

地下水の最適取水

上 田 年比古

1. まえがき

近年、水資源の不足により地下水の有効利用が唱えられているが、現実には必ずしも地域全体での地下水利用が効率よく行われているとは云えないようで、一部では過剰揚水に伴う地盤沈下や海岸部の地下水の塩水化などの揚水障害が発生している。したがって、これらの障害を防止しながら、効率的な取水計画を決定することが必要となる。この決定には、従来は基礎式となる Laplace の式を差分化し、各井戸に種類の揚水量を与えて、数値計算を繰返し適切な水頭分布を与える揚水量を試行錯誤で求めて、これを計画揚水量とする方法がとられているようである。しかし、この方法では領域あるいは揚水の条件が複雑な場合には、最適な揚水計画を得ることは困難で最適化の手法が要請される。次に建造物の基礎の掘削工事では、周囲に揚水井を設置し、地下水の低下を行うが、揚水総量を少なくして、所期の目的を達成する最適な揚水操作が要求される。さらにまた以上の最適取水の問題は定常状態のみならず、境界条件あるいは取水量が時間的に変化する非定常状態においても生じ、また揚水のみならず、注入（人工かん養）を加味しながら行う場合も考えられる。

したがって、以上をまとめて最適取水の考えられるケースを上げれば、表一 1 のようになり、1～4の各列から a, b のうち1つずつとった組合せは16通りになる。

以下において、これまでの研究状況をのべる。まず Bear¹⁾ はその著書で、最適取水の例

表一 1 最適取水の考えられるケース

	1	2	3	4
a	定 常	広域地下水取水	淡水域	揚水のみ
b	非定常	地下水低下工事	海岸域	揚水+注入

(各組合せをとれば16通りになる)

題として、簡単な領域モデルについて、ある地点の水位低下量を、1 箇の井戸の水位低下の重ね合せで表わし、これによる水位と、必要総揚水量、ポンプ能力に関する制約のもとに、単位揚水量の経費を与えて揚水費最小の場合を線形計画表で解き、次にまた、モデル化した隣接 2 領域で、地下水揚水施設と他地域からの導水施設による利水を行う時の 5 年間づつ 4 期にわたっての最適な投資計画を、線形計画法で求める Schwartz J. (1971) の研究を示し最適取水算定の概念を説明している。

次に E. Aguado および I. Remson はまず抽象化されたモデルについて被圧あるいは不圧の領域内の各井戸の揚水総量が指定値以上で、井戸水頭の合計最大に対する各井戸の揚水量の決定²⁾を行った。次いで、基礎掘削の工事区域内の地下水位を、区域周辺に配置された揚水井により、所要値以下に低下させる場合、揚水総量最小の各井戸揚水量の決定^{3),4)}を行い、ある程度具体的問題への解を与えた。

次に上田・神野・長野^{5),6)} は不圧および被圧地下水領域で、各井戸に課せられる水需要量と、地盤沈下

の防止上各井戸に課せられる低限界水頭に関する制約条件のもとに、各井戸の揚水量の合計が最大となる場合を有限要素法と線形計画法とにより求める方法を述べ、これを熊本平野西部の被圧帯水層領域に用いて、実際問題への適用を行った。

また、佐藤・渡辺⁷⁾は埼玉地域を数個の地区に分割し、揚水量と地盤沈下量の実測記録から地盤沈下に対する許容揚水量を研究し、また各地区の地盤沈下量の合計を最小にする各井戸の揚水量を求めている。さらに佐藤・仁科・藤崎⁸⁾は同じく埼玉地域について、地下水シミュレーションによる地下水位と実測の地盤沈下量から沈下停止の限界水位を求めて最適揚水量を研究し、また最適揚水量に至るまでの揚水量削減過程の違いによる地下水位、地盤沈下量の変化を検討している。

次に川谷⁹⁾は垂直の絞り出しが行われる粘土層を狭む多層帯水層モデルについて、取水の層が種々異なる井戸が存在する場合、各井戸の水位と揚水量に与えた制約条件のもとに井戸揚水量の合計が最大になる解を求めている。

次に神野・長野¹⁰⁾は掘削工事の地下水低下のための深井戸工法で、まず定常状態で、掘削部内の地下水が指定値以下の条件のもとに、掘削部周辺に配置された井戸の揚水量の合計を最小にする解を求め、次いで非定常時の最適取水の問題として、揚水により掘削部の水位を、所定の期日に、所定の水位まで低下させる条件のもとに、揚水期間における揚水総量を最小にする各揚水井の揚水操作を、最大原理を用いて解いている。

次に海岸域の最適取水については、上田・藤野・平野・神野¹¹⁾は塩害防止上から設定される塩水くさびの侵入限界線と地盤沈下防止上から設定される井戸の低限界水頭に関する条件のもとに、各井戸の取水量の合計を最大にする場合を有限要素法と線形計画法から求める計算手法を示し、その適用例を簡単なモデルで示している。

さらにまた平野・神野・上田¹²⁾は塩水くさびの侵入限界線に沿って淡水注入井を並べ、塩水の侵入を防止しながら、内陸部の基礎掘削時の地下水低下工事を行う場合について、掘削部内の指定水位、淡水揚水井と注入井の水位に関する制約条件のもとに、掘削部周囲の揚水量と塩水くさび侵入限界線上の淡水注入量の絶対値の総和を最小にする場合を求め、これを福岡市西戸崎地区に適用している。

以上でこれまでの研究概況を述べたが、以下において最適取水についての基礎的な理解をうることを目的として、上記のうち表-1の`定常・淡水域・広域取水・揚水のみ`の場合と`定常・海岸域・広域取水・揚水のみ`の場合の2つについて、著者らが行った方法を概略述べることにする。

2. 定常・淡水広域地下水の最適取水⁶⁾

ここでは複雑な境界形状に対して有利であること、および領域が広く、また領域内の地質構造が複雑に変化する場合にも比較的少ない節点数で対応できることなどから、有限要素法を用いて、地下水頭から取水量を算定する式形を求め、次に制御井戸の定常取水について、地域内の揚水障害を防御し、そして各制御井戸に課せられた水需要量を満たすという制約条件のもとで、取水総量を最大とする最適取水について線形計画法により求める方法を述べる。

2-1. 有限要素法による基礎式の離散化

(1) 境界条件 (図-1 参照)

境界 B_1 , B_2 で水頭 h が与えられ, B_3 , B_4 は不透水壁とする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} B_1 \text{で } h &= H_1, \quad B_2 \text{で } h = H_2 \\ B_3, B_4 \text{で } \partial h / \partial n &= 0 \quad (n \text{は境界の法線方向}) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (1)$$

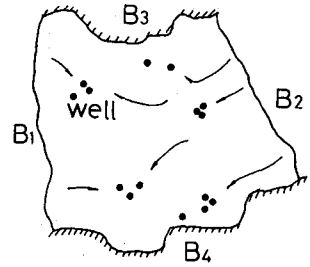


図-1 地下水領域モデル
($B_1 \sim B_4$ は境界)

(2) 井戸の取扱いおよび三角形要素の分割

領域の三角形要素の分割にあたり, 井戸を, 最適取水計画の対象とする制御井戸と, 一般には民家の井戸, 農業用井戸などで制御の対象とせず取水量一定とする非制御井戸とに分け, 制御井戸を節点にとり, 非制御井戸は三角形要素内に含めることにする。

次に領域を三角形要素に組み, 節点番号を制御井戸 (M 個) に始めから 1, 2, $\dots$, M の通し番号をつけ, 次に $M+1$, $M+2$, $\dots$ を一般の領域内の節点につけ, 終りの方の通し番号を境界 B_1 , B_2 上の節点につける。

(3) 基礎式とその離散化

定常状態の地下水流の基礎式は, 被圧地下水では,

$$\begin{aligned} & \partial(kb \partial h / \partial x) / \partial x + \partial(kb \partial h / \partial y) / \partial y \\ &= \sum_p [Q_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p)] + R(x, y) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (2)$$

不圧地下水で, 準一様流を仮定すれば,

$$\begin{aligned} & \partial\{(k/2) \partial h^2 / \partial x\} / \partial x + \partial\{(k/2) \partial h^2 / \partial y\} / \partial y \\ &= \sum_p [Q_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p)] + R(x, y) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに h : 地下水頭, b : 被圧帯水層の厚さ, k : 透水係数, Q_p : 井戸 p (制御井戸および非制御井戸のうちで位置と揚水量がわかっている比較的大きな井戸〔非制御大井戸とする〕) の取水量, $\delta(x)$, $\delta(y)$: デルタ関数, (x_p, y_p) : 井戸 p の座標, $R(x, y)$: 帯水層の単位面積, 単位時間あたりの流出入量で, 外部への流出を+とする。なおこれには位置および揚水量のはっきりしない民家, 農業用の小規模の井戸 (非制御小井戸とする) の揚水量を含めることにする。基礎式(3)は, $h^2/2$ を改めて H とおくと本質的には式(2)と同形であるので, 以下式(2)について述べる。

さて周知のように, 有限要素法では式(2)の汎関数を各節点の水頭で偏微分して0とおくことにより, 節点の水頭についての連立方程式が次のように得られる。

$$Ah = FQ + R \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに A : 透水量係数と節点座標よりなる係数行列, h : 節点の水頭ベクトル, F : 節点座標および非制御大井戸の座標よりなる係数行列, Q : 揚水量ベクトル, R : 帯水層からの流出入量に対応する定数項ベクトルである。式(4)を3つのグループの小行列に分割すると,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_w \\ h_r \\ h_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_w \\ Q_r \\ Q_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad \text{.....(5)}$$

ここで h_w は制御井戸の節点の水頭, h_b は境界 B_1, B_2 上の節点の水頭, h_r は残りの一般の節点の水頭である。 Q_w は制御井戸の取水量, Q_r, Q_b は非制御大井戸の取水量である。なお境界上には井戸がないので $Q_b = 0$ である。式(5)で Q_w が与えられれば, h_b, Q_r, Q_b は既知のため, 領域内の水頭分布 (h_w, h_r) が式(5)の始めの2式より求められる。

(4) 井戸水頭から井戸取水量を求める式

式(5)を変形して, h_w から Q_w を求める式を, 式(5)の始めの2式より h_r を消去して求めると, 次式となる。

$$Q_w = Ph_w + q \quad \text{.....(6)}$$

ここに,

$$P = [F_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}F_{21}]^{-1} [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}] \quad \text{.....(7)}$$

$$q = [F_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}F_{21}]^{-1} \{ [A_{12} - A_{22}^{-1}F_{22} - F_{12}]Q \\ + [A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}]h_b + [A_{12}A_{22}^{-1}R_2 - R_1] \} \quad \text{.....(8)}$$

P, q は対象地域の境界条件, 水文地質条件および井戸の配置などの関数であり, その地域の揚水に関する特性量を示すもので, 式(6)の式形にすることにより, 後述のように, 取水計画にあたっての有用な資料と考えられる P, q (後述では q の代りにこれを変形した P_0 を用いている) を取り出すことができたものとする。

2-2 最適取水の解

(1) 井戸の低限界水頭と水需要量

地下水の過剰揚水に伴う障害として主に地盤沈下と地下水の塩水化が上げられている。これらの防止策として, 揚水量を規制するか, 水頭低下を規制するかは異論のあるところであるが, 地盤沈下は帯水層内の間引き水圧の低下が原因と考えられていて¹³⁾, また, 海水の内陸部への地下侵入も水圧の関係で発生する現象と考えられる。したがって, 揚水障害の直接の原因は地下水頭の異常低下として, ここでは揚水障害が発生しない限界の水頭(低限界水頭)を考えることにする。次に, 井戸揚水場では, 水頭低下の最も大きいのは井戸水位であるので, ここでは制御井戸の水位にこの低限界水頭 (h_w^* とする) を設定することにする。

次に, 制御井戸について, その井戸の配水区域の水需要量を Q_w^* とする。

(2) 2 制約条件のもと取水量最大の解

ここでは, 各制御井戸の水頭, 揚水量が h_w^* 以上, Q_w^* 以上の制約条件のもとで, 総取水量最大の場合を最適取水と定義して, 線形計画法により解くことにする。

a) 基礎式

$$\text{いま } h_w' = h_w - h_w^* \quad \text{.....(9)}$$

を用いれば式(7)は

$$Q_w = Ph'_w + (Ph'_w + q) = Ph'_w + P_0 \quad \cdots(10)$$

$$\text{ここに } P_0 = Ph'_w + q \quad \cdots(11)$$

式(10)を成分で表示すれば、

$$Q_m = \sum_{i=1}^M (P_{mi} h_i) + P_{0m} \quad \cdots(12)$$

ここで、 m と l は制御井戸の番号で、 Q_m 、 P_{mi} 、 P_{0m} および h_i はそれぞれ Q_m 、 P (対称行列)、 P_0 および h'_w の成分である。

したがって制約条件は

$$Q_w = Ph'_w + P_0 \geq Q_w^* \quad \cdots(13)$$

$$h'_w \geq 0 \quad \cdots(14)$$

目的関数 g は

$$g = \sum_{m=1}^M Q_m \quad \cdots(15)$$

$$g = \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{i=1}^M (P_{mi} h_i) \right\} + \sum_{m=1}^M P_{0m}$$

$$= \sum_{i=1}^M \left\{ \left(\sum_{m=1}^M P_{mi} \right) h_i \right\} + \sum_{m=1}^M P_{0m}$$

$$\therefore g = \sum_{i=1}^M (u_i h_i) + G \quad \cdots(16)$$

$$\text{ここに } u_i = \sum_{m=1}^M P_{mi}, \quad G = \sum_{m=1}^M P_{0m} \quad \cdots(17)$$

式(13)、(14)および(16)は h_i に関する1次の不等式または等式である。すなわち h_i に関する条件式(13)、(14)をもとに式(16)の g を最大にする h_i を求める線形計画法の問題となり、シンプレックス法¹⁴⁾により h_i が求められ、これより式(10)から Q_m すなわちこの場合の各井戸の最適取水量が求められる。

また式(13)、(14)の条件を満たした上で、ある特定の制御井戸 m_s の取水量をできるだけ大きくしたい場合には式(15)の代りに目的関数 g_s として

$$g_s = \sum_{m_s} Q_{m_s} \rightarrow \max \quad \cdots(18)$$

を用いればこの場合の各制御井戸の取水量が求められる。以下の適用例では式(15)による解を述べる。

b) 適用例

(i) 領域の概要と境界条件

熊本市水道局の報告書¹⁵⁾で、取水計画について検討されている図-2に示す熊本平野西部の海岸に至る面積約210km²の被圧帯水層領域に適用する。この地域は現在地盤沈下や地下水の塩水化の進行が観測されている。

境界条件として、 B_1 には資料からの水頭(標高)を与え、 b 、 c 、 d および e でそれぞれ19m、21m、7.4mおよび8.0mとし、 c d 間は直線変化させ、 B_2 は水頭0mを与え、また B_3 、 B_4 は不透水壁とした。また、この地域では上層の不圧地下水からの垂直かん養が考えられている。なお図-2の曲線とそれに記入されている数字は等透水量係数線とその値である。

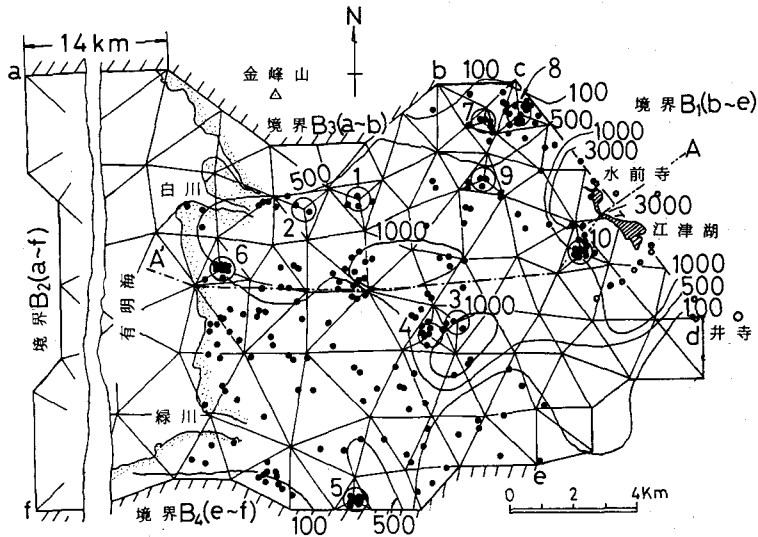
ii) 制御井戸および三角形要素の分割

制御井戸を図-2の井戸番号(1)～(10)に示す10箇所とし、これから図のような三角形要素に分割した。

要素数は170個、節点数は104個である。なお各三角形要素の透水量係数は図中の等透水量係数線をもとにして与えた。

(iii) 非制御井戸および帯水領域への流入量

この地域には30m以上の深の深井戸が700本ほどあるとされているが、ここではこのうち報告書でその位置と揚水量



図一 2 熊本平野西部地下水領域

が示されている井戸146本を非制御大井戸とする。制御井戸と非制御大井戸を図一 2 の黒丸で示している。

次に非制御小井戸は位置も揚水量も不明であるので、被圧帯水層からの平面的に均等な流出量として取扱い、上層不圧地下水からの垂直かん養と一諸にして R とする。この R は現時点では不明のため一応同報告書の昭和49年9月の時点の諸数値を式(5)に与えて R を逆算し、この R を以後の取水計画の算定には既知量として与えた。

(iv) 低限界水頭と水需要量

ここでは制御井戸に与える低限界水頭 h_w を一律に標高 -5 m 、 -1 m とした。これは井戸9地点(取水前の井戸地点水頭標高 $+4\text{ m}$)を例にとると水頭低下量 Δh が 9 m 、 5 m に相当する。なお海岸部の制御井戸に対して塩水の侵入防止の面からも低限界水頭を設定しなければならないが、塩水侵入防止については次章で述べることにし、一応ここでは海岸近くの制御井戸にも前述の低限界水頭を一律に与えることにする。

次に各制御井戸に課せられる水需要量には、同報告書に上げられている5つの揚水計画案をとった。これを表一 2 に示している。

(v) 計算結果とその考察

① 係数 P 、 U 、 P_0 および G

式(7)、(8)、(11)から求めた結果を表一 3、4 に示す。

② 行列 P (成分 P_{mi}) (表一 4 参照)

P は透水量係数および節点と非制御大井戸の座標より構成され表一 4 の P_{mi} は式(13)から制御井戸 l の水頭の単位上昇による制御井戸 m の増加水量である。表一 4 の対角成分($m=l$)が負であり、その他($m \neq l$)が正であるのは、ある井戸の水量はその井戸自身の水頭が低下する程、またそれ以外の井戸の水頭

表－2 水需要量 Q_w^* (成分 Q_m^*) (m は制御井戸の番号) (単位: $10^4\text{m}^3/\text{day}$)

case m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ΣQ_m^*
1	1.50	0.60	1.00	0.27	0.27	0.60	0.60	0.60	0.27	0.60	6.31
2	●3.00	0.60	●2.80	0.50	0.50	0.80	0.80	0.80	0.50	0.80	11.10
3	●2.00	●2.00	1.00	○1.00	●1.00	●1.50	1.50	1.50	1.00	1.50	14.00
4	●3.00	1.30	●2.80	0.90	0.90	●1.50	1.50	1.50	0.90	1.50	15.80
5	●3.50	1.30	●3.00	●1.80	●1.80	●2.10	●2.10	○2.10	●1.80	2.10	●21.60

(注) ●印は表－3の－5 m, －1 mの $P_{0m} < Q_m^*$, ○印は表－3の－1 mのみ $P_{0m} < Q_m^*$

表－3 P_0 (成分 P_{0m}) と G (m は制御井戸の番号, h_w^* は標高, $G = \sum_m P_{0m}$) (単位: $10^4\text{m}^3/\text{day}$)

h_w^* m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	G
－5 m	1.94	1.74	1.37	1.03	0.92	1.38	1.78	2.16	1.76	4.61	18.69
－1 m	1.91	1.72	1.26	0.99	0.91	1.36	1.65	1.86	1.57	3.39	16.62

表－4 P (成分 P_{mi}) と U (成分 u_i) (m, l は制御井戸の番号, $u_i = \sum_m P_{mi}$) (単位: m^2/day)

l m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	u_i
1	－1640.0	752.0	193.0	159.0	17.4	110.0	41.7	4.9	254.0	33.5	－74.5
2	752.0	－1390.0	54.0	68.3	24.9	408.0	4.5	0.5	34.9	7.0	－35.5
3	193.0	54.4	－2590.0	1540.0	53.0	38.4	9.2	1.7	177.0	245.0	－278.7
4	159.0	68.3	1540.0	－2200.0	137.0	71.4	4.6	0.7	74.4	54.6	－90.0
5	17.4	24.9	53.0	137.0	－324.0	58.1	0.3	0.03	3.5	4.0	－25.8
6	110.0	408.0	38.4	71.4	58.1	－773.0	1.4	0.2	15.1	4.1	－63.3
7	41.7	4.5	9.2	4.6	0.3	1.4	－835.0	194.0	249.0	7.5	－322.8
8	4.9	0.5	1.7	0.7	0.03	0.2	194.0	－1090.0	115.0	3.4	－769.6
9	254.0	34.9	177.0	74.4	3.5	15.1	249.0	115.0	－1550.0	140.0	－497.1
10	33.5	7.0	245.0	54.6	4.0	4.1	7.5	3.4	140.0	－3540.0	－3040.0

表－5 最適取水の算定結果 Q_m (m は制御井戸の番号) (単位: $10^4\text{m}^3/\text{day}$)

h_w^*	case m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ΣQ_m
－5 m	1	1.94	1.74	1.37	1.03	0.92	1.38	1.78	2.16	1.76	4.61	18.69
	2	3.00	0.60	2.80	0.50	0.50	0.80	2.03	2.29	0.50	4.83	17.85
	3	2.00	2.00	1.00	1.00	1.00	1.50	1.50	2.38	1.00	2.00	15.38
－1 m	1	1.91	1.72	1.26	0.99	0.91	1.36	1.65	1.86	1.57	3.39	16.62
	2	3.00	0.60	2.80	0.50	0.50	0.80	0.80	2.26	0.50	2.67	14.43

(注) $h_w^* = -5$ mの case 4, 5, $h_w^* = -1$ mの case 3, 4, 5は2条件を満たす解が求まらない。

が上昇する程大きくなることを示している。また対角成分の絶対値がその他の成分に比べて顕著に大きいのはその制御井戸の水量にはそれ自身の井戸の水頭の影響が最も大きいことを示している。 P_{mi} は各井戸相互の水頭と取水量との関係を示す値で、井戸 m 、 l 間が近い程、また ml 間の透水量係数が大きい程、すなわち ml 間が流れ易い程大きい値となっている。

⑥列ベクトル U (成分 u_i) (表—4 参照)

表—4の u_i は式(16), (17)に示すように、井戸 l の水頭が単位上昇したときのそれ自身の井戸も含めた制御井戸全体の水量増加を示している。 u_i の絶対値が大きいことは制御井戸 l の水頭の変化が全水量に与える影響の大きいことを示している。また表—4のように u_i がすべて負であることは、一つの制御井戸の水頭が上昇すれば、全水量は常に減少することを示している。したがって、領域内の取水量を大きくするには、各制御井戸の水頭を下げる程よいことになる。したがって与えられた低限界水頭に対する領域の可能最大取水量は各制御井戸の水頭がすべてその低限界水頭になったとき ($h_w = 0$ のとき) に生ずるといえる。

⑦列ベクトル P_0 (成分 P_{0m}) と G (表—3 参照)

P_0 は式(10)から $h_w = 0$ のとき、すなわちその領域の可能最大取水量時の各制御井戸の取水量であり、 $\sum_m P_{0m} = G$ は制御井戸による、その領域の可能最大取水量である。

P_0 は式(7), (8), (11)に示すように、①境界条件、②透水量係数、③帯水層への流出入量、④非制御大井戸の揚水量、⑤制御井戸と非制御大井戸、その他一般の節点の座標 (井戸の配置に関係する) および⑥ h_w^* (これが低い程大) から構成され、したがって P_0 はその領域の地下水賦存量とその場所的分布を概略示すものと考えられ、取水計画にあたってとくに重要な値と考えられる。

⑧最適取水の算定結果 (表—5 参照)

算定結果を表—5に示している。表—2, 3からcase 1はすべての制御井戸で $P_{0m} \geq Q_m^*$ で、このときの最適取水は、すべての制御井戸が低限界水頭になったときに生じ、したがって表—5の各井戸の取水量と総取水量は、表—3の P_{0m} と G に等しくなる。このとき理想的取水が行われているといえる。次にcase 2は、表—2, 3のように $P_{0m} < Q_m^*$ の井戸があるときで、全井戸で Q_m^* の取水は可能であるが、総取水量は G より減少する。さらにcase 3のように $P_{0m} < Q_m^*$ の井戸の数が増加するか、 $P_{0m} < Q_m^*$ の程度が増大すると、総取水量はさらに減じ、遂にはcase 4, 5のように2つの制約条件を満足する解が得られなくなる。

以上のことを図—3によって考察してみる。図のように1, 2井戸で、 $P_{0m} < Q_m^*$ とする。いま1, 2井戸で Q_m^* まで上げるためには、1, 2井戸の水頭が限界にきているので、下げることができないため、3, 4井戸の水頭を上げることになる。このとき表—4より $|P_{mi}|_{m=i} \gg |P_{mi}|_{m \neq i}$ のため、1, 2井戸の水量の増加分より3, 4井戸の取水量はかなり減少する。こうして、2条件を満足する最適取水が図—3(a), (b)の実線として得られるが、取水量の合計 $\sum_m Q_m$ は $G = \sum P_{0m}$ より減少する。

次に1, 2井戸で $P_{0m} < Q_m^*$ の程度が大きいとき、3, 4井戸の水頭を上げてその結果3, 4井戸の取水量が Q_m^* まで下っても1, 2井戸の取水量が Q_m^* まで上らなければ、2条件を満足する解は得られないことになり、この場合最適取水の解は不可能となる。

c) 最適取水についての考察

前述のように、各井戸の P_{0m} はほぼその領域の地下水賦存の場所的分布を示しているものと考えられ、この比率で取水するのがその帯水層にとって無理のない理想的な取水といえる。

いま P_{0m} と Q_m^* との相互関係から最適取水を考えると、次のように分類される。

① $\sum Q_m^* \leq \sum P_{0m}$: 地域内の井戸のみで水需要量がまかなえる。

① すべての制御井戸で $Q_m^* \leq P_{0m}$: P_{0m} が最適取水となる。 $\sum Q_m = \sum P_{0m} = G$

② $Q_m^* > P_{0m}$ の井戸があるとき。

②a 最適取水の計算で Q_m^* の取水可能のとき。計

算結果の Q_m が最適取水量。このとき

$$\sum Q_m < \sum P_{0m} = G$$

②b 最適取水の計算で解がえられないとき。 Q_m^* の取水ができない井戸が生ずる。このときは、各井戸 P_{0m} で取水し、地上導水で、すべての井戸で Q_m^* 以上にはすることはできる。また困難ではあるが水需要量の地域分布の方を変えて P_{0m} の比率に近づけることも考えられる。

③ $\sum Q_m^* > \sum P_{0m}$: 地域内の井戸のみで水需要量をまかなえない。このときは各井戸 P_{0m} で取水して、不足井戸には他水源から補給することになる。

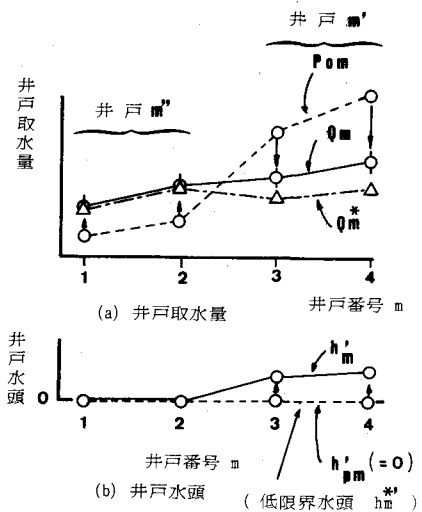


図-3 最適取水の解の説明図

3. 定常・海岸地下水域の最適取水¹¹⁾

3-1. 準一様流・定常三次元地下密度流の数値解

図-4 のような海岸域で、制御井戸が塩水くさびの非侵入域にある場合の最適取水について考える。

さて、海岸域の地下密度流の解析を考えると、断面2次元定常地下密度流については、準一様流を仮定した解析解¹⁶⁾ が得られているが、定常三次元地下密度流の数値解は、塩水くさびの存在のため、面倒な試行錯誤の計算が必要であり、このような状態で海岸域での最適取水の算定を行うことはきわめて困難となる。したがってここではまず試行錯誤の計算を必要としない定常三次元の地下密度流の数値解法を述べることにする。これはstrack¹⁷⁾ が導入した流量ポテンシャルを著者らが三次元地下密度流の数値解に用いたものである。

(1) 基礎式と解法

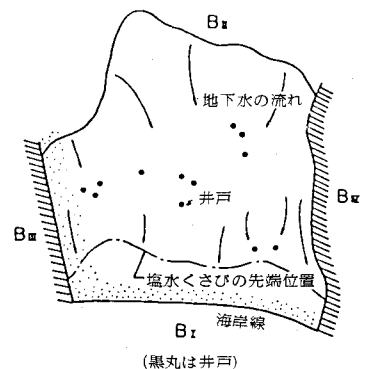


図-4 地下密度流領域モデル ($B_1 \sim B_{IV}$ は境界)

図-5のように、不透水層面を水平とし、この面に x, y 軸をとり、塩水くさびの非侵入域に井戸がある不圧浸透領域を考え図のように各記号を定義する。なお ϕ を不透水層からとった淡水水頭、 H_0 を不透水層からとった領域上流端境界の淡水水頭(一定)とする。 q_x, q_y を x, y 方向の単位巾当りの流量とすれば、

$$q_x = -kh(\partial\phi/\partial x), \quad q_y = -kh(\partial\phi/\partial y) \quad (19)$$

塩水くさびの侵入域(領域Ⅰ)では、

$$\begin{aligned} h &= \{\rho_s/(\rho_s - \rho_f)\} h_s \\ &= \{\rho_s/(\rho_s - \rho_f)\} \phi - \{\rho_s/(\rho_s - \rho_f)\} H_s \end{aligned} \quad \dots\dots(20)$$

塩水くさびの非侵入域(領域Ⅱ)では、

$$h = \phi \quad \dots\dots(21)$$

したがって、 h は領域Ⅰ、Ⅱとも次のような ϕ の同じ一次式で表わされる。

$$h = \alpha\phi + \beta \quad \dots\dots(22)$$

ここに、領域Ⅰでは、

$$\alpha = \rho_s/(\rho_s - \rho_f), \quad \beta = -\{\rho_s/(\rho_s - \rho_f)\} H_s \quad \dots\dots(23)$$

領域Ⅱでは、 $\alpha = 1, \beta = 0$

である。式(22)を式(19)に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k \partial[(\alpha/2)\{\phi + (\beta/\alpha)\}^2] / \partial x \\ q_y &= -k \partial[(\alpha/2)\{\phi + (\beta/\alpha)\}^2] / \partial y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(24)$$

ここで、strack¹⁷⁾が用いた流量ポテンシャル Φ として

$$\Phi = (\alpha/2)\{\phi + (\beta/\alpha)\}^2 + C \quad (C \text{ は定数}) \quad \dots\dots(25)$$

とおく。なおstrackは Φ に k を含めたが、著者らは式(25)のように、 k を含めずに、 k の場所的变化を考慮できるようにした。

式(25)の C は次のようにして求められる。いま Φ_I, Φ_{II} を領域Ⅰ、Ⅱの流量ポテンシャルとすれば、式(23)より、

$$\Phi_I = (1/2)\{\rho_s/(\rho_s - \rho_f)\}(\phi - H_s)^2 + C_I \quad \dots\dots(26)$$

$$\Phi_{II} = (1/2)\phi^2 + C_{II} \quad \dots\dots(27)$$

いま、 Φ_I, Φ_{II} の値をその境界位置すなわち塩水くさびの先端位置 C の断面で接続させるため塩水くさびの先端位置の淡水水頭 ϕ_c の式

$$\phi_c = (\rho_s/\rho_f) H_s \quad \dots\dots(28)$$

を式(26)、(27)の Φ に入れ、両者が等しいとおけば、 $C_I - C_{II} = (1/2)H_s^2(\rho_s/\rho_f)$ となる。一般に、ポテンシャルは相対的大きさが問題となることから、 C_I または C_{II} の一方にある一定値を与えても解の一般性を失

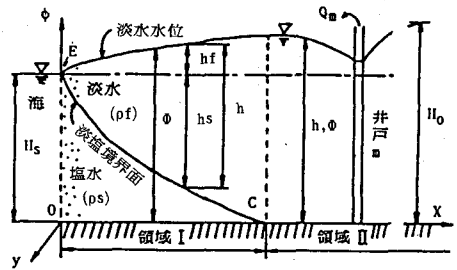


図-5 不圧領域地下密度流断面図

うことはない。したがって、いま $C_1 = 0$ とすれば、 $C_2 = -(1/2) H_s^2 (\rho_s / \rho_f)$ が得られる。こうすれば

$$\Phi_1 = (1/2) \{ \rho_s / (\rho_s - \rho_f) \} (\phi - H_s)^2 \quad \text{.....(29)}$$

$$\Phi_2 = (1/2) \{ \phi^2 - H_s^2 (\rho_s / \rho_f) \} \quad \text{.....(30)}$$

また塩水くさびの先端位置の流量ポテンシャル Φ_c は式(29)または式(30)に式(28)を代入して、

$$\Phi_c = (1/2) H_s^2 (\rho_s / \rho_f) \{ (\rho_s - \rho_f) / \rho_f \} \quad \text{.....(31)}$$

さて、このような Φ を用いれば、式(24)は

$$q_x = -k (\partial \Phi / \partial x), \quad q_y = -k (\partial \Phi / \partial y) \quad \text{.....(32)}$$

したがって、領域内の連続の方程式と式(32)から、次式がえられる。

$$\begin{aligned} & \partial \{ k \partial \Phi / \partial x \} / \partial x + \partial \{ k \partial \Phi / \partial y \} / \partial y \\ & = \sum_p [Q_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p)] + R(x, y) \end{aligned} \quad \text{.....(33)}$$

式(33)は淡水域の基礎式(2)と類似の式である。なおここで用いられる Φ は式(33)を満足する値として得られるもので、塩水くさびの侵入域、非侵入域の区別なく、全浸透領域にわたって共通に用いられる値である。

また被圧の海岸地下水についても同様にして Φ が定義され、 Φ について式(33)と類似の式が得られる。

以上得られた式を用いての数値解法を概略述べれば、塩水くさびの侵入域および非侵入域を包含する全浸透領域に対して、与えられた境界条件のもとに、式(33)を満足する Φ を数値解によって求め、この Φ の値から式(31)を満足する Φ の地点を探せば塩水くさびの先端位置が求まる。次にこの先端位置から海側の領域Ⅰについて算定の Φ から式(29)より、淡水水頭 ϕ が得られる。また先端位置より陸側の領域Ⅱについて、算定の Φ から式(30)より淡水水頭 ϕ が得られ、定常地下密度流の解が得られる。

(2) 有限要素法による数値解

式(33)は淡水域の基礎式(2)と類似のものであるから全く同様にして Φ を求めることができる。まず前章と同様にして領域内を三角形要素に分割する。このときは塩水くさびをとくに考慮に入れずに分割してよい。

Φ に関する境界条件は、図-4 について、境界 B_I 、 B_{II} にそれぞれ一定水位 $\phi = H_s$ および H_0 を与えれば、式(29)、(30)から

$$\Phi_{BI} = 0, \quad \Phi_{BII} = (1/2) \{ H_0^2 - H_s^2 (\rho_s / \rho_f) \} \quad \text{.....(34)}$$

境界 B_{III} 、 B_{IV} は不透水壁とすれば、その境界上で

$$\partial \Phi / \partial n = 0 \quad (n \text{ は境界の法線方向}) \quad \text{.....(35)}$$

次に基礎式(33)に対応する汎関数の微分により、式(4)と同様にして

$$A\Phi = FQ + R \quad \text{.....(36)}$$

が得られる。したがって境界条件式(34)、(35)のもとに式(36)を解き各節点の流量ポテンシャル Φ を求めれば、前述のようにくさび先端の位置は式(31)の値に一致する Φ の位置を按分比例で挿入してゆけばよく、次いで領域Ⅰ、Ⅱの水頭 ϕ を求めることができる。

この計算手法は、くさび先端位置の決定に試算が含まれず、また先端位置決定後の淡水水頭の算定も既に計算されている各節点の Φ から直ちに算定されるもので、定常地下密度流の数値解をかなり簡易化しえたものといえよう。なおこの Φ を用いたことにより式(36)の表示が可能になり、このため次の最適取水の定

式化が可能になったといえる。

3-2. 海岸域の最適取水の解析

塩水くさびの非侵入域に設置された制御井戸による最適取水を考える。ここでは制約条件として、淡水域と同様にして、制御井戸の地盤沈下防止からの低限界水頭と水需要量に関する式に加えて、塩害防止の面から塩水くさび先端の侵入限界線を設定し、これを越えて塩水くさびの先端が侵入しないという条件を与えることにする。これらの制約条件のもとに、各井戸の取水量の総和が最大になる状態を最適取水と定義して、有限要素法と線形計画法とによって求める算定法を述べる。

(1) 節点の配置と領域の分割

三角形要素による分割で、最適取水問題における制約条件を制御井戸と塩水くさびの侵入限界線に与える必要上、制御井戸とともに、侵入限界線上にも節点をとる。節点番号は井戸節点（総数 M ）に1, 2, ..., M を、くさび侵入限界線上の節点に $M+1, M+2, \dots, N$ を次に $N+1, N+2, \dots$ を領域内任意節点に、最後の番号を境界節点につける。

(2) 最適取水の解

式(36)の流量ポテンシャル ϕ を分割して、 ϕ_w を井戸節点とくさび侵入限界節点、 ϕ_r を領域内任意節点、 ϕ_b を境界節点に対するものとすれば、式(5)で h を ϕ に変えた式がえられる。これから ϕ_r を消去すれば、式(6)と同様にして次式がえられる。

$$Q_w = B\phi_w + C \quad \dots\dots(37)$$

いま、制御井戸節点に添字 w 、くさび侵入限界節点に添字 s をつけると、

$$\phi_w = \begin{bmatrix} \phi_w \\ \phi_s \end{bmatrix}, Q_w = \begin{bmatrix} Q_w \\ Q_s \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_w \\ C_s \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{ww} & B_{ws} \\ B_{sw} & B_{ss} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(38)$$

ここで、くさび侵入限界節点には式表示の便宜上から、井戸を仮想するがこれは後で流量を0とおいて除去することにする（後述式(43)）。

また ϕ_w^* および ϕ_s^* をそれぞれ制御井戸節点およびくさび侵入限界節点の流量ポテンシャルの低限界値とし、

$$\phi'_w = \phi_w - \phi_w^*, \phi'_s = \phi_s - \phi_s^* \quad \dots\dots(39)$$

とすれば、式(37)は

$$\begin{bmatrix} Q_w \\ Q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ww} & B_{ws} \\ B_{sw} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_w \\ \phi'_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ow} \\ B_{os} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(40)$$

ここに

$$B_o = \begin{bmatrix} B_{ow} \\ B_{os} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{ww} & B_{ws} \\ B_{sw} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_w^* \\ \phi_s^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_w \\ C_s \end{bmatrix} \quad \dots\dots(41)$$

式(40)を成分で表示すると、

$$Q_m = \sum_{i=1}^N (B_{mi} \phi'_i) + B_{om} \quad \dots\dots(42)$$

ここで m, i をいずれも井戸およびくさび侵入限界節点の番号（総数 N ，うち井戸総数は M ），また Q_m ，

B_{mi} , B_{om} および Φ_i はそれぞれ Q_w , B , B_o および Φ'_w (Φ'_w , Φ'_s) の成分である。

したがって制約条件は

$$Q_w = B_{ww} \Phi'_w + B_{ws} \Phi'_s + B_{ow} \geq Q_w^* \quad \dots\dots(43)$$

$$Q_s = B_{sw} \Phi'_w + B_{ss} \Phi'_s + B_{os} = 0 \quad \dots\dots(44)$$

$$\Phi'_w \geq 0 \quad \dots\dots(45)$$

$$\Phi'_s \geq 0 \quad \dots\dots(46)$$

目的関数 g は

$$g = \sum_{m=1}^M Q_m \quad \dots\dots(47)$$

$$= \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{i=1}^N (B_{mi} \Phi_i) + B_{om} \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\sum_{m=1}^M B_{mi} \right) \Phi_i \right\} + \sum_{m=1}^M B_{om}$$

$$\therefore g = \sum_{i=1}^N (u_i \Phi_i) + G \quad \dots\dots(48)$$

$$\text{ここに } u_i = \sum_{m=1}^M B_{mi}, \quad G = \sum_{m=1}^M B_{om} \quad \dots\dots(49)$$

すなわち、この問題は井戸およびくさび侵入限界節点の流量ポテンシャル Φ_i に関する連立一次不等式の制約条件式(43)~(46)のもとに Φ_i に関する一次形の式(48)の g を最大にする Φ_i を求めるもので、線形計画法の問題となり、シンプレックス法により算出され、最適状態の井戸取水量 Q_m を求めることができる。

(3) Φ_s^* , Φ_w^* について

塩水くさびの先端位置の流量ポテンシャルは式(31)であるから、これを低限界値 Φ_s^* として与えればよい。次に Φ_w^* については塩水侵入の制約は既に Φ_s^* で与えられているので、地盤沈下の面からの制約のみを考えればよく、この値は淡水域の場合と同様である。

(4) くさび先端の安定性の検討

海岸付近に一個の井戸がある場合、一般にその流れの平面図および断面図は図-6(a), (b)のようになり、これは塩水くさびの侵入域でやや相違はあるが、ほぼ平行流中に一個の sink がある場合の流れと類似のものとなる。いま、井戸 W を通る淡水地下水の主流に沿う断面 XX' 上に生ずるよどみ点を $A(A_u)$ 点とすれば、 WX' 線に沿う淡水地下水位は A 点で最高となる。いま XX' 線上の塩水くさび先端位置を $C(C_u)$ 点とする。井戸の揚水量を増すと、 A 点は海側に、 C 点は井戸側に進み、遂には A 点と C 点は一致する。このときさらに揚水量を増し、 C 点が A 点をつき抜けると、 C 点は一気に井戸まで侵入する。すなわち、 C 点が A 点に接近した場合はくさび先端は不安定な状態にある

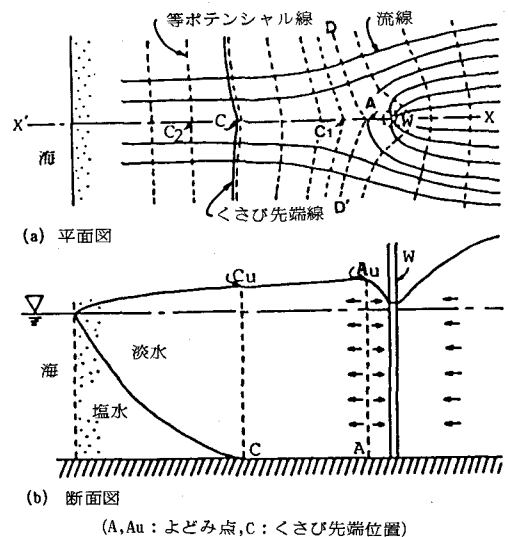


図-6 海岸付近に井戸がある場合の流れ(一般図)

といえる。したがって、前述の最適取水の算定後、各井戸のよどみ点 A の位置を吟味して、これがくさび

先端位置に接近している場合は、その井戸を陸側に移すか、その井戸の取水量を減少させて、再度計算を行い、A点よりC点が海側に十分な距離を保っていることを確認しなければならない。

次に図-6(a)のように等ポテンシャル線の形状は、よどみ点Aを通る線ではDAD'線のようにA点で凸形に尖った形状を示し、A点から下流側に離れるにつれC₁、C₂を通る線のように、次第にフラットな形状になってゆく。したがって、最適取水の計算で得られたくさび先端線が井戸に向かってかなり凸形の形状をなしていれば、その凸形先端の位置はよどみ点にかなり近いとみなされ、注意する必要があるといえる。

(5) 適用例

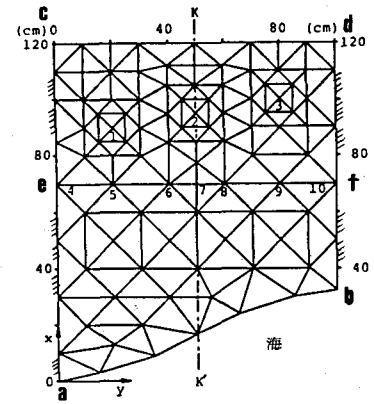
図-7に示す不圧領域について、塩水くさび非侵入域に井戸1、2、3の3個があるとし、塩水くさび先端の侵入限界線を直線ef、境界条件としてac、bdを不透水壁、abを海岸線、その塩水水位を19.8cm、cdの淡水水位を21.0cmとした場合の最適取水問題を解いてみよう。なお $\rho_f=1.0\text{g/cm}^3$ 、 $\rho_s=1.025\text{g/cm}^3$ 、透水係数 $k=0.2\text{cm/s}$ とする。

次に Φ_s^* 、 Φ_w^* の値については、海岸に近い井戸では一般に井戸水位に課せられる低限界水頭の制約をうける前にくさび侵入限界線からの制約を先にうけて、井戸水頭が規制されることが普通であり、ここではくさび侵入限界線による制約に着目することを目的として、井戸水頭の低限界水頭としては一応 $\phi^*=0$ をとった。すなわち、式(30)から $\Phi_w^* = -(1/2) H_0^2 (\rho_s/\rho_f) = -200.92\text{cm}^2$ を与え、式(31)から $\Phi_s^* = \Phi_c = 5.023\text{cm}^2$ を与えた。

まず領域を図-7のように、三角形要素に分割し(要素数171個、節点数100個)、各節点の座標、境界条件から算定されるB、B₀などを用いて最適化計算を行った結果、井戸1~3の最適取水量は、 $Q_1=2.39\text{cm}^3/\text{s}$ 、 $Q_2=2.14\text{cm}^3/\text{s}$ 、 $Q_3=3.19\text{cm}^3/\text{s}$ 、合計量 $7.72\text{cm}^3/\text{s}$ となり、このときの地下淡水水位等高線は図-8のようになる。これによると塩水くさびの先端位置(一点鎖線)がその侵入限界線(点線)のほぼ全線にわたって一致していることがわかる。

次に、井戸のよどみ点の位置を推定して、くさび先端の安定度を検討してみる。くさび先端を示す図-8の一点鎖線をみるとフラットな線をなしているので、前述のように、よどみ点はくさび先端より十分陸側に離れていることが想定されるが、いま、

井戸2についてこれを吟味すると、図-8のように、井戸2を通り境界acに平行な断面KK'上の節点について、最適取水の計算で得られた淡水水位を示すと、図-9の実線となる。これよりよどみ点は図中の



(図中1~3は井戸節点、4~10はくさび侵入限界節点)

図-7 計算領域

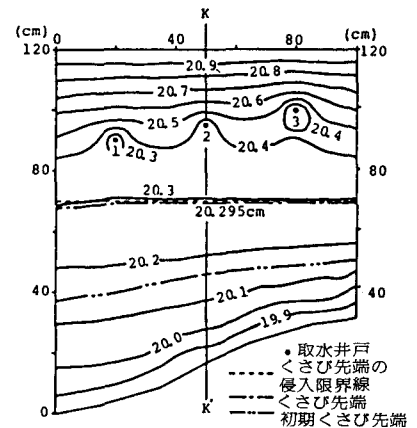


図-8 最適取水時の地下淡水水位等高線

$$\left(\begin{array}{l} Q_1=2.39, Q_2=2.14, \\ Q_3=3.19, \Sigma Q=7.72 \\ \text{m}^3/\text{s} \end{array} \right)$$

A_u点と推定され、図-8のくさび先端位置を転記した図中のC_u点とはかなりの水平距離があり、くさび先端は十分安定であるといえよう。なお図-9の点線は井戸がない場合の数値計算結果における断面KK'上の淡水水位である。

次に、比較のため以上と同じ井戸配置で、各井戸が最適取水を行っていない場合を計算してみよう。いま、上述の最適取水計算で得られた総取水量 $7.72\text{cm}^3/\text{s}$ を同じにして、これの3分の1の $2.573\text{cm}^3/\text{s}$ ずつを各井戸の取水量とした場合について前節3-1の方法で算定した結果を図-10に示している。この場合は、くさび先端はくさび侵入限界線を越えて侵入していて、これから最適化計算の効果を知ることができる。

4. むすび

最適取水には、投資効果など経済的面からの考察も重要と考えられるが、ここでは技術的な面に限定して、最適取水量算定の基礎的手法について述べた。

その基本方針を要約すると、有限要素法などにより、まず制御井戸の取水量を淡水地下水領域では、制御井戸の水頭 h_i 、海岸地下水領域では、井戸地点および塩水くさび侵入限界線上の地点の流量ポテンシャル Φ_i の関数として表わすことにより、井戸の取水量と水頭に関する制約条件を h_i あるいは Φ_i に関する線形の不等式(等式を含む場合もある)で表わし(式(13)、(14)および式(43)~(46))、また目的関数 $g = \sum Q_m$ もまた h_i あるいは Φ_i の線形の式で表わして(式(16)および式(48))、線形計画法の数学モデルに定式化し、シンプレックス法により最適解を求めることといえる。なお非定常

時の最適取水については紙面の都合で割愛したが、別な機会に譲りたいと考えている。実際の問題に直面して多くの問題が生ずると考えられるが、とくに今後解決を要する事項を上げると、①地盤沈下防止から与える地下水位の限界水頭値の決定、②現地の複雑な地層への対応、③一般の地下水問題にもいえることであるが、境界条件および透水(量)係数、貯留係数などの地下水パラメーターの決定などといえる。

なお表-3、4(海岸線についても同様な表が作られる)に示す P_{m1} 、 P_{om} 、 G は最適取水計画を検討するにあたっての重要な指標と考えられる。ここに P_{m1} は制御井戸相互の水頭と流量との関係を示し、 P_{om} は制御井戸がすべて低限界水頭の時の各井戸の取水量で、また G は P_{om} の合計である。このうちとくに各

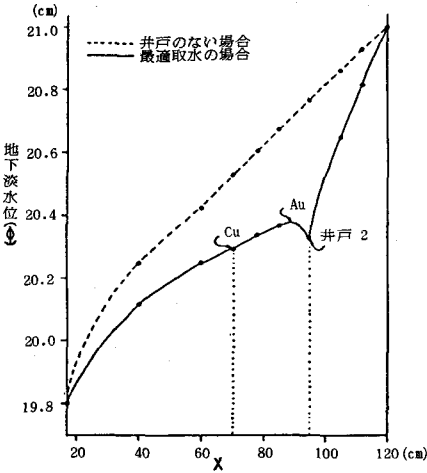


図-9 KK'断面(図-7、8)の
地下淡水位
(A_u、C_uは図-6のもの)

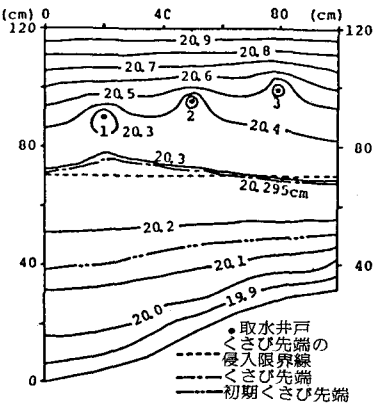


図-10 等取水量時の地下
淡水位等高線
($Q_1=Q_2=Q_3=2.573$)
($\sum Q=7.72\text{m}^3/\text{s}$)

井戸の P_{0m} は制御井戸の配置からみた領域の地下水賦存の概略の分布を示すものとも考えられ、また G は与えられた低限界水頭に対するその領域の最大の取水可能な地下水量であって、最適取水計画において利用価値の高いものと考えられる。なおこれらは式(7), (8), (11)から算定するもので、最適化計算とは一応切離して予め算定可能な値である。

終りに、本稿を作成するに当り、本学助教授神野健二氏および技官大石秀人氏に種々御協力頂いた。ここに記して深謝申し上げる。

参 考 文 献

- 1) J. Bear : Hydraulics of Groundwater, McGraw-Hill Inc., pp.491~512, 1979.
- 2) E. Aguado and I. Remson : Ground-Water Hydraulics in Aquifer Management. ASCE. Vol. 100, HY-1, pp. 103~118, Jan., 1974.
- 3) E. Aguado, I. Remson, M. F. Pikul and W. A. Thomas : Optimal Pumping for Aquifer Dewatering, ASCE. Vol. 100, HY-7, pp. 869~877, July, 1974.
- 4) E. Aguado, N. Sitar and I. Remson : Sensitivity Analysis in Aquifer Studies, Jour. of Geo. Res. Vol. 13, No. 4, pp. 733~737, Aug., 1977.
- 5) 上田年比古・神野健二・長野益徳：井戸群による地下水の最適取水について，水資源シンポジウム前刷集，pp. 435~440, 1977.
- 6) 上田年比古・神野健二・長野益徳：広領域地下水からの最適井戸取水について，土木学会論文報告集，No. 283, pp. 33~43, 1979年3月.
- 7) 佐藤邦明・渡辺邦夫：地下水の適正揚水システム化に関する研究，水資源シンポジウム前刷集，pp. 429~434, 1977.
- 8) 佐藤邦明・仁科重磨・藤崎克博：埼玉県平野部における適正地下水利用計画と地下水管理システムへのアプローチ，第2回水資源シンポジウム前刷集，pp. 429~434, 1982.
- 9) T. Kawatani : Optimal Operation of Wells in a Multilayered Leaky Aquifer, Finite Elements in Water Resour., pro of 4-th International Conference, pp. 18-25~18-34, June, 1982.
- 10) 神野健二・長野益徳：深井戸工法における最適揚水量の決定および揚水操作方法について，土木学会論文報告集，第305号，pp. 73~84, 1981年1月.
- 11) 上田年比古，藤野和徳，平野文昭，神野健二：準一様流を仮定できる定常3次元地下密度流の数値解と最適井戸取水について，土木学会論文報告集，第301号，pp. 83~92, 1980年9月.
- 12) 平野文昭・神野健二・上田年比古：海岸地域での地下水位低下により生じる塩水楔侵入の制御について，土木学会36回年次学術講演会概要集(Ⅱ)，pp. 400~401, 1981年10月.
- 13) 水収支研究グループ：地下水盆の管理，東海大学出版会，pp. 47~75, 1976.
- 14) 例えば石井吾郎：数理計画法入門，サイエンス社，1976.
- 15) 熊本市水道局：熊本平野低地帯の地下水事情，1975.

- 16) 嶋祐之：地下密度流について，土木学会第10回水工学夏期研修会講義集（Aコース），pp. A-10-1
～A-10-6，1974年7月.
- 17) Q D. L. Strack : A Single-Potential Solution for Regional Interface Problems in Coastal
Aquifers, Water Resour. Res., 12 (6), pp. 1165～1174, Dec., 1976.