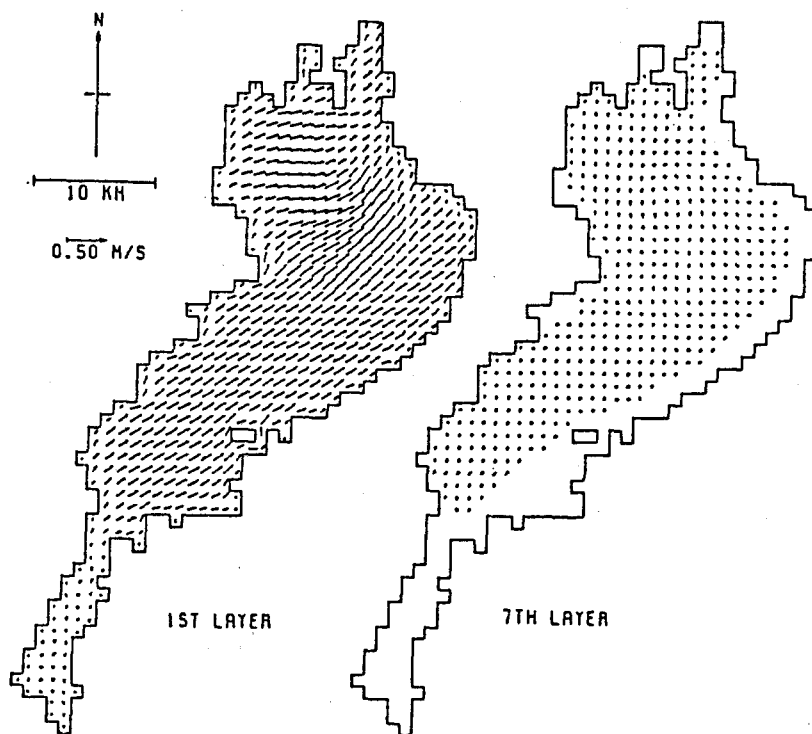


図4-3 琵琶湖の流速分布
(風速 5 m/s, 風向 SW)

致を示している。

つぎに我国における解析例としては、琵琶湖を対象とした大西、村本¹⁸⁾、岩佐¹⁹⁾の研究が挙げられる。このうち岩佐らは、水平格子間隔 1 km、鉛直方向には 50 m 以下は 2.5 m、それ以上で 10 m ごとの最大 24 層に分けて、北湖の中央部に冷水域があり静止状態にある全湖面に、突然風速 5 m/s の SW の一様な風を連続して吹かせた場合の解析を行っている。図4-3は、経過時間 3 時間後の水平流速を示したものであるが、第一層では吹送流効果が卓越して現われているのに対して、第七層では北湖中央に冷水の沈み込みに伴う反時計廻り方向の水平環流が現われている。

5. その他の三次元モデル

5-1 三次元メッシュモデル

このモデルは、三次元メッシュを組み、各点の水平流速成分、水圧、密度などをそのまま未知量とするモデルで、いろいろな解析条件に対しても簡単に対応できる最も汎用性に富む解析モデルである。しかし、このモデルである程度の精度の解を得るためには、メッシュを細かくする必要がある、現在は計算時間や計算機容量より制約を受けてほとんど用いられていない。わずかな解析例のなかで、密度を一定として図3-1の長方形湖の風成流を解析した Liggett²⁰⁾の試みが有名である。

5-2 関数展開モデル

このモデルは、水平流速成分などの三次元関数の近似関数に、水平方向の従来の区分的多項式と鉛直方向

の余弦関数の積で表わされる水平、鉛直方向の変数分離型の形状関数を用い、Galerkin有限要素法により基礎式の空間変数を離散化する解析モデルである。このモデルは、水域の水温が一定、不連続成層状態、鉛直方向に徐々に変化する連続成層状態にある場合に適用されるモデルとして、さらに(1)一層モデル、(2)二層モデル、(3)連続成層モデルに分けられる。これらのうち、一層モデルは連続成層モデルで水温を一定不変とした場合であり、また二層モデルは一層モデルを二層に拡張したものである。したがって、以下には連続成層モデルの概要を示すことにする。

(1) 連続成層の関数展開モデル²¹⁾

用いる基礎式は、 ρ に式(2.17)を、また w に式(2.18)を代入した運動方程式(2.8)、(2.9)、連続式(2.19)、および

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta (T - T_0) \quad (5.1)$$

より求めた T を代入した拡散方程式(2.12)である。ここに、 β は体積膨脹係数で、 T が T_0 に対して大きく変わらない時には、密度は上式のように線形近似できる。以上により基礎式は、無次元量で表わすが簡単のために(*)を落して記すと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - R_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\ & = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(E_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - R_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} \\ & = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\eta \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(E_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^\eta u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^\eta v dz = 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + R_0 \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - R_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v dz \right) \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(F_h \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(F_h \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(F_v \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

である。また境界条件は、有次元量で表すと、式(3.4)、(3.5)、および水温に関する条件

$$\text{水面 } z = \eta \text{ で } \rho g C_r H_v \frac{\partial T}{\partial z} = H (T_a - T) \quad (5.6)$$

$$\text{水底 } z = -h \text{ で } \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (5.7)$$

である。ここに C_r は水の比熱、 H は熱量の伝達係数、 T_a は気温、 n は水底の外向き単位法線ベクトルである。これらの式は、 T を式(5.1)を用い消去し、式(2.7)および

$$\rho_a^* = \frac{\rho_a}{\rho_0}, \quad H^* = \frac{H}{\rho_0 g C_r f D}$$

により無次元化すると、(*)を落して

$$z = \eta \quad \text{で} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{H}{F_\theta} (\rho_a - \rho) \quad (5.8)$$

$$z = -h \quad \text{で} \quad u = v = w = 0.0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad (5.9)$$

となる。

つぎに、上式の空間変数に関する有限要素法による定式化には、図5-1に示す要素内で、総和規約を用いて、近似関数

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos A_p z \cdot u_{pi}, & A_p &= \frac{2p-1}{2h} \pi \\ v &= N_i \cdot \cos A_p z \cdot v_{pi}, & (p &= 1, 2, \dots m) \\ \eta &= N_i \cdot \eta_i \\ \rho &= N_i \cdot \cos B_{p'} z \cdot \rho_{p'i}, & B_{p'} &= \frac{p'-1}{h} \pi \\ & & (p' &= 1, 2, \dots m') \end{aligned} \right\} (i = i, j, k) \quad (5.10)$$

を考える。ここに、 N_i は水平方向の形状関数で、ここでは三角形一次要素のそれを用いる。また、 $\cos A_p z$ 、 $\cos B_{p'} z$ は、図5-2に示す鉛直方向の形状関数、 m 、 m' は流速、密度の展開項数を示す。ここで、鉛直方向の形状関数は、 m 、 m' を大きくすることにより、流速や密度の鉛直方向の任意の分布を表現できるものである。重み関数として、運動方程式には $N_i \cdot \cos A_p z$ を、連続式には N_i を、乱流拡散方程式には $N_i \cdot \cos B_{p'} z$ を選び、基礎式を有限要素法で定式化した式は、要素が一つしかない場合には

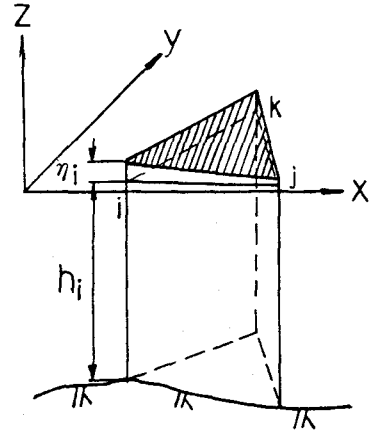


図5-1 有限要素
(i, j, k は x, y 面内)

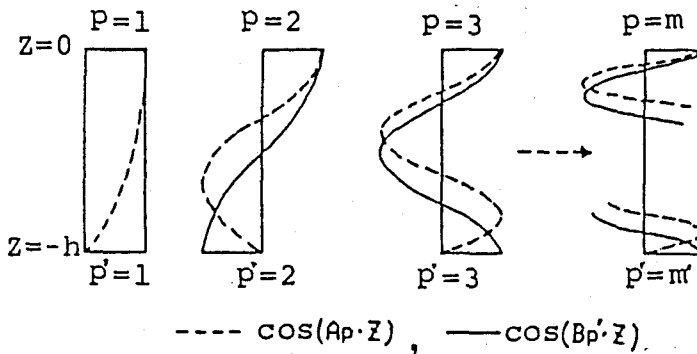


図5-2 鉛直方向の形状関数

$$\begin{aligned}
& M_{pqij} \cdot \dot{u}_{qj} + RX_{pqrijk} \cdot u_{qj} \cdot u_{rk} + RY_{pqrijk} \cdot v_{qj} \cdot u_{rk} \\
& = EX_{pr'ijk} \cdot \eta_j \cdot \rho_{r'k} + GX_{pq'ij} \cdot \rho_{q'j} + K_{pqij} \cdot u_{qj} + C_{pqij} \cdot v_{qj} + FX_{pi} \quad (a) \\
& M_{pqij} \cdot \dot{v}_{qj} + RX_{pqrijk} \cdot u_{qj} \cdot v_{rk} + RY_{pqrijk} \cdot v_{qj} \cdot v_{rk} \\
& = EY_{pr'ijk} \cdot \eta_j \cdot \rho_{r'k} + GY_{pq'ij} \cdot \rho_{q'j} + K_{pqij} \cdot v_{qj} - C_{pqij} \cdot u_{qj} + FY_{pi} \quad (b) \\
& M_{ij} \cdot \dot{\eta}_j + CX_{qij} \cdot u_{qj} + CY_{qij} \cdot v_{qj} = 0 \quad (c) \\
& M'_{p'q'ij} \cdot \rho_{q'j} + (RX'_{p'q'rijk} \cdot u_{rk} + RY'_{p'q'rijk} \cdot v_{rk}) \cdot \rho_{q'j} \\
& = (K'_{p'q'ij} + R'_{p'q'ij}) \cdot \rho_{q'j} + F'_{pi} \quad (d)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

(q=1, 2, ..., m, r=1, 2, ..., m, q'=1, 2, ..., m', j=i, j, k, k=i, j, k)

となる。ここに、 u_{qj} などの上つきの $\cdot$ は時間微分を意味し、 $p=1, 2, \dots, m$, $i=i, j, k$, $p'=1, 2, \dots, m'$ であり、したがって上式の全式数は、 $6m+3+3m'$ となる。また、近似関数と重み関数における添字を区別するために、 i は j や k に、 p は q や r などに変えていることに注意されたい。各係数は、重み関数と各変数に対応する形状関数の積を重み関数の定義域の要素内で積分して求められる。例えば、質量行列の成分となる M_{pqij} は

$$\begin{aligned}
& \int N_i \cdot \cos A_p z \cdot N_j \cdot \cos A_q z \cdot dz = \int_S N_i N_j \cdot \int_{-h}^{\eta=0} \cos A_p z \cdot \cos A_q z \cdot dz \cdot dS \\
& = \int_S \frac{1}{2} N_i N_j h dS \quad (p=q) \quad , \quad = 0 \quad (p \neq q)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

となる。ここに、 S は図5-1の三角形 ijk で、 η は h に比し十分小さい ($\eta \ll h$) とし $\eta \approx 0.0$ としている。ここで式 (5.12) は $p \neq q$ の時零であるが、これは $M'_{p'q'ij}$ についても同様で、鉛直方向の形状関数の直交性によるものである。これは、流速成分や密度の各展開項のからみ合い (coupling) をなくすため、時間積分法として陽解法を用いる時には、各展開項ごとに連立方程式を解くことができ、計算機容量や計算時間の点で非常に有利である。他の係数は紙面の都合上省略するが、詳細は文献を参照されたい。なお、要素が多数存在する場合は、上式の各項を各要素について求め、これを各節点の各々の式について加え合せれば、全節点の未知量に対する連立方程式が得られる。

上述の式 (5.11) で、密度を一定不変とすると、つまり $m'=1$ とし、 $\rho_{1j}=\rho_{1k}=1.0$ とおくと一層の関数展開モデルの離散化式が得られる。

このモデルの解析例として、一層状態にある諏訪湖の湖面に一樣な風速 3 m/s のNWの風が連続して吹く場合の結果を図5-3(b)に示す。²²⁾ここで、非線形計算法としてはNewton-Laphson法を用いている。また、図5-3(a)は中心が水面下0.1 mにある浮子の漂流観測結果である。観測中、風向、風速は多少変化しているが、平均的には図5-3(b)の条件に近く、両図の比較が可能である。浮子の動きと流速ベクトルの方向はよい一致を示している。なお、図5-3(b)の非線形解は線形解にかなり近く、諏訪湖では、風速 3 m/s ほどの風成流に対して線形解析が可能である。

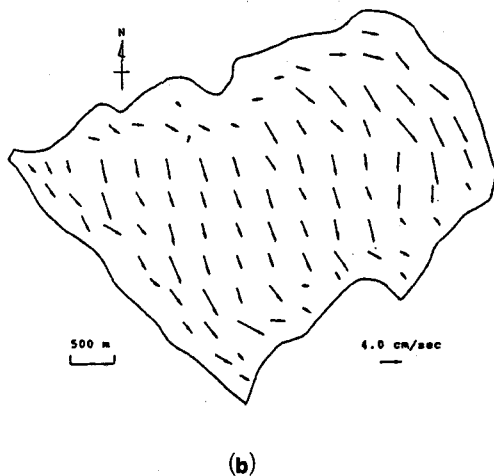
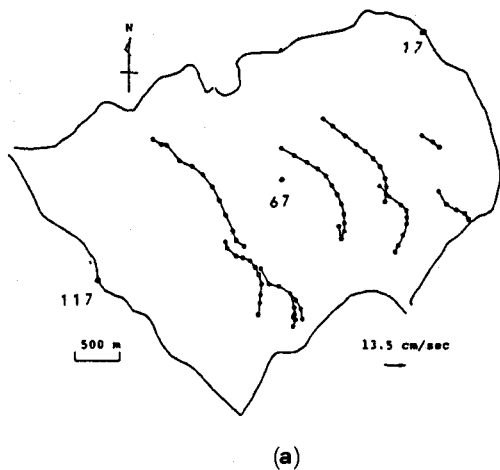


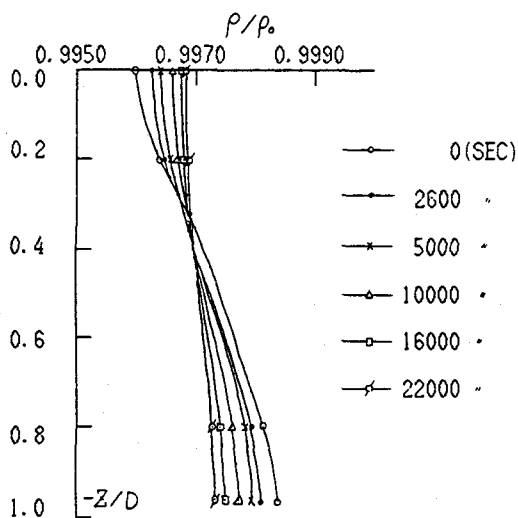
図5-3 諏訪湖の流速分布

a) 浮子漂流観測結果²²⁾

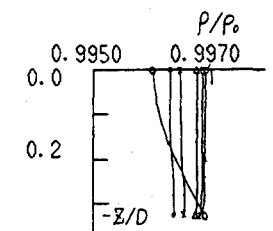
黒丸点は浮子の漂流原点(10時)を, 白丸点は30分ごとのその位置を示す。
観測時の風向, 風速を下に示す。

時刻	10	11	12	13	14	15	16
風向	WNW	WNW	N	NW	NW	NNW	WSW
風速(m/s)	4.0	4.0	1.6	2.6	2.5	2.2	2.7

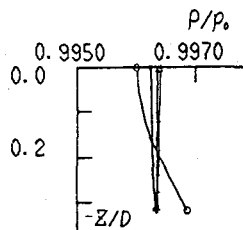
b) 表面流速 風向NW, 風速3 m/s



(a) 湖中央(節点67)



(b) 風上の岸(節点117)



(c) 風下の岸(節点17)

図5-4 諏訪湖の密度の変化

(風速3 m/s, 風向SW
節点は図5-3(a)に示す)

つぎに、諏訪湖は夏期に十数日はど風の弱い晴天が続く弱い連続成層状態になるが、これがどの程度の時間で破壊されるかを連続成層モデルを適用して解析した結果を示す。解析条件は、湖心の水温が水面で29.0℃、水底で19.0℃、その間は線形に変化し、水平方向には全て等しく、流れのない状態にある湖面に、突然3 m/sのSWの様な風を連続して吹かせる場合である。ここで、時間積分法としてRunge-Kutta法を用いている。図5-4は、²³⁾湖の代表的な地点の密度の鉛直分布を各経過時間ごとに示したものである。湖心における水面と水底の密度差は、経過時間2.2万秒で初期のその2割ほどであり、諏訪湖の水温成層は、風により簡単に破壊されることがわかる。

なお、上述のモデルでは、鉛直渦動粘性係数を鉛直方向に一定としているが、これを変化させることも容易である。

この関数展開モデルの特徴は、基礎式の全ての項を考慮した解析が可能で、またメッシュ分割は鉛直方向には行う必要がないため、データ数が少なくて済むことである。その反面として、水平流速成分や密度の急激な変化に対応させるために、展開項数 m や m' を非常に大きくしなければならないことである。このために、不連続成層状態にある水域の解析モデルとしては、上述の連続成層モデルでなく、つぎに示す二層モデルを用いる方がよい。

(2) 二層の関数展開モデル²⁴⁾

このモデルは、4-1の二層モデルと関数展開モデルを組み合わせたモデルで、上層の流速成分は(1)の密度と同じ形の形状関数を用いて近似している。離散化式は、複雑な非線形性を示すため、定常解も非定常解析に依っている。

6. おわりに

以上、閉鎖水域における風成流の解析について、三次元解析モデルを中心にして述べたが、このうちのどの解析モデルを選択すべきかは、対象とする水域の地形条件や気象条件などの解析条件のほか、用いる数値計算法や解析結果の使用目的などに関連し、非常に難しい問題である。しかし、将来の方向としては、計算機の発達も著しいので、未知量数は増すが、種々の仮定に基づく解析的处理を行わない、より原形に近い基礎式を用いる解析モデルへと移行するものと思える。

また、実際に数値解析を行う際に問題となる、水面に作用する風によるせん断応力、水底や内部境界面のせん断応力、水平・鉛直渦動粘性係数などの評価法や岸や水底の流速成分の指定の仕方については、紙面の都合上述べなかったが、用いた式や具体的な数値の詳細については文献を参照されたい。なお、これらは、それぞれ関連もあり未解明な点も多く、風成流特性のより正確な解明のために、今後さらに追求されるべき研究テーマでもある。

参考文献

- 1) 津田松苗：日本湖沼の診断，共立出版，1975。
- 2) 福島武彦：霞ヶ浦における湖流と混合問題の数値解析，国立公害研究所調査報告，第18号，1981，pp. 7～29。
- 3) R. T. Cheng, T. M. Powell and T. M. Dillon : Numerical Models of Wind-Driven Circulation in Lakes, Appl. Math. Modelling, Vol. 1, 1976, pp. 141～159。
- 4) J. Sönderman : Numerical Modelling of Circulation in Lakes, Hydrodynamics of Lakes

- (Edited by W.H.Graf and C.H.Mortimer), Elsevier Scientific Publishing Company, 1979, pp.1~28.
- 5) 増田善信: 数値予報, 東京堂出版, 1981, pp.113~115.
 - 6) J.A.Liggett and C.Hadjitheodorou: Circulation in Shallow Homogenous Lakes, Jour. Hydraulics Division, Proc. ASCE, HY2, 1969, pp.609~620.
 - 7) 余越正一郎・富所五郎: 風による諏訪湖の流動特性, 土木学会論文報告集, 第276号, 1978, pp.53~63.
 - 8) A.J.Witten and J.H.Thomas: Steady Wind Driven Currents in a Large Lake with Depth-Dependent Eddy-Viscosity, Jour. Physical Oceanography, 6, 1976, pp.85~92.
 - 9) F.D.L.Young and J.A.Liggett: Transient Finite Element Shallow Lakes Circulation, Jour. Hydraulics Division, Proc. ASCE, HY2, 1977, pp.109~121.
 - 10) J.A.Liggett: Unsteady Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, Jour. Hydraulics Division, Proc. ASCE, HY4, 1969, pp.1273~1288.
 - 11) 小林三男・荒木正夫・富所五郎: 数値 Laplace 変換を用いた非定常拡散解析, 第25回海岸工学講演会講演集, 1978, pp.504~507.
 - 12) R.T.Cheng: Transient Three-Dimensional Circulation of Lakes, Jour. Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, EM1, 1977, pp.17~34.
 - 13) K.K.Lee and J.A.Liggett: Computation for Circulation in Stratified Lakes, Jour. Hydraulics Division, Proc. ASCE, HY10, 1970, pp.2089~2115.
 - 14) 堀江 毅: 沿岸海域の流れと物質拡散の予測手法, 第16回水工学に関する夏季研修会Bコース, 土木学会, 1980, pp.B-8-1~B-8-17.
 - 15) 井上和也: 開水路流れの数値解析, 第16回水工学に関する夏期研修会Aコース, 土木学会, 1980, pp.A-6-14~A-6-18.
 - 16) T.J.Simons: Verification of Numerical Models of Lake Ontario. II. Stratified Circulations and Temperature Changes, Journal of physical Oceanography, Vol.5, 1975, pp.98~110.
 - 17) J.Wittmiss: Application of a Transient Numerical Model to Lake Kösen, Hydrodynamics of Lakes (Edited by W.H.Graf and C.H.Mortimer), Elsevier Scientific Publishing Company, 1979, pp.31~40.
 - 18) 大久保賢治・村本嘉雄・久保田一: 琵琶湖南湖の湖流解析, 京都大学防災研究所年報, 第26号B-2, 1983, pp.503~530.
 - 19) 岩佐義朗・井上和也・阿部 徹・宮川勇二: 三次元的数値解析による琵琶湖の湖流および水温成層の挙動, 土木学会関西支部年次学術講演会, 1984.
 - 20) J.A.Liggett: Cell Method for Computing Lake Circulation, Jour. Hydraulics Division, Proc. ASCE, HY3, 1970, pp.725~743.
 - 21) 富所五郎: 水温変化を考慮した湖水の三次元流動解析, 第3回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集, 1981, pp.65~72.
 - 22) 富所五郎: 湖水の三次元流動の解析法, 国立公害研究所報告, 第18号, 1981, pp.43~54.

- 23) 高橋智嗣・富所五郎：連続成層状態にある閉鎖水域の風成流の三次元数値解析法，土木学会年次学術講演会概要集，Ⅱ－177，1983，pp. 353－354.
- 24) 野口 均・富所五郎：不連続成層状態にある閉鎖水域の風成流の三次元数値解析法，土木学会年次学術講演会概要集，Ⅱ－150，1982，pp. 299～300.