

周辺積分法による水面波境界値問題の数値解析法

井 島 武 士

1. はしがき

本文は水面波の2次元境界値問題を数値的に解析する方法として、著者の創案したグリーンの公式による周辺積分法を紹介するものである。2次元問題において、境界面が水平面と鉛直面より成る場合には、著者¹⁾のポテンシャル接続法（または領域分割法）が有効である。之は造船工学の故渡辺恵弘教授の論文²⁾と Stoker³⁾の著書にヒントを得たものであった。然し境界面が水平または鉛直から少しでもずれて来ると、この方法は理論的に成立しない。その場合の方法として清川・小林⁴⁾の興味ある方法があるが、それも任意形の境界面となると効力を失う。これらを含めて、一般の形の境界面に適応する方法としてグリーンの公式を利用することが考えられる。これを思い付いたのは任意形状の等水深泊地内の波の分布を取扱った Hwang-Tuck⁵⁾の論文に刺戟された結果であった⁶⁾⁷⁾⁸⁾。その後同じ方法が Yeung⁹⁾によって発表されていることを知った。以上の取扱いは定常の微小振幅波運動に限られるが、2次元境界値問題はこの方法で簡明に解析される。さらに有限振幅波および非定常運動の解析にも、少し許りの変更で同じ方法が適用され、微小振幅波の定常運動はその中の最も単純な場合として取扱はれることが分った。

本文では先づ非定常の有限振幅波問題の取扱いから始めて、簡単な微小振幅定常波に至るという順序を取った。水面波の境界値問題の数値解析には MAC 法¹⁰⁾や有限要素法¹¹⁾も用いられるが、ポテンシャル運動を解く方法としては、鶏を裂くに牛刀を以てするの感があり、計算手続きや時間から見て、本文の方法が数等すぐれていると思う。ここでは紙数の都合から2次元問題についてだけ述べるが、グリーンの公式は2次元でも3次元でも殆んど変りなく（ $\log r$ が $1/r$ に変わるだけ）本文の方法はほとんどそのまま3次元問題にも適用される¹²⁾¹³⁾。

2. 速度ポテンシャルによる水面波流体運動の表示

(1) 流体運動の力学量

流体が非粘性・非圧縮性の完全流体であること、重力の場における運動であること及び静止状態から始まる運動であることの3条件を満す場合、その運動は速度ポテンシャルをもつことが理論的に保証される。水面波は近似的に第1の条件を、厳密に第2の条件を満しており、また波動は静止平衡状態の周りの運動であることを考慮すると、第3の条件も満足しており、速度ポテンシャルの存在を前提とすることは一般に正しい。

静水面に原点を取り，水平面内に X 軸，鉛直上方に Z 軸をとり，時間を T ，速度ポテンシャルを Φ ， X 及び Z 方向の流速を U, W ，流体圧力を P ，密度を ρ ，重力の加速度を g とすると Φ は質量保存則により Laplace の方程式 (2・1) を満足し，流速は Φ の勾配により，圧力は運動量保存則によりそれぞれ式 (2・2) (2・3) で表わされる。

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2 \cdot 1)$$

$$(U, W) = (\Phi_X, \Phi_Z) \quad (2 \cdot 2)$$

$$P/\rho = -\Phi_T - \frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Z^2) - gZ \quad (2 \cdot 3)$$

上式で添字はそれによる偏微分を表わす。

(2) 自由表面条件

自由表面を $Z = G(X, T)$ とすると，自由表面での運動量及び質量保存則はそれぞれ次の関係式を与える。

$$\Phi_T = -gG - \frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Z^2), \quad G_T = \Phi_Z - G_X \Phi_X, \quad (Z = G) \quad (2 \cdot 4)$$

(3) 無次元表示

流体域の長さや時間を代表する値をそれぞれ h (例えば水深) 及び $1/\sigma$ (例えば運動の周波数) とし，上述の各量を以下のように無次元化する。

$$(x, z, t) = (X/h, Z/h, \sigma T), \quad (u, w) = (U/\sigma h, W/\sigma h)$$

$$\zeta = G/h, \quad p = P/\rho gh, \quad \phi = \frac{\sigma}{gh} \Phi, \quad \Gamma = \sigma^2 h/g \quad (2 \cdot 5)$$

これにより式 (2・1) ~ (2・4) は次のように書かれる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2 \cdot 6)$$

$$(u, w) = (\phi_x/\Gamma, \phi_z/\Gamma) \quad (2 \cdot 7)$$

$$p = -\phi_t - \frac{1}{2\Gamma}(\phi_x^2 + \phi_z^2) - z \quad (2 \cdot 8)$$

$$\phi_t = -\zeta - \frac{1}{2\Gamma}(\phi_x^2 + \phi_z^2), \quad \zeta_t = \frac{1}{\Gamma}(\phi_z - \zeta_x \phi_x), \quad (z = \zeta) \quad (2 \cdot 9)$$

(x, z) 平面内の曲線 C を考え，その上の任意点における切線と法線を s 及び ν ，法線 ν と x 軸のなす角を θ とすると $\cos(\nu: x) = \cos \theta$ ， $\cos(\nu: z) = \sin \theta$ で，この点における ϕ については次の関係

がある。

$$\phi_x = \phi_v \cos \theta - \phi_s \sin \theta, \quad \phi_z = \phi_v \sin \theta + \phi_s \cos \theta \quad (2 \cdot 10)$$

即ち曲線 C が与えられると, ϕ_x, ϕ_z は ϕ_v, ϕ_s により決まり, また次の関係がある。

$$\phi_x^2 + \phi_z^2 = \phi_v^2 + \phi_s^2 \quad (2 \cdot 11)$$

3. ポテンシャル函数に関するグリーンの定理^[4]と公式

(x, z) 平面上において, Fig. 1 に示すように, 閉曲線 C で囲まれた領域内 D 及び境界 C 上の点を (x, z) 及び (ξ, η) とし, 境界 C を移動する点を (ξ, η) とする。そして, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - z)^2}$ とすると, グリーンの定理により, 点 (x, z) での ϕ の値は, 境界 C 上の ϕ と ϕ_v によって次のように表わされる。

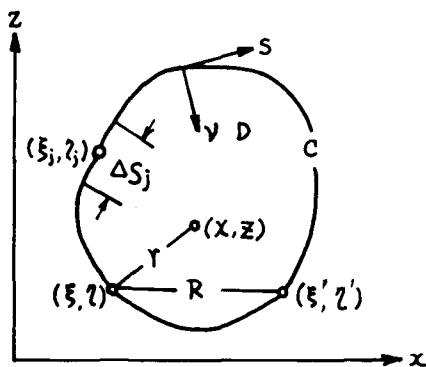


Fig. 1 Definitions of Fluid Boundary

$$\phi(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left[\phi(\xi, \eta; t) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log r) - \log r \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \phi(\xi, \eta; t) \right] ds \quad (3 \cdot 1)$$

特別の場合として点 (x, z) が境界上の点 (ξ, η) と一致するときは次の関係となる。

$$\phi(\xi', \eta'; t) = -\frac{1}{\pi} \int_C \left[\phi(\xi, \eta; t) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log R) - \log R \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \phi(\xi, \eta; t) \right] ds \quad (3 \cdot 2)$$

ここで $R = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}$

上式は境界 C 上の ϕ と $\partial \phi / \partial \nu = \phi_v$ との関係を与えるもので, 境界 C を N 々の微小要素に分割し, その第 j 番目の要素の中心点を $(\xi_j, \eta_j) = j$ で表わして, 式 (3・2) の右辺第 1 項を離散化すると

$$\begin{aligned} \int_C \phi(\xi, \eta; t) \frac{\partial}{\partial \nu} (\log R) ds &= \sum_{j=1}^N \int_{\Delta S_j} \phi \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} (\log R) ds \\ &\doteq \sum_{j=1}^N \phi(j; t) \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial \nu} (\log R) ds \end{aligned} \quad (3 \cdot 3)$$

であるから、

$$(\xi', \eta') = (\xi_i, \eta_i) = i, \quad R_{ij} = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2} \text{ と表わし}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta S_j} \log R_{ij} dS_j, \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta S_j} \frac{\partial}{\partial \nu} (\log R_{ij}) dS_j, \quad \bar{\phi}(j) = \partial \phi(\xi_j, \eta_j) / \partial \nu \quad (3 \cdot 4)$$

と定義すると、式 (3・2) は次のように離散化される。

$$\phi(i; t) = - \sum_{j=1}^N [\bar{E}_{ij} \phi(j; t) - E_{ij} \bar{\phi}(j; t)] \quad (3 \cdot 5)$$

または

$$\sum_{j=1}^N [F_{ij} \phi(j; t) - E_{ij} \bar{\phi}(j; t)] = 0, \quad i = 1 \sim N \quad (3 \cdot 6)$$

ここで

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \bar{E}_{ij}, \quad \delta_{ij} = 0 \ (j \neq i) = 1 \ (j = i) \quad (3 \cdot 7)$$

式 (3・5), (3・6) を本文ではグリーンの公式と呼ぶ。

E_{ij} 及び $\bar{E}_{ij}$ は共に流体域の形状によって決まるものであるから、式 (3・6) は境界 C 上の ϕ と $\bar{\phi}$ の間に、領域の幾何学的形状のみに依存する 1 次関係式が存在することを示している。

式 (2・10) で示したように、2 次元運動における流体域の境界線 C 上の力学量 u, w, p (式 (2・7) (2・8)) は曲線 C への切線方向と法線方向のポテンシャル勾配 ϕ_s, ϕ_n 及びポテンシャルの時間微分 ϕ_t により定まる。故に任意時刻での境界線上のすべての点における ϕ と $\bar{\phi}$ が知れれば、 ϕ_s は曲線に沿う ϕ の勾配として計算され、 ϕ_t は ϕ の時間勾配として計算される。一方式 (3・1) により流体内のポテンシャル ϕ は C 上の ϕ と $\bar{\phi}$ で決まるから、結局境界 C 上の各時刻での ϕ と $\bar{\phi}$ が知れれば流体運動は確定することになる。

式 (3・6) は境界線 C の形に応ずる、 $2N$ 個の ϕ と $\bar{\phi}$ に関する、 N 個の連立 1 次方程式である。これとは独立に、境界上の各点では ϕ と $\bar{\phi}$ に関する力学的条件式が存在する。これらは一般に非線型であるが、摂動展開を行うことによって、各近似数における ϕ と $\bar{\phi}$ に関する N 個の 1 次関係式に変換される。かくして $2N$ 個の ϕ と $\bar{\phi}$ に関して $2N$ 個の 1 次方程式が存在することになり、これらを連立して解くことにより、境界上の ϕ と $\bar{\phi}$ がすべて確定する。これが本方法の原理である。(実際計算では力学的条件式により $\bar{\phi}$ (または ϕ) を ϕ (または $\bar{\phi}$) で表わして、式 (3・6) に代入し、 N 個の連立方程式を解くことが多い。)

4. ポテンシャル及び境界条件式の摂動展開

ポテンシャル ϕ と自由表面条件式 ζ を微小量 ε により第 3 次近似まで展開する。

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)}, \quad \zeta = \varepsilon \zeta^{(1)} + \varepsilon^2 \zeta^{(2)} + \varepsilon^3 \zeta^{(3)} \quad (4 \cdot 1)$$

$z = \zeta$ における条件式 (2・9) をテーラー展開により $z = 0$ での条件に変換する。

(1) 第 1 次近似

$$\phi_t^{(1)} = -\zeta^{(1)}, \quad \zeta_t^{(1)} = \phi_z^{(1)} / \Gamma \quad (4 \cdot 2)$$

(2) 第 2 近似

$$\phi_t^{(2)} = -\zeta^{(2)} - \zeta^{(1)} \phi_{zt}^{(1)} - [\phi_x^{(1)2} + 3\phi_z^{(1)2}] / 2\Gamma \quad (4 \cdot 3)$$

$$\zeta_t^{(2)} = [\phi_z^{(2)} - \zeta^{(1)} \phi_{xx}^{(1)} - \zeta_x^{(1)} \phi_x^{(1)}] / \Gamma \quad (4 \cdot 4)$$

(3) 第 3 次近似

$$\begin{aligned} \phi_t^{(3)} = & -\zeta^{(3)} - \zeta^{(1)} \phi_{zt}^{(2)} - \zeta^{(2)} \phi_{zt}^{(1)} + \zeta^{(1)2} \phi_{xxt}^{(1)} / 2 \\ & - [\phi_x^{(1)} \phi_x^{(2)} + 3\phi_z^{(1)} \phi_z^{(2)} + \zeta^{(1)} (\phi_x^{(1)} \phi_{zx}^{(1)} - 3\phi_z^{(1)} \phi_{xx}^{(1)})] / \Gamma \end{aligned} \quad (4 \cdot 5)$$

$$\begin{aligned} \zeta_t^{(3)} = & [\phi_z^{(3)} - \zeta^{(1)} \phi_{xx}^{(2)} - \zeta^{(2)} \phi_{xx}^{(1)} - \zeta_x^{(1)} \phi_x^{(2)} - \zeta_x^{(2)} \phi_x^{(1)} \\ & - \zeta_x^{(1)2} \phi_z^{(1)} - \zeta^{(1)2} \phi_{zxx}^{(1)} / 2 - \zeta^{(1)} \zeta_x^{(1)} \phi_{zx}^{(1)}] / \Gamma \end{aligned} \quad (4 \cdot 6)$$

5. 計 算 法

具体的に説明するために Fig. 2 に示す流体域を考える。境界 AB は静水面 ($z = 0$), BC は不透過固定壁, CA は各時刻の法線流速が指定される境界とする。AB, BC, CA をそれぞれ N_1, N_2, N_3 個の小要素に分割し, グリーンの公式 (3・6) を適用すると

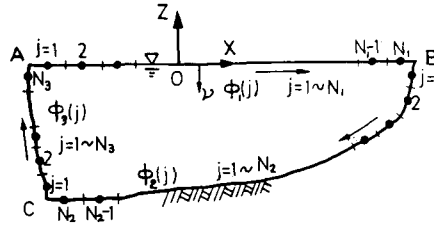


Fig. 2 Definition sketch of fluid region

$$\left(\sum_{j=1}^{N_1} + \sum_{j=1}^{N_2} + \sum_{j=1}^{N_3} \right) [F_{ij} \phi(j:t) - E_{ij} \bar{\phi}(j:t)] = 0, \quad i = 1 \sim (N_1 + N_2 + N_3) \quad (5 \cdot 1)$$

固定壁 BC 上では $\bar{\phi}_2 = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} \bar{\phi}_1(j:t) - \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_2(j:t) - \sum_{j=1}^{N_3} F_{ij} \phi_3(j:t) &= \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_1(j:t) - \sum_{j=1}^{N_3} E_{ij} \bar{\phi}_3(j:t) \\ i = 1 \sim (N_1 + N_2 + N_3) \end{aligned} \quad (5 \cdot 2)$$

これは ϕ_1 と ϕ_3 が与えられた場合に、 $(N_1 + N_2 + N_3)$ 個の未知量 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を決める同数の連立 1 次方程式である。前節の各近似に対する計算法は以下のである。

(1) 第 1 次近似： τ を時間増分とし、式 (4・2) の $\phi_i^{(1)}$ を中央差分により次のように近似する。

$$\phi_i^{(1)}(j:n\tau) = \frac{1}{2\tau} [\phi^{(1)}(j:(n+1)\tau) - \phi^{(1)}(j:(n-1)\tau)] \quad (5 \cdot 3)$$

$\xi_i^{(1)}$ も同様である。内向き法線を用いるので式 (4・2) は次のようになる。

$$\phi_1^{(1)}(j:(n+1)\tau) = \phi_1^{(1)}(j:(n-1)\tau) - 2\tau \xi^{(1)}(j:n\tau) \quad (5 \cdot 4)$$

$$\xi^{(1)}(j:(n+1)\tau) = \xi^{(1)}(j:n-1)\tau - 2\tau \phi_1^{(1)}(j:n\tau)/\Gamma \quad (5 \cdot 5)$$

上式は時刻 $(n-1)\tau$ での $\phi_1^{(1)}$ と $\xi^{(1)}$ 及び時刻 $n\tau$ での $\phi_1^{(1)}$ と $\xi^{(1)}$ が知られると時刻 $(n+1)\tau$ での $\phi_1^{(1)}, \xi^{(1)}$ が求まることを示している。そして $\phi_1^{(1)}(n\tau)$ は式 (5・2) から、 $\phi_1^{(1)}(n\tau)$ と $\phi_3(n\tau)$ により求めることが出来る。故にもし時刻 $n\tau$ と $(n-1)\tau$ での自由表面上の ϕ と ξ が与えられると式 (5・2) (5・4) (5・5) を用いて時刻 $(n+1)\tau$ でのそれらの値が容易に求まることになる。

(2) 第 2 次近似：第 1 次近似値を用い、式 (4・3), (4・4), (5・2) により同様に計算される。この時 $\phi_x^{(1)}, \phi_{xx}^{(1)}$ は中央差分により次のように近似する。

$$\begin{aligned} \phi_x^{(1)}(j:n\tau) &= [\phi^{(1)}(j-1:n\tau) - \phi^{(1)}(j+1:n\tau)]/2\Delta x \\ \phi_{xx}^{(1)}(j:n\tau) &= [\phi^{(1)}(j+1:n\tau) - 2\phi^{(1)}(j:n\tau) + \phi^{(1)}(j-1:n\tau)]/(\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (5 \cdot 6)$$

特に端点 $j=1$ に対しては次式で近似する。

$$\begin{aligned} \phi_x^{(1)}(1:n\tau) &= [3\phi^{(1)}(1:n\tau) + 4\phi^{(1)}(2:n\tau) - \phi^{(1)}(3:n\tau)]/2\Delta x \\ \phi_{xx}^{(1)}(1:n\tau) &= [2\phi^{(1)}(1:n\tau) - 5\phi^{(1)}(2:n\tau) + 4\phi^{(1)}(3:n\tau) - \phi^{(1)}(4:n\tau)]/(\Delta x)^2 \end{aligned} \quad (5 \cdot 7)$$

$\xi_x^{(1)}$ についても、また端点 $j=N_1$ についても同様である。

(3) 第 3 次近似：第 1 次、第 2 次近似値を用いて、式 (4・5) (4・6) (5・2) により同様に計算される。

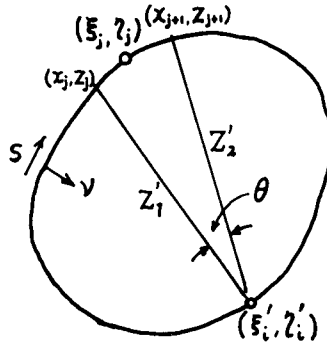


Fig. 3 Definitions for Calculation of E_{ij} and $\bar{E}_{ij}$

数値計算に際しての式 (3・4) の E_{ij} $\bar{E}_{ij}$ は次のように計算される⁵⁾。即ち Fig. 3 に示すように、 j 番目の分割要素の中心 (ξ_j, η_j) に対し、端点を $(x_j, z_j), (x_{j+1}, z_{j+1})$ とする。このとき

$$E_{ij} = R[e^{-i\alpha} \{Z_2' \log Z_2' - Z_2' - Z_1' \log Z_1' + Z_1'\}] / \pi \quad (5 \cdot 8)$$

$$\bar{E}_{ij} = \theta_{ij} / \pi \quad (5 \cdot 9)$$

但し

$$\begin{aligned} Z_1' &= (x_j - \xi_j') + i(z_j - \eta_j'), \quad Z_2' = (x_{j+1} - \xi_j') + i(z_{j+1} - \eta_j') \\ e^{-i\alpha} &= [x_{j+1} - x_j - i(z_{j+1} - z_j)] / \Delta S_j, \quad \Delta S_j = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (z_{j+1} - z_j)^2} \\ \theta_{ij} &= \theta_2 - \theta_1 = [\tan^{-1} \frac{z_{j+1} - \eta_j'}{x_{j+1} - \xi_j'} - \tan^{-1} \frac{z_j - \eta_j'}{x_j - \xi_j'}] / \pi, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

本方法においては、自由表面条件を $z = 0$ での条件に変換してあり、流体域の形、従って連立方程式 (5・2) の係数 E_{ij} $\bar{E}_{ij}$ は、時間的にもまた近似次数によっても変ることがないため、式 (5・2) を解く操作は、逆行列を求めておくことにより、行列の積と和の操作に変換され、計算時間が著しく短縮されるという大きな利点が得られる。

6. 計算の安定性

これは境界線の分割長 ΔS と時間間隔 τ により支配され、最小分割長 $(\Delta S)_{min}$ と最大水深 h に対する波速 C (波数 k) について、安定性のために次の条件が必要である。

$$C\tau \leq (\Delta S)_{min}. \quad \text{但し } C = \sqrt{(g/k) \cdot \tanh kh} \quad (6 \cdot 1)$$

上式は双曲型偏微分方程式に対する Courant-Friedrichs-Lewy の条件¹⁵⁾ と呼ばれるもので、この条件が本計算についても成立すると考えられる。計算精度の向上には τ または ΔS を小さく取ればよいが、同時に計算量の増大を伴う。経験的にいえば、第 1 次近似計算には ΔS は (1/10~1/8) 波長でよく、第 2 次近似では 1/20 波長、第 3 次近似では 1/30 波長を取ればよい。こうして式 (6・1) による τ を用いれば、各近似に対して安定した解が得られる。

7. 数値計算法の精度と妥当性

(1) 定形波とソリトンの存在

水深 h 、波長 L 、波高 H の水面波は相対水深 h/L と波高・水深比 H/h により分類すると、Galvin¹⁶⁾ の示した造波機による発生波に対する分類図 Fig. 4 のように、 h/L が大きく H/h が小さい領域では、進行と共に変形しない定形波が現われ、 h/L が小さく H/h が大きくなると、進行によって波形が変形するソリトンが現われ、その数は h/L が小さくなると共に 2 個 3 個と増加する。図中の Benjamin-Feir 波は造波板が完全な正弦運動をしないために生ずるものとされているもので、ここでは除外し、定形波とソリトンについて、本解析法による波形を計算して見る。

一定水深 h の流体域の一端にピストン造波板を想定し、水平変位を $B(T) = -A \cos \sigma T$ (A は造波板振幅, σ は周波数) とし、そこでのポテンシャルの法線微分値 (Fig. 2 の ϕ_3 に相当する) を ϕ_0 とすると、無次元表示では

$$t \leq 0 \text{ で } \phi_0 = 0; t \geq 0 \text{ で } \phi_0 = -a\Gamma \sin t, \quad a = A/h, \quad \Gamma = \sigma^2 h/g \quad (7 \cdot 1)$$

となる。流体域の他端は不透過固定壁とし、その反射波が到達する前に計算を打切ることとする。また初期条件として流体域全体に $\zeta = \phi = 0$ を与える。

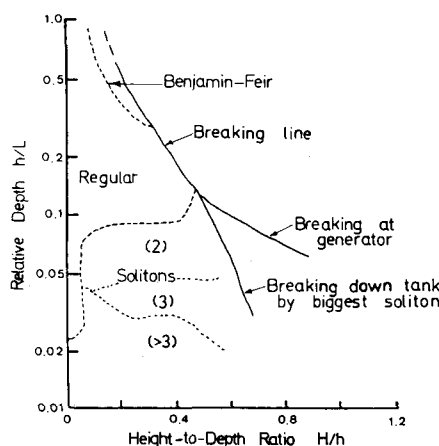


Fig. 4 Dependence of wave shape and breaking on relative depth and height to depth ratio

Fig. 5, 6, 7 はそれぞれ Fig. 4 における定形波, 2 ソリトン及び 3 ソリトンの領域に対応して, $(h/L, a) = (0.15, 0.15), (0.07, 0.20), (0.035, 0.30)$ とし, 流体域の長さを $75h, 180h, 350h$ として, これを鉛直面で 5 分割し, 各分割域の静水面, 水底面及び鉛直面上の計算点を Fig. 5 ではそれぞれ 80, 50, 10, Fig. 6, Fig. 7 では 100, 50, 10 とし, 連立方程式の未知数を約 1/5 に減少する方法で計算した結果を示している。時間間隔はそれぞれ $\tau = T^*/40, T^*/50, T^*/60$ (T^* は造波板の周期) とし, 造波板から Fig. 5 では $2.08L, 2.46L, 2.83L$, Fig. 6 では $L, 2L, 3L$; Fig. 7 では $0.97L, 1.95L, 2.93L$ の位置での水面変動を示している。Fig. 5 は第 2 次近似までの結果であるが, 3 ~ 4 波以後は波形が安定し変形しない Stokes 波を示しており, Fig. 6, Fig. 7 はそれぞれ第 3 次近似までの結果で, 2 ソリトン及び 3 ソリトンを示しており, Galvin の実験結果と一致した波の存在が計算されていることが分る。

ソリトンの性質として実験的に次のことが知られている¹⁷⁾。

(i) 相対水深が小さい有限振幅波は進行と共に変形し, 分裂してソリトンを生ずるが, それは各々の振幅に依存した速さで進行し, 振幅の大きい波は進行速度が速く, 振幅の小さい波に追いつき追い

越す。

(ii) 分裂した波が重なる時の波高は、重なる前の波高より小さくなる。

(iii) 波は分裂してから振幅に依存する速さで一定距離進行した後、再び分裂前の波形に戻る。この距離を再起距離と呼び、相対水深の小さい波程長く $h/L = 0.08$, $H/h = 0.3$ の波では $3L$ 程度である。

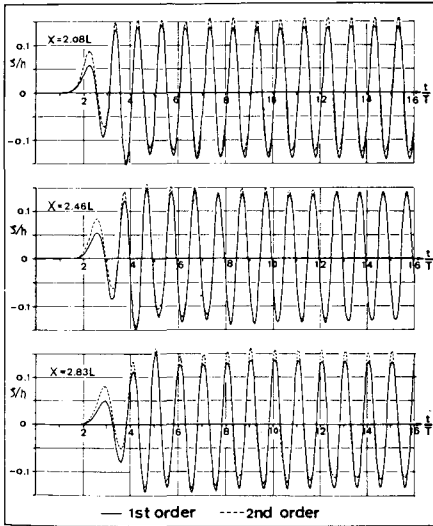


Fig. 5 Computed time history of surface elevation
($h/L=0.15$, $a/h=0.15$)

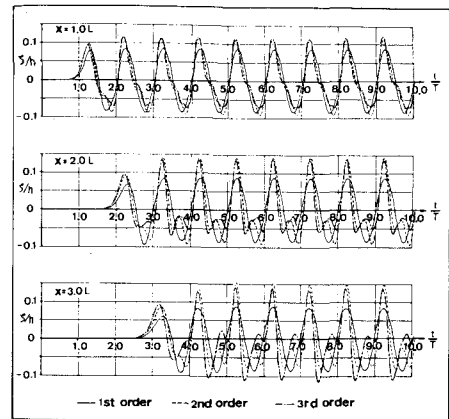


Fig. 6 Computed time history of surface elevation
($h/L=0.07$, $a/h=0.2$)

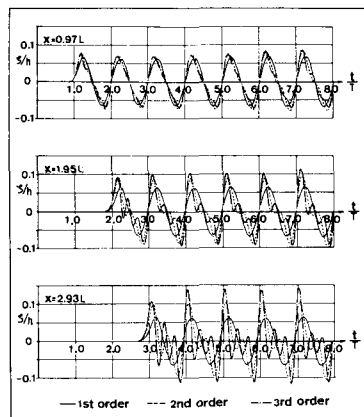


Fig. 7 Computed time history of surface elevation
($h/L=0.035$, $a/h=0.3$)

今, $h/L = 0.07$, $A_0/h = 0.06$ (A_0 は入射波振幅), 流体域の長さを $210h$ として, Fig. 7 における
 同じ計算を行い, 造波板から $0.57L$ 毎の間隔の点での $T = (10 \sim 13)T^*$ までの時間波形を示すと,
 Fig. 8 のようで, 点 (1) の波が分裂して, 点 (2) では小さな波が発生しているが, 振幅が小さい
 ため進行速度が遅く, 次の大きい波に吸収され, 点 (10) で見えなくなる。この時, 点 (1) と (10)
 の波高は殆んど同じく, 点 (3) (4) (5) (6) の波高は, 点 (1) (10) の波高より大きい。これ
 らの結果は上記 (i)(ii)(iii) の性質と一致している。

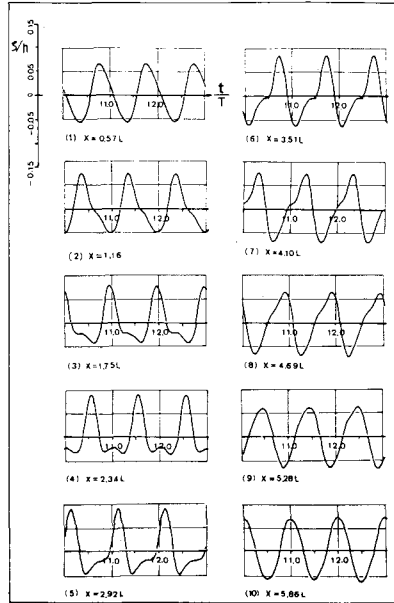


Fig. 8 Computed time history of surface elevation at various distances (3rd order, $t/T^* = 10.0 \sim 13.0$)

以上は定性的な比較であるが, ソリトンに関する量的な検討は Zabusky-Galvin¹⁸⁾ による KDV 方程式の解と水路実験値との比較によることが出来る。その結果は既に公表¹⁹⁾ しているので省略するが, 本解析法は良好な結果を与えることが確認されている。

(2) Stokes 波の波形の比較

第 2 次近似までの Stokes 波の ϕ 及び ξ は次式で示される。

$$\theta = \frac{A_0}{h} \left[\frac{ch k(z+h)}{ch kh} \cdot \sin \theta + Ak \frac{3ch 2k(z+h)}{8sh^4 kh} \cdot \sin 2\theta \right] \quad (7 \cdot 2)$$

$$\xi = \frac{A_0}{h} \left[\cos \theta + Ak \frac{1+2ch k kh}{4sh^3 kh} \cos 2\theta \right], \quad \theta = kX - \sigma T \quad (7 \cdot 3)$$

数値計算では長さ b の矩形流体域において, 左右の鉛直境界面に式 (7・2) による水平流速を与え,

初期条件として $t=0$ の式 (7・3) の水面波形と式 (7・2) のポテンシャルを与えて、以後 $t > 0$ の波形を計算し、式 (7・3) の波形と比較した。長さ b を $2L$ に取り、計算点は静水面で 60 点 (1 波長につき 30 点) 水底で 10 点、側面で 10 点、時間隔 $\tau = T^*/60$ とし、 $T = 6T^* (= 360\tau)$ までの計算を行なった。

Fig. 9 は $A_0/h = 0.20, \Gamma = 0.62 (h/L = 0.1398, H/L = 0.056)$ の場合で、 $\blacksquare$ 及び $\blacktriangle$ は式 (7・3) による第 1 次及び第 2 次近似値、 $\square$ 及び $\triangle$ は本計算法によるものである。第 1 次近似では両者は完全に一致し、第 2 次近似で多少のずれはあるが、ほぼ満足すべき結果を示している。同じ条件で計算点を 1 波につき 20 点及び 10 点とした場合が、Fig.10, Fig.11 で第 2 次近似に多少のずれが目立つが、必ずしも不満足でもない。 $T=0$ から $T=6T^*$ までの所要計算時間は Fig.9, 10, 11 に対してそれぞれ 30 秒, 19 秒, 及び 12 秒である。以上の比較から見ても第 2 次近似までの計算には 1 波長につき、20~30 点の計算点が妥当と考えられる。

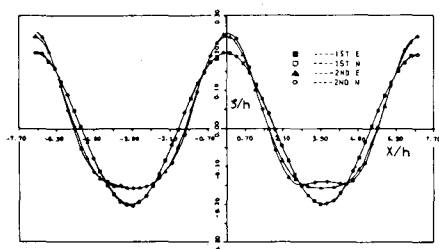


Fig. 9 Surface wave profiles ($\Gamma=0.62$, $a/h=0.20$, $N_1=60$, $t=4T^*$)

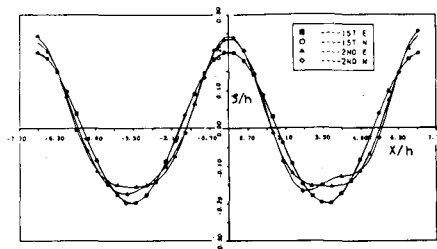


Fig.10 Surface wave profiles ($\Gamma=0.62$, $a/h=0.20$, $N_1=40$, $t=3T^*$)

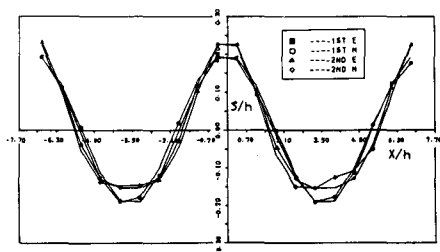


Fig.11 Surface wave profiles ($\Gamma=0.62$, $a/h=0.20$, $N_1=20$, $t=3T^*$)

(3) 流速の分布の比較

Dean²⁰⁾ は Le Mehaute・Divorky・Lin²¹⁾ による造波水路でのプランジャー型造波機による波の山の位置での水粒子速度の鉛直分布の測定値と定形波に対する流れ関数 ψ による Dean の計算方法による値との比較を行ない、その理論値が他の何れよりも実際に近いことを示した。ここでは本計算法による値を上記の種々の値と比較することとした。

実験値は波高と周期を用いて整理してあるのでここでは第3次近似の波高が実験値とほぼ一致するように、計算領域の一端で水平流速を深さ方向に一樣な振動流として与え、 $h/L = 0.129, 0.065, 0.046, 0.036$ に対し流体域の長さを $120h, 190h, 270h$ 及び $300h$ ととり、計算点は何れの場合も静水面に 400 点、水底に 200 点、水深方向に 10 点とし、 $\tau = T^*/50$ とした。水平流速の計算には式 (3・1) から流体境界上のポテンシャルを求め、それを用いて式 (3・1) から流体域内のポテンシャルを計算し、その差分を取ることにした。Fig.12～Fig.15 は上記の h/L に対応して、Dean の示した図に本計算による値を記入したもので、Fig. 4 の分類から見ると、Fig.12 以外はソリトン領域の波である。これらの結果から見ると本計算法による流速値は実験値に最も近いと考えられる。

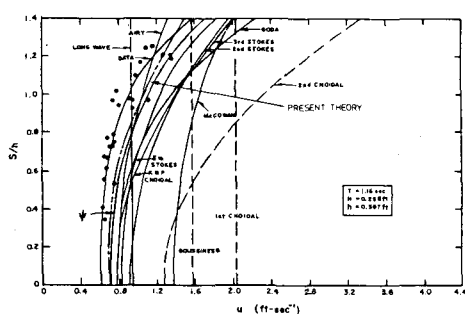


Fig.12 Horizontal water particle velocity under the crest

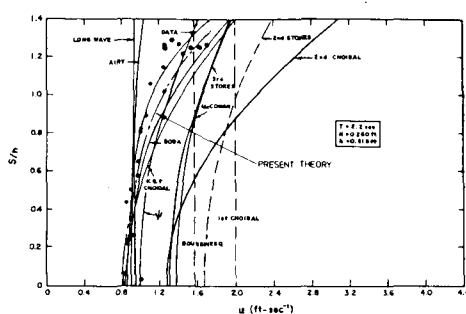


Fig.13 Horizontal water particle velocity under the crest

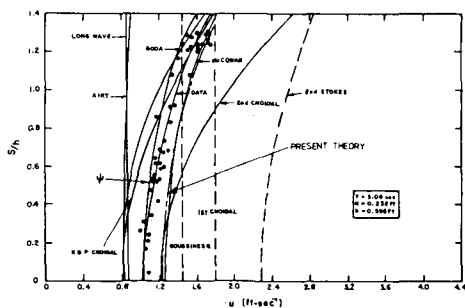


Fig.14 Horizontal water particle velocity under the crest

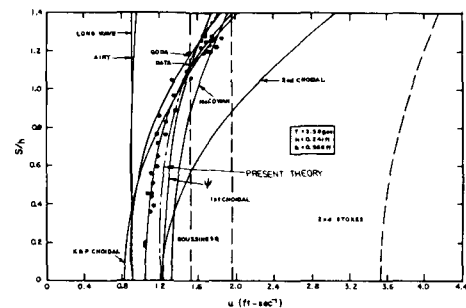


Fig.15 Horizontal water particle velocity under the crest

以上の検討によって、この数値解析法は相対水深の大きい Stokes 波の領域から、相対水深の極めて小さいソリトン領域に至るまでの広範囲の波に対して、同一の手続きを以て適用され、安定な計算値を与えることが確かめられた。そして第1, 第2, 第3次の各近似に対して、計算点は1波長につきそれぞれ 10, 20 及び 30 点程度とすれば、実用上充分の精度が維持されることになると考えられる。

8. 強制振動を行うタンク内の波の発生²²⁾

上述の計算法の最も簡単な応用例として、水平強制力を受けて振動を起す水を満したタンク内の発生波を計算する。Fig.16 に示すような任意の断面をもつタンクが静止状態から振幅 A 、周波数 σ の正弦振動を始めるとし、水平変位 $B(T)$ を次のように仮定する。

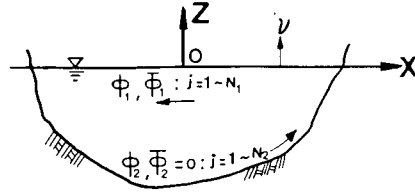


Fig.16 Horizontal oscillation of tank

$$T \leq 0 \text{ で } B(T) = 0; \quad T \geq 0 \text{ で } B(T) = A \sin \sigma T \quad (8 \cdot 1)$$

タンクに固定した座標系を考え、原点 O を静水面に取る。この座標系に関する流体の連続方程式は次のようである。

$$U_X + W_Z = 0 \quad (8 \cdot 2)$$

$$\rho DU/DT = -P_X - \rho d^2 B/dT^2, \quad \rho DW/DT = -P_Z - \rho g \quad (8 \cdot 4)$$

速度ポテンシャルを Φ とおくと式 (8・3) により

$$P/\rho = -\Phi_T - (\Phi_X^2 + \Phi_Z^2)/2 - X d^2 B/dT^2 - gZ \quad (8 \cdot 4)$$

自由表面条件式 (2・4) の第2式はそのままで、第1式は次のように変る。

$$\Phi_T = -gG - (\Phi_X^2 + \Phi_Z^2)/2 - X d^2 B/dT^2, \quad (Z=0) \quad (8 \cdot 5)$$

$$\text{タンクの壁面では } \Phi_\nu = 0 \quad (8 \cdot 6)$$

境界面の分割数とポテンシャルを Fig.16 のように定義し、式 (2・5) により無次元化し、式 (4・1) の摂動展開を行うと、第2次近似までの境界条件とグリーンの公式 (5・2) は次のようになる。但し $\xi = B/h$ とする。

(i) 第1次近似：

$$\phi_{1t}^{(1)} = \zeta^{(1)} - x\Gamma d^2 \xi / dt^2, \quad \zeta_t^{(1)} = \phi_1^{(1)} / \Gamma, \quad (Z=0) \quad (8 \cdot 7)$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} E_{ij} \phi_1^{(1)}(j; n\tau) - \sum_{j=1}^{N_2} F_{ij} \phi_2^{(1)}(j; n\tau) = \sum_{j=1}^{N_1} F_{ij} \phi_1^{(1)}(j; n\tau)$$

$$(i = 1 \sim N_1, 1 \sim N_2) \quad (8 \cdot 8)$$

(ii) 第2次近似：境界条件式は式 (4・3) (4・4) と同じで、グリーンの公式は式 (8・8) で $\phi^{(1)}$ の代りに $\phi^{(2)}$ と書いた形になる。式 (8・7) で x は静水面の計算点座標、 $d^2 \xi / dt^2 = -a \sin(n\tau)$ 、 $a = A/h$ である。

高山²³⁾ は矩形断面のタンクについて微小振幅波としての数式解析と検証実験を行った。その1例と

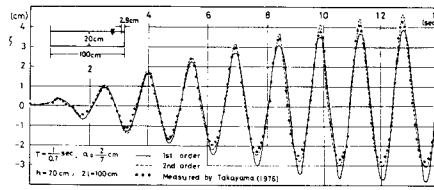


Fig.17 Wave generation by horizontal oscillation of tank

して深さ $h = 20$ cm, 長さ 100 cm の矩形タンクで $A = 0.29$ cm, 周波数 $\sigma = 2\pi \times 0.7$ (sec^{-1}) の場合, タンク側壁から 2.9 cm の位置での水面変動の実測値と本解析法による第1次及び第2次近似値を示すと Fig.17 のようである。本計算では $N_1 = 30$, $N_2 = 20$, $\tau = T^*/60$ として 600τ までの計算時間は 6.5 sec であった。図の第1次近似値は高山の計算値と全く一致しており, 振幅の成長と共に有限振幅性が現われ, 第2次近似において実測値とほぼ一致することが分る。

9. フーリエ級数展開による非定常波の解析法²⁴⁾

前節の例においては, 流体域が有限の広さをもち, 境界条件が明白であるから取扱いは簡単である。然し 7. におけるように水路一端での造波条件だけが与えられ, 他端が open である場合は, そこに他等かの人工的条件 (ϕ と ϕ' の関係) を与えなければ計算が出来ない。7. では完全反射の条件 ($\phi' = 0$) を与えたが, その場合はある場所の進行波の時間変化は, その場所から他端反射壁までの距離の2倍を波が進行する時点までに限って計算され, それ以降は反射波の影響が入ってしまう。従って長時間にわたる変動を見るためには計算すべき流体域は広大となり計算量は急増する。然し定常の微小振幅進行波においては仮想境界面での条件を明白に指定出来るので, 非定常の波を多数の定常成分波の重合として取扱うことにすれば, 有限領域内で過渡状態の計算を行うことが出来る。ここでは簡単のため第1次近似について説明する。例として Fig.18 に示す水深 h の左端 OO' に造波板があり, 静止の状態から振幅 A , 周波数 σ の水平振動を始めるとし, その速度は式 (7・1) で与えられたとする。周期 $(2\pi/\sigma)T^*$ 及び正整数 b と c を以て,

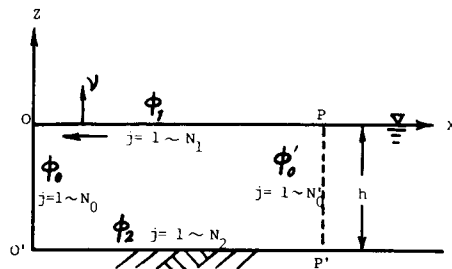


Fig.18 Definition of Fluid Region

$$f(T) = 0, (-bT^* \leq T \leq 0); = \sin \sigma T, (0 \leq T \leq cT^*) \quad (9 \cdot 1)$$

なる函数 $f(T)$ を $-bT^* \leq T \leq cT^*$ の区間でフーリエ級数に展開すると,

$$f(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos n \sigma^* T + \beta_n \sin n \sigma^* T \right] = R_e \sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp(in \sigma^* T) \quad (9 \cdot 2)$$

ここで

$$b+c=\gamma, \quad \sigma^* = 2\pi/\gamma T^*, \quad F_n = \alpha_n - i\beta_n$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\gamma+n} \left\{ \cos \frac{2c(\gamma+n)\pi}{\gamma} - 1 \right\} + \frac{1}{\gamma-n} \left\{ \cos \frac{2c(\gamma-n)\pi}{\gamma} - 1 \right\} \right]$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\gamma-n} \sin \frac{2c(\gamma-n)\pi}{\gamma} - \frac{1}{\gamma+n} \sin \frac{2c(\gamma+n)\pi}{\gamma} \right]$$

$$\alpha_\gamma = 0, \quad \beta_\gamma = c/\gamma \quad (9 \cdot 3)$$

また式 (7・1) により $X=0$ における条件は次のようになる。

$$\Phi_{0X} = A \sigma \sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp(in \sigma^* T) \quad (9 \cdot 4)$$

式 (2・5) による無次元化を行い, 式 (4・2) において $\zeta^{(1)}$ を消去するとポテンシャル ϕ_1 に関する条件は $\Gamma \phi_{1u} + \phi_{1z} = 0$ となる。右端の境界 PP' では, X の正方向に進む速度ポテンシャルを $\Phi'_0 = gh/\sigma \cdot K \cdot chkh(Z+h)/chkh \cdot \exp(-kX + \sigma T)$ とすると $\Phi'_{0X} = -ik\Phi_0$ の関係にある。

ここで無次元化したポテンシャル ϕ と水面変動 ζ をフーリエ級数に展開する。

$$[\phi(x, z, t), \zeta(x, z, t)] = R_e \sum_{n=1}^N [\psi_n(x, z), \eta_n(x, z)] \exp(in \sigma^* t / \sigma) \quad (9 \cdot 5)$$

かくして各成分波に対する境界条件は以下のようになる。

$$\psi_{nz} = n^2 \Gamma \psi_n (z=0): \psi_{nz} = 0, (z=-1): \psi_{nx} = a(\sigma/\sigma^*)^2 \Gamma^* F_n, (x=0) \quad (9 \cdot 6)$$

$$\psi_n = K_n \cdot ch \lambda_n(z+1)/ch \lambda_n, \quad \psi_{nx} = -i \lambda_n \psi_n, (PP' \text{ 境界}) \quad (9 \cdot 7)$$

ここで

$$\lambda_n = k_n h, \quad \Gamma^* = \sigma^2 h/g, \quad n^2 \Gamma = \lambda_n t h \lambda_n, \quad \sigma/\sigma^* = \gamma \quad (9 \cdot 8)$$

上記の各条件を考慮すると, Fig.18 の矩形領域に対するグリーンの公式は次のようになる。

$$\sum_{j=1}^{N_1} [F_{ij} - n^2 \Gamma E_{ij}] \psi_{n,1}(j) + \left(\sum_{j=1}^{N_2} + \sum_{j=1}^{N_0} \right) F_{ij} \psi_{n,2,0}(j)$$

$$+ K_n \sum_{j=1}^{N_1'} [F_{ij} + i \lambda_n E_{ij}] \cdot ch \lambda_n (z+1) / ch \lambda_n = -a \cdot (\sigma / \sigma^*)^2 \cdot F_n \cdot \sum_{j=1}^{N_0} E_{ij}$$

$$(i = 1 \sim N_1 + N_2 + N_0 + 1, \quad 1 \leq n \leq N) \quad (9 \cdot 9)$$

上式で未知量は $\psi_{n,1}, \psi_{n,2}, \psi_{n,0}, K_n$ の $(N_1 + N_2 + N_0 + 1)$ 個であり、境界 PP 上では固定点 i を 1 個取ればよい。各周波数毎に上式を解く (N 回) ことにより、各々の n に対する ψ が決まる。水面波形の第 n 成分 η_n は $\eta_n(j) = -i(\sigma^*/\sigma) \cdot n \cdot \psi_{n,1}(j)$ により求まる。これを式 (9・5) に代入して任意時刻 t でのポテンシャルと水面変動が決まる。

この方法では時間差分を取る必要がないので、計算の安定性は問題にならない。計算精度は N を大きく取ることにより向上するが、また式 (9・1) の b を大きく取っておくことも必要である。

この問題はポテンシャル接続法¹⁾により解くことも出来て、次の解が得られる。

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) = R_e a \cdot \sigma / \sigma^* \cdot \Gamma \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot F_n \cdot \left[\frac{1}{n \lambda_0 \cdot n N_0} \exp \left\{ i \left(-n \lambda_0 \cdot x + n \cdot \sigma^* / \sigma \cdot t \right) \right\} \right. \\ \left. + i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n \lambda_s \cdot n N_s} \exp \left(-n \lambda_s \cdot x + i n \cdot \sigma^* / \sigma \cdot t \right) \right] \end{aligned} \quad (9 \cdot 10)$$

ここで

$$n \lambda_0 = n k \cdot h, \quad n \lambda_s = n k_s \cdot h, \quad n \lambda_0 \tanh n \lambda_0 = -n \lambda_s \tan n \lambda_s = n^2 \Gamma$$

$$n N_0 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2 n \lambda_0}{sh(2 n \lambda_0)} \right], \quad n N_s = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2 n \lambda_s}{\sin(2 n \lambda_s)} \right] \quad (9 \cdot 11)$$

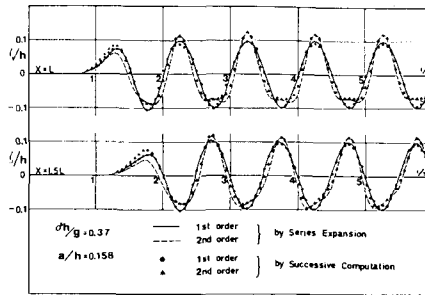


Fig.19 Time history of surface elevation

Fig.19 は $\sigma^2 h/g = 0.37$ ($h/L = 0.103$), $a = 0.158$ として、ピストン式造波板によって発生した波の、造波板から L 及び $1.5L$ の位置での水面変動の計算値を示したもので、図にはこの方法を第 2 近似まで拡張した結果を併せて示している。実線と破線はそれぞれフーリエ展開による方法の第 1 及

び第2次近似値であるが、この際の計算点は $N_1 = 60, N_2 = N'_0 = 10, N_2 = 30$ で、 $N = 20, b = 4, c = 6$ とし、計算領域の長さは $1.7L$ である。式(9・10)による解で $s = 5$ とした値は Fig.19 の第1次近似解である実線と完全に一致する。なお、図には前節までの方法によって $\overline{OP} = 5.8L$ とし、境界 PP' を不透過として計算し、第1次近似値を●、第2次近似値を▲で示しているが、フーリエ級数による結果との一致は良好である。

10. 定常微小振幅波問題の解析

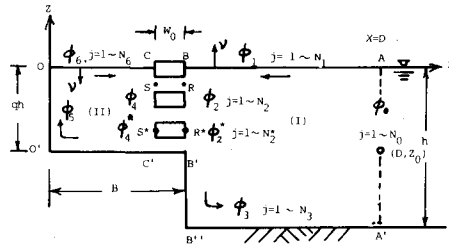


Fig.20 Definitions of Fluid Regions for Perforated Quaywall

Fig.20 のような水深 h の場所にある深さ qh ($1 > q \geq 0$) の不透過基礎上の、幅 W_0 の有孔壁をもつ棚式消波岸壁における波の反射率計算の方法²⁵⁾を述べる。

入射波の周波数を σ とすると、時間変動量における時間項を $\exp(i\sigma T)$ の形で除外することが出来る。そして式(4・2)で ζ を消去すると $\phi_u + \phi_z/\Gamma = 0$ となり、 $\Phi = (gh/\sigma) \cdot \phi(x, z) \cdot \exp(it)$ とおくと、静水面 ($z = 0$) での条件は次式となる。

$$\phi_z = \Gamma \phi \quad (10 \cdot 1)$$

Fig.20 で示す $OO'C'B'B''A'$ は不透過面、 $BB'C'C$ は有孔壁体、 AA' は壁体から充分離れた位置に在る仮想面、 $AA'B''B'B$ を領域 (I)、 $CC'O'O$ を領域 (II) とする。有孔壁体の水平孔の中央に点 R, S を考え、水平孔内の流速及び加速度に比例する流体抵抗の係数を、 μ_1, μ_2 とすると流体の運動方程式は

$$U_T = P_X/\rho - \mu_1 U - \mu_2 U_T \quad (10 \cdot 2)$$

となり、点 R と S での水平流速と圧力勾配は領域 (I) と (II) の速度ポテンシャルにより、次のように表わされる。

$$U = \Phi_X(R) = \Phi_X(S), P_X/\rho = (P_R - P_S)/W_0 \rho = [\Phi_{2T}(R) - \Phi_{4T}(S)] W_0 \quad (10 \cdot 3)$$

これを無次元化して、ポテンシャルに関する次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_x(R) &= \phi_x(S) = [\phi(R) - \phi(S)]/w_0 V(\alpha - i\beta) \\ R &= 1 \sim N_2, S = 1 \sim N_2, \alpha = (1 + \mu_2)/V, \beta = (\mu_1/\sigma)/V, w_0 = W_0/h \end{aligned} \quad (10 \cdot 5)$$

上式で V は有孔壁の全面積に対する孔面積の比である。壁体の不透過部分の点 R^* 及び S^* でのポ

テンシャルを ϕ^* で示すと

$$\phi_x^*(R^*) = \phi_x^*(S^*) = 0; \quad R^* = 1 \sim N_2^*, \quad S^* = 1 \sim N_2^* \quad (10 \cdot 5)$$

仮想境界面 AA' 近傍では左方からの振幅 a の入射波と左方からの反射率 $\mathbf{K}$ の反射波の重合として、次のポテンシャルが存在する。

$$\phi_0 = a [\exp \{i\lambda(x-d)\} + \mathbf{K} \exp \{-i\lambda(x-d)\}] \cdot ch\lambda(z+1)/ch\lambda \quad (10 \cdot 6)$$

ここで $\lambda = kh$ (k は波数), $d = D/h$, D は境界面 AA' の位置, 故に AA' 上では

$$\phi_0(d) = a(1+\mathbf{K}) \cdot ch\lambda(z+1)/ch\lambda, \quad \phi_{0x}(d) = ia\lambda(1-\mathbf{K}) ch\lambda(z+1)/ch\lambda \quad (10 \cdot 7)$$

流体域 (I), (II) に対する式 (10・1) (10・4) (10・5) (10・7) の条件を用いるとグリーンの公式は次のようになる。

(i) 領域 (I)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_1} [F_{ij} - \Gamma E_{ij}] \phi_1(j) + \sum_{j=1}^{N_2} [F_{ij} + \frac{1}{w_0 V(\alpha - i\beta)} E_{ij}] \phi_2(j) \\ & - \frac{1}{w_0 V(\alpha - i\beta)} \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij} \phi_4(j) + \sum_{j=1}^{N_2^*} F_{ij} \phi_2^*(j^*) + \sum_{j=1}^{N_3} F_{ij} \phi_3(j) \\ & + \mathbf{K} \sum_{j=1}^{N_0} [F_{ij} + i\lambda E_{ij}] \cdot ch\lambda(z+1)/ch\lambda \\ & = - \sum_{j=1}^{N_0} [F_{ij} - i\lambda E_{ij}] ch\lambda(z+1)/ch\lambda \end{aligned} \quad (10 \cdot 8)$$

但し $F_{ij} = -\delta_{ij} + \bar{E}_{ij}$, $i = 1 \sim N_1, N_2, N_2^*, N_3, (d, z_0)$

(ii) 領域 (II)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_2^*} E_{ij} \phi_4^*(j^*) + \sum_{j=1}^{N_2} \left[F_{ij} - \frac{1}{w_0 V(\alpha - i\beta)} E_{ij} \right] \phi_4(j) + \frac{1}{w_0 V(\alpha - i\beta)} \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij} \phi_2(j) \\ & + \sum_{j=1}^{N_5} F_{ij} \phi_5(j) + \sum_{j=1}^{N_6} [F_{ij} + \Gamma E_{ij}] \phi_6(j) = 0 \end{aligned} \quad (10 \cdot 9)$$

但し (10・4) における μ_1/σ と μ_2 の値は有孔壁の厚さ W_0 と入射波長 L の比及び孔の面積率 V によって決まり、実験の結果 μ_2 は殆んど 0 とおいてよく μ_1/σ は $1.5 > \sigma^2 h/g > 0.5$ に対しては次式で与えられることが分っている。

$$\mu_1/\sigma = \frac{(ax_0 + b)V - ay_0(W_0/L) - by_0}{2\pi \{x_0 V - (y_0 - b)(W_0/L) - bx_0\}} \quad (10 \cdot 10)$$

但し $x_0 = 0.003$, $y_0 = 0.720$, $a = 1.00$, $b = 0.167$

式 (10・8) と (10・9) を連立方程式として解いて反射率 K が求められ、その絶対値として $K_r = H_r/H_i = |K|$ が計算される。

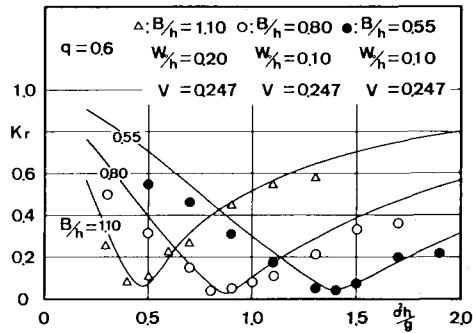


Fig.21 Measured and Computed Coefficients of Reflection

Fig.21 は岸壁全幅 $B/h = 0.55, 0.80, 1.10$; $V = 0.247$; $W_0/h = 0.10, 0.02$; $q = 0.6$ の場合の反射率の実験値と計算値を示している。この図から分るように、この岸壁では周波数の特定値において反射率が著しく低下し、殆んど完全に入射波を消滅させる機能があることが分る。

11. 結 び

以上要するに本方法においては、境界面の力学的条件と流体域の形状に関するグリーンの公式に基づく連立一次方程式の解の誘導という取扱いによって境界値問題を処理することが出来る。そしてその適用範囲はストークス波からソリトンに及ぶ広範なものである。解析方法の展開順序は、time factor $\exp(i\sigma t)$ を分離することによって最も簡単に処理出来る定常微小振幅波の取扱い法を延長して定常有限振幅波、それから非定常有限振幅波に及ぶというのが常識的であろうし、著者もその順序を幾度か試みたが結局失敗に終わった。それは有限振幅波に対しては仮想境界面における境界条件が不明ということに起因する。この点は第9節のフーリエ展開法で対処することが出来るが、それも第2次近似までで、第3次近似となると計算式が煩雑になって、結局計算時間に応じて流体域を広く取る第7節の方法が便利ということになる。このようなことから、本文では上記と逆の順序で説明した訳である。読者諸士の御理解が得られれば幸である。

参 考 文 献

- 1) 井島武士：最近の波浪理論における境界値問題の解法，第7回水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委員会，1971.
- 2) 渡辺恵弘：船舶試験水槽の造波板による波の生成について，九州帝国大学工学部紀要，第4号，1929.

- 3) Stoker, J. J.: Water Waves, pp. 430~435. Interscience Publishers, 1957.
- 4) 清川哲志, 小林 浩: 急勾配任意断面斜面による波の反射の厳密解の構成法とその応用, 第 28 回海講論文集, pp. 362~366, 土木学会, 1981.
- 5) Hwang, Li-San and E. O. T. Tuck: On the Oscillation of Harbours of Arbitrary Shape, J. Fluid Mech. Vol. 42. part 3, 1970.
- 6) 井島武士, 周 宗仁, 吉田明德: グリーンの公式による有限水深の波の 2 次元境界値問題の解法, 九大工学集報, Vol. 48, No. 6, pp. 767~774., Dec. 1975.
- 7) 井島武士, 周 宗仁: グリーンの公式による 2 次元水面波の境界値問題の解析, 土木学会論文報告集, 第 252 号, pp. 57~71, 1976.
- 8) 井島武士, 吉田明德, 山本督夫: 任意断面浮体の 2 次元係留運動と波の変形, 土木学会論文報告集, 第 272 号, pp. 53~63, 1978.
- 9) Yeung, R. W.: A hybrid integral-equation method for time-harmonic free-surface flow, Proc. 1st International Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Washington D.C. Oct. 1975.
- 10) Welch, J. E., F. H. Harlow, J. P. Shannon and B. J. Daly: The MAC method. A computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid flow problems involving free surfaces, Los Alamos Scientific Laboratory of University of California, 1969.
- 11) 例えば
滝川 清, 田淵幹修: 有限要素法による波動解析について, 第 25 回海講論文集, 1978.
- 12) 井島武士, 吉田明德: 任意形状と水深の湾内水面波の分布に関する数値解析, 九大工学集報, 第 54 巻第 2 号, pp. 79~86, 1981.
- 13) 井島武士, 吉田明德, 奥蘭英明, 北山 斉: 消波護岸を有する港湾内水面波動の数値解析, 第 29 回海講論文集, pp. 183~178, 1982.
- 14) 宇野利雄, 洪姪値: ポテンシャル, 培風館, 1961.
- 15) 土木学会: 土木工学における数値解析; 基礎編, サイエンス社, 昭 52.
- 16) Galvin, C. J.: Wave Breaking in Shallow Water, Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport, Academic Press, Inc., 1972.
- 17) Galvin, C. J.: Finite-amplitude, Shallow-water Waves of Periodically Recurring Form. Proc. Symposium of Long Waves, Newark, Delaware, 1970.
- 18) Zabusky, N. J., and C. J. Galvin: Shallow-water Waves, the Kortewegde Vries Equation and Solitons, J. Fluid Mech. 1976, Vol. 47, Part 4.
- 19) Ijima, T., and S. Nagata: Numerical Analysis of Transient Finite Amplitude Waves by Boundary Integral and Perturbation Expansion, Coastal Eng. in Japan, Vol. 26, pp. 25~44,

JSCE.

- 20) Dean, R. G. : Evaluation and Developement of Wave Theories for Engineering Application, Tech. Rep. CERC, 1974.
- 21) Le Mehaute, B., D. Divoky and A. Lin : Shallow Water Waves; A Comparison of Theories and Experiments, Proc. 11th Int. Conf. Coastal Eng. Chp. 7, 1968.
- 22) 井島武士, 永田修一 : グリーンの公式による非定常有限振幅波の数値解析, 九大工学集報, 昭54, 第52巻3号, June. 1979.
- 23) 高山知司 : 振動外力を受けるタンク内発生波の非定常解について, 港湾技術研究所報告, 第15巻2号, 1976.
- 24) 井島武士, 永田修一 : 水中物体の非定常有限振幅運動の解析, 第28回海講論文集, 1981, pp. 416~420.
- 25) 井島武士, 奥蘭英明 : 遊水部をもつ柵式直立消波構造物の理論解析と消波特性, 土木学会論文報告集, 第327号, 1982, pp. 87~97.