

側岸の浸食・堆積と河川の蛇行現象

池 田 駿 介

1. 蛇行河川の流れと河道の構造

1-1. 河道形態の分類

河川はその中を流れる流水とその境界を構成する河床や河岸の相互作用によって形成されたものであって、流量、河岸や河床の構成材料、地形などによってその河道形態が決定される。河道形態の分類に際して重要な視点は河川が平衡状態にあるか非平衡状態にあるかということである。

多くの自然河川では長い年月の間に流域から供給される流水や土砂を運搬できるように流路の幅や勾配を巨視的に調節させている。このような平衡河川ではその河道形態は一般に蛇行（沖積蛇行）、網状又は直線である。これらを区分する力学的な機構は交互砂州安定理論によってよく説明されている（Hansen¹⁾, Callander²⁾, Engelund・Skovgaard³⁾, Parker⁴⁾, Fredsoe⁵⁾, 林・尾崎⁶⁾ら）。

これに対して外的な状件の変化などによって平衡状態に達していない非平衡河川が存在する。河川の上流には基盤を下刻しつつ蛇行しながら流れる穿入蛇行が存在する場合がある。このような河川では河岸が岩盤であることが多く、現在の河川が運搬した土砂によって形成させられた沖積蛇行と異なることは明らかである。穿入蛇行の成因は地盤の隆起によって浸食作用が増加したためであると考えられ、我国でも太平洋岸に面した隆起地帯でこのような穿入蛇行河川が見られる。一方、三角州などのような堆積傾向にある地域では分派流路が形成される場合が多い。分派流路は一見網状流路と似ているが、分派流路は全体としては流路が次第に分かれていくのが特徴であって、平衡状態にある網状流路とは異なるものである。表1に以上の分類を示す。

1-2. 沖積蛇行河川の河道の構造

(a) 河道の移動と変形

沖積蛇行は一般に中流部以下の氾濫平原に形成され、滑らかな平面形状を有する場合が多い。流路が蛇行を始めると弯曲部では流水の慣性力および横断面内の抵抗の不均一によって凹岸側

表1. 河道形態の分類

平 衡 河 川	沖積蛇行河川……石狩川, Mississippi 川
	網状河川………斐伊川, Platte 川
非平衡河川	穿入蛇行河川……大井川, 四万十川, Colorado 川
	分派流路………河口付近, 扇状地, 氷河末端

に流心が移行し、流速が大きくなるために側岸が浸食され、その結果凹岸はますますその弯曲の度合いを増大させる。それと同時に凸岸側の少し下流では流れの流速が小さく、かつ二次流や乱流拡散によって土砂が運搬されてくるために土砂の堆積が発生する。このようにして川幅を維持しつつ蛇行は発達し、かつ

その位置を変えながら下流へ移動する。

図1 aはこのような横方向の移動を実測した例であり、図1 bは蛇行形状が下流へ向って移動している様子を示している。

以上の移動は一般に同時に進展するが、蛇行振幅が増大するにつれて下流方向への移動は減少し、河道は迂曲と呼ばれる形状を呈するようになる(図2)。このような迂曲河道においては洪水時の氾濫によって頸部が

切れて短絡し、旧水路はとり残されて三ヵ月湖を形成する。

(b) 河床および河岸の堆積構造

前項においても述べたように蛇行河川の特徴は河岸の浸食および堆積の繰返しであり、凹岸部では浸食が発生し、深堀れが起る。更に凸岸部では土砂が堆積し、固定砂州が形成される。

固定砂州の堆積構造は一樣ではなく、Allen⁹⁾の測定によれば、図3に示すように層状をなしており、洪水の度に堆積が顕著に発達する。このような層状の堆積は空中写真からも読みとることができ、沖積蛇行の発達過程を調べる手掛りとなっている(Hickin¹⁰⁾)。弯曲部横断面内の土砂粒度分布は凹岸部付近の最深部で粗く凸岸部にかけて次第に細粒化することが知ら

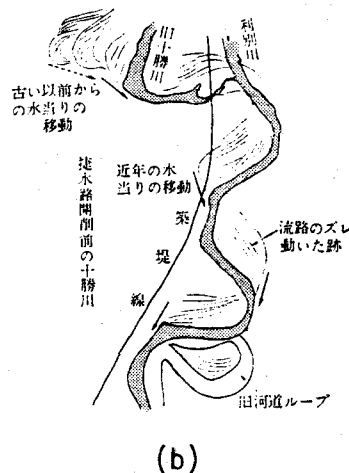
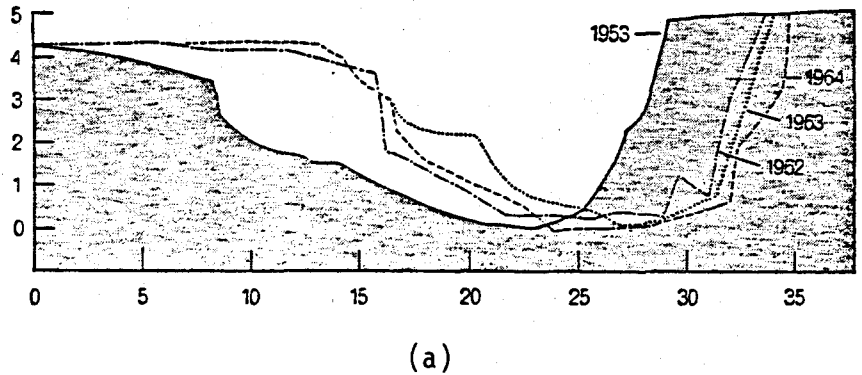


図1 蛇行流路の (a) 横断方向 (Leopold・Langbein⁷⁾), (b) 平面形状の流下方向 (木下⁸⁾) 移動

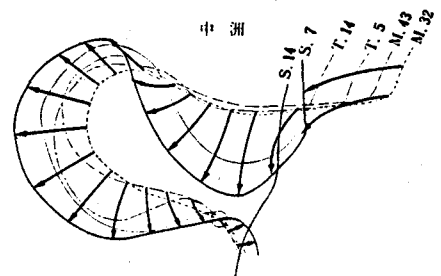


図2 迂曲河道の発達 (石狩川, 木下⁸⁾ による)

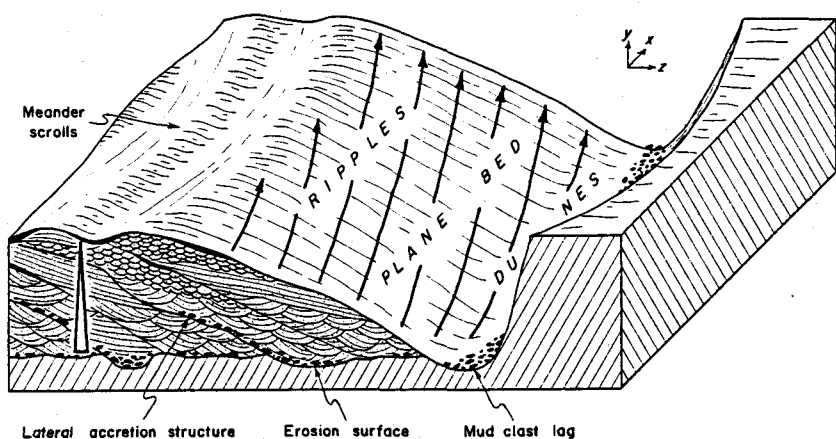


図3 蛇行河川の河床および河岸の堆積構造 (Allen⁹⁾ による)

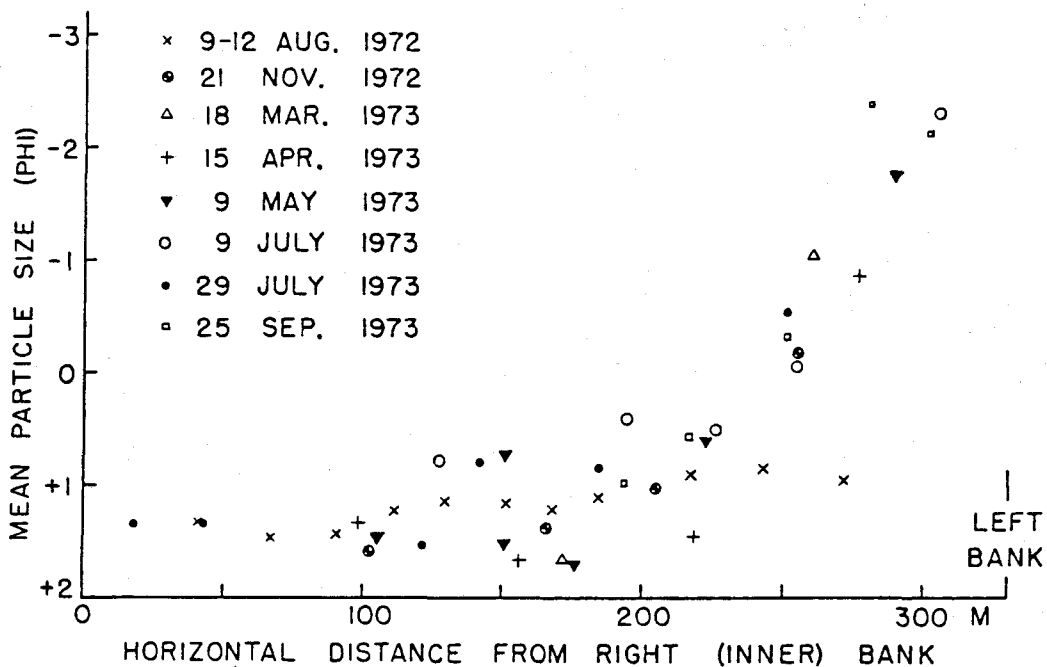


図4 弯曲部における粒度分布 (Helm traverse, Wabash川, Jackson¹¹⁾ による)

れている(図4)。これは凸岸部の固定砂州上では岸に近づくほど掃流力や乱れが小さくなり、二次流によって運搬されてきた土砂の内細粒分ほど岸近くで堆積するために発生する現象であり、土砂のふるい分け現象である。このようなふるい分け現象は実験水路においても確かめられている(吉川ら¹²⁾)。

一蛇行波長内の河床形状の一例を図5に示す。これから凹岸部付近で深掘れが発生していることが明らかである。蛇行流路に沿って各断面中の水深が最大となる点を結んだ曲線を谷線と呼ぶが、谷線は水路中

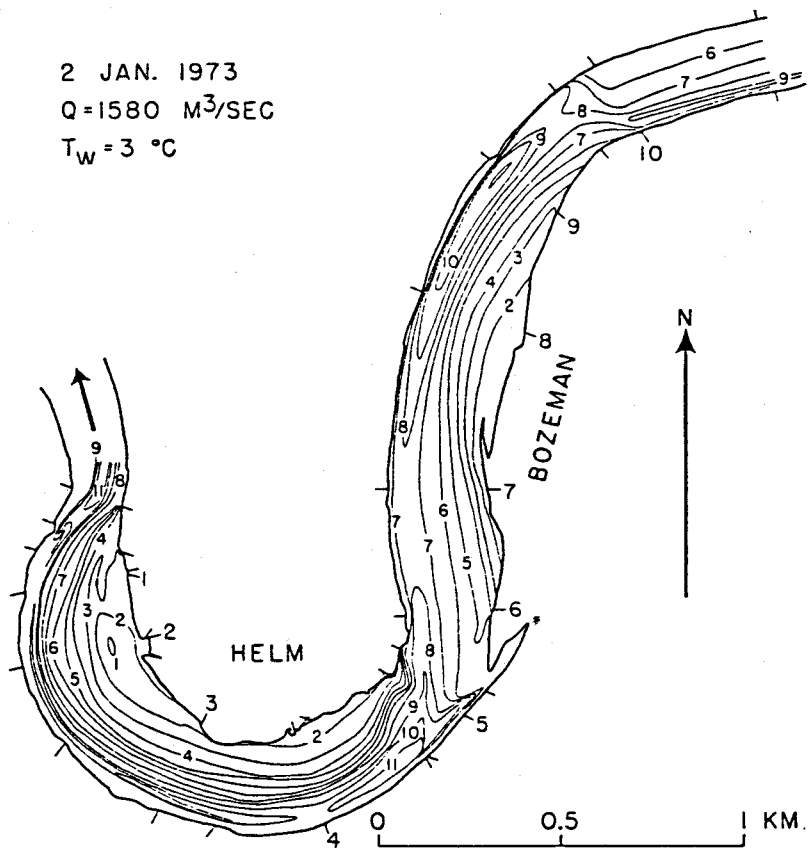


図5 河床等高線 (Helm, Bozeman弯曲部, Wabash川, Jackson¹¹⁾ による)

心線よりも一般に若干下流側へずれることが知られている。

1-3. 沖積蛇行河川の流れの構造

図6は河床形状を表している図5と同じ場所で測定された流速ベクトル図である。断面内の最大流速はやはり凹岸側に発生しており、流速の最大となる点を結んだ線を流心線と呼ぶ。谷線と流線は通例はほぼ一致するが、洪水時には流心線が多少河の中央部によったり、極端場合には凸岸側に発生する場合もある。流速ベクトルは水表面と底面付近で方向が異っている。即ち、水表面付近では凹岸向き、底面付近では凸岸向きとなっており、この差は二次流によって発生する。二次流は主流が曲率を持ち、かつ上下層間で主流流速の大きさが異なるために遠

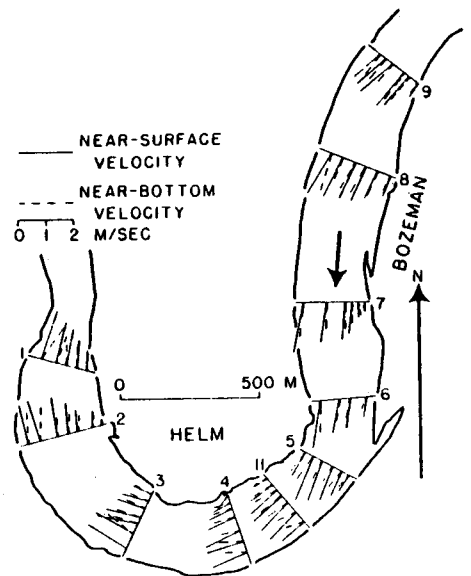


図6 流速ベクトル図 (Jackson¹³⁾ による)

心力差が生じることによって発生する。

このような流れの三次元構造を一般的に解析的に解くことは困難で、水深方向の平均量成分と二次流成分に分けて解かれる場合が多い。ここでもその手法を用いる。

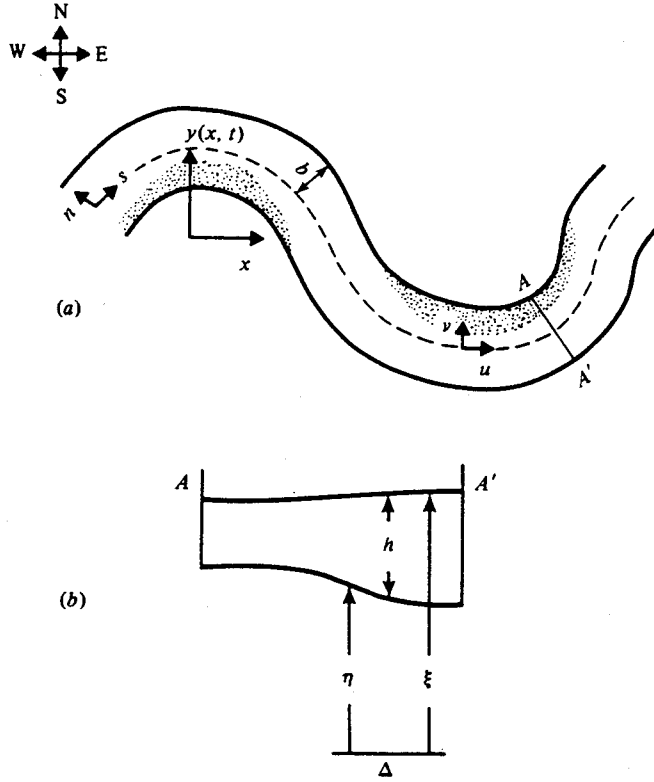


図7 蛇行水路の形状と流れの定義図

図7を参照して水深方向に平均された流速成分 (u , v) は次式のように書かれる (二次流成分はこの平均操作で0となる)。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{uv}{r} = -g \frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{\tau_s}{\rho h} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{u^2}{r} = -g \frac{\partial \xi}{\partial n} - \frac{\tau_n}{\rho h} \quad (2)$$

$$\frac{vh}{r} + \frac{\partial vh}{\partial n} + \frac{\partial uh}{\partial s} = 0 \quad (3)$$

ここに $\tau_s = \rho C_f \tilde{U}u$, $\rho C_f \tilde{U}v$ で底面せん断力, $\tilde{U}^2 = u^2 + v^2$, r = 曲率半径である。ここで従属変量を基準量と摂動量成分にわけ。即ち, $u = U + u'$, $v = v'$, $h = H + h'$, $\xi = \xi_0 + \xi'$, $\eta = \eta_0 + \eta'$, $r = r_0 + r'$ に分け, 上式に代入してそれぞれのオーダーについて計算すれば, 0 次のオーダーは

$$C_f U^2 = g H I, \quad U H = q \quad (4)$$

ここに q = 単位巾当りの流量である。摂動量の 1 次のオーダーは

$$\frac{U^2}{r_o} = g \frac{\partial \xi'}{\partial n} \quad (5)$$

$$U \frac{\partial u'}{\partial s} = -g \frac{\partial \xi'}{\partial s} - C_f \frac{U^2}{H} \left(2 \frac{u'}{U} - \frac{\xi'}{H} + \frac{\eta'}{H} \right) \quad (6)$$

$$H \left(\frac{\partial u'}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial n} \right) + U \frac{\partial h'}{\partial s} = 0 \quad (7)$$

式(4)は等流条件を表す。又、式(7)で $h' = \xi' - \eta'$ である。式(6)において河床面の掘れ η' は 3. において後述されるように

$$\frac{\eta'}{H} = -A \frac{n}{r_o} \quad (8)$$

となる。更に後述のように水路中心の平面形状を sine-generated curve, $\theta = \theta_o \sin(2\pi s/L)$, ここに θ は平均流下方向の直線と河道中心線のなす偏角, L は蛇行長, で近似すると

$$\frac{1}{r_o} = \theta_o \frac{2\pi}{L} \cos \frac{2\pi s}{L} \quad (9)$$

となる。以上から式(5), (6)から u' の解として

$$u' = n \left(a \sin \frac{2\pi s}{L} + b \cos \frac{2\pi s}{L} \right) \quad (10)$$

ここに

$$a = \frac{U}{\pi \frac{H}{C_f L} + \frac{1}{\pi} \frac{C_f L}{H}} \left(1 + \frac{A}{2} + \frac{U^2}{2gH} \right) \frac{2\pi\theta_o}{L}, \quad b = U \left\{ \frac{1 + \frac{A}{2} + \frac{U^2}{2gH}}{\pi^2 \frac{H^2}{C_f^2 L^2} + 1} - 1 \right\} \frac{2\pi\theta_o}{L}$$

を得る。式(10)によって蛇行流路内の主流の速度分布, $u = U + u'$ が求まる (Engelund¹⁴⁾, 池田ら¹⁵⁾)。

玉井ら¹⁶⁾ によって上式の妥当性が確かめられ, 更に高次近似解が得られている。

次に二次流成分を求める。側岸の影響を無視しうる領域では Reynolds 方程式の各項の内, 遠心力以外の項は無視でき, 円筒座標系における運動方程式および連続式は

$$-\frac{u_\theta^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad (11)$$

$$g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial r u_z}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

ここに流れは θ 方向 (主流方向) に一様とし, Reynolds 応力は渦動粘性係数 ϵ を用いて表わしている。式(11), (12)から圧力 p を消去し, 式(13)から二次流に関する流れ関数 ψ を導入すれば方程式は ϵ = 一定として

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} = -\frac{2}{\varepsilon} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad (14)$$

となる。上式を解くには主流 u_θ の深さ方向および横断方向の分布を知らねばならない。速度欠損則を用いれば

$$u_\theta = f\left(\frac{r}{r_c}\right) \left\{ U + \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{h} + 1 \right) \right\} \quad (15)$$

ここに $f(r/r_c)$ は正規化された横断方向の分布で、自由渦型であれば $f = r_c/r$ 、強制渦型であれば $f = r/r_c$ のようになる。 r_c は一様弯曲水路中心線の曲率半径である。 ε の値として $u_* h/15$ 、境界条件として (図8参照)

$$z = \delta (=0) \text{ および } z = h: \Psi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (16)$$

を用いて式(14)を解けば、

$$u_r = f^2 \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left\{ F_A(\eta) - \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{U} F_B(\eta) \right\} = f^2 \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} F(\eta) \quad (17)$$

$$F_A(\eta) = -15 \left(\eta \ln \eta - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{15}{54} \right), \quad F_B(\eta) = \frac{15}{2} \left(\eta^2 \ln^2 \eta - \eta^2 \ln \eta + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{19}{54} \right)$$

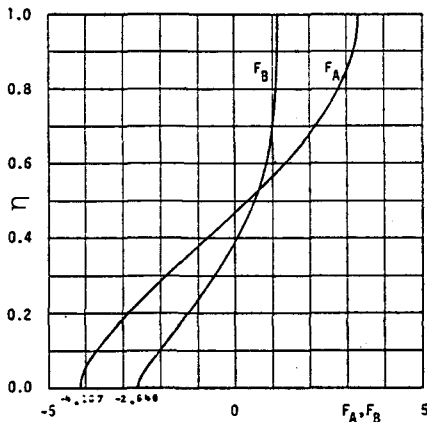


図8 式(17)における F_A , F_B の値

となる。ここに $\eta = z/h$ である。図8に式(17)の形を、図9に一様弯曲河川における測定結果との比較を示す。実際河川の流れを比較的良好に表わしていることが知られる。

以上の流れの解法は乱流粘性 ε 、又は混合距離 l 、を仮定して流れの場を求めるという点で、レイノルズ方程式系以外の微分方程式を必要とせず、「ゼロ方程式モデル」と呼ばれる。しかし弯曲水路や蛇行水路内の流れは局所的に加速・減速を伴う流れであるので乱流構造が複雑で ε 又は l をあ

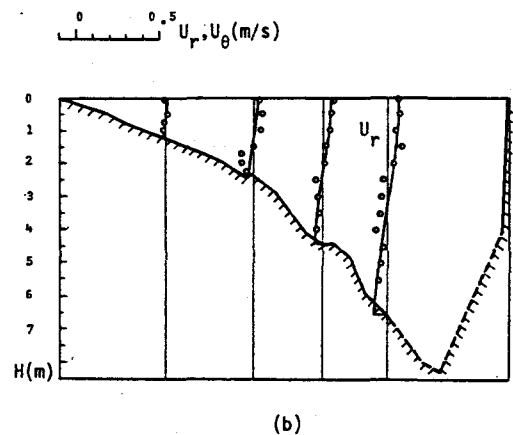
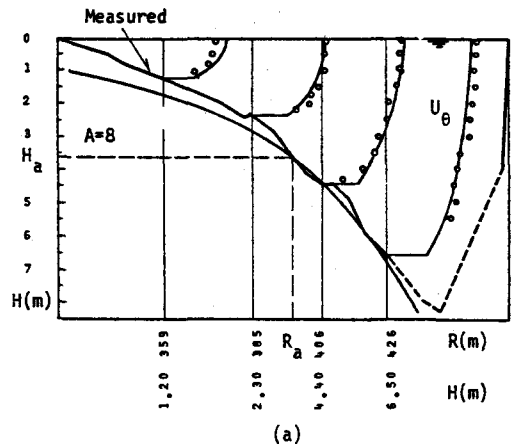


図9 (a)主流, (b)二次流の実測値と理論値の比較 (Desna川, USSR)

らかじめ与えることが困難であることが多い。このような場合には以下に示すような様々な計算法が存在する（表 2）。

表 2 乱流の計算法（場の方法）¹⁷⁾

1 方程式モデル	(a) 乱れの運動エネルギー q^2 に対する輸送方程式を用いるもの…Prandtl, Bradshaw
	(b) 乱流粘性 ϵ の輸送方程式を用いるもの……………Kovasznay
2 方程式モデル	(a) $q^2 l$ と q^2 方程式を用いるもの ……………Rodi · Spalding
	(b) 消散 ϵ と q^2 方程式を用いるもの（ $k-\epsilon$ 法）……………Harlow · Nakayama, Launder · Rodi · Leschziner
応力方程式モデル	レイノルズ応力に関する微分方程式を用いるもの……………Donaldson, Daly · Harlow, Hanjalic · Launder

以上のモデルの内弯曲水路の流れに適用したものとして $k-\epsilon$ 法を用いた Leschziner · Rodi²⁹⁾ の研究があるが、研究はその緒についたばかりであり、今後の発展が望まれる。

2. 側岸の浸食と堆積の機構

2－1. 側岸近傍の土砂輸送

側岸や河床の浸食・堆積を引き起す土砂の輸送形態は掃流および浮遊である。図10は河道横断方向の土砂輸送の概念図を示している。掃流砂は流れによる掃流力の他に重力と二次流の影響を受けて横断方向の輸送が発生する。即ち外岸側では重力と二次流の動きが両者ともに河道

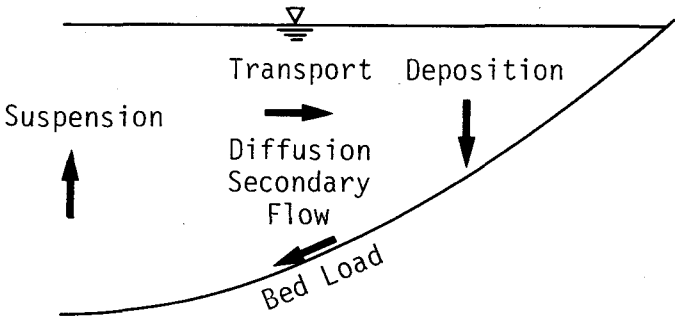


図10 側岸部の土砂輸送

中央部に向っているので浸食が卓越し、内岸側では二次流は土砂を河岸に向かって輸送し、重力はそれをおし戻そうとする。河道横断面内のせん断応力の分布は河道中央部で大きく、河岸へ向うに従って減少する。従って、浮遊砂濃度は中央部で大きく河岸近くでは小さくなる。この濃度差のために二次流および乱流拡散によって河岸に向って浮遊砂の輸送および堆積がおこる。河道内では上述の二種類の土砂輸送が河道横断形状の決定に大きな役割を果たしているので、以下ではこれらの輸送機構について述べる。

2-2. 側岸近傍の掃流砂の輸送機構

(a) 限界掃流力

図11のように砂粒子が側斜面にある場合を考える。直径 d の砂粒子に働く力の釣合いは

$$F_s^2 = D^2 + (W \sin \theta)^2 \quad (18)$$

である。ここに F_s =静止摩擦力、 W =砂粒子の水中重量、 θ =斜面の傾きである。今、 ϕ を砂粒子の水中安息角とすれば $F_s = (W \cos \theta - L) \tan \phi$ となり、 $W = (\rho_s - \rho) \pi d^3 / 6$ 、 $D = \rho \pi u_*^2 d^2 \hat{D} / 6$ 、 $L = \rho \pi u_*^2 d^2 \hat{L} / 6$ ととも
に上式に代入すれば $\tau_{*co} = \rho u_*^2 / (\rho_s - \rho)gd$ に関する二次方程式が得られる¹⁸⁾。

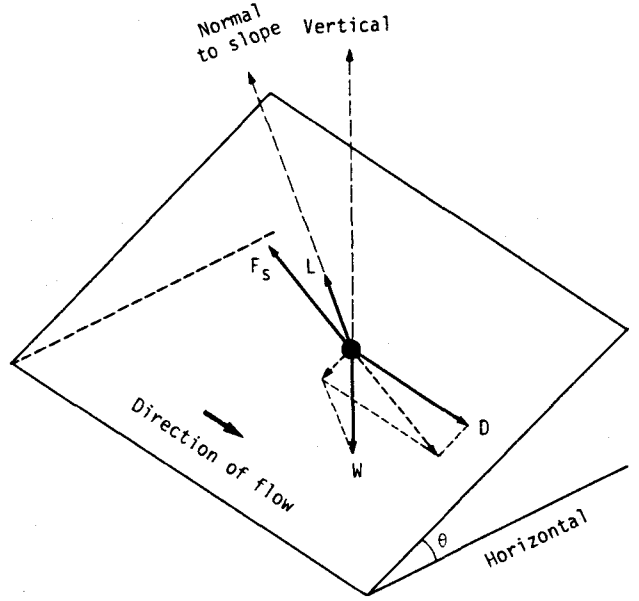


図11 側斜面上で静止している砂粒子に働く力の釣合い。

この方程式の解は

$$\tau_{*co} = \frac{1}{\hat{D}} \frac{-\alpha \tan^2 \phi \cdot \cos \theta + (\tan^2 \phi \cdot \cos^2 \theta + \alpha^2 \tan^2 \phi \cdot \sin^2 \theta - \sin^2 \theta)^{1/2}}{1 - \alpha \tan^2 \phi} \quad (19)$$

となる。ここに $\alpha = \hat{L} / \hat{D}$ 。特に水平床 ($\theta = 0$) の場合は上式は $\tau_{*co} = \tan \phi / (\hat{D} + \hat{L} \tan \phi)$ となる。ここでLane¹⁹⁾と同様に斜面係数 $K = \tau_{*co} / \tau_{*co}$ を導入すれば、

$$K = \frac{-\alpha \tan^2 \phi \cdot \cos \theta + (\tan^2 \phi \cdot \cos^2 \theta + \alpha^2 \tan^2 \phi \cdot \sin^2 \theta - \sin^2 \theta)^{1/2}}{(1 - \alpha \tan \phi) \tan \phi} \quad (20)$$

となる。特に $\alpha = 0$ の場合は

$$K = \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \phi}} \cdot \cos \theta \quad (21)$$

となりLane¹⁹⁾の導いた結果と全く一致する。式(20)又は式(21)によって平坦床の限界掃流力 τ_{*co} が知られ、
は斜面の限界掃流力の見積りが可能となる。図12は横断方向に回転が可能な風洞を用いた K の理論値と実測値の比較である¹⁸⁾。重力の効果によって側斜面では限界掃流力が減少することが知られる。

(b) 横断方向掃流砂量

次に図13のように側斜面上を運動している砂粒子の力の釣合いを考える。このとき、極座標系 (θ, R) の夫々の方向について

$$D_\theta + W_{i\theta} - \mu(W \cos \theta - L) - \frac{v_{s\theta}}{v_s} = 0 \quad (22)$$

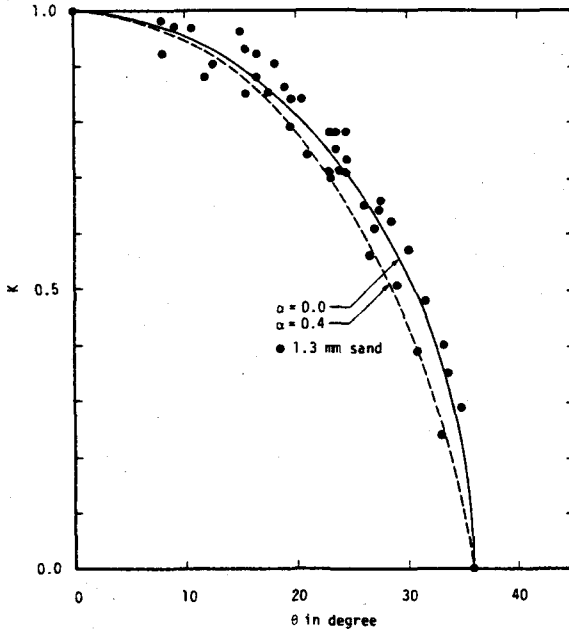


図12 斜面における限界掃流力と水平床の限界掃流力の比

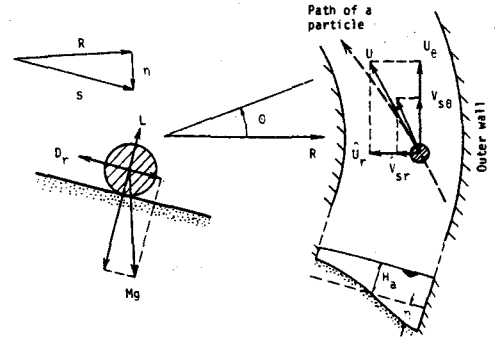


図13 側斜面上を運動している砂粒子

$$D_r - W \sin \theta - \mu(W \cos \theta - L) - \frac{\hat{v}_{sr}}{v_s} = 0 \quad (23)$$

ここに

$$D_o = D \frac{u_o - v_{so}}{u - v_s} = \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} d^2 (u - v_s)^2 \frac{u_o - v_{so}}{u - v_s} \quad (24)$$

$$D_r = \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} d^2 (u - v_s)^2 \frac{\hat{u}_r - \hat{v}_{sr}}{u - v_s}, \quad L = \frac{\rho}{2} C_L \frac{\pi}{4} d^2 (u - v_s)^2 \quad (25)$$

であり、 μ = 動摩擦係数、 u = 砂粒子高さの流体流速、 v_s = 砂粒子移動速度で suffix θ, r は夫々 θ, R 方向の成分、 $\hat{}$ は R の内向き成分を表す。ここで $v_{so}/v_s \approx 1$, $u_o/u \approx 1$, $(u_o - v_{so})/(u - v_s) \approx 1$, $\cos \theta \approx 1$, $i_\theta \approx 0$, $\sin \theta \approx \tan \theta$ とおくと、式(22)から

$$u - v_s = \frac{4}{3} \left\{ \frac{\mu g d \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)^{1/2}}{C_D + \mu C_L} \right\}^{1/2} \quad (26)$$

を得る。又、以上の簡略式と式(25)を式(23)に代入して整理すれば、砂粒子の移動方向を表す式

$$\frac{\hat{v}_{sr}}{v_s} = \frac{\hat{u}_r}{u} - \frac{\tan \theta}{\left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \mu \frac{C_L}{C_D}} \right)^{1/2} \left\{ \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g d \right\}^{1/2}} \quad (27)$$

を得る。式27において左辺は横断方向の流砂量 $\hat{q}_{sr}$ と流下方向の流砂量 q_s の比、右辺第1項は二次流によって底面付近の流線が流下方向 (θ 方向) となす傾き ($= \tan \delta$)、右辺第2項は側斜面における重力の効果による砂粒子移動軌跡の θ 方向からのずれを表す。限界掃流力状態では式26において $v_s = 0$ とおき、 u_c (限界掃流力状態) を求めて、式27の右辺第2項に代入すれば $u_c/u = \sqrt{\tau_{*c}/\tau_*}$ を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{\hat{q}_{sr}}{q_s} &= -\frac{q_{sr}}{q_s} \\ &= \tan \delta - \frac{1 + \mu \alpha}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*co}}{\tau_*}} \tan \theta \end{aligned} \quad (28)$$

を得る。流砂量 q_s については DuBoys 型の表示を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{q_s}{\sqrt{(\rho_s/\rho - 1)gd^3}} &= q_{*s} \\ &= C \cdot \frac{\tau_*}{\tau_{*co}} \left(\frac{\tau_*}{\tau_{*co}} - 1 \right)^{0.5} \end{aligned}$$

と表すと、二次流成分がない場合 ($\tan \delta = 0$) の横断方向流砂量は

$$\frac{q_{sr}}{\sqrt{(\rho_s/\rho - 1)gd^3}} = q_{*sr} = 0.0085 \left\{ \frac{\tau_*}{\tau_{*co}} \left(\frac{\tau_*}{\tau_{*co}} - 1 \right) \right\}^{0.5} \tan \theta \quad (29)$$

となる。但し、定数0.0085は実験的に定めたものである。図14に測定された横断方向流砂量と式29を示す²⁰⁾。横断方向流砂量については平野³⁰⁾、長谷川³¹⁾、福岡・山坂³²⁾によっても研究がなされている。

(c) 浮遊・拡散による横断方向土砂輸送

図15のように直線水路側斜部における y 方向の浮遊

砂の拡散を考える。この拡散係数 ε_y を見積るには、流れの中に仕切板を流れに平行に鉛直に立て、仕切られた水路内で砂を十分に浮遊させ、仕切板末端から下流の2点で濃度分布を測定し、その分布差から ε_y を求めればよい。図16はその結果を示すが、 ε_y はよく用いられる表示法

$$\varepsilon_y = c u_* \eta_0 \quad (30)$$

によって表わすことができる。ここに c = 比例定数、 u_* = 局所摩擦速度、 η_0 = 局所水深である。この測定

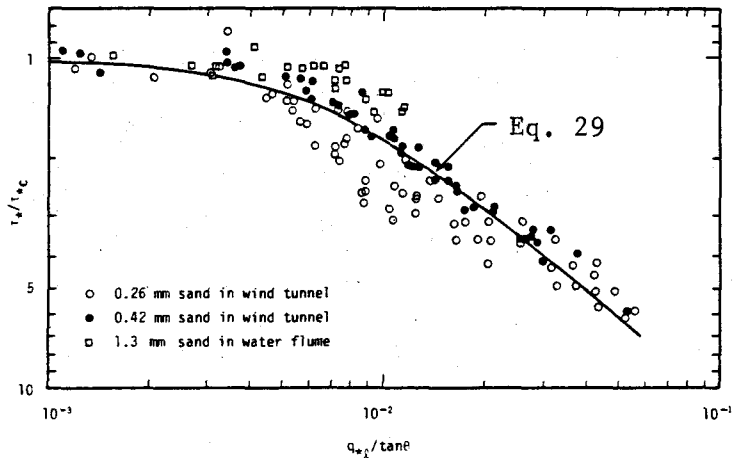


図14 側斜面横断方向の掃流砂量

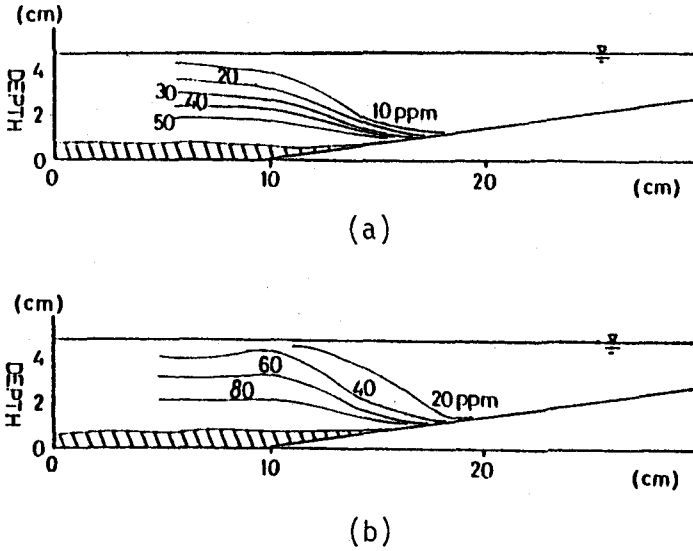


図 15 側斜面における浮遊砂の濃度分布
(a) 仕切板端末から 50 cm, (b) 1 m

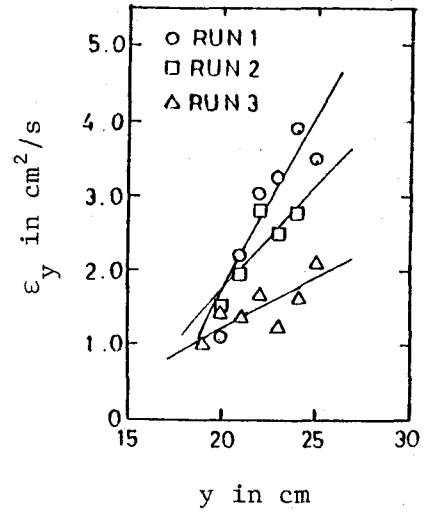


図 16 拡散係数 ϵ_y の横断方向分布

では c の値は 0.15～0.4 程度であった。

3. 蛇行河道の河床形状

3-1. 掃流砂が支配的な弯曲水路の河床形状¹²⁾

弯曲水路においては 1-2 (b) において述べたように凹岸部の深掘れ、凸岸部の土砂の堆積が発生し、図 1 a のような横断面形状となる。

このような横断面形状は横断方向の流砂量式(27)と二次流の式(17)を連立させれば求まる。式(27)において動的平衡状態では $v_{sr} = 0$ であり、 $\tan \theta = dh/dr$ (h は局所水深) を考慮し、式(16)を代入すれば河床形状を決定する方程式は

$$\frac{dh}{dr} = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{U}{\{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x} f^2 \frac{h}{r} F(0) \quad (31)$$

となる。上式は次の境界条件下で容易に解かれる。

$$r = r_a : h = H \quad (32)$$

ここに suffix a は平均水深に関する量である。河床形状は $f = r/r_c$ に対して

$$\frac{h}{H} = \exp \left\{ \frac{1}{2} A \left(\frac{r^2}{r_a^2} - 1 \right) \right\} \quad (33)$$

$$A = - \left(\frac{3}{4} \frac{\mu C_D}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{U^*}{\{(\rho_s/\rho - 1)gd\}^{\frac{1}{2}}} \frac{\lambda_o}{x} \frac{U}{U^*} F(0)$$

となる。ここに U_* = 平均摩擦速度, λ_0 = シャヘイ係数 ($=0.592$), κ = カルマン定数 ($=0.4$) である。実測により $\mu = 0.43$, $C_D = 0.4$, $\alpha = 0.85$ が得られているので, これらの値を用いて式(33)から得られる河床形状と実測の河床形状の比較を図17に示す。式(33)を Taylor 展開すれば前述の式(8)が求まる。

実用上は凹岸付近で発生する最大洗掘深 H_{max} を知ることが重要である。最大洗掘深と平均水深の比を川幅と中心曲率半径の比, B/r_c とパラメータ A を用いて式(33)から計算した結果を図18に示している。 A の値は上式によって平均流速 U , 摩擦速度 U_* および粒径 d が与えられれば求まる。

3-2. 掃流砂が支配的な蛇行水路の河床形状

こゝでは Engelund¹⁴⁾ による結果を示す。平衡河床形状を求めるには流砂の連続式が必要である。連続式は q_s , q_n を夫々 s , n 方向 (図7参照) の流砂量とすれば,

$$\frac{r_c}{r} \frac{\partial q_s}{\partial s} + \frac{\partial q_n}{\partial n} + \frac{q_n}{r} = 0 \quad (34)$$

である。 q_s は平均流速 U に対する流砂量を $\bar{q}_s$ とすれば

$$q_s = \bar{q}_s \left(\frac{u_s}{U} \right)^p \approx \bar{q}_s (1 + pu') \quad (35)$$

と書ける。ベキ p の値は Hooke²¹⁾ の実験値から $2.5 < p < 5.5$ である。式(35)を式(34)に代入すれば q_n として

$$q_n = -\frac{r_c}{r} \bar{q}_s p \int \frac{\partial u'}{\partial n} dn \quad (36)$$

一方, q_n は横断方向の流速成分 v' と斜面における重力の効果から

$$q_n = \bar{q}_s \left(v' + \frac{h}{\tan \phi} \frac{\partial \eta'}{\partial n} \right) \quad (37)^*$$

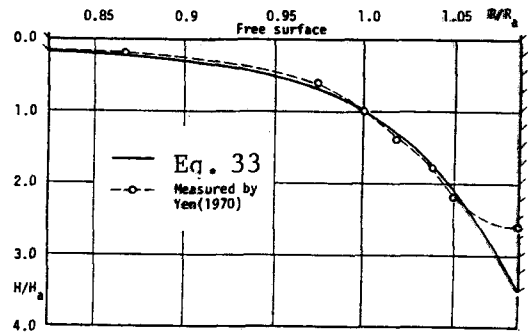


図17 弯曲水路における横断方向河床形状の理論値と実測値

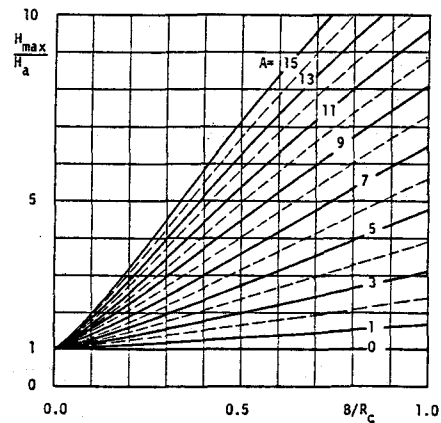


図18 最大洗掘深の計算図

* 式(37)は式(28)と同形であるが, セン断応力の関数となっていない点において式(28)より精度が落ちる。

ここに ϕ = 砂の水中安息角である。式(36)と式(37)は一致しなければならない

$$\frac{h}{\tan \theta} \frac{\partial \eta'}{\partial n} = v' - \frac{r_c}{r} \frac{\bar{q}_s}{q_s} p \int \frac{\partial u'}{\partial n} dn \quad (38)$$

となる。式中の u' は式(10)で与えられ、 v' は連続式(7)から与えられる。 $h = H + \eta'$ (H は平均水深) を考えれば上式は η' に関する非線型方程式であるので、解は数値計算によらねばならない。図19はEngelund が数値計算によって得た結果をHooke の測定値と比較したものである。河床形状は上下流で非対称となり、又外岸側で急激に深掘れが発生する様子がよく現われており、実際河川の特徴をよく再現している。

3-3. 浮遊砂が支配的な水路の河床形状

浮遊砂が土砂輸送に支配的である場合には図10において土砂は河道中心部でまき上げられ乱流拡散および二次流によって側岸部へ運搬・堆積され、その後に側岸部底面を通過して再び河道中心部へ戻される過程をとる。このような概念に基づいて河床形状を論じたもの

のとしてParker²²⁾の論文があるが、その解析の対象は直線河道(二次流の効果を無視)であり、かつ解析手法が高度であるのでこゝでは述べない。弯曲・蛇行河道については乱流構造が未だよく解明されていないので浮遊砂の輸送機構を論ずることは現段階では困難である。今後の課題であろう。

4. 河道蛇行の発生・発達および十分に発達した形状

4-1. 河道蛇行の発生

側岸の浸食を許さない直線流路においても水流と河床面の不安定現象によって交互砂州が発生し、水流の蛇行が起ることは木下²³⁾の先駆的研究以来明らかにされ、又実験・理論について数多くの研究が発表されている²⁴⁾。その結果、交互砂州の発生領域、波長、波高、移動速度などを定量的に取り扱える段階に達している。

交互砂州が発生・発達し、水流が蛇行するようになると流線が偏倚し、河岸近傍で水衝部が発生し、側岸の浸食が起り始める(図20)。

4-2. 河道蛇行の発達^{25) 26)}

河道蛇行の発達を論ずるには河岸の浸食・堆積の機構を取り入れて河道の変動を定式化しなければなら

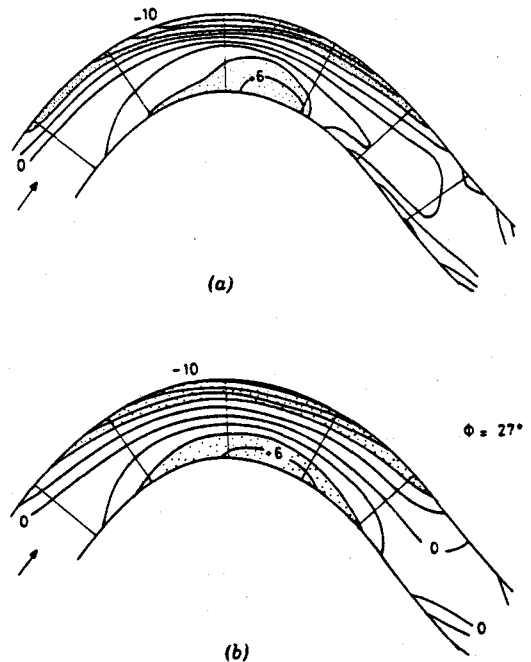


図19 河床等高線(a)実験値 (Hooke) (b)計算値 (Engelund), (Engelund¹⁴⁾ による)。

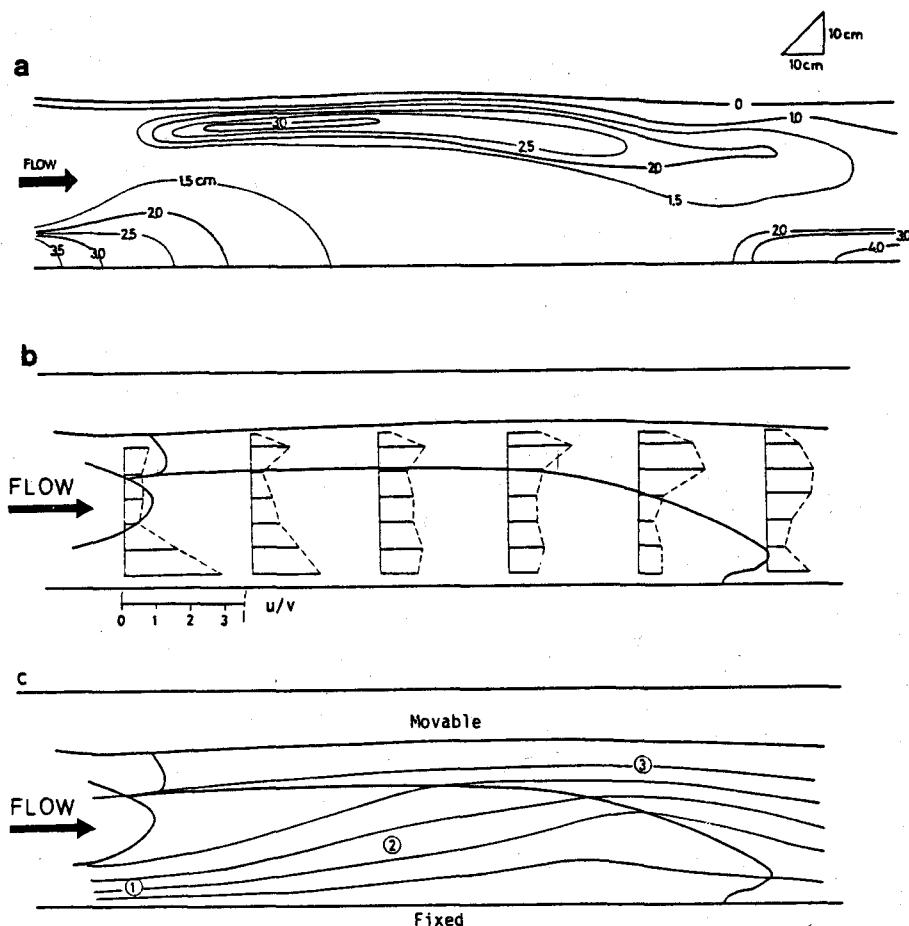


図20 片側岸浸食の場合の交互砂州上の流れ (a)底面の等高線 (b)速度分布 (c)流線

ない。2. および 4-1. で見たように河岸の浸食は河岸付近の流速場と密接に結びついている。流れの場は式(5), (6)を解くことによって既に得られている。即ち式(5)から ξ' を求め、更に式(8)の η' を夫々式(6)に代入すれば河岸における偏倚流速 u' は

$$U \frac{\partial u_b}{\partial s} + 2 \frac{U}{H} C_f u_b = b \left\{ -U^2 \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r_c} + \frac{C_f}{r_c} \left(\frac{U^4}{gH^2} + A \frac{U^2}{H} \right) \right\} \quad (39)$$

ここに u_b = 河岸, $n = b$, における u' の値である。

次に河岸変形の方程式は図21を参照して

$$\gamma \frac{\partial y}{\partial t} = \xi \quad (40)$$

ここに $\gamma = \cos \theta$, ξ = 河岸の浸食速度である。河岸近傍の流速 $u_b (= U + u_b')$ と結びつけると

$$\xi = \xi(u_b) = \xi(U) + \frac{d\xi}{dU} \cdot u_b' \quad (41)$$

となるが、流速 U は浸食・堆積の起らない平衡状態であると
考えられるので $\zeta(U) = 0$ となる。従って式(41)は

$$\zeta = E(U)u_b = E(\chi)u_b \quad (42)$$

こゝに $\chi = (\gamma^{-1})^{-1/3}$ であり、 $\bar{\quad}$ は 1 波長間の平均を表し、
 $E(U) = d\zeta/dU$ であるが、流速 U は蛇行が発達するにつれて
流路がのび U も減少してくるので結局 E は χ の関数となる。

$E(\chi)$ を χ の単調増加関数と仮定すれば

$$E(\chi) = E_0 \{1 + e(\chi - 1)\} \quad (43)$$

とおける。式(42)、(43)を式(40)に代入し、その後に式(39)、(40)から u_b を消去すれば河岸の変形を表わす式

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma \frac{\partial y}{\partial t} + 2 C_f \frac{\partial y}{\partial t} = \left\{ 1 + e(\chi - 1) \right\} \left\{ \chi \frac{\partial}{\partial x} \gamma^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - C_f (F^2 \chi^5 + A \chi^2) \gamma^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} \quad (44)$$

を得る。式(44)は蛇行方程式と名付けられている²⁵⁾。上式は H_0 、 U_0 (suffix "O" は蛇行開始前の直線流路の
等流に対応する量を表す) で無次元化されており、 $F^2 = U_0^2/gH_0$ である。

式(44)を摂動法を用いて解く。即ち

$$y = \varepsilon \mu_1(\tau, \phi) + \varepsilon^3 \mu_3(\tau, \phi) + \dots \quad (45)$$

とおく。ここに $\tau = \alpha t$ 、 $\phi = kx - \omega t$ であり、 ε は微小量を表す。又、

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_2 \Gamma(\tau) + \dots, \quad \omega(\tau) = \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_2 \Gamma(\tau) + \dots \quad (46)$$

$$F(\tau) = (e^{2\tau} - 1)/2\tau$$

のように展開する。上式を式(44)に代入し、展開すれば ε^1 のオーダーに対し

$$\mu_1 = e^{\alpha_0 \tau} \cos(kx - \omega_0 t) \quad (47)$$

$$\alpha_0 = \frac{2 C_f (A + F^2) k^2 - k^4}{k^2 + 4 C_f^2}, \quad \omega_0 = \frac{2 C_f k^3 \{1 + (A + F^2)/2\}}{k^2 + 4 C_f^2}, \quad c_0 = \frac{\omega_0}{k}$$

を得る。上式から $k < \sqrt{2} C_f \sqrt{A + F^2}$ のとき $\alpha_0 > 0$ となり、蛇行が発達することが知られる。卓越波数 k_{OM}
は α_0 が極大値をとる条件、 $d\alpha_0/dk = 0$ 、から求まり、その結果は次のようである。

$$k_{OM} = \beta C_f, \quad \beta = 4 \left\{ 1 + \frac{1}{2} (A + F^2) \right\}^{\frac{1}{2}} - 4 \quad (48)$$

この値に対応する α_0 、 ω_0 の値はそれぞれ

$$\alpha_{OM} = \frac{1}{4} \beta^2 k_{OM}^3, \quad \omega_{OM} = \frac{1}{2} \beta \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \right) k_{OM}^2 \quad (49)$$

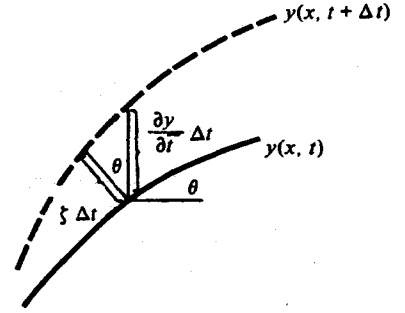


図21 側岸の移動を表す定義図

となる。

ϵ^3 のオーダーに対して μ_3 は

$$\mu_3 = -(J_F \cos 3\phi + J_S \sin 3\phi) k^2 e^{3\tau} \quad (50)$$

となる。このとき $\tau = 0$ における α の値は非線型項により修正され、 α を最大とする卓越波数 k_M は、 δ_{0M} $= \epsilon k_{0M}$ とおくと

$$k_M = k_{0M} \left\{ 1 + \frac{\delta_{0M}^2}{192} \frac{\left\{ (32 - 4e - 48f) + (16 - 3e - 18f)\beta^2 + \left(2 - \frac{3}{4}e - \frac{3}{2}f\right)\beta^4 - \frac{e}{16}\beta^6 \right\}}{\left(1 + \frac{1}{4}\beta^2\right)^2} \right\} \quad (51)$$

となる。このとき対応する α_M は次のようになる。

$$\alpha_M = \alpha_{0M} \left\{ 1 - \frac{\delta_{0M}^2}{24} \frac{\left\{ 2(e + 6f) + (e + 3f)\beta^2 + \frac{1}{8}e\beta^4 \right\}}{\left(1 + \frac{1}{4}\beta^2\right)^2} \right\} \quad (52)$$

$k = k_M$ における J_F , J_S の値はそれぞれ

$$J_{FM} = \frac{1}{48} \frac{576 + 88\beta^2 + 2\beta^4}{256 + 36\beta^2 + \beta^4}, \quad J_{SM} = \frac{1}{48} \frac{40 + 12\beta^2 + \frac{1}{2}\beta^4}{256 + 36\beta^2 + \beta^4} \quad (53)$$

である。以上から非線型性を考慮した発達中の蛇行形状は

$$y = \epsilon \{ e^{\alpha_M t} \cos(k_M x - \omega_M t) - \delta_{0M}^2 e^{3\alpha_M t} [J_{FM} \cos 3(k_M x - \omega_M t) + J_{SM} \sin 3(k_M x - \omega_M t)] \} \quad (54)$$

次に卓越波長と蛇行形状の理論値を実測値と比較する。卓越波長は式(48)から求めることができるが、沖積蛇行河川では A の平均値は実測により $2.89^{25)}$ となり、更に $A \gg F^2$ と考えてよいので

$$k_M = 1.50 C_f \quad \text{即ち} \quad \lambda_M = \frac{2\pi}{1.5} \frac{H_0}{C_f} \quad (55)$$

である。実験水路で得られた交互砂州の波長および沖積蛇行河川の波長との比較を図22に示す。平均的な波長は表現しているもののばらつきは大きい。この原因は理論に水路幅の効果が取り入れられていないこと、 A の値を一定値としたことなどにあると考えられる。

図23は式(54)から計算される河道形状と Beaver river (カナダ) の平面形状を比較したものである。単なる sine 型の形状ではなく、非線型項 J_{SM} , J_{FM} をとり入れることにより、蛇行頂部の丸みや上下流の非対称性をよく表現していることが知られる。

4-3. 充分に発達した蛇行形状²⁷⁾

前項では河道蛇行の発達の過程を取り扱ったが、ここでは蛇行が充分に発達し、同じ形状を保ちながら下流へ移動する場合について考察する。式(44)を蛇行形状の位相速度 c で動く移動座標系に変換し、更に $\gamma^2 d^2 y / dx^2 = d\theta / ds$, $dy / ds = \sin \theta$ などを用いて (s, n) 曲線座標系で書き直せば、

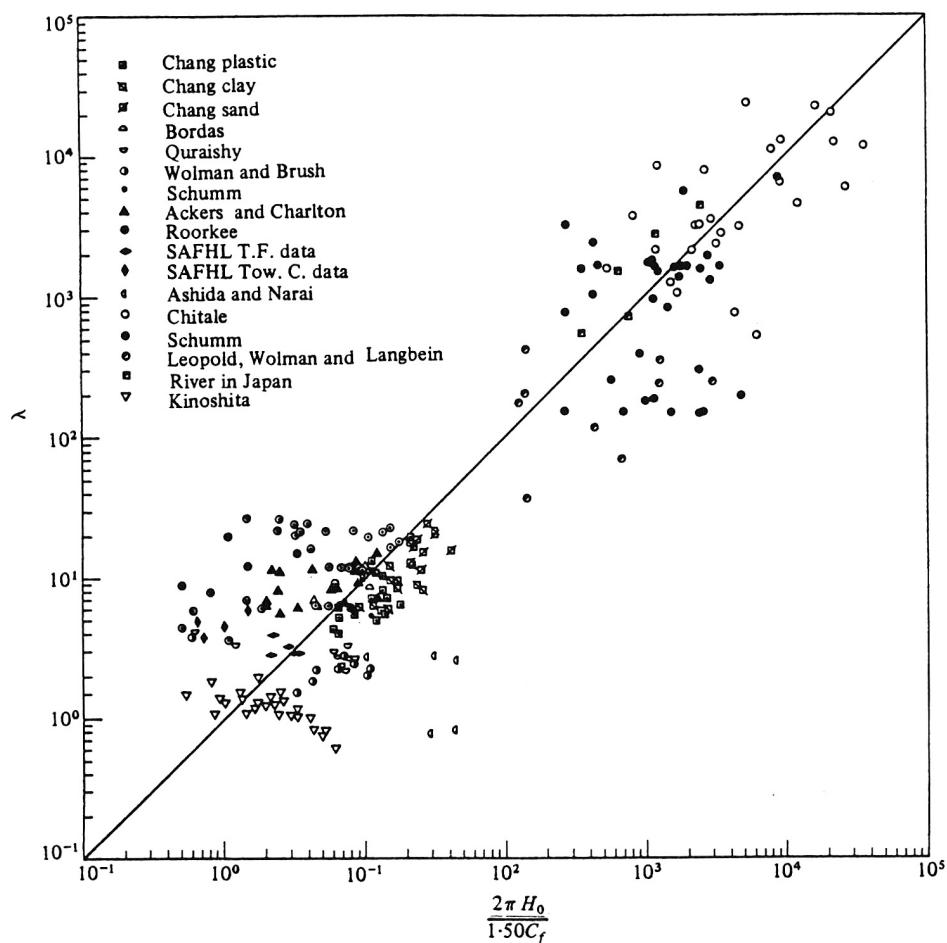


図22 式(55)と実測値の比較 (中央より左下は実験室の単列交互砂州, 右上は実際河川の蛇行波長)

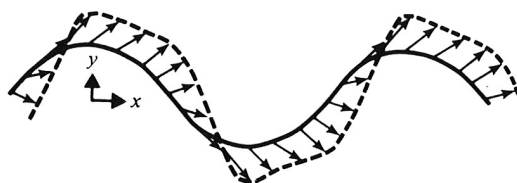
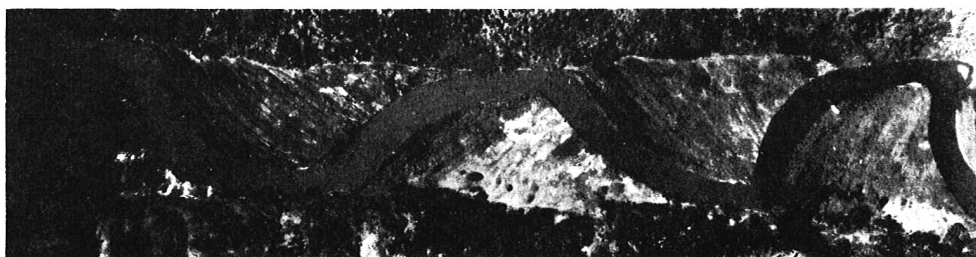


図23 Beaver River, Alberta, Canada と式(54)から得られる結果の比較²⁶⁾ 流れは左から右(縮尺は任意)

$$\{1 + e(\chi - 1)\} \chi \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \{c \cdot \cos \theta - [1 + e(\chi - 1)] C_r (F^2 \chi^5 + A \chi^2)\} \frac{d\theta}{ds} + 2 \chi C_r c \cdot \sin \theta = 0 \quad (56)$$

ここで χ を流路に沿う蛇行長に関する波数とすれば、 χ および位相速度 c は河道中心線が蛇行軸となす最大偏角 θ_0 によって展開でき

$$\chi = \chi_0 + \theta_0^2 \chi_2 + \dots, \quad c = c_0 + \theta_0^2 c_2 + \dots \quad (57)$$

と置ける。更に偏角 θ は

$$\theta = \theta_0 \mu_1(\chi s) + \theta_0^3 \mu_3(\chi s) + \dots \quad (58)$$

と展開できる。ここに suffix "O" は中立安定時の (x, y) 座標系における量を表し、 χ_0, c_0 は次のようになる。

$$\chi_0 = \sqrt{2} C_r (A + F^2)^{\frac{1}{2}}, \quad c_0 = C_r (A + F^2) \quad (59)$$

式(57), (58)を式(56)に代入し、各オーダー毎にまとめて解を得ると

$$\theta = \theta_0 \sin \phi + \theta_0^3 (J_F \sin 3\phi + J_S \cos 3\phi) \quad (60)$$

となる。ここに $\phi = \chi s$, $J_F = 1/192$, $J_S = \sqrt{2(A + F^2)}/128$ であり、これに対応する位相速度 c および蛇行長に関する波数は

$$c = c_0 \left\{ 1 - \frac{\theta_0^2}{24} \frac{A(1 + 2e) + F^2(7 + 2e)}{A + F^2} \right\}, \quad \chi = \chi_0 \left\{ 1 - \frac{\theta_0^2}{12} \frac{2A + 5F^2}{2(A + F^2)} \right\} \quad (61)$$

となる。

式(60)は蛇行平面形状の第1近似解が Leopold・Langbein⁷⁾ によって提唱された sine-generated curve であることを示している。しかし非線型性によって蛇行形状弯曲部の丸みや上下流の非対称性が発生することが知られる。このような非線型効果を野外観測によって発見したのは木下⁸⁾ であり、Parker 等²⁷⁾ はその発見に因んで式(60)によって表わされる曲線を Kinoshita curve と名付けている。図24に式(60)から計算される蛇行形状と Pembina river (カナダ) の比較を示す。更に式(61)は蛇行振幅が発達するにつれて位相速度が減少して行くことを示しており、河川における観測と一致している。

河床勾配が変化する場合については既に本研修会(1981)で福岡によって詳述されているので参照されたい。

4-4. 数値計算法による蛇行変動の予測

山岡・長谷川²⁸⁾ は式(39)および式(40)を差分法を用いて数値的に解くことを試みている。すなわち、河川のある年度の形状を初期値とし、その何年後の実測形状によってパラメータ A および E を同定し、その値を用いて将来の河道変動を予測しようとするものである。既に1-2(b)において述べたように河岸付近の地質構造は複雑であるので $E = \text{一定}$ と仮定することは困難であるが、蛇行変動を大局的に予測する手法と

しては有用であると考えられる。図25は同定と予測を行った例である。

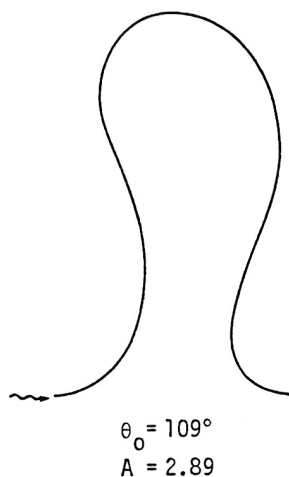


図24 Pembina River, Alberta, Canada と式(60)から得られる結果²⁷⁾の比較。流れは左から右(縮尺は任意)

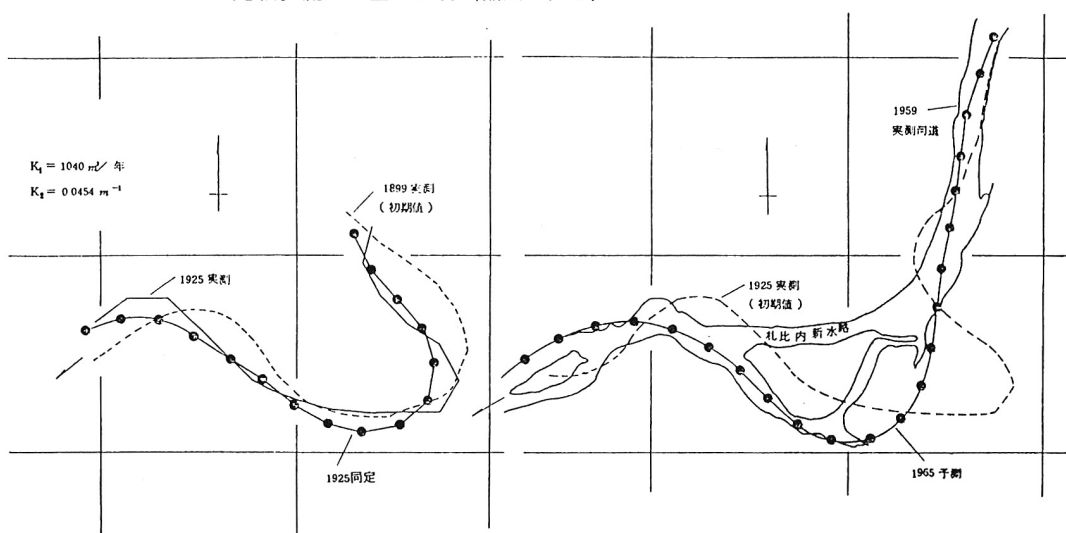


図25、石狩川札比内地区における河道変動の同定と予測(山岡・長谷川²⁸⁾による)。

参 考 文 献

- 1) Hansen, E.: On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Report No. 3, Hydraulic Lab., Tech. Univ. of Denmark, 1967.
- 2) Callander, R. A.: Instability and river channels, Journal of Fluid Mech., Vol. 36, Part 3, 1969.
- 3) Engelund, H. and Skovgaard, O.: On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, Journal of Fluid Mech., Vol. 57, Part 2, 1973.
- 4) Parker, G.: On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers, Journal of Fluid Mech., Vol. 76, Part 3, 1976.
- 5) Fredsoe, J.: Meandering and braiding of rivers, Journal of Fluid Mech., Vol. 84, Part 4, 1978.
- 6) Hayashi, T. and Ozaki, Y.: Alluvial bed from analysis-Formation of alternating bars and braids, Application of Stochastic Process in Sediment Transport, Water Resources Pub., 1980.
- 7) Leopold, L. B. and Langbein, W. B.: River meanders, Scientific American, June, 1966.
- 8) 木下良作: 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料, 36号, 1961。
- 9) Allen, J. R. L.: Sedimentary Structures, Vol. 1 & 2, Elsevier, 1981.
- 10) Hickin, E. J.: The development of meanders in natural river channels, American Journal of Science, Vol. 274, 1974.
- 11) Jackson, R. G.: Unsteady-flow distributions of hydraulic and sedimentologic parameters across meander bends of the lower Wabash River, Illinois-Indiana USA, Proc. of Intern. Symp. on Unsteady Flow in open channels, England, 1976.
- 12) 吉川秀夫・池田駿介・北川明: 弯曲水路の河床変化について, 土木学会論文報告集, 251号, 1976.
- 13) Jackson, R. G.: Velocity-bed-form-texture patterns of meander bends in the lower Wabash River of Illinois and Indiana, Geological Soc. of America Bull., Vol. 86, 1975.
- 14) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, Journal of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 100, HYII, 1974.
- 15) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫: 河川の自由蛇行に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 255号, 1976.
- 16) 玉井信行・池内幸司: わん曲部における水深平均水理量の遷移特性に関する解析, 第37回年講, 1982.
- 17) 谷一郎編: 流体力学の進歩乱流, 丸善, 1980.
- 18) Ikeda, S.: Incipient motion of sand particles on side slopes, Journal of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 108, HYI, 1982.
- 19) Lane, E. W.: Design of Stable channels, Transactions, ASCE, Vol. 120, 1955.

- 20) Ikeda, S: Lateral bed load transport on side slopes, Journal of Hydraulics Div., ASCE, Vol. 108, HY II, 1982.
- 21) Hooke, R. L.: Shear-stress and sediment distribution in a meander bend , UNGI-Report 30, Univ. of Uppsala, 1974.
- 22) Parker, G.: Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 1, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 89, Part 1, 1978.
- 23) 木下良作：河床における砂礫堆の形成について，土木学会論文集，42号，1957.
- 24) 土木学会水理委員会：洪水流の三次元流況と流路形態，1982に詳しく述べられている。
- 25) Ikeda, S. Parker, G. and Sawai, K.: Bend theory of river meanders, Part 1, Journal of Fluid Mech., Vol. 112, 1981.
- 26) Parker, G., Sawai, K. and Ikeda, S.: Bend theory of river meanders, Part 2, Journal of Fluid Mech., Vol. 115, 1982.
- 27) Parker, G., Diplas, P. and Akiyama, J.: Meander bends of high amplitude, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE (submitted).
- 28) 山岡勲・長谷川和義：河岸浸食の研究，北大委託研究報告「河川の機能に関する研究」，北海道開発局，1978
- 29) Leschziner, M. A. and Rodi, W.: Calculation of strongly curved open channel flow, Journal of Hydraulics Div., ASCE, Vol, 105, HY 10, 1979.
- 30) 平野宗夫：拡幅を伴う流路変動について，土木学会論文報告集，210号，1973.
- 31) 長谷川和義：非平衡性を考慮した側岸浸食量式に関する研究，土木学会論文報告集，316号，1981.
- 32) 福岡捷二・山坂昌成：直線流路の交互砂州，土木学会水理講演会論文集，27回，1983.
- 33) Parker, G: Lateral bedload transport on side slopes. Discussion, Journal of Hydraulics Div., ASCE (submitted).