

地形量の分布を考慮した流出解析

平 野 宗 夫

はじめに

流出解析は本研修会において毎回取り上げられているテーマであり、最新のトピックスや研究の動向について詳しい解説がなされている。したがって、それらについて改めて述べることは屋上屋を重ねることになるし、第一筆者の任ではない。ここでは、流出過程において、流出の場の不均一性が重要な役割を演ずるはずだという考えに基づいて行った筆者らの研究を中心に述べることにする。

1. まえがき

流域に降った降水は斜面を流下して河道へ流入し、河道は斜面からの流入水を集めて流下する。すなわち、流域は斜面と河道によって構成された降雨—流出の変換システムであるとみなすことができる。このシステムを解析する流出解析の手法としては、システムをブラックボックスとして取り扱う stochastic (または statistical) な手法と、流出のプロセスを水理学的に記述しようとする dynamic な手法とに大別される。

流れに関する連続の式と運動の式を特性曲線を用いて解いていく、いわゆる特性曲線法 (kinematic wave 法ともいう) は後者の代表的なものであり、斜面と河道における流れを追っていくので distributed model に属する (これに対して、単位図法のように流域を 1 つの単位としてあつかい、流出量などを時間のみの関数とするものを lumped model という)。また、流出解析の際に、長方形と仮定した斜面における粗度係数 (等価粗度係数という) をパラメーターとする parametric model として取りあつかうのが普通であり、このため等価粗度法と呼ばれることもある。

特性曲線法の重要な寄与の 1 つは、流域を斜面と河道から構成されるとした点であり、これによって、到達時間の意義が明確になり、流出過程における斜面の重要性が明らかにされた。しかし、流域をモデル化する際に斜面を長方形としてきたため、実際の複雑な流域形状と矩形モデルとの差異に伴う不都合な点が次第に顕在化してきた¹⁾。流域の形としては、長方形のほか扇形^{2),3)}を用いた例もあるが、最近になって斜面長の分布を導入することにより lumping する手法⁴⁾が開発され、対数正規分布⁵⁾やガンマ分布^{6),7)}を用いることにより矩形モデルの欠点がかかなり改善されるようになった。

一方、河道網については、Horton が河道則を提唱して以来、河道網構造のトポロジー的特性に関する研究が進展し、その成果を流出解析にとり入れようとする試みがなされている^{8),9)}。しかし、斜面が直接降雨を受けるのに対して、降雨の河道への流入は主として斜面を介して行われるので、斜面の場合ほど lumping が容易でなく、流出過程における河道網の役割を一般化するまでには到っていないのが現状のようである。

2. 降雨一流出の関係式

(1) 斜面における流れ

斜面上の流れの形態は、表面流と、表層のポーラスな部分を浸透流として流れる中間流とに分けられる。図-1に示す斜面において、単位幅当りの流量を q 、水深を h 、雨水が流れている部分の空隙の割合を γ （表面流の場合には $\gamma=1$ ）、下層への浸透速度を f 、斜面の傾斜角を θ 、時間を t とし、流下方向に x 軸をとると、流れの連続の式は表面流と中間流に共通の表示で

$$\frac{\partial(\gamma h)}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = (r-f)\cos\theta \quad (1)$$

と表わされる。

また、運動方程式は表面流に対して

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + I_e = \frac{v}{gh} (r-f)\cos\theta \quad (2)$$

ここに、 v は平均流速、 g は重力の加速度、 I_e はエネルギー勾配である。山腹斜面のように勾配（ $\sin\theta = -\partial z/\partial x$ ）が大きい場合には、上式のエネルギー勾配以外の項は勾配に対して無視できるので、

$$I_e = -\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\theta \quad (3)$$

とおく。これを疑似等流の仮定といい、次のように書きかえられる。

$$h = Kq^p \quad (4)$$

上式において、平均流速としてManningの式を用いると、

$$K = (n/\sqrt{\sin\theta})^p, \quad p=0.6 \quad (5)$$

となる。ここに、 n はManningの粗度係数である。

流れが浸透流の場合には、運動方程式はDarcy則を導入して

$$\frac{1}{g\gamma} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{v}{k} = 0 \quad (6)$$

ここに、 k は透水係数である。上式の左辺第1項は他の項に比し無視してよい。高木ら¹⁰⁾や山田¹¹⁾は式(6)の左辺第2項以下を用いて計算を行っている。勾配が大きく $|\partial z/\partial x| \gg |\partial h/\partial x|$ の場合には式(6)は式(4)と同形に次のように書くことができる。

$$h = Kq^p, \quad K = 1/k \sin\theta, \quad p=1 \quad (7)$$

運動方程式として式(4)または式(7)を用い、式(1)に代入して h を消去すると、

$$K\gamma p q^{p-1} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r_e \quad (8)$$

ここに、 r_e は有効降雨強度で、 $r_e \equiv (r-f)\cos\theta$ である。上式と q に関する全微分の式

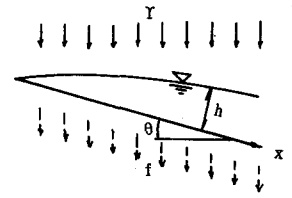


図-1 斜面の記号説明図

$$\frac{\partial q}{\partial t} dt + \frac{\partial q}{\partial x} dx = dq \quad (9)$$

が同時に成立するための条件は

$$\frac{dt}{K\gamma p q^{p-1}} = \frac{dx}{1} = \frac{dq}{r_e} \quad (10)$$

上式を式(8)の特性曲線表示といい、以下のように解くことができる。

まず式(10)より周知の次式を得る。

特性曲線

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K\gamma p} q^{1-p} \quad (11)$$

の上で、

$$q = \left\{ \frac{1}{K\gamma} \int_{t_s}^t r_e(\tau) d\tau \right\}^{1/p} \quad (12)$$

ここに、 t_s は特性曲線の出発時刻である。式(12)を式(11)に代入し、特性曲線の出発地点の x 座標を x_s とすると、

$$x = x_s + \int_0^{t-t_s} \frac{1}{p(K\gamma)^{1/p}} \left\{ \int_{t-t_s-\tau'}^{t-t_s} r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{(1-p)/p} d\tau' \quad (13)$$

ここで、時刻 t_0 より以前には有効降雨はないものとし、

$$\begin{aligned} r_e(t) &= (r-f)\cos\theta, \quad t \geq t_0 \\ &= 0, \quad t < t_0 \end{aligned}$$

また、 p および $K\gamma$ は斜面の上流端から下流端まで一定であるとし、斜面長を l 、特性曲線が上流端($x=0$)から下流端($x=l$)に到達するのに要する時間を T とすると、時刻 t_0 以後に斜面上流端を出発し、時刻 t に下流端に到達する特性曲線(図-2の曲線①)においては、式(13)に $x_s=0$ 、 $x=l$ および $T=t-t_s$ を代入して、

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{p(K\gamma)^{1/p}} \int_0^T \left\{ \int_{T-\tau'}^T r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{(1-p)/p} d\tau', \\ T &\leq t-t_0 \end{aligned} \quad (14)$$

また、 $T > t-t_0$ の場合には、時刻 t に下流端に達する特性曲線は、図-2の曲線②のように時刻 t_0 に斜面の途中($x_s=l_s$)から出発しているので、式(13)に $x_s=l_s$ 、 $x=l$ および $T=t-t_s$ を代入して、

$$l = l_s + \frac{1}{p(K\gamma)^{1/p}} \int_{T-t+t_0}^T \left\{ \int_{T-\tau'}^T r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{(1-p)/p} d\tau', \quad T > t-t_0 \quad (15)$$

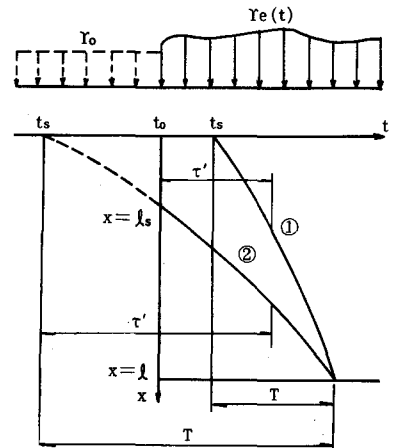


図-2 特性曲線の説明図

となる。

上式右辺第1項の l_s を第2項と同様に降雨強度と到達時間等で表わすために、時刻 t_0 以前に一定強度 r_0 の有効降雨を想定し、その降雨によって時刻 t_s に $x=0$ を出発し t_0 に $x=l_s$ に到達する特性曲線（図-2の点線）を考えると、式(13)より l_s は次のように表わされる。

$$l_s = \frac{1}{(K\gamma)^{1/\rho}} r_0^{(1-\rho)/\rho} (T-t+t_0)^{1/\rho} \quad (16)$$

上式を式(15)に代入し、式(14)を含めて表示すると次式となる。

$$l = \frac{1}{p(K\gamma)^{1/\rho}} \left[\int_{\tau_0}^T \left\{ \int_{T-\tau}^T r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{(1-\rho)/\rho} d\tau' + p r_0^{(1-\rho)/\rho} \tau_0^{1/\rho} \right] \quad (17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= 0, & T &\leq t-t_0 \\ &= T-t+t_0, & T &> t-t_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

次に、下流端 ($x=l$) における流出量を q_l とすると、式(12)より、

$$q_l = \left\{ \frac{1}{K\gamma} \int_0^T r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{1/\rho} \quad (19)$$

上式に式(17)を代入して $K\gamma$ を消去すると、

$$q_l = l R(t, T) \quad (20)$$

ここに、

$$R(t, T) = p \left\{ \int_0^T r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{1/\rho} / \left[\int_{\tau_0}^T \left\{ \int_{T-\tau}^T r_e(t-\tau) d\tau \right\}^{(1-\rho)/\rho} d\tau' + p r_0^{(1-\rho)/\rho} \tau_0^{1/\rho} \right] \quad (21)$$

(2) 河道における流れ

河道における連続の式は

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_* \quad (22)$$

ここに、 A は流積、 Q は流量、 q_* は横流入量で、斜面からの流入量、河道降雨および河床面からの流入量（流出の場合は負値とする）の和である。

運動方程式については、疑似等流を仮定し Manning の式を適用すると、

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} I^{1/2} \quad (23)$$

ここに、 n は Manning の粗度係数、 R は径深、 I は河床勾配である。計算を簡略化するために、

$$A R^{2/3} = a A^b \quad (24)$$

とおくと、式(23)は、

$$A = K_1 Q^{1/b} \quad (25)$$

となる。ここに、 $K_1 = (n/a\sqrt{I})^{1/b}$ 、 a および b は断面の形状によってきまる定数である。

式(22)と(25)はそれぞれ斜面における式(1)および(7)と同形であるから同じ手法で解くことができる。すなわち、式(22)、(25)の特性曲線表示は

$$\frac{dt}{KQ^{1/b-1/b}} = \frac{dx}{1} = \frac{dQ}{q_*} \quad (26)$$

これより、河道下流端 ($x=L$) における流量 $Q(L, t)$ は

$$Q(L, t) = Q(0, t - T_L) + \int_0^L q_*(t - T_L + \tau) dx \quad (27)$$

ここに、 L は河道長、 T_L は河道における到達時間、 $Q(0, t)$ は時刻 t における河道上流端の流量、 τ は時間で $0 \leq \tau \leq T_L$ である。また、河道 L と T_L の関係は式(26)より

$$L = \frac{b}{K_1} \int_0^{T_L} \left[\left\{ Q(0, t - T) \right\}^{1/b} + \frac{1}{K_1} \int_{T_L - \tau}^{T_L} q_*(t - \tau) d\tau \right]^{b-1} d\tau' \quad (28)$$

(3) 単位流域における流出過程のランピング

単位流域として最上流の流域、すなわち Horton の定義による 1 次の流域を考えると、河道最上流端の流量 $Q(0, t)$ は 0 としてよい。また、河道への流入量 q_* は斜面からの流入量 q_l に等しいと考えてよいであろう (河道降雨が無視できない場合には別途考慮すればよい)。したがって、流域下流端における流量 $Q(t)$ は式(27)および(20)より次式

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^L q_l(t - T_L + \tau) dx \\ &= \int_0^L R(t - T_L + \tau, T) l dx \end{aligned} \quad (29)$$

で表わされる。

ここで、上式右辺の性質を調べるために、一定強度の有効降雨が長時間 (斜面および河道の到達時間より長く) 続く場合を考えよう。まず式(21)に $r_e = r_0 = \text{const.}$ を代入すると

$$R(t, T) = r_0 \quad (30)$$

これを式(29)に代入すると、 r_0 に対する流量は

$$Q(t) = r_0 \int_0^L l dx \quad (31)$$

となる。一方、合理式によると、 r_0 が長時間続いた場合の流量 Q は流域面積を A として次式

$$Q = r_0 A \quad (32)$$

で与えられる。式(31)と(32)を等置することにより

$$\int_0^L l dx = A \quad \text{または} \quad \int_0^L \frac{l dx}{A} = 1 \quad (33)$$

上式より、 $l dx/A$ は長さ l の斜面の存在確率 (または頻度) とみなすことができる。そこで、 $f(l)$ を l の確率密度関数として、

$$\frac{l dx}{A} = f(l) dl = f(l) \frac{dl}{dT} dT \quad (34)$$

と表わす。さらに、斜面長 l と到達時間 T の関係は式(17)のよう与えられるから、 l は T と t の関数、したがって、 $f(l) dl/dT$ も T と t の関数と考えられ、

$$f(l) \frac{dl}{dT} = \phi(t, T) \quad (35)$$

とおくと、

$$\int_0^\infty f(l) dl = \int_0^\infty \phi(t, T) dT = 1 \quad (36)$$

となる。これより、 $\phi(t, T)$ は斜面における到達時間 T の確率密度関数であることがわかる。

これらの関係を式(29)に代入すると、次式がえられる。

$$Q(t) = A \int_0^\infty R(t - T_L + \tau, T) \phi(t, T) dT \quad (37)$$

上式を解くためには式(26)の関係より T_L と τ を求めなければならない。しかし、一般に河道における洪水の伝播速度は斜面におけるそれに比しかなり大きいから、 $T_L - \tau = 0$ としてよい ($T_L - \tau = \text{const.}$ とするのでも一法であろう)。したがって、式(37)は

$$Q(t) = A \int_0^\infty R(t, T) \phi(t, T) dT \quad (38)$$

となる。上式は入力を R 、出力を Q 、応答関数を ϕ とする lumped system になっている。しかし、システム関数が非定常でありこのままでは取りあつかいにくいので、以下のようにシステムの定常化をはかることにする。

定常なシステム関数の誘導

式(17)より $l(K\gamma)^{1/p}$ は降雨波形 $r_e(t)$ と到達時間 T との関数として与えられるが、 $l(K\gamma)^{1/p}$ はその斜面に固有の値と考えられるから、降雨波形が既知の場合はその斜面に対応する到達時間が式(17)により定まる。そこで、一様強度 r_0 の有効降雨が長時間 (到達時間より長く) 続く場合を想定し、その降雨による到達時間を T_0 とすると式(17)より

$$T_0 r_0^{1-p} = l^p K \gamma$$

となり、 T_0 はある斜面に固有の値となる。そこで、式(35)と同様に

$$f(l) \frac{dl}{dT} = f(l) \frac{dl}{dT_0} dT_0 = \phi(T_0) dT_0 \quad (40)$$

とおくと、 $\phi(T_0)$ は T_0 の確率密度関数になる。また、任意の降雨波形による到達時間 T と T_0 の関係は、式(39)と(17)より

$$T_0^{1/p} = \frac{1}{p} \int_{T_0-\tau}^T \left\{ \int_{T_0-\tau}^T \frac{r_e(t-\tau)}{r_0} d\tau \right\}^{(1-p)/p} d\tau' + r_0^{1/p} \quad (41)$$

で与えられる。上式を式(21)に代入してえられる $R(t, T)$ を $R_0(t, T_0)$ と書くと、

$$R_0(t, T_0) = r_0 \left\{ \int_0^T r_e(t-\tau) d\tau / r_0 T_0 \right\}^{1/p} \quad (42)$$

これらの関係を式(38)に適用すると

$$Q = A \int_0^{\infty} R_0(t, T_0) \phi(T_0) dT_0 \quad (43)$$

となり、定常なシステム関数 $\phi(T_0)$ を有する応答関係を表わす式が得られる。

$p = 1$ の場合

森林地帯では、落葉によって地表付近に腐蝕土を主体としたポーラスな層（A層、活性層などとよばれる）が形成されている。このような地表の浸透能は一般に降雨強度よりかなり大きく（200～300mm/hr に達するという報告¹²⁾もある）、雨水はA層の中を浸透流として流れ、A層が表面まで飽和するとその地点から表面流が発生するが、そうでない場合は雨水はすべて浸透流となり、表面流は発生しないと考えられる。後者の場合運動方程式にDarcy則を適用すると $p = 1$ となる。この場合斜面長と到達時間は式(17)より

$$T = lK\gamma \quad (44)$$

となり、到達時間は降雨波形に関係なく、斜面に固有の値になる。そこで

$$f(l)dl = f(l) \frac{dl}{dT} dT = \phi(T) dT \quad (45)$$

とみると、 $\phi(T)$ は T の確率密度関数となり、式(38)のシステム関数は定常になる。

また、式(21)において $p = 1$ とすると

$$R(t, T) = \int_0^T r_e(t - \tau) d\tau / T \quad (46)$$

となり、システムへの入力 R は到達時間内の平均降雨強度に等しいことがわかる。これは合理式における降雨強度の定義と同じである。降雨と流出の関係は上式を式(38)に代入して

$$Q = A \int_0^{\infty} r_r \phi(T) dT \quad (47)$$

ここに、

$$r_r = \int_0^T r_e(t - \tau) d\tau / T \quad (48)$$

式(47)において、 Q 、 A 、および r_r の単位をそれぞれ m^3/s 、 km^2 および mm/h で表わし、平均降雨強度 r と流出係数 f を次式

$$f \cdot r = \int_0^{\infty} r_r \phi(T) dT \quad (49)$$

で定義すると、

$$Q = \frac{1}{3.6} f r A \quad (50)$$

となり周知の合理式が得られる。

また、式(47)を書き換えると、

$$Q = A \int_0^{\infty} u(\tau) r_e(t - \tau) d\tau \quad (51)$$

ここに、

$$u(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \phi(T) / T dT \quad (52)$$

となり、 $u(\tau)$ を核とする単位図法に一致する。すなわち、瞬間単位図 $u(\tau)$ は、 τ より大きい到達時間 T についての $1/T$ すなわち T の逆数の平均値を表わしていることがわかる。

以上のように、 $p = 1$ の場合には、流出システムと単位図および合理式との関係が明らかになり、単位図法は合理式を合成したものとも考えることもできる。

3. 流出解析の手法と適用例

式(43)または(47)において、 $\phi(T_0)$ または $\phi(T)$ が与えられると任意の降雨波形に対して流出量が計算できる。したがって、流量と降雨のデータから $\phi(T_0)$ または $\phi(T)$ を求めることが流出解析であるということになる。その手法としては、それらをブラックボックスとして統計的に最適な解を求める方法と、それらに適当な確率密度関数をあてはめ、その平均、分散などをパラメーターとする parametric model として解く方法とが考えられる。以下、それらの手法と適用例について述べる。

(1) 最適システム関数

システム関数をブラックボックスとして、入出力のデータよりシステム関数を同定する方法は、流出解析においても単位図を求めるのに用いられている。同様の手法が $\phi(T)$ や $\phi(T_0)$ の同定に利用できる。日野¹³⁾や高埴ら¹⁴⁾は単位図を求めるのに Wiener-Hopf の積分方程式を用いているが、 $\phi(T_0)$ を求めるのに同じ手法を適用すると以下のようなものである。

式(43)において、予測誤差 ε を次式

$$\varepsilon(t) = \frac{Q(t)}{A} - \int_0^\infty R_0(t, T_0) \phi(T_0) dT_0 \quad (53)$$

で定義し、 $\{\varepsilon(t)\}^2$ の平均値を最小とする T_0 の確率密度関数を $\phi_0(T_0)$ とすると、最小自乗法を適用することにより次の条件式が導かれる。

$$\rho_{QR}(\tau) = \int_0^\infty \phi_0(t) \rho_{RR}(\tau - t) dt \quad (54)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \rho_{QR}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{Q(t)}{A} R_0(t, \tau) dt \\ \rho_{RR}(\tau_1 - \tau_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_0(t, \tau_1) R_0(t, \tau_2) dt \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

式(54)は Wiener-Hopf の積分方程式とよばれている。

一般に、降雨や流出量などの入出力は有限期間の離散量で与えられるので、式(54)において T の上限を m 、 $\Delta t = 1$ として離散量で表わすと、

$$\rho_{QR}(i) = \sum_{j=0}^m \phi_0(i) \rho_{RR}(i - j) \quad (56)$$

となる。上式は連立1次方程式であり、容易に解くことができる。

ところで、式(52)より瞬間単位図 $u(\tau)$ と $\phi(T)$ の関係は、

$$\phi(T)/T = -du(T)/dT \quad (57)$$

となるから、 $\phi(T)$ が負とならないためには $du(T)/dT \leq 0$ すなわち、 $u(\tau)$ は減少関数でなければならない。しかし、一般に Wiener-Hopf の方程式を数値的に解いて得られる単位図は若干の振動を示すのが通例である。そのため、えられた $\phi(T)$ は $u(T)$ の振動につれて図-3 に示すように正負の間を大きく振動し、物理的に意味のある解を得るのが困難になる。このような場合には、 ϕ について非負の条件を入れて解く必要がある。Eagleson ら¹⁵⁾ は Wiener-Hopf の積分方程式に非負の条件を導入し、線型計画で用いられる

simplex法を適用して単位図を求めている。以下にsimplex法により ϕ を求めた例¹⁶⁾を示す。

式(43)を離散量で表わし、誤差 e を次式で定義し、

$$e(i) = \frac{Q(i)}{A} - \sum_{j=0}^m R_0(i, j) \phi_0(j) \quad (58)$$

$\phi_0(j) \geq 0$ および $e(i) \geq 0$ のもとに

$$\sum_{i=0}^n e(i) \rightarrow \text{最小}$$

という条件より $\phi_0(j)$ を求める。この方法は、Wiener-Hopf 方程式のように解の意義が明瞭ではないが、実用的な解を得ることができる。

使用したデータは林野庁竜ノ口森林理水試験地の時間雨量と流量で、同試験地は岡山県旭川の支川にあり、流域面積は0.226km²、形状は図-4に示すようである。流出量と降雨のデータは、小川¹⁷⁾によって詳細に検討されており、変曲点法による直接流出の分離と、Hortonの浸透能曲線式を利用した有効降雨の分離がなされているので、そのデータを使用した。解析結果を図5～9に示す。まず、図-5は $p=1$ として、

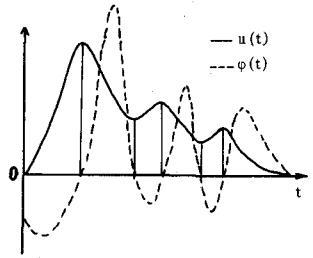


図-3 $u(t)$ と $\phi(t)$ の関係

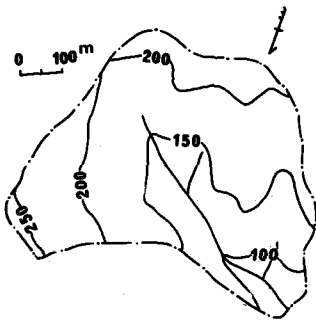


図-4 試験地平面図

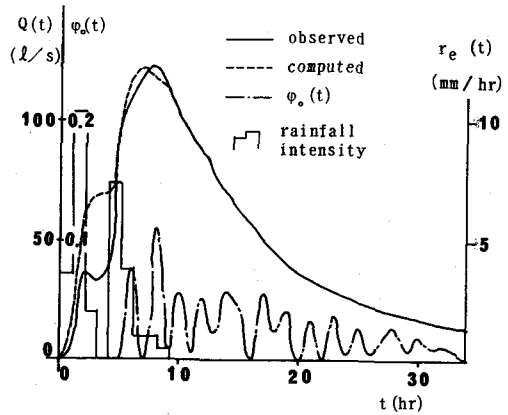


図-5 流出波形と到達時間の分布 ($p=1$)

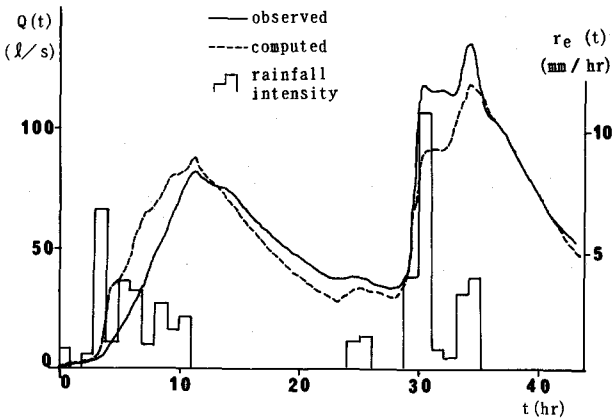


図-6 実測値と予測値の比較

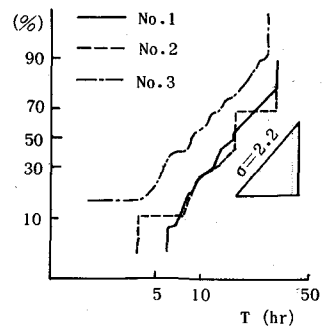


図-7 $\phi_0(T)$ の分布 ($p=1$)

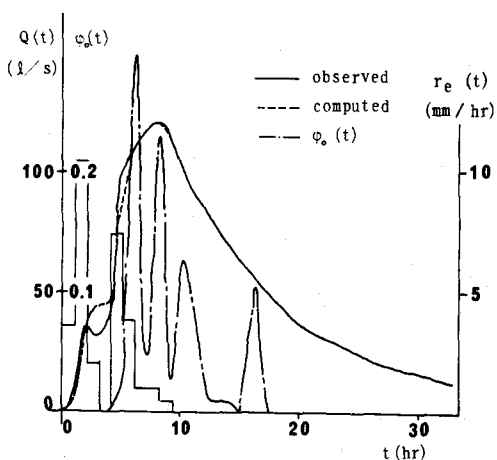


図-8 流出波形と到達時間の分布 ($p=0.6$)

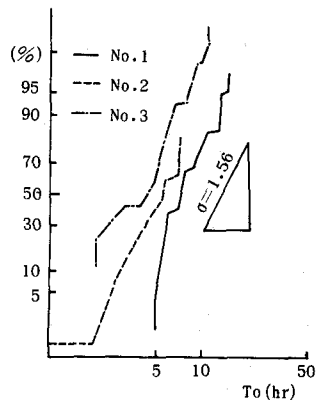


図-9 $\phi_0(T_0)$ の分布 ($p=0.6$)

洪水No. 1について求めた到達時間の分布 $\phi_0(T)$ および実測値と計算値の比較を図示したもの、図-6は洪水No. 1より求めた $\phi_0(T)$ を用いて計算した洪水No. 2の予測値と実測値を比較したものである。また、図-7は3個の洪水について $\phi_0(T)$ を求め、対数確率紙にHazen plotにより図示したものである。それによると、得られた $\phi_0(T)$ はほぼ対数正規分布をなしており、その標準偏差 σ_T は各洪水についてほぼ等しく $\sigma_T \div 2.2$ となっている。また、 T の中央値については、ピーク流量のほぼ等しいNo. 1とNo. 2では同じ値 ($T_{50} \div 17 \text{ hr}$) となっているのに対し、ピーク流量が4倍程度大きいNo. 3ではこれより小さい値 ($T_{50} \div 8.5 \text{ hr}$) となっている。

つぎに、図-8および図-9は $p=0.6$ とした場合であり、 $r_0=10 \text{ mm/hr}$ とし、到達時間の分布 $\phi_0(T_0)$ および流量の実測値と計算値の比較の一例を図-8に、図-7と同じ洪水について求めた $\phi_0(T_0)$ を図-9に示している。同図より、 $p=0.6$ とした場合も $\phi_0(T_0)$ の分布はほぼ対数正規分布をなすことがわかるが、 $p=1$ の場合より描点の勾配は急であり、標準偏差が小さくなっている。

ところで、式(39)より、 $K\gamma$ と l とが互いに独立であれば、 $\log(K\gamma)$ および $\log l$ の標準偏差をそれぞれ $\log \sigma_K$ および $\log \sigma_l$ とすると次の関係が成り立つ。

$$\log \sigma_T = \sqrt{(p \log \sigma_l)^2 + (\log \sigma_K)^2} \quad (59)$$

K と r についてはデータがないので σ_K は不明であるが、 σ_l は地形図上で測定することができる。そこで、1/2000の地形図上の河道に40m間隔に点を取り、その点から分水界まで等高線に直交する線を引き、その長さを斜面長として測定した結果を示すと図-10のようになる。描点是对数確率紙上ではほぼ直線状をなしており、斜面長の分布も対数正規分布に近いことを示している。また、標準偏差 σ_l は2.1程度であり、 $p=1$ とした場合の到達時間 T のそれにほぼ等しい。このことは、 $\log \sigma_K$ が $\log \sigma_l$ に比してかなり小さいか、もしくは、 $K\gamma$ と l が独立でなく両者の間

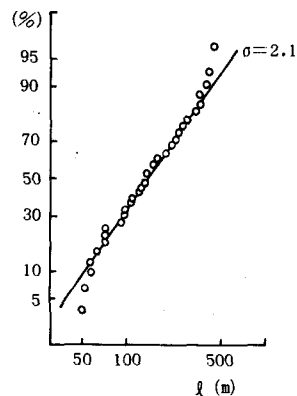


図-10 斜面長の分布

になんらかの関係があることを示すものと考えられる。いずれが正しいかは現時点では判断できないが、もし前者であるとする、

$$\log \sigma_T \doteq p \log \sigma_i \text{ or } \sigma_T \doteq \sigma_i^p \quad (60)$$

となる。これに $p=0.6$ および $\sigma_i=2.1$ を代入すると $\sigma_T=1.56$ となり、図-9の結果とほぼ一致する。したがって、近似的には式(60)の関係が成り立つように思われる。

(2) parametric model による流出解析

流出のシステムに適当な関数やモデルを仮定し、そのパラメーターを流出解析により定める、いわゆる parametric model としては、線形貯水池モデル、タンクモデル、貯留関数法、等価粗度法などがよく知られている。パラメーターの数は、タンクモデルを除くと1～数個程度であるが、一般にパラメーターの数が少ないほどその決定は容易であり、総合化への手掛りも得やすい反面、パラメーターが多いものは種々の流出特性を表現しやすいという利点がある。parametric model に要求される条件は、実測値との適合性がよいこと、解析が容易であることなどであるが、その物理的意義が明瞭であることがいっそう望ましいと考えられる。式(43)や(47)はシステム関数が確率密度になっているから、これを parametric model として解く場合には、適当な確率密度関数をあてはめ、平均と分散をパラメーターとすることになる。したがって従来のこの種のモデルに比し、システムとパラメーターの物理的意味が明確である。その場合決めるべきパラメーターは平均と分散の2個 (p もパラメーターと考えれば3個) となり、貯留関数法と同数になる。また、斜面長の分布を地形図上で測定して式(60)に適用すれば未知のパラメーターは平均のみとなり、等価粗度法の場合と同じになる。

到達時間の分布を対数正規とし、到達時間の中央値をパラメーターとして計算した例を図-11に示す。また角屋ら¹⁸⁾は $\phi(T)$ にガンマ分布を適用して良好な結果を得ている。いずれにしても、対数正規分布とガンマ分布に本質的な差異はなく、到達時間の分布としては右方に長いすそをもつ非対称分布がよく適合するようである。

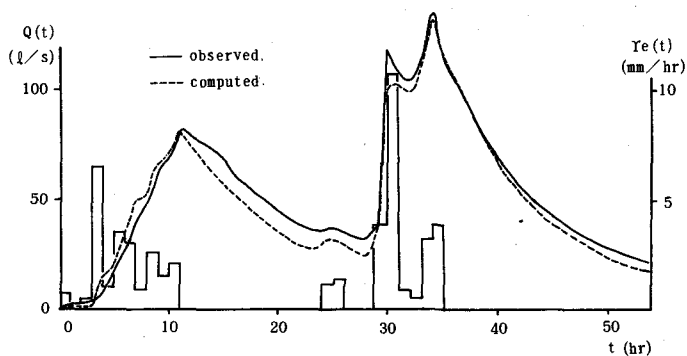


図-11 parametric modelによる実測値と計算値の比較
($p=0.6$, $r_0=10\text{mm/hr}$)

ところで、式(57)や図-3に示したように、到達時間の確率密度関数は単位図に対してかなり敏感である。このことは、言い換えると単位図は到達時間の分布に対して鈍感であり、到達時間の分布形を変えても (パラメーターの値を適当に与えれば) 似たような単位図がえられるということである。したがって、到達時間の確率密度としてどういう分布形を与えても結果に大差はなく、例えば矩形分布を適用してもかなりうまく適合させることができる。

このように、統計的な手法で求める場合には弱点となった $\phi(T)$ の鋭敏性が、パラメトリックな手法で解く場合には逆に利点となるので、このモデルは parametric model に適したものであると考えられる。

$p=1$ とし、 $\phi(T)$ に対数正規分布を適用すると、瞬間単位図は式(52)より

$$u(\tau) = \frac{1}{2} \exp \left[-c \left(\bar{X} - \frac{1}{2} c S_T^2 \right) \right] \{ 1 - \operatorname{erf}(X) \} \quad (61)$$

ここに、 $X = (\log \tau - \bar{X} + c S_T^2) / \sqrt{2} S_T$, $c = \ln 10 = 2.303$, $S_T = \log \sigma_T$, $\bar{X}$ は $\log T$ の中央値である。

高木¹⁹⁾によると S_T が大きくなると、上式は次式で近似される。

$$u(\tau) = \lambda \exp(-\lambda \tau), \quad \lambda = \frac{1}{T} \exp \left(\frac{S_T^2}{2} \right) \quad (62)$$

ここに、 $\log \bar{T} = \bar{X}$ である。

上式は1個の線形貯水池に相当する。また、角屋²⁰⁾は、 $\phi(T)$ にガンマ分布を適用し、式(52)より次式を得た。

$$u(\tau) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \frac{\alpha^i}{\Gamma(i)} \tau^{i-1} e^{-\alpha \tau} \quad (63)$$

ここに、 m はガンマ分布の形状母数である。上式は1, 2, ..., $m-1$ 個の線形貯水池を並列させたものに相当する。

(3) 浸透能を考慮したモデリング

有効降雨を推算する方法としては、降雨に流出係数を乗じる流出係数法、降雨強度から浸透量を差し引く浸透法などがあり、前者は流域が不浸透域と浸透域にはっきり分けられる市街地からの流出に、後者は流域の大部分が浸透域である場合に適していると考えられている。

浸透法を用いる場合には、通常次式により計算している。

$$\left. \begin{aligned} r_e &= r - f_r; r \geq f_r \\ &= 0; r < f_r \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

ここに、 f_r は浸透能であり、上式の第二式は有効降雨強度が負値をとらないという条件である。しかし、降雨がなくても地表に流れが存在する間は浸透は続くから、負の有効降雨が存在するはずである。したがって、式(8)に適用すべき有効降雨強度は水深を h として

$$\left. \begin{aligned} r_e &= (r - f) \cos \theta \\ f &= f_r; h \geq 0 \\ &= 0; h < 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

と考えられる。上式を式(47)に適用すると、

$$Q(t) = A \int_0^\infty \int_0^T \{ r(t-\tau) - f(t-\tau) \} \cos \theta d\tau \frac{\phi(T)}{T} dT \quad (66)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f_p; \int_0^T \{r(t-\tau) - f(t-\tau)\} d\tau \geq 0 \\ &= 0; \int_0^T \{r(t-\tau) - f(t-\tau)\} d\tau < 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

式(47)は $p=1$ の場合でありシステムは線型であるが、式(66)には浸透速度が導入されているため、降雨 r と流出 Q の関係は非線型になっている。すなわち、式(66)における降雨一流出の非線型性は、降雨の洪水流出と地下水流出への分離過程に起因することになる。

次に、式(66)をパラメトリックモデルとして解いた例を示す。

まず、 $\phi(T)$ に対数正規分布をあてはめて

$$\left. \begin{aligned} \phi(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_x} \exp \left\{ -\frac{(X - \bar{X})^2}{2 S_x^2} \right\} \\ X &= \log_{10} T \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

ここに、 $\bar{X}$ は X の平均、 S_x は X の標準偏差で T の標準偏差 σ_T との関係は $S_x = \log_{10} \sigma_T$ である。また、浸透能の式としては Horton の式

$$f_p = f_c + (f_0 - f_c) e^{-\lambda t} \quad (69)$$

を用いる。ここに、 f_c は最終浸透能、 f_0 は初期浸透能、 λ は定数である。

式(68)、(69)を(66)に適用すると、式(66)は $\bar{X}$ 、 S_x 、 f_c 、 f_0 および λ の5個をパラメーターとする parametric model になる。

非線形多変数関数のパラメーターの最適化手法としては、Powell の共役方向法²¹⁾、simplex法（線形計画に用いられる simplex 法ではない）などがある。竜ノ口理水試験地に適用した結果²²⁾によると、simplex 法は浅い極小値をとばす²³⁾ので極小値に落ちこむおそれが少なく、Powell 法より若干有利のようである。

同定に際しては、最小2乗基準にパラメーターの非負の条件を付加した次式を用いた。

$$\left. \begin{aligned} F(\bar{X}, S_x, f_c, f_0, \lambda) &= \sum (Q_c - Q_m)^2 \rightarrow \text{minimum} \\ \text{ただし、} X &\geq 0, S_x \geq 0, f_c \geq 0, f_0 \geq 0, \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

ここに、 Q_c は計算流量、 Q_m は実測流量である。

計算結果を図-12、13に示す。

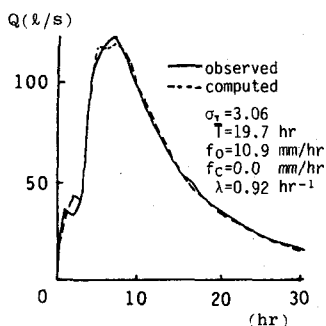


図-12 計算値と実測値の比較

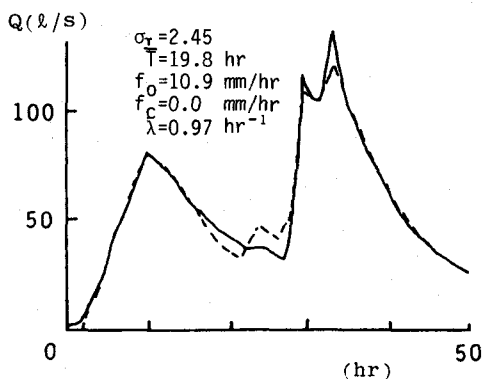


図-13 計算値と実測値の比較

4. 流出過程における河道網の役割

(1) 河道網構造の特性

河道網の構造については有名なHortonの河道則があり、各次数についての河道数、平均河道長、平均勾配および平均流域面積がそれぞれ次数の指数関数で表わされることが知られている。これらのうち、河道数則については、その後の研究により流域平面構造のトポロジー的ランダム性を表わすものであることが明らかにされている。しかし、流出過程においては、河道網のトポロジー的な構造や、河道長、勾配などの平均値だけでなく、その分布特性も重要な役割をはたすものと考えられる。

山地小河川について河道の次数分けを行い、

各次数について河道長の分布を測定した結果を示すと図-14、15のようである。使用した地形図は1/25,000で、流域是那珂川南畑ダム地点（流域面積26.8km²）、遠賀川水系力丸ダム地点（32.6km²）および矢部川日向神ダム地点（79.1km²）で、いずれも最高次数は5次である。図より、1次の河道長、2次の河道長とも対数正規分布に近いこと、2次の方が1次より標準偏差が大きくバラツキが大きいことがわかる。また、図は省略したが、流域面積についても全く同様に、1次、2次とも

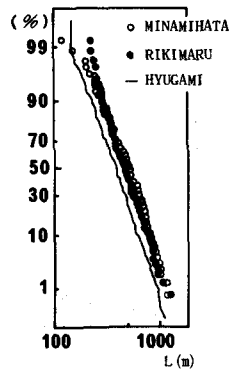


図-14 1次の河道長の分布

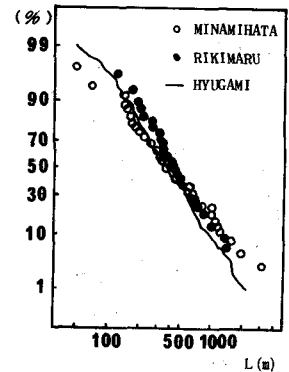


図-15 2次の河道長の分布

ほぼ対数正規分布をなし、標準偏差は2次の方が1次よりも大きい値となっている。

(2) 河道網における洪水波形の変形

図-16、17および18は、河道網を考慮して計算したハイドログラフの例を示したもので、流域面積はそ

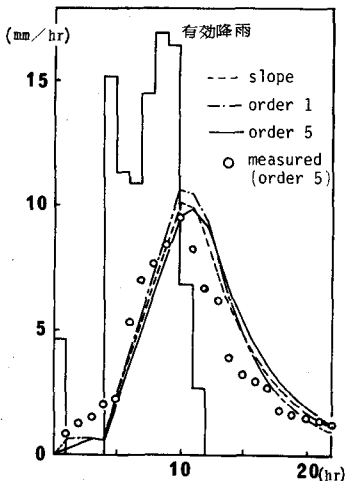


図-16 流出波形の変形 (26.8km²)

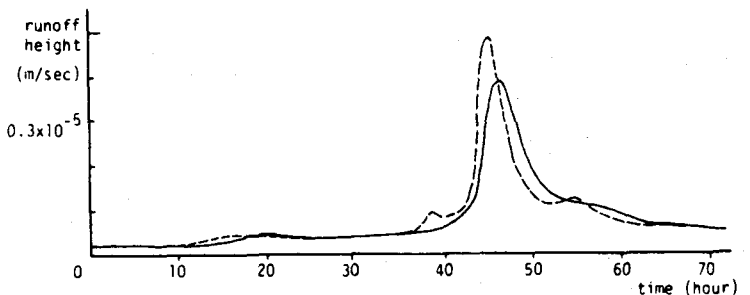


図-17 河道効果を考慮した場合（実線）と無視した場合（破線）の計算流出波形の比較（高樺らによる）

れぞれ26.8km², 159km²および1452km²

である。河道における計算には、図-16, 18ではkineuratic wave法,

図-17では多段貯水池モデルが使用されている。詳細についてはそれぞれの文献^{24), 25), 26)}を参照されたい。

図より河道網の効果は、ピーク流量の低減と生起時刻の遅れに現われていることがわかる。しかし、流量の生起時刻の遅れは流域面積が大きくなるに従って大きくなっているが、ピーク流量の低減は、面積159km²

の図-17では30%程度であるのに対し、1452km²の図-18ではごくわずかであり、必ずしも系統的になっていないので、これだけでは河道の効果を論ずるのに不充分である。しかし、流出解析において、パラメーターの値を適当に与えることによりピーク流量の計算値を実測値に一致させることは一般に容易であるが、図-18のような場合に河道の効果を無視したままピークの生起時刻を一致させるのはまず無理である。したがって、流域面積が10²km²程度以上の場合には、何らかの形で河道の効果を導入することが実用上要求されるであろう。

ところで、河道における洪水流は開水路不定流の問題として古くから研究が行われており、最近では電子計算機の進歩によって多量の数値計算が容易になっているので、河道における流出計算に関して原理的にはあまり問題はない。しかし、斜面における流出計算の精度は、河道におけるそれに比しかなり劣るので、複雑な河道網における計算に煩雑な不定流の計算法をそのまま適用するのは、実用上得策ではないし、現象の特性を調べるのにも不便である。このような観点から河道網における計算の簡略化がはかられており、疑似等流を仮定したkinematic wave法もその1つである。ここでは石原ら^{27), 28)}の提唱した線型河道網について紹介する。

河道内における洪水の流下・伝播過程を線型、すなわち、洪水の伝播速度は時間的に一定とし、流量について重ね合わせができると仮定すると、流域下流端における流量 $Q(t)$ は次のように与えられる²⁷⁾。

$$Q(t) = \int_0^t F(\tau) q(t-\tau) d\tau \quad (71)$$

ここに、 $F(\tau)$ は流域の面積集中図、 $q(t)$ は基準小流域の流出量である。実際の河道における洪水の伝播速度は時間的に変化し、現象は非線型であることはいうまでもないが、石原らは4.42km²と533km²の流域に線型河道の仮定を適用し、良好な結果をえている。また、理論および実河川のデータから、洪水波の前面では伝播速度が一様に近くなることも示されている²⁹⁾。

式(71)の基準流域からの流出量に式(43)を適用すると、

$$Q(t) = \int_0^t F(\tau) \int_0^\infty R_0(t-\tau, T_0) \phi(T_0) dT_0 \quad (72)$$

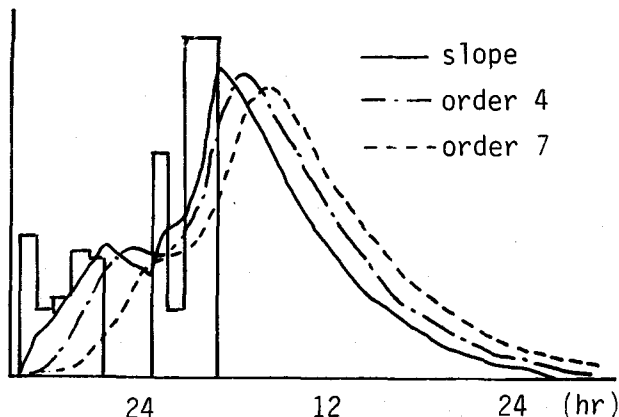


図-18 河道における計算流出波形の変形（構らによる）

上式を流域について離散量の式になおすと、

$$Q(t) = \sum_i A_i \int_0^\infty R_{ei}(t - \tau_i, T_0) \phi(T_0) dT_0 \quad (73)$$

ここに、添字 i は i 番目の流域における量であることを示す。また、斜面において $p=1$ とし、式(47)を適用すると

$$Q(t) = \sum_i A_i \int_0^\infty \int_0^T r_{ei}(t - \tau_i - \tau) d\tau \frac{\phi(T)}{T} dT \quad (74)$$

これらは河道網下流端における lumped system model になっている。

注) 線型河道の考え方は以前から貯留関数法においても以下のように用いられている。

$$\frac{dS(t+\tau)}{dt} = r_e(t) - q(t+\tau) \quad (75)$$

$$S(t+\tau) = K \{q(t+\tau)\}^p \quad (76)$$

ここに、 S は流域における貯留高、 q は流域下流端からの流出高、 K と p は定数である。しかし、式(75)はもともと連続の式であり、式(76)は物理的意義のあいまいな貯留関数式であるから、連続の式はそのまま使用し、遅れ時間の導入は後者において行い、

$$\frac{dS(t)}{dt} = r_e(t) - q(t) \quad (77)$$

$$S(t-\tau) = K \{q(t)\}^p \quad (78)$$

とする方がより合理的であろう。

おわりに

以上、流域の平面構造（斜面長、勾配など）の特性を到達時間に集約し、その分布特性を導入した流出解析の手法について述べた。しかし、このほか、流域における降雨、浸透能など有効降雨に関する量の場所的な不均一性や、表面流、速い中間流、遅い中間流、地下水流など各種流出成分の場となる流域の鉛直構造の多様性も流出過程において重要な要素となるものと考えられる。

このような流出システムの複雑さが black box model への傾斜を強め、process model の構成を困難にしてきたが、上述の諸要素の statistical な特性の導入が、流出解析の理論的精度を高めるための今後の課題となろう。

水理学における乱流理論は、statistical な手法の導入により華麗な発展を遂げたが、同様な道程が流出現象の解明にも必要であると考えらる。

参 考 文 献

- 1) 日野幹男：最近の流出解析モデルについての二、三の批判，第25回水理講演会論文集，1981
- 2) 金丸昭治：流出を計算する場合の山腹斜面形の単純化について，土木学会論文集，第73号，昭35
- 3) 高棹琢馬・椎葉充晴：Kinematic Wave 法への集水効果の導入，京大防災研年報，第24号B-2，昭

- 4) 平野宗夫・小川滋・木川良二：山腹斜面からの流出について，土木学会第29回年講，昭49
- 5) 藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究，土木学会論文報告集，第314号，1980
- 6) 角屋睦・福島晟・佐合純造：丘陵山地流域モデルと洪水流出モデル，京大防災研年報，第21号B-2，昭53
- 7) 山田正：山地小流域の瞬間単位図と斜面長分布の関係，土木学会論文報告集，第306号，1982
- 8) 椿東一郎・竹石和夫：筑後川の流域・流出解析について，土木学会西部支部研究発表会論文集，昭48
- 9) 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴：河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究，京都大学防災研究所年報，第20号B-2，昭52
- 10) 高木不析・松林宇一郎：流域内での流出特性の平均化過程と流出モデル，土木学会論文報告集，第312号，1981
- 11) 前出7)
- 12) 村井宏・岩崎勇作：林地の水および土壌保全機能に関する研究（第1報），林業試験場報告，274，1975
- 13) 日野幹雄：情報理論的水文学の一手法，第12回水理講演会講演集，昭43
- 14) 高棹琢馬・池淵周一：長期間流出機構の情報論的研究，京大防災研年報12，B，昭44
- 15) Eagleson, P. S., R. Mejia-R and F. March: Computation of Optimum Realizable Unit hydrographs, WATER RESOURCES RESEARCH, Vol. 2, No. 4, 1964
- 16) 平野宗夫：山地河川における流出過程について，土木学会論文報告集，第308号，1981
- 17) 小川滋：山地小流域における出水解析の基礎的研究，九州大学演習林報告，第50号，昭52
- 18) 前出6)
- 19) 高木不析：流出現象の規模とその評価，水理観測における規模の評価に関する研究報告書，土木学会，水理委員会，昭56
- 20) 前出6)
- 21) 永井明博・角屋睦：流出モデル定数の最適化手法，京大防災研究所年報，第22号B-2，昭54
- 22) 平野宗夫・森山聡之：浸透能を考慮した流出解析とパラメーター最適化，第38回土木学会年講，昭58（予定）
- 23) 小谷恒之：非線型多変数関数の極小化，大阪大学大型計算機センターニュース，No. 32，1979
- 24) 前出16)
- 25) 前出9)
- 26) 前出8)
- 27) 石原安雄・小葉竹重機：小流域と大流域からの流出の相互関係，京大防災研究所年報，第17号，B，昭49
- 28) 石原安雄・小葉竹重機：洪水ハイドログラフの形成過程に関する研究，京大防災研究所年報，第18号B，昭50
- 29) 石原安雄・小葉竹重機：洪水の伝播速度について，京大防災研究所年報，第20号B-2，昭52