

不規則波の連の統計学的特性とその応用

木 村 晃

1. はじめに

現地波浪の波高・周期に関する従来の研究では、観測等によって得たそれらの時系列をバラバラに切り離し、個々のデータを独立として取り扱い、その確率特性を検討してきたわけである。そしてその適用に際しては、対象とする構造物の重要性と、波高・周期の出現率を勘案しながら許される範囲で大きな値を選んで設計波の諸元を決定し、同じ諸元を持つ規則波に対する理論、実験の結果をもとに構造物の安全性を検討してきた。

しかし、このような取り扱いには従来から指摘されているように、設計波が過大であれば対象地点より沖で砕波してしまい、かえって小さな外力の推定値を与える等の問題点の他に、2つの重要な問題点を指摘することができる。

1つは不規則波の影響を規則波の理論を用いて評価する点である。特にこれは前波が次の波に影響を与える現象、つまり memory 型の現象において問題となる。例えば緩斜面への波のうちあげは前波のもどり流れの影響を強く受け、前波が小さい場合次の波のうちあげ高は波高・周期の等しい規則波の数倍にも達することがある。¹⁾ 逆に前波が大きい場合、そのもどり流れに遮られて、次の波は全くうちあげない場合も存在し、同じ波が連続して来襲した結果のうちあげ高とは自ら差が生ずる。このうちあげ高のないいわゆる memory 型の現象においては、構造物に対して大きな影響を及ぼす波は個別に特定することはできず、2波以上の波の組み合わせのもとに決定されるものである。したがってこの種の現象における安全性の検討には危険な状況を生ずる波の組み合わせの発生確率を知ることが必要になる。

他の1つは現地波浪の grouping 特性によって引き起こされる問題である。現地観測の記録を検討すると、波高あるいは周期の大きな波が間欠的にあらわれることは少なく、何波かの群をなしてあらわれる傾向がある。したがって設計波を十分大きく取っても、これを越える波が連続してあらわれる可能性がある。つまり十分大きな設計波を取ったからといってそれが1波だけ間欠的にあらわれるという保証はないのである。越波を例に取り上げると、上述した高波の波群の来襲時に集中的に越波する。したがって排水対策はこの短時間の越波量に対処し得るものでなければならない。排水計画の立案にはこの高波の波群に含まれる波の数、組み合わせならびに波群の出現間隔等に関する情報が必要となってくる。

以上のように、いくつかの現象においてそれに対する十分な対策をたてるためには、設計波として

単に大きな波を採用するだけでは十分でなく、波高あるいは周期の連なりに関する統計学的な特性もあわせて検討することが必要となってくる。

不規則波の連なり（連，run）の統計学的な特性を解明しようとする試みは比較的最近開始されたばかりであり、研究例も非常に限られている。ゼロアップクロス法で定義された波高の連なりに関する理論的な研究としては、隣り合う波高に相関がないとして連の理論を導いた合田²⁾のものと、narrow band スペクトルの仮定のもとに連の特性を検討した Ewing³⁾、Nolte-Hsu⁴⁾のものの2つにわけることができる。隣り合う波高の相関に関して、前者は独立を仮定しており、後者の行った narrow band の仮定は隣り合う波だけでなく引きつづくかなり後の波まで相関があることを仮定したことになっている。しかし、Rye⁵⁾らも報告しているように、隣り合う波高相互には平均+0.24程度の相関が存在するが、1波以上おいた波との相関は無視し得るほど小さくなる場合が多い。つまり、現地波浪は上述した2つの理論のはば中間的な特性を持つ。著者はこれがマルコフ連鎖の性質と似ていることに着目し、以下のような連の理論を提案した。⁶⁾

2. 波高の連の確率分布

マルコフ連鎖の推移確率は次式で与えられる。

$$p_n = p_0 P^n \quad (1)$$

ここに p_0 は初期確率のマトリクス、 p_n は n 回の推移後の確率マトリクス、 P は推移確率行列である。

いま波高の時系列

$$h_1, h_2, h_3, \dots$$

を次のように h_* ごとのランクに区分けする。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ランク 1 :} & 0 < h_j \leq h_* \\ \text{" 2 :} & h_* < h_j \leq 2h_* \\ \dots & \dots \\ \text{" } i : & (i-1)h_* < h_j \leq ih_* \\ \dots & \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$(j=1, 2, 3, \dots)$$

このように区分けすると、推移確率行列は次式で与えられる。

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

p_{ij} はランク i から j への推移確率であり、次式で与えられる。⁷⁾

$$p_{ij} = \int_{(j-1)h_*}^{jh_*} \int_{(i-1)h_*}^{ih_*} P(h_1, h_2) dh_1 dh_2 / \int_{(i-1)h_*}^{ih_*} Q(h_1) dh_1 \quad (4)$$

ここに $P(h_1, h_2)$ は 2 次元 Rayleigh 分布, $Q(h_1)$ は Rayleigh 分布であり,

$$P(h_1, h_2) = \frac{4h_1 h_2}{(1-4\rho^2)h_r^4} \exp \left\{ \frac{-1}{1-4\rho^2} \frac{(h_1^2 + h_2^2)}{h_r^2} \right\} I_0 \left[\frac{4h_1 h_2 \rho}{(1-4\rho^2)h_r^2} \right] \quad (5)$$

$$Q(h_1) = \frac{2h_1}{h_r^2} \exp \left[-\frac{h_1^2}{h_r^2} \right] \quad (6)$$

で与えられる。ただし h_r は rms 波高, I_0 は変形ベッセル関数であり, ρ は相関パラメーターで隣り合う波高の相関係数 r_h との間に次式の関係がある。

$$r_h = \frac{E(2\rho) - \frac{1}{2}(1-4\rho^2)K(2\rho) - \pi/4}{1 - \pi/4} \quad (7)$$

ここに K , E はそれぞれ第 1 種および第 2 種完全楕円積分である。図-1 の $n=2$ と示した曲線が式(7)の関係を示す。ここまでの議論からわかるように、隣り合う波高の相関係数が与えられれば、(1)から(7)までの各式を確定することができる。

(1) 波高の組み合わせ

ある時点において h_1 という波高を持つ波があらわれた時、その次に来る波は次のようにして予測することができる。いま、

h_1 がランク i に入ったとすると式(1)の初期確率マトリクスは次のように与えられる。

$$\begin{matrix} p_0 = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) \\ \text{ランク} \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad i \quad \dots \end{matrix} \quad (8)$$

式(8)を式(1)に代入すると、

$$p_1 = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, \dots) \quad (9)$$

が得られる。 p_{ij} ($j=1, 2, \dots$) は式(4)で与えられる。

つまり、前の波がランク i に入った時、次の波がランク j に入る確率は p_{ij} ($j=1, 2, 3, \dots$) で与えられる。(2)のランクの幅 h_* を十分小さく取ると、 h_2 の確率は条件付 Rayleigh 分布 $P(h_2|h_1)$ で与えられ、その期待値 $\bar{h}_2$ は

$$\bar{h}_2 = \int_0^\infty h_2 P(h_2|h_1) dh_2$$

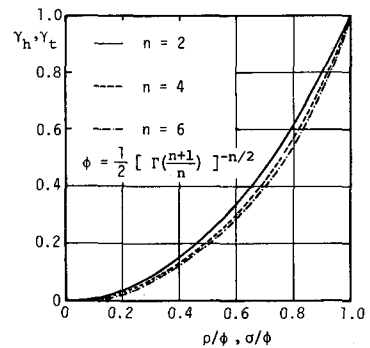


図-1 $r_h \sim \rho/\phi$, $r_t \sim \sigma/\phi$

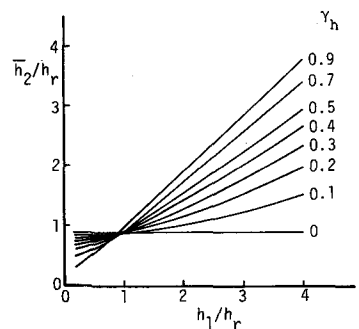


図-2 $\bar{h}_2/h_r \sim h_1/h_r$

$$= \int_0^\infty \frac{2h_2^2}{(1-4\rho^2)h_r^2} \exp \left[\frac{-(h_1^2 + h_2^2)}{(1-4\rho^2)h_r^2} + \frac{h_1^2}{h_r^2} \right] I_0 \left[\frac{4h_1 h_2 \rho}{(1-4\rho^2)h_r^2} \right] dh_2 \quad (10)$$

で与えられる。図-2は $\bar{h}_2/h_r$ と h_1/h_r との関係を示したもので、図からわかるように r_h が大きくなるにつれて $\bar{h}_2$ は h_1 に近づく。 $r_h=0$ の時 $\bar{h}_2/h_r=1/\sqrt{2}$ と一定になるが、これは Rayleigh 分布における平均波高と rms 波高の比である。つまり隣り合う波高に相関がなければ h_2 の期待値は平均波高そのものになる。

(2) 高波の連

ここでは任意に設定した基準波高 h_* を連続して越えるような波高の連なりについて検討する。いま次のような波高の時系列を考える。

$$\dots\dots\dots, h_{i-1}, h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \dots\dots\dots \quad (a)$$

この時系列を $h < h_*$ と $h \geq h_*$ の2つのランクに区分けし、それぞれランク1, 2とすると式(3)の推移確率行列は

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (11)$$

のようになる、ここに

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \int_0^{h_*} \int_0^{h_*} P(h_1, h_2) dh_1 dh_2 / \int_0^{h_*} Q(h_1) dh_1 \\ p_{12} &= \int_{h_*}^\infty \int_0^{h_*} P(h_1, h_2) dh_1 dh_2 / \int_0^{h_*} Q(h_1) dh_1 \\ p_{21} &= \int_0^{h_*} \int_{h_*}^\infty P(h_1, h_2) dh_1 dh_2 / \int_{h_*}^\infty Q(h_1) dh_1 \\ p_{22} &= \int_{h_*}^\infty \int_{h_*}^\infty P(h_1, h_2) dh_1 dh_2 / \int_{h_*}^\infty Q(h_1) dh_1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

であり、 $P(h_1, h_2)$ 、 $Q(h_1)$ はそれぞれ式(5)、(6)で与えられる。高波の連は波高の時系列で h_* を越えた波が出現した時点から始まる。いま(a)の時系列で $h_{i-1} < h_*$ でかつ $h_i \geq h_*$ とすれば高波の連は h_i から始まる。この場合 h_i は確率1で $h_i \geq h_*$ となるから初期確率マトリクスは $p_0 = (0, 1)$ で与えられる。この p_0 と式(11)を式(1)に代入すると、

$$\begin{aligned} p_1 &= (p_{21}, p_{22}) \\ p_2 &= (p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}, p_{21}p_{12} + p_{22}^2) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

のように推移後の確率が与えられる。 p_1 の最初の項 p_{21} は $h_i \geq h_*$ かつ $h_{i+1} < h_*$ となる確率である。したがってこれは h_* を越える波の連が1で終わる確率である。しかし、同様に p_2 の最初の項が連の

長さが2となる確率という訳にはいかない。つまり、 $p_{21} p_{11}$ は $h_i \geq h_*$, $h_{i+1} < h_*$ かつ $h_{i+2} < h_*$ となる確率であり、 $p_{22} p_{21}$ だけが $h_i \geq h_*$, $h_{i+1} \geq h_*$ かつ $h_{i+2} < h_*$ つまり連の長さが2となる確率を与える。 h_* を超える高波の連は連続的に h_* より大きくなければならず、最後の波が h_* より小さくなって始めて連が終る訳である。したがって連の途中で1度ランク1 ($h < h_*$)に入ったものは除いておく必要がある。このためには式(11)の1行目の p_{11} , p_{12} つまりランク1から1ならびにランク1から2への推移確率をともに0としておけば、ランク1に入った波は以後推移しないことになる。最終的に推移確率行列は次式のようにになる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (13)$$

式(13)と $p_0 = (0, 1)$ を式(1)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= (p_{21}, p_{22}) \\ p_2 &= (p_{22} p_{21}, p_{22}^2) \\ p_3 &= (p_{22}^2 p_{21}, p_{22}^3) \\ &\dots \dots \dots \\ p_\ell &= [p_{22}^{(\ell-1)} p_{21}, p_{22}^\ell] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

のようになる。簡単な帰納的考察より h_* を越える連の長さの確率分布は次式で与えられる。

$$P_1(\ell) = p_{22}^{(\ell-1)} p_{21} = p_{22}^{(\ell-1)} (1 - p_{22}) \quad (15)$$

ただし ℓ は高波の連の長さ(波の数)である。式(15)より、連の平均長は、

$$\bar{\ell} = 1 / (1 - p_{22}) \quad (16)$$

で与えられる。

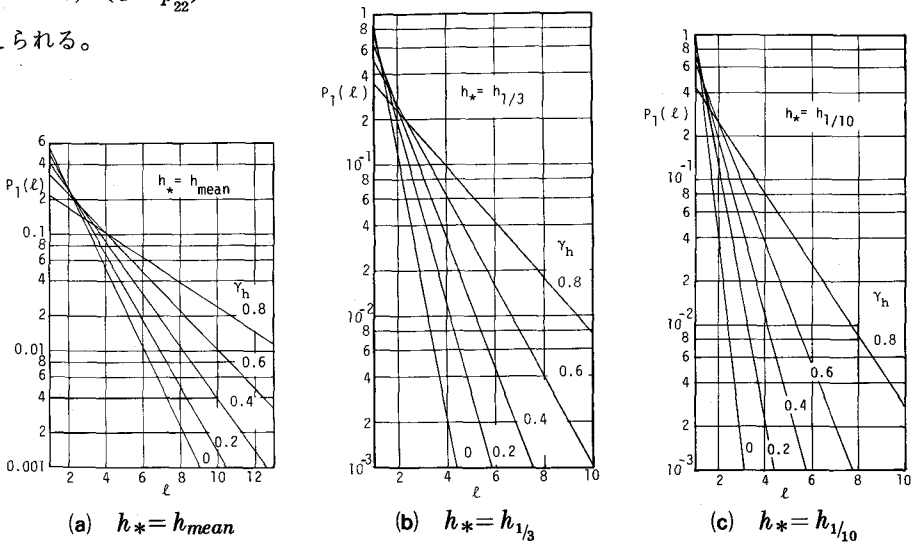


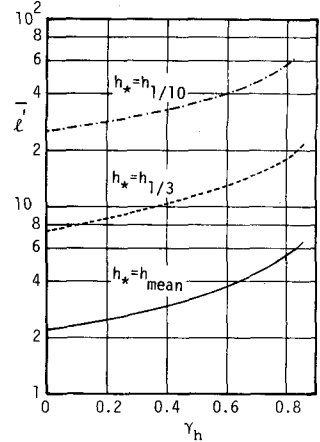
図-3 高波の連の確率分布

図-3(a), (b), (c)は式(15)の連の確率分布を示したもので、(a)は基準波高 h_* として平均波高、(b)は有義波高、(c)は $1/10$ 最大波高を選んだ場合のものである。図からわかるように、隣り合う波高の相関が小さくなるにつれて、長い連の出現確率が低下する。 $\gamma_h = 0$ の時は合田の理論に一致する。

まったく同様にして基準波高 h_* を越えない低い波高の連の確率分布を導くことができる。

$$P_2(\ell') = p_{11}^{(\ell'-1)} p_{12} = p_{11}^{(\ell'-1)} (1 - p_{11}) \quad (17)$$

ここに ℓ' は低い波の連の長さである。 p_{11} , p_{12} は式(12)で与えられる。図-4は $h < h_*$ となる連の平均長を示したもので、実線が h_* として平均波高、破線が有義波高、一点鎖線が $1/10$ 最大波高を用いた場合のものである。図から、 h_* を越える波(連)の来ない平均的な間隔を読み取ることができる。



(3) トータルラン

トータルランは h_* を越える波高の連が始まってから、間に h_* より低い波の連をはさんで次に h_* を越える波の連が始まるまでの長さ(波の数)であり、その長さの確率分布は式(15), (17)より次のように与えられる。

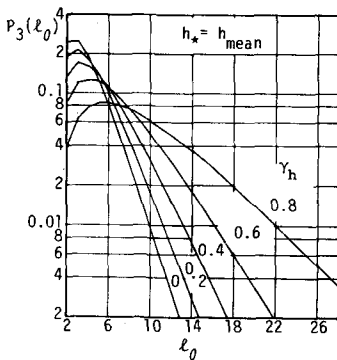
$$P_3(\ell_0) = \frac{(1 - p_{11})(1 - p_{22})}{p_{11} - p_{22}} (p_{11}^{\ell_0-1} - p_{22}^{\ell_0-1}) \quad (18)$$

平均長 $\bar{\ell}_0$ は

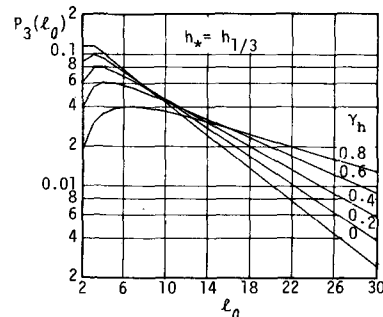
$$\bar{\ell}_0 = \frac{1}{(1 - p_{11})} + \frac{1}{(1 - p_{22})} \quad (19)$$

与えられる。 p_{11} および p_{22} は式(12)で与えられる。

図-5(a), (b)は h_* として (a)平均波高、(b)有義波高を用いた場合のトータルランの確率分布である。



(a) $h_* = h_{mean}$



(b) $h_* = h_{1/3}$

図-5 トータルランの確率分布

式(19)から(19)は式(5), (6)および(12)からわかるように γ_h あるいは ρ の値がわかれば確定することができる。図-6, 7はそれぞれ p_{11} と γ_h , p_{22} と γ_h の関係を示したもので、実線は h_* として平均波高、破線は有義波高、一点鎖線は1/10最大波高を選んだ場合のものである。

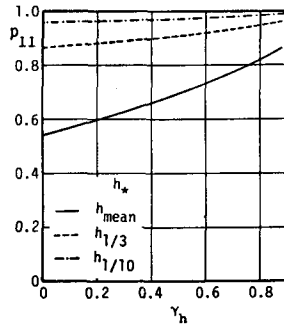


図-6 $p_{11} \sim \gamma_h$

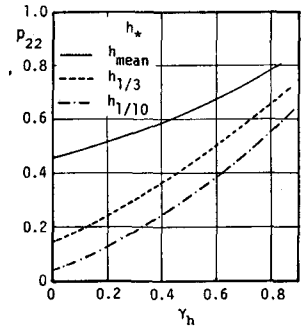


図-7 $p_{22} \sim \gamma_h$

(4) 不規則波浪のシミュレーション

ここまで説明してきた不規則波の波高の連の理論の検証には統計的に定常な長い時間の不規則波の観測記録が必要である。しかしこれはなかなか困難なことであるので、ここでは不規則波の数値シミュレーションを行いそのデータを用いて理論の検証を行った。シミュレーションは著者ら⁸⁾の方法によった。図-8はここでシミュレートした5つのケースの期待スペクトルを示したもので、高周波側の通減勾配を f^{-4} から f^{-8} まで変化させたものである。Case-2が十分発達した風波のスペクトルとして良く用いられるPierson-Moskowitz型のスペクトルである。各ケースとも5,000波のデータを計算して解析に用いた。図-9(a)~(e)は高波の連の確率特性を検討したもので、各図とも太い線は式(15), 細い線は合田の理論であり共に実線が h_* として平均波高、破線が有義

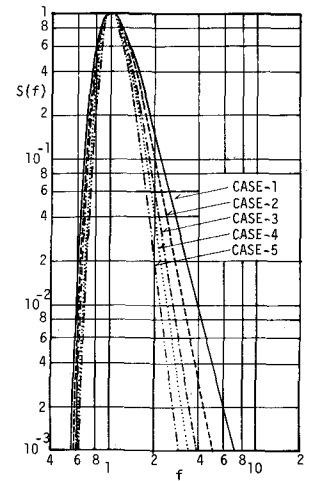
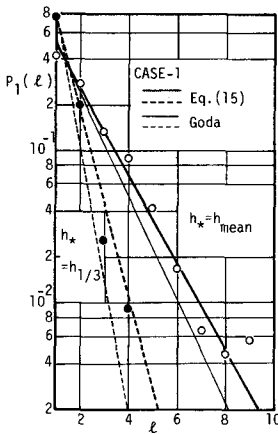
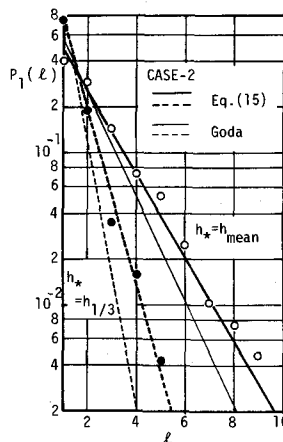


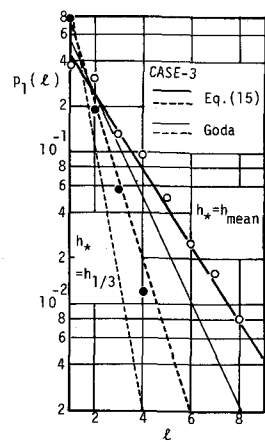
図-8 期待スペクトル



(a) Case-1



(b) Case-2

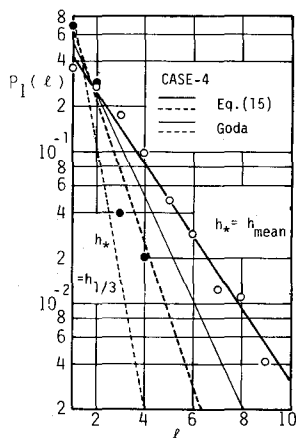


(c) Case-3

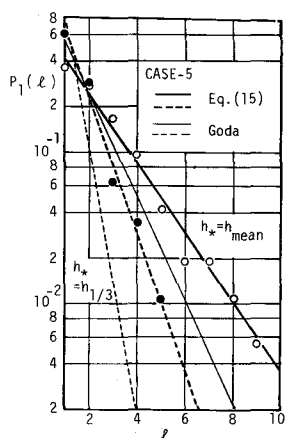
図-9 高波の連の頻度分布

波高を用いた場合のものである。図からわかるように、データに若干のばらつきはあるが、各ケースともデータと式(19)との対応は非常に良好である。図-10(a)~(e)は h_* として平均波高を用いた場合のトータルランについて理論式(18)実線とデータとの対応を検討したものである。破線は合田の理論である。

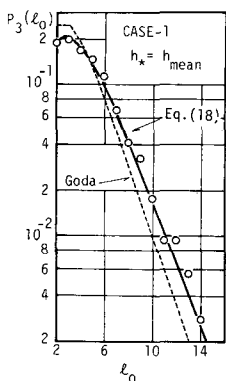
表-1, 2は高波の連とトータルランの平均長について、データと各種理論との対応を検討したものである。表



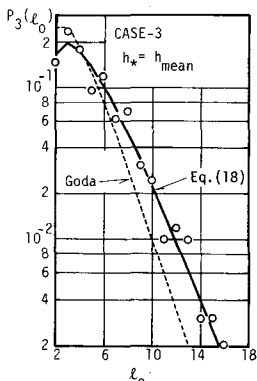
(d) Case-4



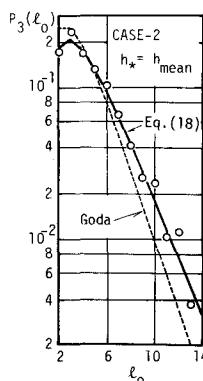
(e) Case-5



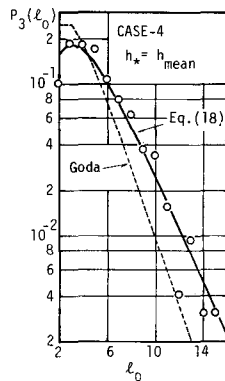
(a) Case-1



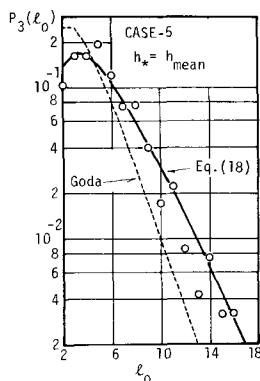
(b) Case-2



(c) Case-3



(d) Case-4



(e) Case-5

表-1 高波の連の平均長

Case	γ_h	$h_* = h_{\text{mean}}$			$h_* = h_{1/3}$			
		data	Eq. (16)	Goda	data	Eq. (16)	Goda	Nolte-Hsu
1	0.19	2.20	2.08	1.84	1.33	1.28	1.33	1.15
2	0.23	2.29	2.15	"	1.47	1.29	1.37	"
3	0.29	2.34	2.28	"	1.64	1.29	1.44	"
4	0.33	2.42	2.37	"	1.78	1.37	1.50	"
5	0.38	2.45	2.46	"	1.92	1.53	1.57	"

表-2 トータルランの平均長

Case	γ_h	$h_* = h_{\text{mean}}$			$h_* = h_{1/3}$		
		data	Eq. (19)	Goda	data	Eq. (19)	Goda
1	0.19	4.66	4.55	4.03	9.33	9.87	8.61
2	0.23	4.67	4.67	"	9.47	10.12	"
3	0.29	4.94	4.90	"	10.00	10.63	"
4	0.33	5.17	5.10	"	9.95	11.07	"
5	0.38	5.36	5.32	"	10.71	11.57	"

図-10

トータルランの頻度分布

からもわかるように、合田、Nolte-Hsu の両理論とも幾分小さ目の値を与えるが、ここで説明した理論はいずれの場合も良好な対応を示す。

3. 周期の連の確率分布

ゼロアップクロス法で定義した不規則波の周期の時系列もやはりマルコフ連鎖と同様な特性を持つ。したがって波高の連と同様な取り扱いが可能である。周期の場合は共振問題（連続的に共振周期帯に在る波の連）への適用が有効である。

いま次のような周期の時系列を考える。

$$\cdots \cdots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \cdots \cdots \quad (b)$$

式(2)のような細かなランク分けも可能であるが、ここでは次のような3つのランクに区分けする。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ランク 1:} & t_j < t_{*1} \\ \text{" 2:} & t_{*1} \leq t_j \leq t_{*2} \\ \text{" 3:} & t_j > t_{*2} \end{array} \right\} \quad (20)$$

ここに t_{*1} , t_{*2} はそれぞれ共振周期帯の下限および上限の周期とする。

推移確率行列は3行3列のマトリクスで表すことができ、式(13)の部分で行ったものとまったく同じ議論から最終的に次式で与えられる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

共振周期の連は周期の時系列でランク2に入る波が出現した時点から始まる。したがって初期確率マトリクスは $p_0 = (0, 1, 0)$ となり、第 ℓ 回の推移後の確率マトリクスは

$$p_\ell = [p_{22}^{(\ell-1)} p_{21}, p_{22}^{(\ell-1)} p_{22}, p_{22}^{(\ell-1)} p_{23}] \quad (22)$$

で与えられる。第1項および第3項はそれぞれ ℓ 波の波が連続してランク2に入り、 $\ell+1$ 波目の波がランク1あるいはランク3に入って共振周期の連が終る確率であり、両者の和が長さ ℓ の連の出現確率を与える。したがって共振周期の連の確率分布およびその平均長は

$$P_4(\ell) = p_{22}^{(\ell-1)} p_{21} + p_{22}^{(\ell-1)} p_{23} = p_{22}^{(\ell-1)} (1 - p_{22}) \quad (23)$$

$$\bar{\ell} = 1 / (1 - p_{22}) \quad (24)$$

で与えられる。周期の時系列における推移確率は次式の正規化された2次元 Weibull 分布で与えられる。⁷⁾

$$p_{22} = \int_{t_{*1}}^{t_{*2}} \int_{t_{*1}}^{t_{*2}} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 / \int_{t_{*1}}^{t_{*2}} R(t_1) dt_1 \quad (25)$$

ここに

$$f(t_1, t_2) = \frac{n^2}{4A} \frac{(t_1 t_2)^{n-1}}{t_r^{2n}} \exp \left[-\frac{\phi}{2A} \frac{(t_1^n + t_2^n)}{t_r^n} \right] I_0 \left[\frac{\sigma}{A} \frac{(t_1 t_2)^{n/2}}{t_r^n} \right] \quad (26)$$

$$R(t_1) = \frac{n}{2\phi} \frac{t_1^{n-1}}{t_r^n} \exp \left[-\frac{1}{2\phi} \frac{t_1^n}{t_r^n} \right] \quad (27)$$

$$A = \phi^2 - \sigma^2, \quad \phi = \frac{1}{2} \left[\Gamma \left(\frac{n+2}{n} \right) \right]^{-n/2}$$

$f(t_1, t_2)$ は 2 次元 Weibull 分布⁹⁾, $R(t_1)$ は Weibull 分布である。 n は Weibull 分布の形状母数, t_r は周期の rms 値, Γ はガンマ関数である。 σ は相関パラメーターであり, 隣り合う周期相互の相関係数 r_t との間に次式の関係がある。

$$r_t = \frac{[\Gamma(\frac{n+1}{n})]^2 \{F[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}; 1; (\frac{\sigma}{\phi})^2] - 1\}}{\Gamma(\frac{n+2}{n}) - [\Gamma(\frac{n+1}{n})]^2} \quad (28)$$

ただし, F は超幾何関数である。

25 から 28 の各式からわかるように, p_{22} は r_t と n を与えると決定される。図-11 はシミュレーションデータにおける r_t と n の関係をプロットしたものである。図からわかるように両者には密接な関係があり, r_t がわかれば n の値はほぼ一意的に決まる。図-12 は p_{22} と r_t の関係を示したものであり, 実線は $t_{*1} = 0.4 t_{mean}$, $t_{*2} = 0.6 t_{mean}$, 破線は $t_{*1} = 0.9 t_{mean}$, $t_{*2} = 1.1 t_{mean}$, 一点鎖線は $t_{*1} = 1.4 t_{mean}$, $t_{*2} = 1.6 t_{mean}$ を用いた場合のものである。

図-13 は $t_{*1} = 0.7 t_{mean}$, $t_{*2} = 1.2 t_{mean}$ とした場合の共振周期の連の確率分布を示したものである。ここで用いた t_{*1} , t_{*2} は固有周期が t_{mean} に等しい系 (線型 1 自由度系, 減衰比 0.01) において変位応答が静的な载荷による変位の 2 倍以上になる周期帯の下, 上限の周期である。

図-14(a)~(e) は周期の連の理論値とデータを比較したもので, データは前述したシミュレーションの結果であり, 周期幅は図-13 と同じである。図からわかるように理論式とデータの対応は良好である。

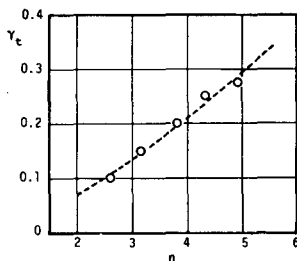


図-11 $r_t \sim n$

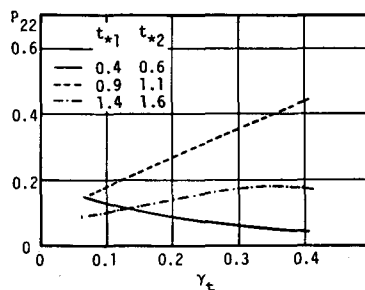


図-12 $p_{22} \sim r_t$

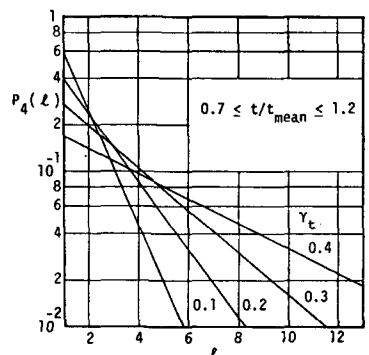


図-13 共振周期の連の確率分布

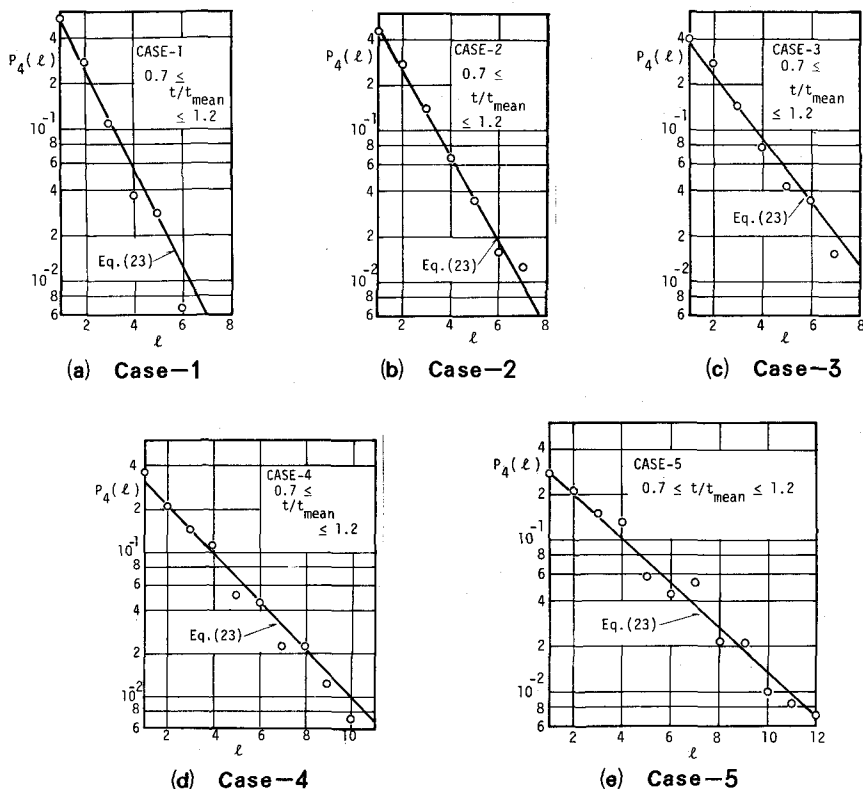


図-14 共振周期の連の頻度分布

4. 相関係数の推定

波高の連の確率特性は隣り合う波高の相関係数が与えられると理論的に決定される。 γ_h はRye⁵⁾も指摘するように波の発達期は大きくなり、減衰期には小さくなる。これは主としてスペクトル形状の変化によるもので、スペクトルがシャープになるほど γ_h は大きくなる。図-15は γ_h と合田によるスペクトル尖鋭度パラメーター Q_p との関係を示したもので、プロットしたデータはここで行ったシミュレーションによるものである。図からわかるように、両者の間にはほぼ一義的な関係があり、 Q_p すなわちスペクトル形がわかれば γ_h が決まり、波高の連の確率特性を定義することが可能である。

一方、周期の連の確率特性は隣り合う周期の相関係数 γ_t と周期の分布に対応するWeibull分布の形状母数 n とがわかれば理論的に決定される。図-11でも示したように、 γ_t と n とはいずれか一方がわかれば他も決定できる。 γ_t もスペクトル形状に応じて変化し、やはりスペク

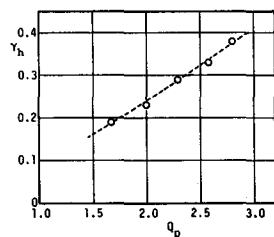


図-15 $\gamma_h \sim Q_p$

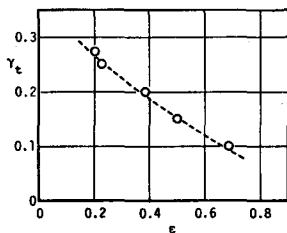


図-16 $\gamma_t \sim \epsilon$

トル幅が小さくなると値が大きくなる傾向がある。しかしこの場合、前述した Q_p より図-16に示すようにスペクトル幅パラメーター ε との対応の方が良好であった。ただし、 ε には計算方法が数通りあり、方法ごとに少しずつ値が異なる場合があるので注意を要する。

周期の連も ε すなわちスペクトル形がわかればその確率特性を定義することが可能である。

5. 短時間越波量

ここまでの説明からわかるように、連の理論を用いることにより波高あるいは周期の組み合わせ、連なりに関する統計学的な情報を得ることができる。従来の波別解析法が波を個別に取り扱って来たのに対して、連の理論を用いることにより不規則な波の組み合わせをあるがままの形あるいは構造物に対して危険な状況（波の組み合わせ）を任意に設定して取り扱うことが可能となる。ここでは不規則波の越波を対象として連の理論の適用を試みる。

最近になり、現地波浪の越波量に関し、従来の設計波法による推定に問題のあることが指摘されるようになり、不規則波の確率特性も考慮した研究が行われるようになり、合田¹⁰⁾による期待越波流量の提案、高田¹¹⁾による最大越波量を対象とした設計の必要性の指摘などが行われている。しかし最初にも述べたように、現地波浪においては高波は何波かの波群をなすことが多く、その際には短時間に期待越波流量よりかなり大きな越波量が見込まれる。しかしながら最大越波量のような大きな越波量が常時発生する訳ではなく、これに対処し得るような計画は安全であっても不経済な場合もある。したがって越波対策にあたっては、どの程度の越波を想定すべきであるのか、あるいは逆に特定の越波対策における堤内地の浸水に対する安全率はどの程度期待し得るのか等に関する明確な尺度が必要となってくる。そこで、ここでは1例として堤脚水深の比較的大きな鉛直堤を取りあげ、越波量ならびに排水対策との関連のもとに堤内地の浸水災害に対する安全性について検討する。

堤脚水深が大きな鉛直堤への波のうちあげ越波は、前後の波の影響を受けず、ゼロアップクロス法で定義した個々の波は波高、周期の等しい規則波とほぼ同じ越波特性を持つと仮定してよい。したがってここでは越波量を波高、周期を含めた比較的小さい式で表現した吉川ら¹²⁾の式を用いる。

$$\frac{q'}{TH\sqrt{2gH}} = \frac{2}{15} m_0 k^{3/2} \left(1 - \frac{Z}{kH}\right)^{5/2} ; (H > Z/k) \quad (29)$$

q' は単位幅1周期あたりの越波量、 H は堤防前面の入射波高、 T は周期、 Z は堤防天端高である。 m_0, k は堤体の形状、設置位置等に応じて変化する定数であり、ここで対象とした状況の場合 $m_0 = 0.5$ 、 $k = 0.6$ 程度の値が推奨されている。¹²⁾ 式29より、 $Z = 0$ の時、平均波 ($\bar{H}$, $\bar{T}$) 1波による越波量は

$$\bar{q} = \frac{\sqrt{8}}{15} m_0 k^{3/2} g^{1/2} \bar{T} \bar{H}^{3/2} \quad (30)$$

となり、式30を用いて式29を正規化すると、

$$q = q'/\bar{q} = t' h'^{3/2} \left\{ 1 - \frac{z^*}{h'} \right\}^{5/2} \quad (31)$$

なる関係が得られる。ここに $h' = H/\bar{H}$, $t' = T/\bar{T}$, $z^* = Z/k\bar{H}$ である。

現地波浪では波高の大きな波の周期は平均周期の1.1倍付近に集中する傾向があるのでここでは $t' = 1.1$ と一定にした。次に問題となるのは高波の波群に含まれる波の数であり、何波連続して越波する可能性があるかという点である。

高波の連の確率特性は式(19)で与えられ、前述したように隣り合う波高の相関 r_h と基準波高 h_* (ここでは無次元堤防天端高 z^*) がわかれば決定することができる。前述したように、 r_h はスペクトル形状に応じて変化するのでここでは十分発達した風波のスペクトルとして良く用いられる Pierson-Moskowitz スペクトルを用いる。この場合表-1に示すように r_h は0.23であり式(7)より $\rho = 0.25$ となる。

連の長さは確率的に変化する量であり、長い連ほど出現率が小さくなる。そこでここでは $P_1(\ell_c) \leq 10^{-3}$ となるような連の長さを基準長として採用した。つまり ℓ_c より長い連が出現する度合は、1,000回に1回以下となるような値である。表-3に z^* と p_{11} , p_{22} および ℓ_c の値を示した。例えば $z^* = 2.0$ の時、 ℓ_c は5となり、 p_{11} , p_{22} の値を式(19)に代入するとトータルランの平均長は26.1

z^*	p_{11}	p_{22}	ℓ_c
0.5	0.204	0.827	29
1.0	0.583	0.502	11
1.5	0.846	0.253	6
2.0	0.960	0.113	5
2.5	0.993	0.044	4
3.0	0.999	0.015	3

表-3 z^* , p_{11} , p_{22} , ℓ_c

となる。したがって5波連続して越波する高波の連は26,100波に1回あらわれるということになる。この連続する ℓ_c 波の波による越波量を短時間越波量と定義する。 ℓ_c の値は構造物の重要性に応じて変化させればよい。つぎに連の基準長として n を用いた場合の短時間越波量の確率特性の算定法について説明する。

いま連続する n 波

$$h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in} \quad (32)$$

を次のように区分けする。

$$\begin{aligned} \text{ランク 1 :} & \quad 0 < h_j \leq z^* \\ \text{" 2 :} & \quad z^* < h_j \leq z^* + \Delta h \\ & \dots \dots \dots \\ \text{" i :} & \quad z^* + (i-2)\Delta h < h_j \leq z^* + (i-1)\Delta h \end{aligned} \quad (33)$$

無次元天端高 z^* より波高の小さな波はすべてランク1に入れ、他は波高に関して Δh ごとのランクに区分けする。ランクの上限は平均波高の4倍程度に取れば十分である。そこで、 Δh を適当に取り全部で N 個のランクに区分けし、各ランクに入る波高をランクの中央値で代表させることにする。いま(32)の時系列において $h_{i1} \sim h_{in}$ が順にランク $j_1 \sim j_n$ に入るとする。連続する n 波が順にこのランクに入る確率は

$$P(j_1, j_2, \dots, j_n) = p_{j_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdot p_{j_2 j_3} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \quad (34)$$

で与えられる。ただし p_{j_1} は最初の波がランク j_1 に入る確率、 $p_{j_1 j_2}$ は隣り合う 2 波が順にランク j_1, j_2 に入る確率であり、それぞれ次式で与えられる。

$$p_{j_1} = \int_{z^*+(j_1-2)\Delta h}^{z^*+(j_1-1)\Delta h} Q(h_1) dh_1 \quad (35)$$

$$p_{j_1 j_2} = \frac{\int_{z^*+(j_1-2)\Delta h}^{z^*+(j_1-1)\Delta h} \int_{z^*+(j_2-2)\Delta h}^{z^*+(j_2-1)\Delta h} P(h_1, h_2) dh_1 dh_2}{\int_{z^*+(j_1-2)\Delta h}^{z^*+(j_1-1)\Delta h} Q(h_1) dh_1} \quad (36)$$

$P(h_1, h_2)$, $Q(h_1)$ はそれぞれ式(5), (6)で与えられる。

一方、短時間越波量は次のようにして与える。すなわち、各ランクに入る波の越波量を各ランクの中央値の波のそれで代表させそれを q_i ($i=1, 2, \dots, N$) とすると、総越波量（短時間越波量）は $q_t = q_{j_1} + q_{j_2} + \dots + q_{j_n}$ となる。ランクの数が N であるので連続する n 波の組み合わせは N^n 通り存在するが、ここでは高波の波群を対象としているので最初の波 h_i は越波し、その 1 波前の波 h_{i-1} は越波しなかったとすると結局組み合わせの総数は $(N-1)N^{n-1}$ となる。このすべての組み合わせについて短時間越波量とその出現確率が計算できる。短時間越波量を適当なランクに区分けし、ランクごとに出現確率の和を取れば短時間越波量の確率分布を得ることができる。図-17 は表-3 の $z^*=2.0$ の堤体からの短時間越波量の非超過確率 $Q_2(q_t)$ を示したもので $\ell_c = 5$ とした場合のものである。

高波の波群が来襲した後は通常何波かの越波しない波群が来襲し、やがて次の高波の波群が来襲する。したがって最初の波群の越波量を次の高波の来襲時まで、つまりトータルランの 1 周期の間に排水してしまえば堤内地の浸水を防ぎ得る。

いま堤内地に q_0 の貯留能力があるとする。図-17 のような短時間越波量の分布関数から、1 回の短時間越波量による堤内地の浸水に対する安全率 $Q_2(q_0)$ を得る。一方越波の排水能力を入射波の 1 周期あたり q_0/r とする。つまり入射波の r 周期で q_0 を排水できる設備が設置されていると考える。 r 周期で丁度排水が完了するのであるから、トータルランが r 以上であれば次の波群の来襲までに常に排水が完了している。式(36)よりトータルランが r 以上になる確率は

$$Q_3(r) = \sum_{\ell_0=r}^{\infty} P_3(\ell_0) = \frac{(1-p_{22})p_{11}^{r-1} - (1-p_{11})p_{22}^{r-1}}{p_{11} - p_{22}} \quad (37)$$

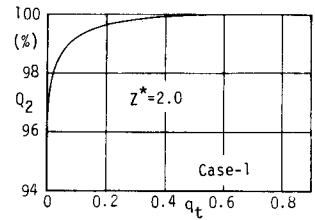


図-17 短時間越波量の非超過確率

となる。ただしトータルランが ℓ_c より短くなる場合は考えていないので

$$Q_3(r) = 1 \quad (r \leq \ell_c) \quad (37')$$

である。最終的堤内地の浸水災害に対する安全率は $Q_2(q_0) \cdot Q_3(r)$ で与えられる。図-18 は q_0 として図-17 の $Q_2(q_t)$ の99%の容量の貯留施設を備えた堤内地の排水施設の能力と安全率の関係を示したものである。

ここでは単位幅あたりの越波量について説明したが、広い範囲からの短時間越波量の確率特性ならびに堤内の安全性について検討することも同様に可能である。¹³⁾

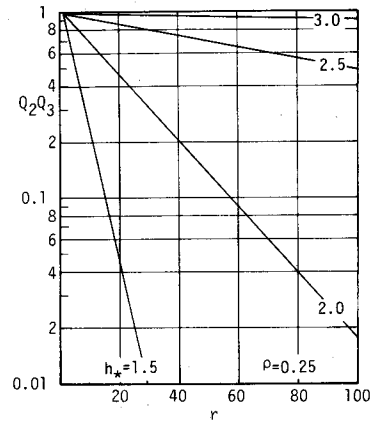


図-18 堤内地の浸水災害の安全率

6. 海中構造物の応答解析への応用

波が作用し、構造物が動揺する。この波から構造物の変位への変換は memory 型のプロセスであり、ある時点における変位はそれ以前に作用した波力の履歴が問題となる。このため外力が非定常な場合、構造物の変位は過渡応答の積み重ねとして算定することが必要であるが、最初で述べたように従来の波別解析法は不規則な波をバラバラに切り離して取り扱ってきたため、履歴の特定が困難であった。したがって従来はスペクトル解析法により成分波による定常応答の重ね合わせとして変位の解析を行ってきた。しかし、ここまで説明してきたように、連の理論を用いることにより、不規則な波の組み合わせをあるがままに取り扱うことが可能となる。ここでは連の理論を用いることにより、波別解析法でも構造物の動的な応答解析が可能であることを示す。¹⁴⁾

通常、構造物の固有振動数は構造物の共振を防ぐため外力の周波数帯を避けるように設計されている。したがって共振による変位は一応無視できるものとする。このため構造物が大きく変位するのは波高の大きな波の作用時に限られる。前にも述べたように、現地波浪では波高の大きな波の周期は平均周期の1.1倍に集中する

傾向があるのでここでは $T \div 1.1\bar{T}$ と一定として取り扱う。対象とした構造物は図-19(a)に示すように、柱状の構造物で砕波帯より沖に設置された上部载荷式のものである。簡単のためにここでは単柱式のを対象とするが、上部载荷面が水平になるように拘束しているので多柱構造物への拡張は簡単である。¹⁵⁾

柱状構造物に作用する波力は全波力は Morison 式を用いると次式で与えられる。

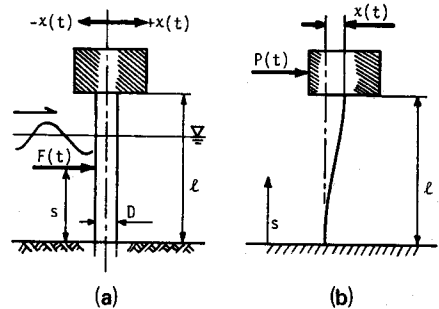


図-19 柱状構造物

$$F(\theta) = F_d |\cos \theta| \cos \theta + F_m \sin \theta \quad (38)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} F_d &= \frac{C_d w D^3 (2\xi + \sinh 2\xi) \zeta^2}{16 \sinh \xi} \\ F_m &= \frac{C_m w D^3 \pi \zeta \sinh \xi}{8 \cosh \xi} \\ \theta &= kx - \omega t, \quad \zeta = H/D, \quad \xi = kh \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

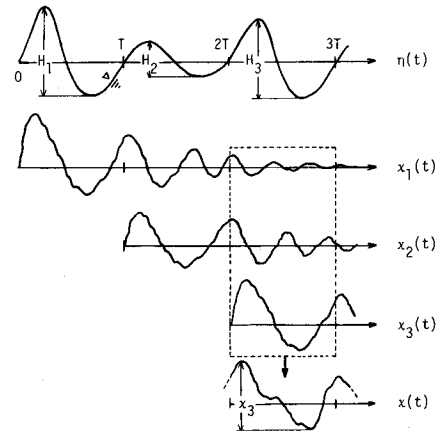
である。ただし C_d : 抗力係数, C_m : 慣性力係数, D : 柱の径, w/g : 単位体積あたりの流体の質量, h : 水深, k : 波数, ω : 角周波数である。

式38をフーリエ級数展開により線型化し, 同時に構造物を図-19(b)のように力が上部載荷面に作用するような等価系に変換するとこの系に作用する外力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P(\theta) &= F_m f_m \sin \theta + \frac{8}{3\pi} F_d f_d \sin(\theta + \pi/2) + \frac{8}{15\pi} F_d f_d \sin(3\theta + \pi/2) \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (40)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f_m &= 3(\bar{s}_m/\ell)^2 - 2(\bar{s}_m/\ell)^3 \\ f_d &= 3(\bar{s}_d/\ell)^2 - 2(\bar{s}_d/\ell)^3 \\ \frac{\bar{s}_m}{\ell} &= \frac{\xi \sinh \xi - \cosh \xi + 1}{\xi \sinh \xi} \cdot \frac{h}{\ell} \\ \frac{\bar{s}_d}{\ell} &= \frac{2\xi \sinh 2\xi + 2\xi^2 - \cosh 2\xi + 1}{2\xi \sinh 2\xi + 4\xi^2} \cdot \frac{h}{\ell} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$



式40の4項目以下は微小として省略した。

波が1周期だけ作用した時の構造物(線型1自由度系)の変位は次式の微分方程式を解くことにより与えられる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(\theta) \quad (42)$$

$$P(\theta) = \begin{cases} P(\theta) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

ここに M は荷重を含む構造物の質量, C は減衰定数, K はバネ定数である。

図-20 の上部の図は不規則波形をゼロアップクロス法による波高の定義を示したものである。仮定

図-20 作用外力の履歴

から周期は一定である。図の中央に示すように、第1波目の波だけが作用すると、作用の開始とともに構造物は変位を始めるが、作用が終了してもしばらくは変動が続く。2波目、3波目の波についても同様である。いまそれぞれ1波だけの波による変位を順に $x_1(t)$, $x_2(t)$ …… とすると、 $t = 0$ において静止していた構造物に第 n 波目の波が作用している間の変位は図の下部に示すように、

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \quad (43)$$

で与えられる。ただし $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は第 i 番目の波1波だけによる構造物の変位〔式(42)の解〕であり、各波の作用開始にあわせて時間をずらせたものである。

式(43)よりわかるように、原理的には後になるほど数多くの波の影響を受けることになる。しかし図-20からもわかるように、間欠的な1波による変位は波の作用の終了とともに減衰し始め、あまり後までは続かない。したがってここでは変位の継続時間を構造物の整定時間 T_s で打ち切った。 T_s は図-21に示すように構造物のインディシャル応答が平衡値の $\pm 5\%$ 以内におさまるのに要する時間である。 T_s が入射波の何周期分

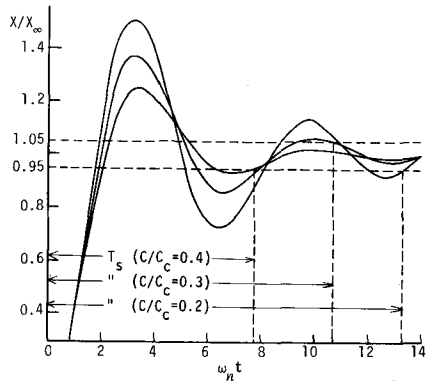


図-21 構造物の整定時間

表-4 考慮する必要がある波の履歴

C/C_c	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07	0.10	0.20
ω/ω_n							
0.02	1	1	1	1	1	1	1
0.05	3	2	1	1	1	1	1
0.10	5	3	2	1	1	1	1
0.20	9	5	4	2	1	1	1
0.30	14	7	5	3	2	2	1

になるかということ考慮すべき波の履歴（数）が決まる訳である。表-4に減衰比 C/C_c と入射波の角周波数と構造物の固有角周波数との比 ω/ω_n との関係のもとに考慮すべき波の履歴を示した。この表から N という値が読み取れた場合、式(43)で n 波目の作用中の構造物の変位は $N+1$ 波の変位の和

$$x(t) = \sum_{i=n-N}^n x_i(t) \quad [(n-1)T \leq t < nT] \quad (44)$$

で与えられる。次に $(n-1)T \leq t < nT$ の間の $x(t)$ の最大値と最小値との差を x_n とし、この値の確率分布を求める方法を示す。

まず最初に準備として、式(2)と同様に波高について0から $4\bar{H}$ までを h_* ごとに m 個のランクに区分けし、各ランクに入る波高をその中央値で代表させる。次に m 個のランクごとに間欠的な1波による構造物の変位〔式(42)の解〕を計算しておく。また、各ランクごとに初期確率 P_{jk} ($k = 1, 2, \dots, m$)〔式(35)〕とランク間の推移確率 $P_{jk\ell}$ ($k, \ell = 1, 2, \dots, m$)〔式(36)〕を求めておく。表-3から考慮すべき波の履歴が N と与えられた場合、適当な $N+1$ 波の組み合わせに対してまず各波をランクに区分けする。次にあらかじめ準備しておいた $x_i(t)$, P_{jk} , $P_{jk\ell}$ の中から必要なものを取り出し式(44)と式(34)に代入すれば上の $N+1$ 波による $(n-1)T \leq t < nT$ 間での変位と波の組み合わせの出現確率が与えられる。すべての波の組み合わせ（総数 m^{N+1} 組）についてこれを行い、得られた変位 (x_n) を

適当なランクに区分けしてそれぞれのランクごとに出現確率の和を取れば構造物の変位の確率分布を得ることができる。

図-22 はこうして求めた変位の非超過確率 $Q_3(x)$ の 1 例を示したもので、図中に示した値を用いて計算した結果である。ただし入射波は図-8 の Case-2 の Pierson-Moskowitz 型スペクトルを用いた。横軸は平均波の波力において式(40)の第 2 項だけが作用した時の構造物の定常応答の振幅を 2 倍した値

$$x_m = 16 \bar{F}_d f_d / 3 \pi K \sqrt{[(\omega/\omega_n)^2 - 1]^2 + 4 r^2 (\omega/\omega_n)^2}$$

で正規化してある。ここに $r = C/2\sqrt{MK}$ である。

7. おわりに

不規則波の連の研究はまだその緒についたばかりである。しかしその重要性は多くの研究者の指摘するところである。ここで示した 2 つの例の他にも防波堤斜面に設置したブロックの安全性¹⁶⁾、緩斜面への波の打ちあげ¹⁾等に影響を及ぼすことが指摘されている。しかしいずれの研究においても、まだ不規則な波の組み合わせを考慮することの必要性について指摘する程度にとどまっており、今後に残された問題は多い。

参 考 文 献

- 1) 木村 晃・瀬山 明・若狭 聡：波の打ちあげ高に及ぼすもどり流れの効果，第 29 回海岸工学講演会論文集，1982（印刷中）
- 2) Goda, Y. : Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rept. of Port and Harbour Res. Inst., Vol. 9, No. 3, pp. 3-57, 1970.
- 3) Ewing, J.A. : Mean length of runs of high waves, Jour. Geophys. Res., Vol. 78, No. 12, pp. 1933-1936, 1973.
- 4) Nolte, K.G. and F.H. Hsu : Statistics of ocean wave groups, Prepr. 4th OTC, No. 1688, pp. 139-146, 1973.
- 5) Rye, H. : Wave group formation among storm waves, Proc. 14th ICCE, pp. 164-183, 1974.
- 6) Kimura, A : Statistical properties of random wave groups, Proc. 17th ICCE, pp. 2955-2973, 1980.
- 7) 木村 晃：不規則波の波高・周期の連なりに関する研究，鳥取大学工学部研究報告，第 10 巻第 1

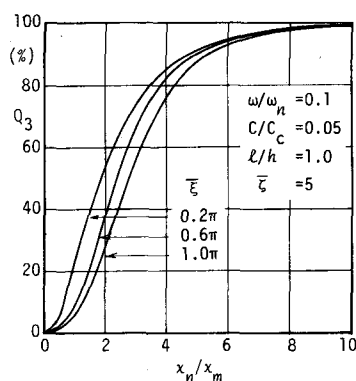


図-22 変位の確率特性

号, pp. 310—324, 1979.

- 8) Kimura, A and Y. Iwagaki : Random wave simulation in a laboratory wave tank, Proc. 15th ICCE. pp. 368—387, 1976.
- 9) 木村 晃 : 不規則波の波高・周期の結合確率特性について, 土木学会論文報告集, 第 286 号, pp. 101—111, 1979.
- 10) 合田良実 : 防波護岸の越波流量に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第 9 巻第 4 号, pp. 3—41, 1970.
- 11) 高田 彰 : 不規則波の越波分布の推算について, 土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集第 2 部, pp. 740—741, 1978.
- 12) 吉川秀夫・椎貝博美・河野二夫 : 海岸堤防の越波に関する基礎的研究, 第 14 回海岸工学講演会講演集, pp. 118—122, 1967.
- 13) 木村 晃・瀬山 明 : 越波の排水能力と浸水災害の発生確率について, 第 29 回海岸工学講演会論文集, 1982.〔印刷中〕
- 14) 木村 晃・瀬山 明・浜島幹雄 : 不規則波による海中構造物の変位の確率特性, 第 28 回海岸工学講演会論文集, pp. 401—405, 1981.
- 15) Harleman, D. R. F., W. C. Nolan and V. C. Honsinger : Dynamic analysis of offshore structures, Proc. 8th ICCE, pp. 482—499, 1962.
- 16) Johnson, R. R., E. P. D. Mansard and J. Ploeg : Effects of wave grouping on break-water stability, Proc. 16th ICCE, pp. 2228—2243, 1978.