

土砂収支と河床変動

道上正規

1. 河床変動のスケール

河道内に見られる河床変動には、砂漣・砂堆のような小規模な変動から河道全体が上昇または低下するといった大規模な変動まで種々のスケールのものが含まれている。これらの変動が河道に及ぼす影響はそのスケールによって全く性質を異にする。したがって、河床変動の解析をするに際して、河床変動のスケールを分類して、それぞれの特徴を知ることが重要である。図1は実河川の河床変動の概略のスケール、それを支配またはそれに密接に関係している物理量と解析法を表わしたものである。もちろん、ここで示したスケールは実河川を対象にしたものであって、例えば河道縦断形状が問題になるスケールは数kmから100kmのオーダーであるということを意味したもので、実験室でこのようなスケールの現象を再現できないということではない。

小規模河床変動は砂漣・砂堆・反砂堆といった河床波の呼称で、そのスケールは河床砂の粒

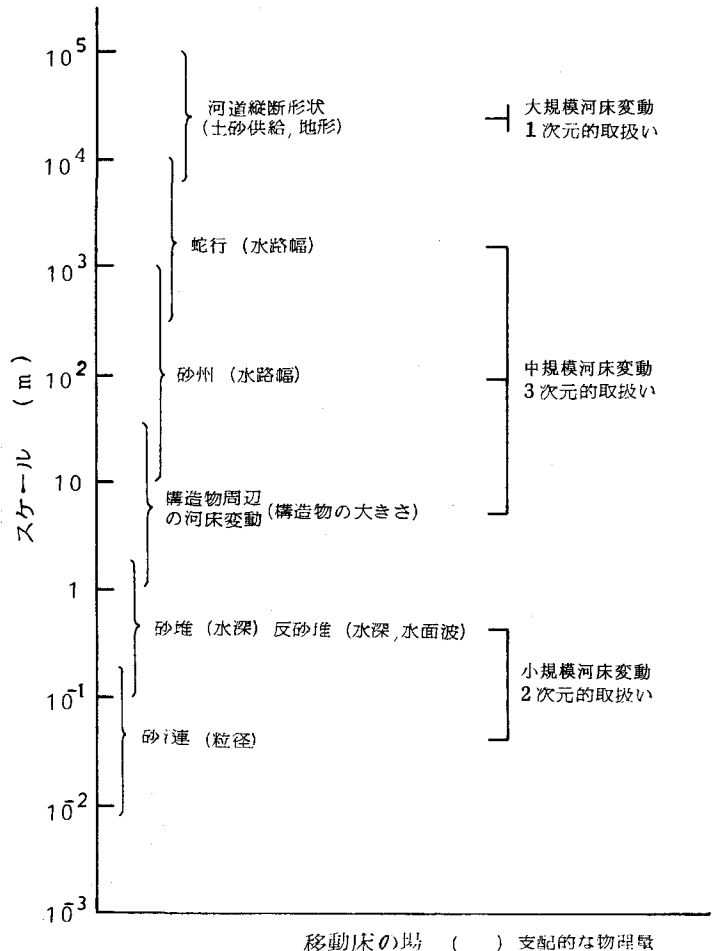


図1 河床変動の種類とそのスケール

径や流れの水深のオーダーで、最も小規模なスケールの河床変動である。その発生機構に関しては、安定理論を用いた解析法が主流をなしており、その詳細は水理委員会の報告書¹⁾に述べられている。この小規模河床変動は、流れの抵抗の増減と流砂量の変化に寄与している。したがって、移動床の流れ

を取扱うにあたっては、この河床変動の特性が明らかにされていないと、精度の高い解析は不可能といっても過言ではなからう。

中規模河床変動としては、砂州や蛇行、河川構造物周辺の局所洗掘などが上げられる。一般に、この種の河床変動は、三次元的な拡がりをも有し、かつそのことが重要な意味を持つ場合が多い。なぜ三次元性が強調されるかといえば、流れの中に設置された構造物が流れに影響を及ぼし、それによって河床変動が惹起されるためであろう。したがって、このような場での河床変動の特性的スケール、例えば砂州の波長や橋脚周辺の最大洗掘深の記述には、構造物のスケールが導入されなければならない。このような中規模河床変動のスケールは、流れの特性量、河床材料の特性量及び構造物のスケールで規定されるが、その最終的狀態（平衡狀態）では、構造物のスケールで比較的統一的に記述されることが多くの実験や観測から知られている。例えば、砂州や蛇行の波長 l_B や橋脚周辺の最大洗掘深 Z_s はそれぞれ次式のように表される。²⁴³⁾

$$l_B = (7 \sim 15) B \quad (1)$$

$$Z_s \approx 1.5 D \quad (2)$$

ここに、 B 、 D ：それぞれ水路幅及び橋脚径を表す。このように、中規模河床変動の特性的スケールが構造物のスケールで大きめに記述できる点は興味深い。以上の河床変動は、河川構造物、例えば護岸、橋脚や床固め工などの安定性に密接に関係しており、工学的には今後最も検討されなければならない分野であろう。

大規模河床変動は、河川の上下流の境界条件の変化や河川改修などに起因して発生する。例えば、ダムを築造すると、ダムからの流砂量の供給が停止するので、ダム下流域では河床低下と河床砂礫の粗粒化現象（armouring）が現れ、その影響は数 km から数 10 km に及ぶ。これは断面間の流砂量の不均衡に基づく巨視的な河床変動で、河川の流れを人為的に変えたり、巨大な自然力が働いた場合に生じる。このような大規模河床変動は、スケールの大きい現象であるので、一次元解析法が適用され、流砂量式の精度が高ければ、それをかなりの精度で解析できる。この種の河床変動の予測は、河道計画を立てる場合に重要な役割を演ずる。

2. 大規模河床変動の実態

河川の河床変動には、前述したように、種々のスケールの現象が含まれるので、短期間の資料から巨視的な河床変動を把握することは困難である。村本⁴⁾は、長期的な河床変動の推移を検討するために、昭和45年を基準として淀川及び石狩川の年平均低水位の経年変化を図2のように表した。これは河床高を直接表したものではないが、年平均低水位の変化より河床変動のおよその傾向は把握できる。

淀川については、大正10年以前はほぼ平衡状態、大正10年～昭和15年は低下傾向、昭和15年～25年

は平衡状態及び昭和35年以降は再び低下傾向を示しており、枚方地点では大正10年以前に比べて現在約 2.5 mの

河床低下をきたしている。河床低下の原因は大正10年～昭和15年では低水路の整備、昭和35年以降は主として砂利採取に起因しており、それ以外の期間は人為的な影響が少なかったため、河床は安定している。

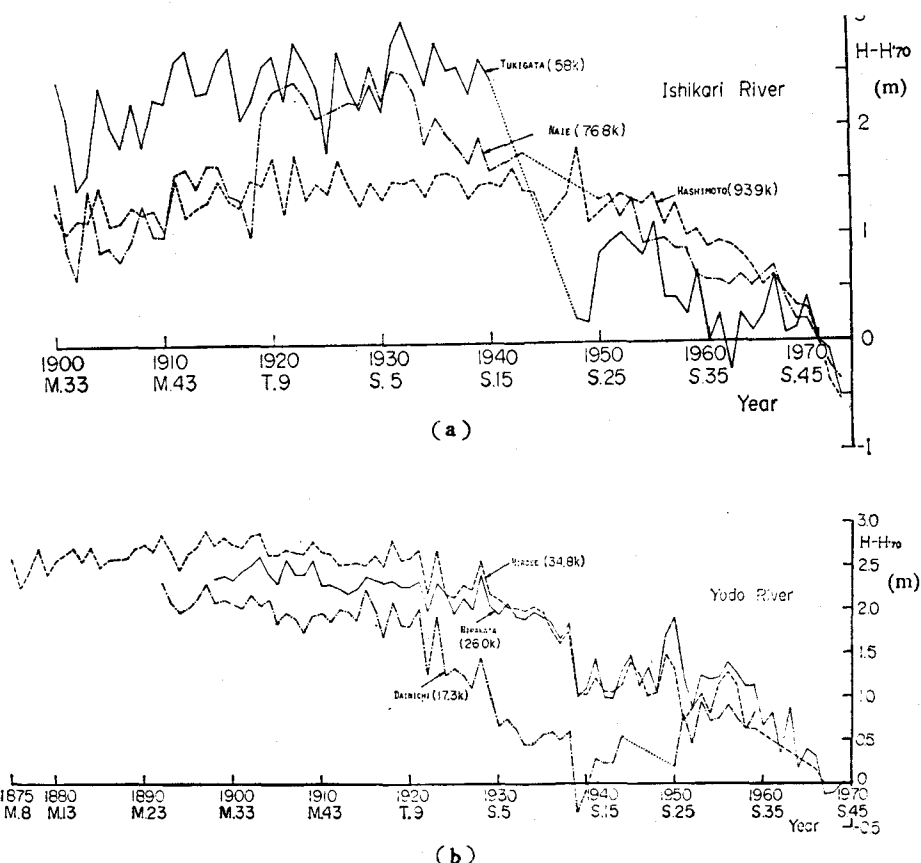


図2 年平均低水位の経年変化(村本による)

一方、石狩川においては、明治31年及び37年に大洪水があって、それまでは未改修であった上流部の築堤と護岸工事が行われたことにより、大正10年頃まではわずかながら河床上昇の傾向が見られる。昭和5年～15年の河床低下は、大正7年から始められた捷水路工事に起因していると考えられている。さらに、昭和30年頃からの急激な河床低下は、淀川の場合と同様に砂利採取によって惹起されたものであると考えられている。

このように、河床低下の大きな原因は、河道改修、砂利採取さらにはダム の築造による供給砂量の減少によるものなどが上げられ、巨大な人為的影響に負っている。

一方、河床上昇は天竜川の泰阜ダムのように、流砂の多い河川にダムが築造され、その上流域が背砂現象の影響を受ける場合や、あるいは上流域の大崩壊のため、生産土砂量が急増した場合に起る。

全国的な視野での河床変動の実態を把握するため、60の一級河川の最近の資料が図3にまとめられている。⁴⁾ この図は、河川の平均河床高、最深部河床高及び年平均低水位の資料を用いて、下流部における河床高の変化速度Wの概略値を示したものである。資料の期間は昭和35年～47年にわたって

いる。河床低下速度が1 cm / year 以下の河川が68%を占めており、河床上昇速度が1 cm/year 以上の河川は10%に過ぎない。かつて、河床上昇が問題となっていた北陸地方の諸河川もすべて低下傾向になっており、河川への人為的な影響が大きいことを物語っている。しかし、最近では多くの河川で砂利採取が禁止されているので、この低下傾向は緩和されつつある。

昭和40年～44年の砂利採取許可量の平均値から、全国平均の砂利採取量を求めると、約190 m³ / km² · year となり、一方当時の年間の全国平均ダム堆砂量は約160 m³ / km² · year（年堆砂量を国土面積で除した値）となっている。生産土砂量は、全国平均で約480 m³ / km² · year と言われ

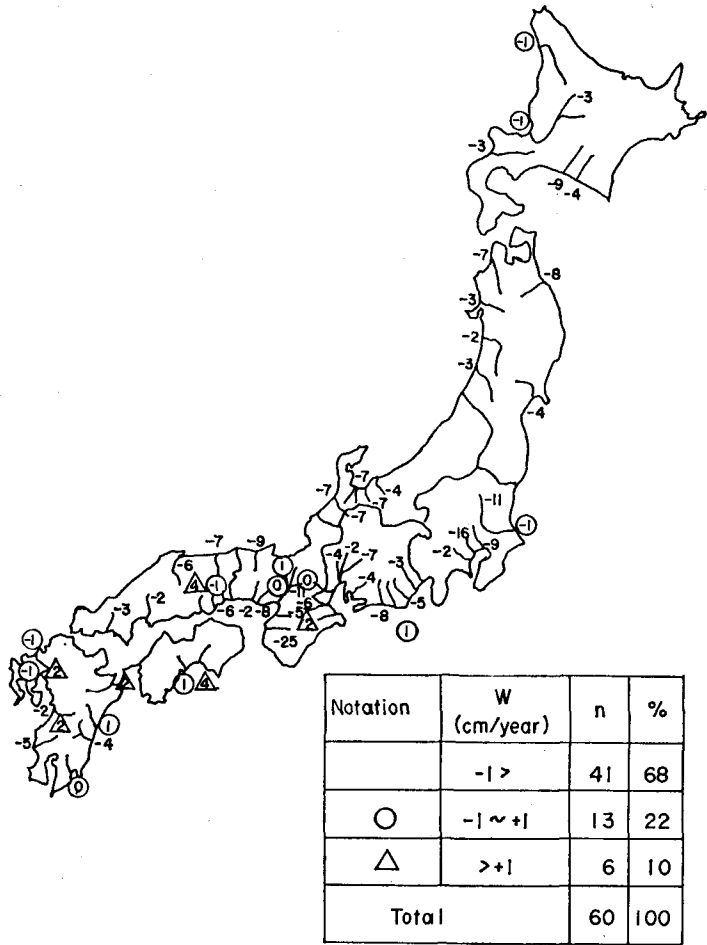


図3 河床高の変化速度の概略値（村本による）

ており、砂利採取とダム堆砂が河床低下に大きな影響を及ぼしたことは容易に推測される。こうした河床低下は、洪水の疎通能力の増大という利点をもたらすが、一方では、取水機能の障害、護岸・橋脚等の根入れ不足、塩水の遡上や地下水位の低下、及び海岸侵食といった災害を惹起する。

最近では、砂利採取はかなりの河川で禁止されているものの、ダムや砂防ダムの計画が立てられているため、こうした河床低下の傾向は続くものと予想され、長期的な大規模河床変動の予測が必要であろう。

3. 大規模河床変動

3.1 基礎方程式

河床変動は二断面間の流砂量の不均衡のために生じる現象である。このような流砂量の不均衡は、

上下流の境界条件の変化や流れの掃流力の変化によって作られるので、ある境界条件のもとで流水と流砂量に関する方程式を連立して解かなければならない。

一般に河床変動の変化速度は流水の時間的変化に比べて緩慢であるので、流水に関する運動方程式では時間に関する項が省略され、流砂に関する方程式においてのみ時間に関する項が考慮される。

流水の運動方程式および連続式は、図4を参照すると、次式のように表される。

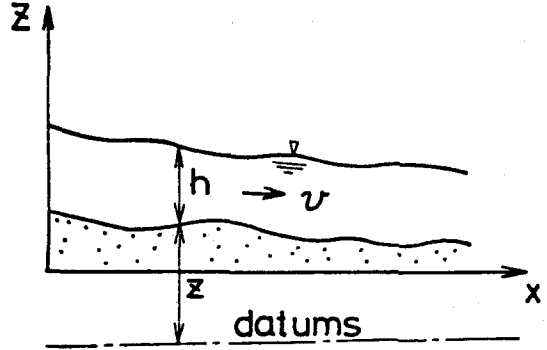


図4 記号説明図

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{u_*^2}{gR} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (B h v) = 0 \quad (4)$$

ここに、 v ：断面平均流速、 x ：流下距離、 z ：基準面からの河床高、 g ：重力加速度、 h ：水深、 R ：径深、 u_* ：摩擦速度、 B ：水路幅である。

一方、流砂に関しては、掃流砂が卓越した流れであると仮定すれば、次のように記述される。

$$q_{bi} = f(u_*, i_b, d_i, \text{other parameters}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial (q_B B)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$q_B = \sum_i q_{bi} \quad (7)$$

ここに、 q_{bi} ：粒径 d_i の砂礫の流砂量、 i_b ：粒径 d_i の砂礫が河床の交換層において占める割合、 λ ：空隙率、 q_B ：混合砂礫の全流砂量、 t ：時間を表す。ここでは、混合砂礫の掃流砂を対象にするので、各粒径ごとの連続式が必要になる。これに関して、平野⁵⁾は次式の関係を誘導している。

河昇上昇 $\partial z / \partial t \geq 0$ ：

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = \frac{1}{a} (i_B - i_b) \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{q_B}{a(1-\lambda)} \frac{\partial i_B}{\partial x} \quad (8)$$

河床低下 $\partial z / \partial t < 0$ ：

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = \frac{1}{a} (i_b - i_{b0}) \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{q_B}{a(1-\lambda)} \frac{\partial i_B}{\partial x} \quad (9)$$

ここに、 i_B, i_{b0} : それぞれ粒径 d_i の砂礫が流砂中および交換層直下の元河床において占める割合、 a : 交換層の厚さである。

混合砂礫河床では、相対的に大きい砂礫は小さい砂礫より動きにくいので、平均粒径より大きい粒径では、 i_b は i_b や i_{b0} より小さく、平均値より小さい粒径では、 i_B は i_b や i_{b0} より大きくなる。したがって、式(8)と(9)の右辺第1項は、河床上昇の場合、平均粒径より大きい粒径に対して負、平均粒径より小さい粒径に対して正となり、河床低下の場合はその逆となる。このことより、河床砂は河床低下の場合に粗くなって armour される傾向、河床上昇の場合に細粒化される傾向にあることが知れる。

混合砂礫床の河床変動を求めるには、式(3)～式(7)を連立して計算すればよく、その過程で河床砂礫の粒度分布も計算される。ただし、河床砂が一様分布に近い状態では式(8)と(9)は不要で、流砂量式の式(5)は一様砂のそれが用いられる。式(5)の流砂量式としては、種々の関数形が提案されており、よく用いられる式を挙げると次のようである。

Meyer - Peter · Müller の式⁶⁾

$$\Phi = 8 (\tau_{*e} - 0.047)^{3/2} \quad (10)$$

ここに、 $\Phi = q_B / \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}$, $\tau_{*e} = u_{*e}^2 / (\sigma/\rho - 1)gd$, $u_{*e} = (n_b/n)^{3/4} u_*$, n_b : 砂粒抵抗を表す Stlickler 型の粗度係数で、 $n = 0.0192 d_{90}^{1/6}$ (n : m · sec 単位, d_{90} : cm 単位) n : 流れ全体の粗度係数, σ/ρ : 砂と水の密度比, d : 粒径を表す。

篠原・椿の式⁷⁾

$$\Phi = 25 \tau_{*e}^{1.5} (\tau_{*e} - 0.8 \tau_{*c}) \quad (11)$$

ここに、 $u_{*e} = u_* \sqrt{\varphi'/\varphi_0}$, $\varphi' = v/u_*$, $\varphi_0 = 6.0 + 5.75 \log_{10} (R/d_{65})$
 $\tau_{*c} = u_{*c}^2 / (\sigma/\rho - 1)gd$, u_{*c} : 砂礫の移動限界摩擦速度, d_{65} : 河床砂の65% 粒径である。

佐藤・吉川・芦田の式⁸⁾

$$\Phi = \varphi F(\tau_0/\tau_c) \tau_*^{3/2} \quad (12)$$

ここに、 $F(\tau_0/\tau_c)$: τ_0/τ_c の関数で0～1の値をとる, $\tau_0 = \rho u_*^2$, $\tau_c = \rho u_{*c}^2$,
 $\tau_* = u_*^2 / (\sigma/\rho - 1)gd$, $\varphi : n \geq 0.025$; $\varphi = 0.62$, $n \leq 0.025$; $\varphi = 0.62 (40n)^{-3.5}$ の値が実験値から得られている。

芦田・道上の式⁹⁾

$$\frac{q_{bi}}{i_b u_{*e} d_i} = 17 \tau_{*ei} \left(1 - \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*i}}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*i}}}\right) \quad (13)$$

ここに、 q_{bi} : 粒径 d_i の砂礫の流砂量、 $v/u_{*e} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{R}{d_m(1+2\tau_{*})}$,
 $\tau_{*ei} = u_{*e}^2 / (\sigma/\rho - 1) g d_i$, $\tau_{*i} = u_*^2 / (\sigma/\rho - 1) g d_i$, $\tau_{*ci} = u_{*ci}^2 / (\sigma/\rho - 1) g d_i$,
 $u_{*ci}^2 : d_i/d_m \geq 0.4 ; u_{*ci}^2 / u_{*cm}^2 = \{ \log_{10} 19 / \log_{10} (19 d_i/d_m) \}^2 \cdot d_i/d_m$,
 $d_i/d_m < 0.4 ; u_{*ci}^2 / u_{*cm}^2 = 0.85$, ただし、 $u_{*cm}^2 / (\sigma/\rho - 1) g d_m \doteq 0.05$, d_m : 河床砂の平均粒径である。

式(13)は混合砂の流砂量式であるが、これを $d_i = d$ 及び $i_b = 1$ とすれば一様砂の流砂量式になることは言うまでもない。また、式(13)と類似した混合砂の流砂量式には、平野の式¹⁰⁾やEinsteinの式¹¹⁾がある。以上の流砂量式の特徴は、河床波の影響を補正する有効摩擦速度という概念が含まれていることである。

3.2 河床変動の特性

河床変動の特性を明らかにするため、河床高や粒度分布の擾乱の伝播特性を検討する。流れの運動方程式(3)と連続式(4)より、次式のような不等流の式が導びける。

$$(1 - F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = F_r^2 \frac{h}{B} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{u_*^2}{gR} \quad (14)$$

ここに、 F_r : フルード数で $F_r = v/\sqrt{g h}$

式(6)より、全流砂の連続式は次のように変形できる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)} \frac{\partial q_B}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{q_B}{(1-\lambda)B} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (15)$$

また、各粒径ごとの砂粒の連続式は、次式のように変形できる。

河床上昇：

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = - \frac{1}{a(1-\lambda)} \left\{ \frac{\partial (q_{bi} B)}{\partial x} - i_b \frac{\partial (q_B B)}{\partial x} \right\} \quad (16)$$

河床低下：

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} = - \frac{1}{a(1-\lambda)} \left\{ \frac{\partial (q_{bi} B)}{\partial x} - i_{b0} \frac{\partial (q_B B)}{\partial x} \right\} \quad (17)$$

各粒径ごとの流砂量式が、河床砂の粒度の割合と水理量の関数の積で表されるとすれば、

$$q_{bi} = i_b f_i \quad (18)$$

のように書け、式(18)を式(17)に代入して整理すれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_b}{\partial t} + \frac{1}{a(1-\lambda)} f_i \frac{\partial i_b}{\partial x} + \frac{1}{a(1-\lambda)} (i_b \frac{\partial f_i}{\partial h} - i_{b0} \frac{\partial q_B}{\partial h}) \frac{\partial h}{\partial x} \\ = - \frac{1}{a(1-\lambda)B} (i_b f_i - i_{b0} q_B) \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned} \quad (19)$$

ここでは、河床低下の場合だけを対象にしているが、河床上昇の場合には i_{b0} の代りに i_b を用いれば (19) 式に類似な式が得られる。

さらに、 h 、 z 、 i_b に関する全微分の恒等式はそれぞれ次式のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} dx = dh \quad (20)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial x} dx = dz \quad (21)$$

$$\frac{\partial i_b}{\partial t} dt + \frac{\partial i_b}{\partial x} dx = di_b \quad (22)$$

式 (14)、(15)、(19)、(20)～(22) をマトリックス表示すれば、次のように表される。

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 1 & \delta \\ dt & dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \partial h / \partial t \\ \partial h / \partial x \\ \partial z / \partial t \\ \partial z / \partial x \\ \partial i_b / \partial t \\ \partial i_b / \partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon \\ \zeta \\ \eta \\ dh \\ dz \\ di_b \end{vmatrix} \quad (23)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - F_r^2, \quad \beta = \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_b}{\partial h}, \quad r = \frac{1}{a(1-\lambda)} \left(i_b \frac{\partial f_i}{\partial h} - i_{b0} \frac{\partial q_b}{\partial h} \right), \\ \delta &= \frac{1}{a(1-\lambda)} f_i, \quad \epsilon = F_r^2 \frac{h}{B} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{u_*^2}{gR}, \quad \zeta = - \frac{q_b}{(1-\lambda)B} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \eta &= - \frac{1}{a(1-\lambda)} (i_b f_i - i_{b0} q_b) \frac{\partial B}{\partial x} \end{aligned}$$

式 (23) の左辺のデターミナント Δ を計算して、 $\Delta = 0$ を求めると、それぞれの擾乱の伝播速度が与えられる。

$$\Delta = dt(\alpha dx + \beta dt)(dx - \delta dt) \quad (24)$$

また、 $\Delta = 0$ より

$$(dt)_h = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)_h \rightarrow \infty \quad (25)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_z = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{(1-F_r^2)(1-\lambda)} \frac{\partial q_b}{\partial h} \quad (26)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{i_b} = \delta = \frac{1}{a(1-\lambda)} f_i \quad (27)$$

このような式は、古くは岩垣¹²⁾さらに de Vries¹³⁾ 鈴木¹⁴⁾黒木¹⁵⁾によって検討されており、その物理的意味は次のようである。式(25)は水深の擾乱の伝播速度を表し、これは無限大になっているが、本来この伝播速度は $v \pm \sqrt{gh}$ にならなければならない。しかし、基礎式の項で述べたように、河床変動の非定常性と水流のそれとを比較して、前者のそれが非常に緩慢であるので、水流の非定常項を無視したため、このような結果になっている。

次に河床高の擾乱の伝播速度は、全掃流量が平均粒径を代表粒径とする一様砂の流砂量式に等しいと仮定して、流砂量式として式(13)を用いれば、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)_z = -\frac{\beta}{\alpha} = & \frac{1}{(1-F_r^2)(1-\lambda)} \frac{17 u_{*c}^2}{(\sigma/\rho-1)gh} \left[3\left(1-\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right)\left(1-\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right) \right. \\ & \left. + \frac{7}{3} \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} \left(1-\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right) + \frac{7}{6} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \left(1-\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right) \right] \quad (28) \end{aligned}$$

ただし、上式の誘導に際して、Manning の抵抗則を用い、水深の変化に対して Manning の粗度係数は変化しないものと仮定している。式(28)より、右辺の〔 〕の項は流砂が存在するときには正になるので、 $(dx/dt)_z$ の符号は、 $F_r < 1$ 、すなわち常流では正で、擾乱は下流に伝播し、 $F_r > 1$ すなわち射流では負で上流に伝播する。もちろん、このような特性曲線上で河床変動高を計算することができるが、このような特性曲線法による数値計算よりも、一般の差分式の方が計算が容易であるので、ここでは特性曲線法による解析についてはその説明を省略する。

さらに、粒度分布の擾乱は、式(27)に流砂量式(13)を代入すると、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{i_b} = \delta = \frac{1}{a(1-\lambda)} \frac{17 u_{*c}^3}{(\sigma/\rho-1)g} \left(1-\sqrt{\frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*i}}}\right) \quad (29)$$

のようになり、これは常に正で、下流向きに伝播する。

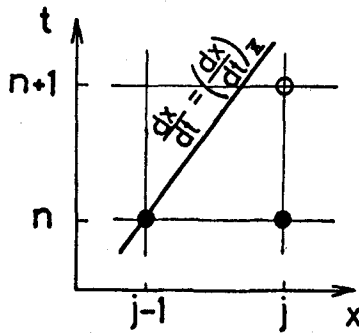
3.3 河床変動の計算法

河床変動は、前項で述べた式を差分化して、逐次計算を進めていけば、原理的に求まるが、差分式の解法においては、一致性、収束性および安定性が考慮されなければならない。とくに、安定性が満足されないと、差分式の解は発散してしまって計算不能になる。

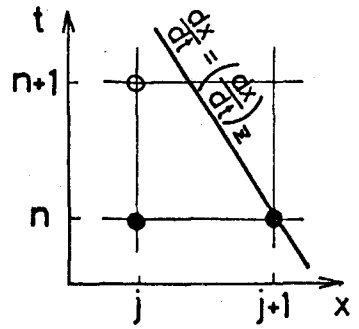
最初に河床高の変動について考察すると、3.2の項で述べたように、河床の微小擾乱の伝播速度の向きはフルード数1を境にして変化するので、次のように分けて考える。

- 1) $F_r < 1$: 特性曲線 $(dx/dt)_z$ は図5(a)に示すように正となり、C.F.L.条件 (Courant - Friedrichs - Lewy condition) より、 Δt 時間後の河床高 Z_j^{n+1} は $(j-1)^n$ と $(j)^n$ の諸量より決

定され、差分スキームの取り方は距離に関して後退差分、時間に関して前進差分としなければならない。また、 Δt と Δx の間には、次の関係が満足されなければならない。



(a) $Fr < 1$



(b) $Fr > 1$

図5 特性曲線と差分スキームの関係

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left| \left(\frac{dx}{dt} \right)_z^{-1} \right| \quad (31)$$

つぎに、河床砂の粒度分布に関する数値計算では、その特性曲線は常に正で下流向きであるので、上述した理由より、差分スキームの取り方は、距離に関して後退差分とし、もちろん時間に関しては前進差分を用い、かつ次の条件を満足するように Δt 、 Δx を選定しなければならない。

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left(\frac{dx}{dt} \right)_{i_b}^{-1} \quad (32)$$

差分スキームの取り方およびその大きさについて述べてきたが、河床高と粒度分布を同じ差分スキームで計算する場合には、次式のように Δt と Δx をとればよい。

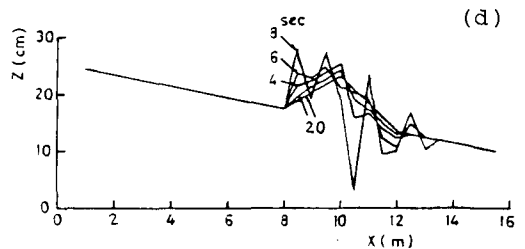
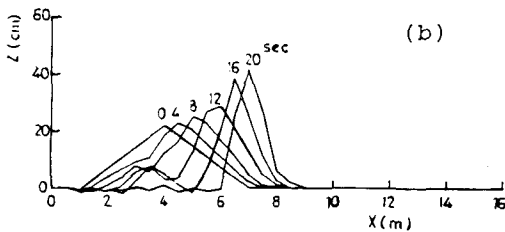
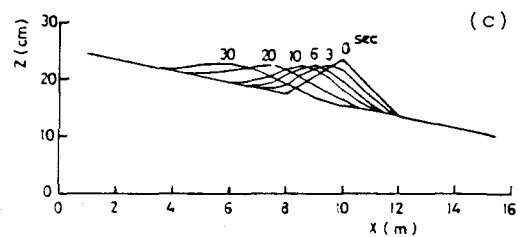
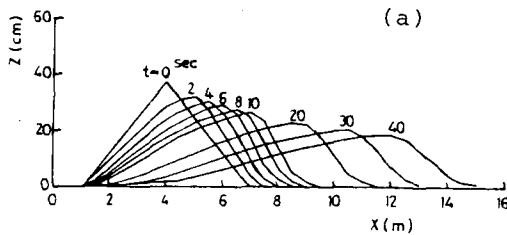


図6 差分スキームの相違による河床変動の不安定性(黒木らによる)

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \min \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)_z^{-1}, \left(\frac{dx}{dt} \right)_{i_b} \right) \quad (33)$$

黒木ら¹⁵⁾は、このような条件を用いて、均一砂の場合の河床変動の数値実験の結果を図6のように表している。図6(a), (b)は流れが常流で、(a)は距離に関して後退差分、(b)は中央差分で計算されており、後退差分を採用しないと計算が不能になっている。一方、(c), (d)は流れが射流で、(c)は前進差分、(d)は後退差分で計算されている。ここでも、同様に前進差分を採用しないと、計算が不能になる。これらより、特性曲線の性質を利用して求めた差分スキームを選定しなければならないことが理解されよう。従来は経験的に差分スキームを選定していたが、このような方法を用いると、それを容易に決定することができよう。

したがって、河床変動を計算するには、まず式(14)より、水面形を計算し、水深、エネルギー勾配、断面平均流速を求め、これらの諸量より、各地点の流砂量を式(13)または他の流砂量式で計算する。式(15)と式(17)を上述の方法で差分化すると次のように書け、これを用いて河床変動と粒度分布を計算する。(但し、ここでは河床低下の場合のみを対象にしているが、河床上昇を取り扱うときには、 i_{b0} の代りに i_b を用いればよい。)

$$Fr < 1: \frac{Z_j^{n+1} - Z_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{(1-\lambda)(B_{j-1}^n + B_j^n)/2} \frac{(q_B B)_j^n - (q_B B)_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{i_{bj}^{n+1} - i_{bj}^n}{\Delta t} + \frac{1}{a(1-\lambda)(B_{j-1}^n + B_j^n)/2} \left\{ \frac{(q_{Bi} B)_j^n - (q_{Bi} B)_{j-1}^n}{\Delta x} - i_{b0} \frac{(q_B B)_j^n - (q_B B)_{j-1}^n}{\Delta x} \right\} = 0 \quad (35)$$

$$Fr > 1: \frac{Z_j^{n+1} - Z_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{(1-\lambda)(B_j^n + B_{j+1}^n)/2} \frac{(q_B B)_{j+1}^n - (q_B B)_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{i_{bj}^{n+1} - i_{bj}^n}{\Delta t} + \frac{1}{a(1-\lambda)(B_{j-1}^n + B_j^n)/2} \left\{ \frac{(q_{Bi} B)_j^n - (q_{Bi} B)_{j-1}^n}{\Delta x} - i_{b0} \frac{(q_B B)_j^n - (q_B B)_{j-1}^n}{\Delta x} \right\} = 0 \quad (37)$$

ここに、添字 j , n はそれぞれ距離および時間軸の差分メッシュを表す(図5を参照)。さらに、これらの差分式を計算するには、 Δt と Δx が式(33)を満足するように選ばなければならない。

3.4 河床変動の計算例

黒木ら¹⁵⁾は、十勝川の中流部、千代田堰堤と八線床止工の区間の河床変動を上記のような条件で計算して、図7のような結果を得た。具体的な計算は次のようにして行われた。

- 1) 混合河床として取扱い、流砂量式として平野の式を用いる。
- 2) 断面は長方形で近似する。

3) 流量は日流量を用いる。

4) 上流端の千代田堰堤から越砂は模型実験より流量が $3000 \text{ m}^3/\text{sec}$ 以下では0となることを確かめて、それを上流端の境界条件とした。

図7より、ダム下流部の河床低下の状況は、このような数値計算によってよく表されていることがわかる。また、図8はこの期間の主要な流量と河床砂の平均粒径の計算値を示したものであるが、河床低下に伴って Armour Coat が形成されていく様子や昭和47年(1972)の出水によって Armour Coat が破壊され、再びそれが形成されていく様子が計算でよく表現されている。

図9は、道上ら¹⁶⁾によって計算された斐伊川の伊萱床止め付近の河床変動である。この河床変動の計算においては、河床砂の粒度分布を一様と仮定し、上流からの供給砂量は本川からは大きな砂防ダムによって阻止されるため0とし、支川から一部存在するという条件で計算されたものであり、計算値は実測値とよく対応している。図10は定期横断測量から求められた河道に沿う土砂収支図であり、図11は上述の数値計算より求められた土砂収支図である。この二つの図の比較より、昭和52年と53年は観測

値と実測値はよく一致しており、数値シミュレーションの結果がかなり精度の高いことが理解されよう。しかし、昭和51年の資料に関しては、両者の対応はあまりよくないが、これは砂利採取で河道が不規則になっていたため、測量の精度があまり高くないのではないかと推察される。

このように、上・下流の境界条件を精度よく与え、適当な流砂量式を用いれば、巨視的な河床変動を数値計算によって求めた結果は実際河川のそれとよく一致する。

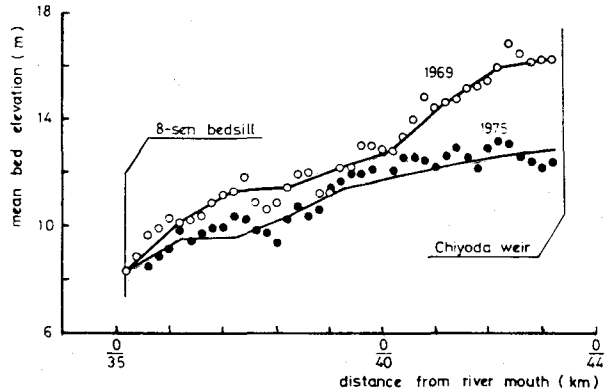


図7 十勝川中流部の河床変動の計算値と実測値の比較(黒木らによる)

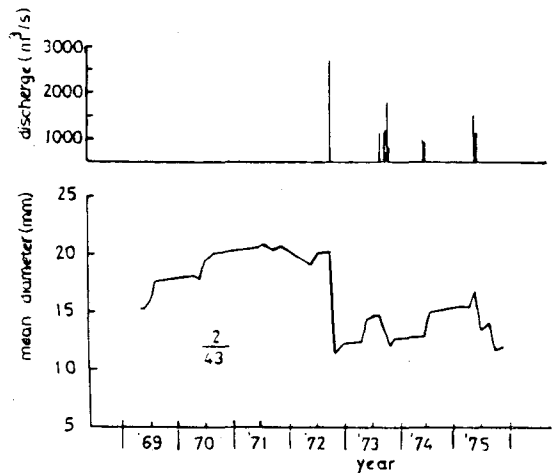


図8 主要な流量と河床砂の平均粒径

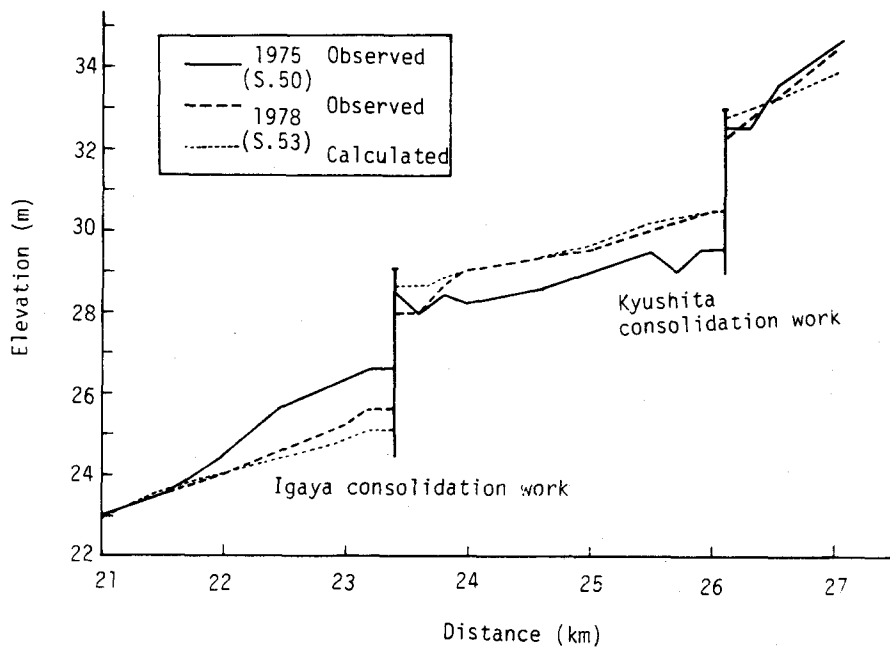


図9 斐伊川の伊萱床止め付近の河床変動
の数値計算結果と実測値の比較

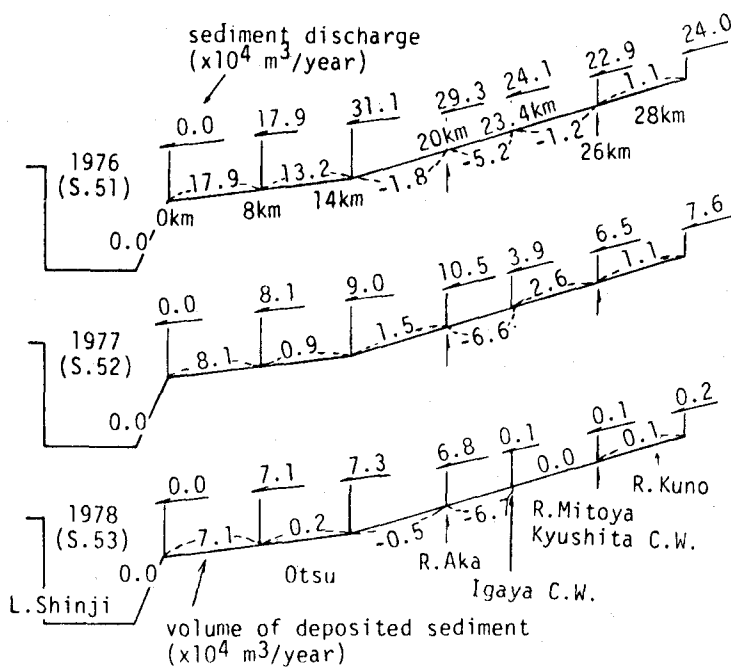


図10 斐伊川の定期縦横断測結果より求めた
土砂収支図

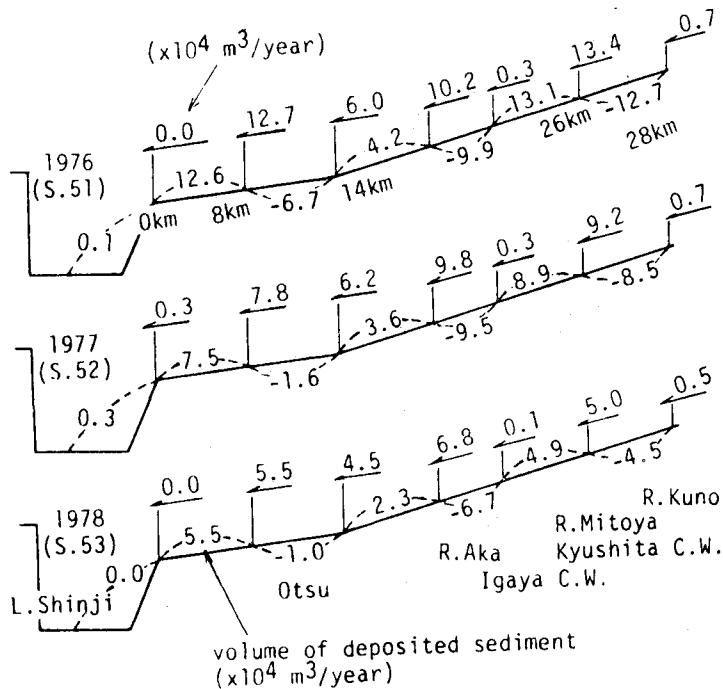


図11 数値シミュレーションから
求めた土砂収支図

3.5 拡散型方程式による解法

一般に人為的な影響が加わらなければ、河道の縦断形状は平衡河床形状を呈している。しかし、上下流の河道の境界条件を変更すると、その平衡状態は破れ、新しい境界条件に対応した縦断形状へと遷移していく。このような河床変動を解析するにあたって、以下に示す拡散型方程式はしばしば有用である。

広幅一様水路を対象にして、式(14)を x に関して偏微分し、Manningの抵抗則、 $u_* = nQg^{1/2} / (Bh^{7/6})$ をこれに代入すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{10}{3} \frac{u_*^2}{gh^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial L(x)}{\partial x} \quad (38)$$

ここに、

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x} = (1 - F_r^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 3 \frac{A^2 u_*^2}{gh^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

$A = v / u_*$ である。芦田¹⁷⁾によって検討されているように、 $\partial h / \partial x$ が1/1000程度よりも小さく、河床変動が大スケールの場合には、式(38)の右辺第2項は第1項に比べて無視しうると考えられる。このような擬似等流を仮定すれば、流れの運動方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{10}{3} \frac{u_*^2}{gh^2} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (39)$$

流砂量式として、佐藤・吉川・芦田の式(12)を用い、これを流砂の連続式(6)または(10)に代入して、Manning の抵抗則と式(39)を用いると、次のように変形できる。

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{21}{20} \frac{1}{1-\lambda} \varphi F \cdot \frac{u_* h}{(\sigma/\rho-1)} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{u_*^3}{(\sigma/\rho-1)g} \frac{\partial(\varphi F)}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

上式において、 φ および F が x に関して一定であると仮定すれば、次の拡散型方程式が導びかれる。

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = K \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad (41)$$

ここに、

$$K = \frac{21}{20} \frac{1}{1-\lambda} \varphi F \frac{q}{(\sigma/\rho-1)A} \quad (42)$$

$q = v h$ である。また、芦田・道上の式(13)を用いるとき、拡散係数 K は、

$$K = 17.8 \frac{q A_1^3}{(\sigma/\rho-1)A} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\right) \quad (43)$$

ここに、 $A_1 = A / [6.0 + 5.75 \log_{10} \{R/d_m (1 + 2\tau_*)\}]$ のように書ける。¹⁸⁾

式(41)が河床変動に関する拡散型方程式で、この式は足立、¹⁹⁾江崎、²⁰⁾芦田、²¹⁾de Vries²²⁾および芦田・道上²³⁾によって検討されている。

1) 下流端水位低下による河床変動

河口の水位をある時刻から急激に低下させた時、新しい平衡縦断形状へどのような時間的過程で漸近するかを検討しよう。いま、河床高 Z を基準河床からの変化量とし、初期条件および境界条件をそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} Z(x, t) |_{t=0} &= 0 \\ Z(x, t) |_{x=0} &= Z_0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

とすると、式(41)の半無限の解は次式のようになる。

$$Z = \frac{-x Z_0}{2\sqrt{K\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4K(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \quad (45)$$

さらに、変数変換を行って次式をうる。

$$\frac{Z_0 - Z}{Z_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_0} e^{-\tau^2} d\tau \quad (46)$$

$$T_0 = -\frac{x}{2\sqrt{Kt}} \quad (47)$$

この解は、流量などを一定に保って、下流端水位を Z_0 低下させ、それに伴って河床高が Z_0 低下する場合の下流端境界条件の上流への伝播を表したものである。芦田²¹⁾はこのような解に基づいて河床変動の特性を次のように論じている。

i) 任意の点で $t \rightarrow \infty$ とすると $Z = Z_0$ となる。すなわち、河床は元河床より Z_0 だけ低下して、元の河床に平行になる。

ii) 河床が微小低下量 ε になるときの x および t の値は式 (46) より、

$$\int_0^{T_1} e^{-r^2} dT = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{Z_0} \right), \quad T_1 = -\frac{x}{2\sqrt{Kt}} \quad (48)$$

を満足する。これより、下流端境界条件の変化が上流へ伝播する速度は、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2T_1^2 K}{x} \quad (49)$$

となる。

iii) 式 (42) を参照して、 $K = K_0 q$ と表すとき、 $K_0 = \frac{21}{20} \frac{1}{1-\lambda} \varphi F \frac{1}{(\sigma/\rho - A)}$ となるが、このような K を用い

て河床低下に関する

実験と理論の比較を試みた。図12は両者の比較を表したもので、両者はかなりよく一致している。なお、実験条件として、

A-2 の場合 $n =$

0.018, $u_* = 4 \text{ cm/sec}$,

$v = 34 \text{ cm/sec}$, D-

3 の場合 $n = 0.0182$,

$u_* = 4 \text{ cm/sec}$, $v = 38.2 \text{ cm/sec}$ である。

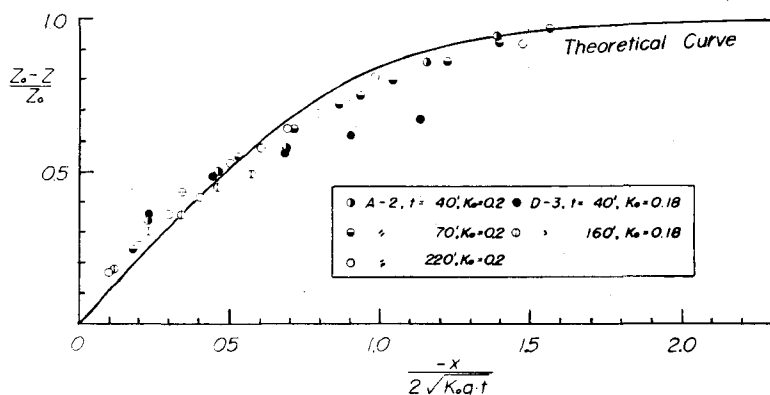


図12 下流端水位を低下させた場合の河床変動の理論値と実験値の比較(芦田による)

2) ダム下流部の河床低下

ダムを構築すると、給砂量が停止するので、ダム下流部では顕著な河床低下が生じる。この種の問題は、上流端境界条件の変化によって、下流部の河床変動がどのように生じるかという問題を解くことに帰着する。上流端境界条件は給砂が存在しないという条件から、河床勾配が砂礫の移動限界勾配に等しくなると考えられ、次式のように表される。

$$\left. \frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = i_0 - i_c \quad (50)$$

ここに、 i_0 : 基準の河床勾配、 i_c : 混合砂礫中の最大粒径に対応する移動限界勾配である。
初期条件を

$$Z(x, t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (51)$$

として与えるとき、式(41)の拡散型方程式の半無限の解は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} Z &= -2(i_0 - i_c) \sqrt{Kt} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-T_0^2) - T_0 \operatorname{erfc}(T_0) \right\} \\ \text{ここに,} \\ T_0 &= \frac{x}{2\sqrt{Kt}}, \quad \operatorname{erfc}(T_0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{T_0} \exp(-T^2) dT \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

である。これより、上流端における河床低下量 ΔZ は、

$$\Delta Z = 2(i_0 - i_c) \sqrt{\frac{Kt}{\pi}} \quad (53)$$

となり、時間の平方根に比例することになる。

以上は半無限の状態の解であるが、実際には床固めや堰などによって下流端の河床高が一定に保持される場合があるとともに、実験室においては有限区間の河床変動を取扱う場合が多い。このような場合には、前述の境界条件の他に、下流端 $x = l$ の地点の境界条件

$$Z(x, t) \Big|_{x=l} = 0 \quad (54)$$

を付加しなければならない。このような条件のもとでの式(41)の解は、

$$\begin{aligned} Z &= -(i_0 - i_c) \left[(l - x) - \frac{2}{l} \sum_{s=0}^{\infty} e^{-K\{(2s+1)\pi/2l\}^2 t} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{2l}{(2s+1)\pi} \right\}^2 \cos \frac{(2s+1)\pi x}{2l} \right] \quad (55) \end{aligned}$$

のようなフーリエ級数で表わされる。ここに、 l : 上流端と下流端との距離である。

芦田・道上²³⁾はこのような理論的考察を実証するため、上流端の給砂量を0とした場合の実験を行って、図13のように計算値と実験値を比較している。この計算条件は、 $K = 200 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $i_c = 0.005$, $i_0 = 0.020$, $q = 375 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $l = 7.0 \text{ m}$ である。図中の実線および点線は、それぞれ式(55)および(52)の理論値であり、下流端の影響が現れるまでの初期の河床低下過程では、両者は一致しているが、その後式(55)で表されるように河床低下が進行していることが、この図から理解される。

実際河川では流量が時間的に変化するが、このような場合、式(41)は次のように表される。

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = K(t) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad (56)$$

ここで、時間 t を $\eta = \int_0^t K(\tau) d\tau$ に変数変換すれば、式(56)は次式のように簡単に表され、

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{\partial Z}{\partial x^2} \quad (57)$$

前述したような境界条件に対しては類似な解が得られる。これより、河床変動の時間的スケールや空間的スケールが容易に求められるが、このような拡散型方程式は、河床変動の第1近似である点に留意しておかなければならない。

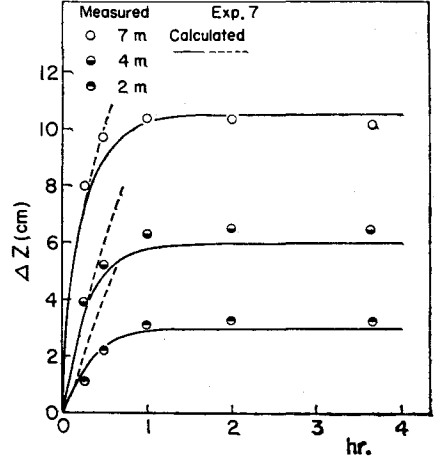


図13 上流端から給砂のない場合の河床低下量の理論値と計算値の比較

4. 浮遊砂を伴う河床変動

浮遊砂量が支配的な河床変動は、河口付近や航路などで問題になるが、この解析法は掃流砂の場合と若干性質を異にする。なぜならば、この解析では浮遊砂の非平衡性が検討されなければならない。

いま、浮遊砂濃度の2次元定常状態の分布は一般に次式で表される。

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial c}{\partial z} \right) + w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \quad (58)$$

ここに、 u ：流れ方向の局所流速、 c ：浮遊砂の濃度、 ϵ ：鉛直方向の拡散係数、 w_0 ：浮遊砂の沈降速度、 x, z ：それぞれ流れ方向および鉛直方向の座標軸を表す。式(58)を解くには、まず ϵ を決定しなければならないが、ここでは Kerssens の研究²⁴⁾を参考にして、次の分布形を用いる。

$$\left. \begin{aligned} z \leq 0.5 h : \epsilon &= 0.4 u_* h (z/h) (1 - z/h) \\ z > 0.5 h : \epsilon &= 0.1 u_* h \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

境界条件としては、

$$\text{水面条件 } z = h : \epsilon \frac{\partial c}{\partial z} + w_0 c \Big|_{z=h} = 0 \quad (60)$$

$$\text{河床条件 } z = a : \epsilon \frac{\partial c}{\partial z} + w_0 c \Big|_{z=a} = w_0 (c_a - c_s) \quad (61)$$

$$\text{上流端条件 } x=0: c/c_a = f_n(w_0/u_*, z/h, a/h) \quad (62)$$

を与える。ここに、 $a:0$ に近い数値で、河床付近の高さ、 c_a :河床付近の平衡状態の濃度で、 w_0/u_* の関数で近似的に表される。これらの境界条件の中で最も重要なものは河床条件であり、他の条件についてはあまり異論がないとされている。式(61)の河床条件は、河床付近の乱れによる flux $\varepsilon \partial c / \partial z |_{z=a}$ が平衡状態の flux と同じ値をとるものとして、これを $w_0 c_s$ で表し、重力による沈降量が $w_0 c_a$ で表されると考え、正味の flux を両者の和で表したものである。このような考え方は芦田²⁵⁾によって提案されている。これ以外の河床条件として、河床付近の浮遊砂は掃流砂に追従すると考え、水理量に変化してもただちにその水理量の平衡状態の濃度 c_s に遷移するという条件、すなわち $c_s = c_a$ が考えられる。²⁶⁾しかし、後者の条件は物理性に若干疑問が残るので、ここでは前者すなわち式(61)を用いている。なお、 c_s に関しては芦田・道上²⁷⁾の研究成果より、次式を用いた。

$$c_s = 0.025 \left\{ \frac{g(\xi_0)}{\xi_0} - G(\xi_0) \right\} \quad (63)$$

ただし、

$$g(\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi_0^2\right)$$

$$G(\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi$$

$$\xi_0 = \frac{4}{3} \frac{w_0}{u_{*e}}$$

式(58)を上境界条件のもとで、implicit method で数値計算を試みた結果が図14に示されている。²⁸⁾なお、水理条件としては、 $x=0$ の摩擦速度 u_{*0} と、下流側の摩擦速度 u_* との比、 $u_{*0}/u_* = 2.0$ 、 $w_0/u_* = 0.5$ 、流速係数 $v/u_* = 15$ 、 $u_* = u_{*e}$ としたときの濃度分布の計算結果が示されている。メッシュ間隔は、流れ方向には水深の長さ、鉛直方向には水深を9等分している。図から明らかなように、摩擦速度が原点のその1/2に変化したとき、平衡状態の濃度分布に近づくには、流下距離は約100 h 必要であることがわかる。水理条件が変化すると、非平衡状態の濃度分布がかなりの区間にわたるので、平衡状態の濃度分布式から算出された浮遊砂量式を用いて、河床変動を計算すると不合理な場合が生じる。

平衡状態への遷移距離 L は、こうした非平衡状態の式の考察より、次式のような無次元量で表される。

$$\frac{L}{h} = f_n\left(\frac{w_0}{u_*}, \frac{u_{*0}}{u_*}, \frac{v}{u_*}\right) \quad (64)$$

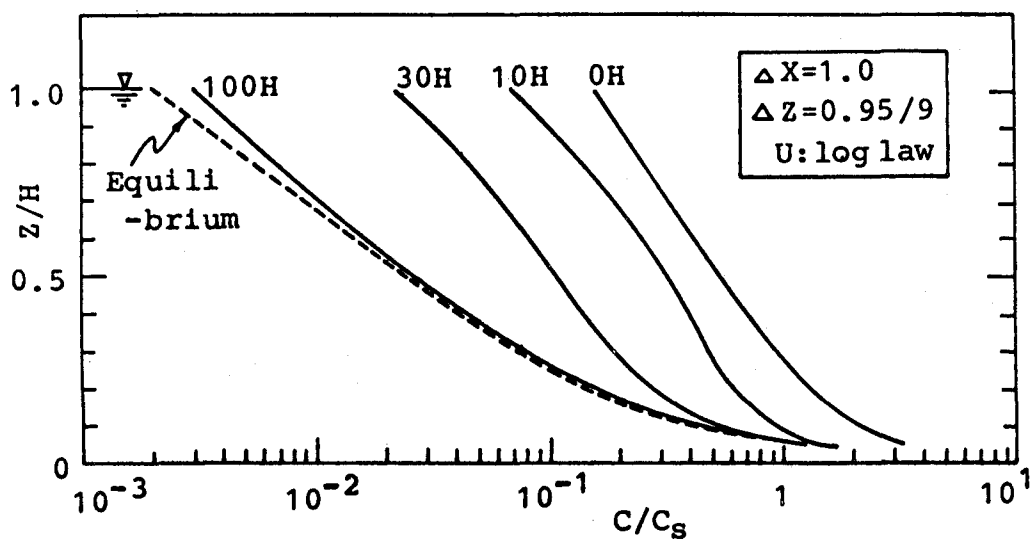


図 14 非平衡状態の濃度分布

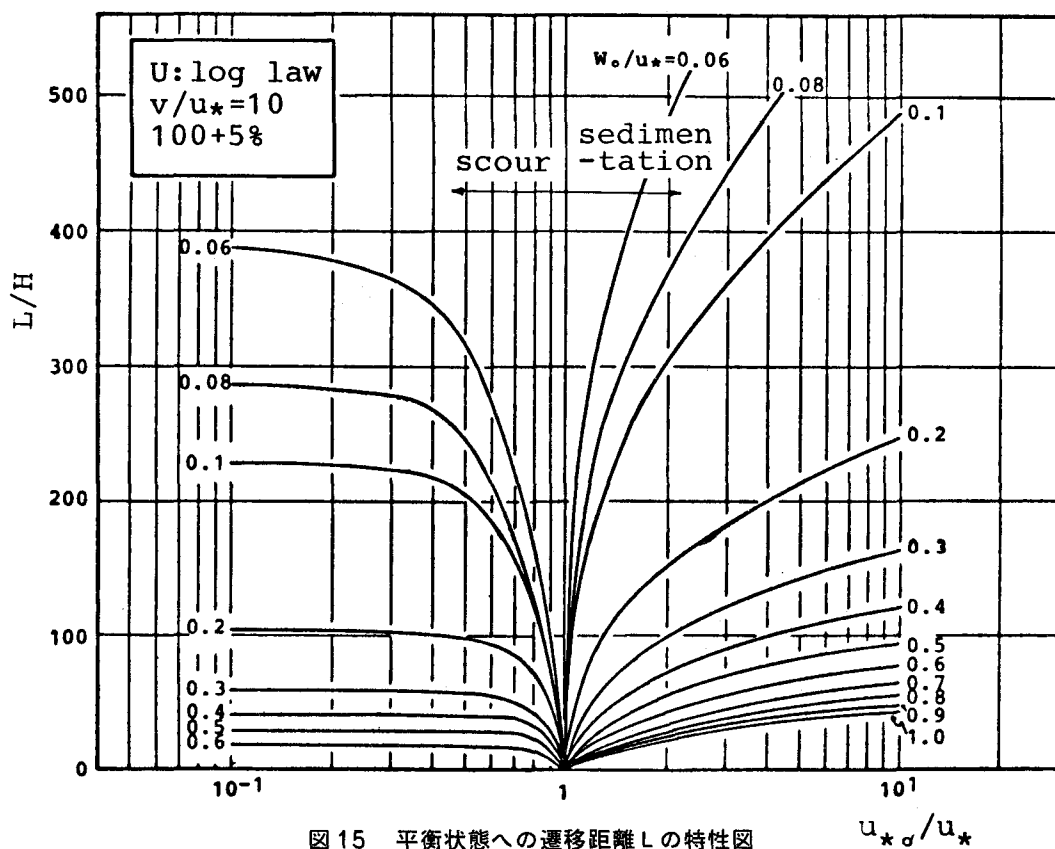


図 15 平衡状態への遷移距離 L の特性図

L を計算するため、平衡状態の流砂量と非平衡状態の流砂量との差が±5%になる距離を遷移距離と定義して、式(64)のパラメーターを変えて数値計算した一例が図15に示されている。

w_0/u_* が小さくなると、 L は大きくなり、例えば、 $w_0/u_* = 0.2$ で、 $u_{*0}/u_* = 1.5$ のとき、 L は水深の100倍程度になる。もちろん、このような L の値は、 v/u_* によっても変化するが、平衡状態の濃度あるいは平衡状態の流砂量への接近はきわめて緩慢であるので、一般には浮遊砂が卓越するような流れの河床変動では、掃流砂の場合と相違して、平衡状態の浮遊砂量式を用いて計算するとその誤差は大きくなる。

いま、式(58)を a から h まで z に関して積分し、前述の境界条件を用いるとき、次式のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (cu) dz = -w_0 (c_a - c_s) \quad (65)$$

また、浮遊砂の河床変動の連続式は次式で表される。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^h (cu) dz = 0 \quad (66)$$

したがって、式(58)より求めた c を式(66)に代入して河床変動を計算するか、あるいは式(65)を(66)に代入して、変形した次式より河床変動を求めなければならない。

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{1-\lambda} w_0 (c_a - c_s) = 0 \quad (67)$$

ここに、 λ ：空隙率である。

いずれにしても、非平衡状態の濃度を求めた上で、式(66)あるいは(67)で河床変動を計算しなければならない。しかし、 w_0/u_* が大きい砂粒とか、測量資料の制約より差分間隔を大きくとらなければならないような河道では、平衡状態の浮遊砂量式を式(66)に適用して河床変動を求めることができる。その適用範囲を決めるには、図15を用いればよいであろう。

以上、大規模河床変動の実態とその解析法について述べてきたが、このような河床変動を正確に予測する手法を開発するには、長年月の河道資料が必要であるので、単に数値計算だけに終らずに、息の長い資料の蓄積が重要であると考えられる。さらに、大規模な河川構造物を構築するときには、河道に及ぼす影響調査を実施しなければならないが、そのときにここで用いたモデルもその一つの手法になると思われる。

参 考 文 献

- 1) 河床形状小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度，土木学会論文報告集，第210号，1973，pp. 65 - 77.

- 2) 前出の1)の文献
- 3) Shen, H. W., V. R. Schneider & S. Karaki : Local scour around bridge piers, Proc. ASCE, Vol. 45, HY6, 1969, pp. 1919 - 1940 .
- 4) 村本嘉雄 : 土砂の流送・運搬に伴う自然環境変化に関する研究, 自然災害科学総合研究班, No. A-50-9, 1975 .
- 5) 平野宗夫 : Armoring をともなう河床低下について, 土木学会論文報告集, 第195号, 1971, pp. 55 - 65 .
- 6) Meyer-Peter, E. & R. Müller : Formulas for bed load transport, Proc. 2nd Congress of IAHR, Stockholm, 1948 .
- 7) Shinohara, K. & T. Tsubaki : On the characteristics of sand waves formed upon the beds of the open channels and rivers, Reports of Res. Inst. App. Mech. Kyushu Univ., Vol. VII, No. 25, 1959, pp. 15 - 45 .
- 8) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男 : 河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1), 建設省土木研究所報告, 第98号, 昭32, pp. 13 - 30 .
- 9) 芦田和男・道上正規 : 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第206号, 昭47, pp. 59 - 69 .
- 10) 平野宗夫 : 前出の5)の文献
- 11) Einstein, H. A. : The bed-load function for sediment transportation in open channel flow, U. S. Dept. of Agric., Soil Conserv. Sur. Tech. Bull. No. 1026, 1950. pp. 1 - 71 .
- 12) Iwagaki, Y. : On the analysis of mechanism of river-bed variation by Characteristics, Memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Univ., Vol. 18, No. 3, 1956, pp. 163 - 171 .
- 13) de Vries, M. : River-bed variation - aggradation and degradation, Delft Hydraulic Laboratory, pub. No. 107, 1973 .
- 14) 鈴木幸一 : 混合砂河床の粒度変化について, 第32回土木学会年次学術講演会概要集, 第2部, 昭52, pp. 420 - 421 .
- 15) 黒木幹男・岸力・清水康行 : 河床変動の数値計算法に関する研究, 第17回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集, 1980, pp. 175 - 178 .
- 16) 道上正規・鈴木幸一・定道成美 : 斐伊川の土砂収支と河床変動の将来予測, 京都大学防災研究所年報, 第23号 B-2, 昭55, pp. 493 - 514 .
- 17) 芦田和男 : 河床変動に対する境界条件の影響, 土木学会第25回年次学術講演会講演集, 第2部, 昭45, pp. 263 - 266 .

- 18) 芦田和男・道上正規：混合砂礫床の河床変動に関する研究，京都大学防災研究所年報，第14号B，昭46，pp. 259－273．
- 19) 足立昭平：貯水池の堆砂に関する一考察，第10回水理講演会講演集，昭41，pp. 55－58．
- 20) 江崎一博：貯水池の堆砂に関する研究，土木研究所報告，129号，昭41．
- 21) 芦田和男：河床変動に関する研究－下流端水位低下による河床変動－，京都大学防災研究所年報，第12号B，昭44，pp. 437－447．