

河川感潮部における混合拡散

余 越 正一郎

1. まえがき

河川の感潮部においては水深や流速が時々刻々変化しており、従ってそこで発生、消滅する乱子の速度や寸法もそれに応じて変化する。感潮部は非定常乱流場なのである。また淡水と海水との接触点でもあり、その接触のしかたにより乱流場は大きな影響を受ける。

なにはともあれ、まずその実態をみてみることにする。図1は太田川放水路において電磁流速計を用いた潮汐1周期の連続測定結果である。¹⁾ 放水路は幅約300m、測点は河口から3km、水深は最大4.5m、最小1.7m。流速

計の受感部は直径約4cmの球形で、時定数は0.1secである。これを河床から1.3mの高さに固定したので、測器の相対水深は0.3~0.8と変化している。

図1の流速変動の内部構造とでもいうべきものは、各周波数成分ごとのエネルギーの経時変化を集めた非定常スペクトルからうかがい知ることができる。これは紙面の都合上省略して、レイノルズ応力の経時変化のみを図2に示す。移動平均長は100secである。図2のみを見ただけでも、感潮域の乱流の著しい非定常性がわかる。

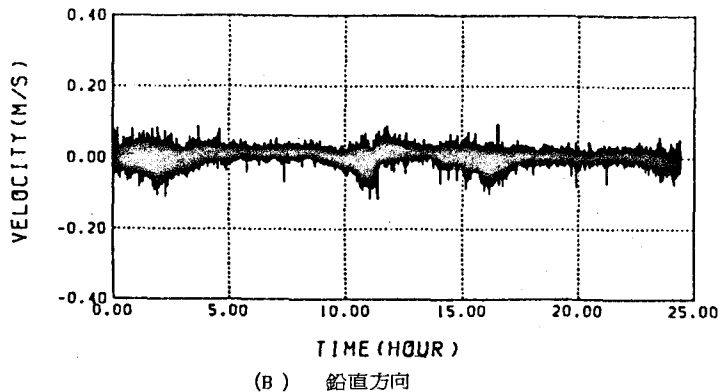
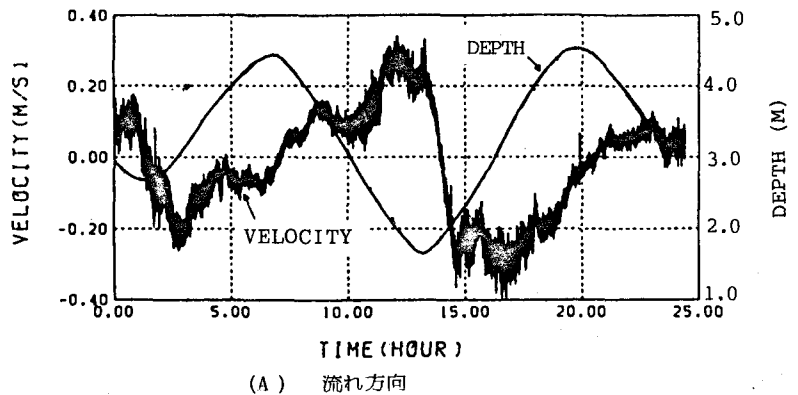


図1 水深と流速の経時変化

感潮域全体の混合，拡散を予測する際に，このような乱流量から直接やることは今のところうまくない。以下に，Smith and Dyer の示した数学モデルを紹介する。

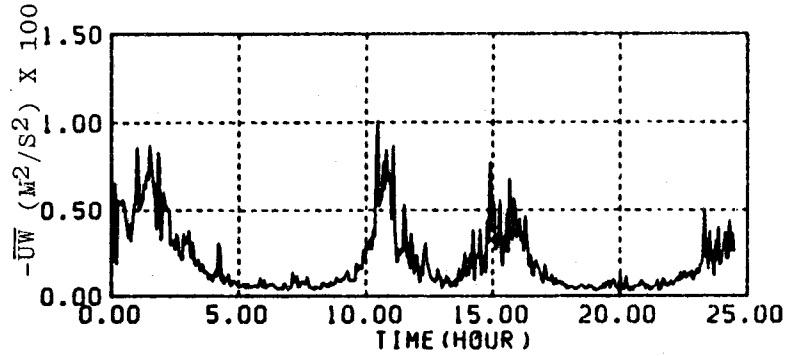


図2 レイノルズ応力の経時変化

2. 基礎方程式

図3に示すように流下方向に x_1 軸，鉛直上向きに x_3 軸，横断方向に x_2 軸をとる。まず連続方程式は

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + (1 + \frac{x_2}{R}) (\frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}) + \frac{U_2}{R} = 0 \quad (1)$$

となる。ここで U_i は x_i 方向の乱流の平均流速， $R(x_1)$ は流路中心線の曲率半径である。次に運動方程式を流下方向および横断方向に分けて示すと

$$\frac{DU_1}{Dt} + \frac{U_1 U_2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + \frac{\tau_{12}}{R} \quad (2)$$

$$\frac{DU_2}{Dt} - \frac{U_1^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + \frac{1}{R} (\tau_{22} - \tau_{11}) \quad (3)$$

となる。ここで P は平均の圧力， ρ は平均密度， g は重力の加速度である。作用素 D/Dt は俗にラグランジュ微分といわれるもので

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

また， τ_{ij} はレイノルズ応力テンソルで変動速度成分のテンソル積の平均で

$$\tau_{ij} = -\overline{u_i u_j} \quad (4)$$

であるが，実用的には乱流粘性を用いて

$$-\overline{u_i u_j} = N_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (5)$$

とあらわす。すなわち平均流の変形速度テンソルとの線型関係を仮定するのである。 k は乱流エネルギーで $\overline{u_i^2}/2$ である。この表示では乱流粘性は2階のテンソルのようなのであるが，正しくは4階のテンソルであろう。

次に塩分についての連続方程式は

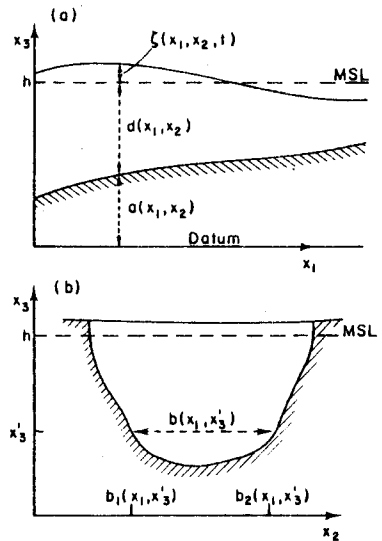


図3 縦横断面

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \frac{F_2}{R} \quad (6)$$

S は平均塩分濃度, F_i は乱流による塩分の質量流量で, 変動値 s を用いて

$$F_i = -\overline{u_i s} \quad (7)$$

と表されるが, これもまた実用的には濃度勾配ベクトルに比例するとして, 拡散係数を用いて

$$-\overline{u_i s} = K_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad (8)$$

とする。拡散係数も正しくは2階のテンソルであろう。

塩分濃度と密度の間には

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta S) \quad (9)$$

なる関係がある。 ρ_0 は淡水の密度, β は定数で, その値は $7.8 \times 10^{-4} (\text{p. p. t.})^{-1}$ といわれている。

平均水面からの水面上昇 $\zeta(x_1, x_2, t)$ は(1)を水深方向に積分して

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{R}{(R+x_2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^{h+\zeta} U_1 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_a^{h+\zeta} U_3 dx_3 + \frac{1}{R} \int_a^{h+\zeta} U_2 dx_3 = 0 \quad (10)$$

ここに h および $a(x_1, x_2)$ は基準面から平均水面および河床までの高さである。

鉛直方向の加速度は重力のみを考えればよく, 運動方程式は簡単に

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} + \overline{\rho g} = 0 \quad (11)$$

となるので, これを積分して静水圧分布がえられ,

$$P = P_A(x_1, x_2) + \langle \rho \rangle g (h + \zeta - x_3) \quad (12)$$

ここに

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{(h + \zeta - x_3)} \int_{x_3}^{h+\zeta} \overline{\rho} dx_3 \quad (13)$$

である。

以上のような連立偏微分方程式を解くさいの境界条件を次に記す。河床では流速がゼロだから

$$U_i = 0 \text{ for all } x_3 = a(x_1, x_2), t \quad (14)$$

河床および水面を通しての塩分流量はゼロであり

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0 \text{ for all } \begin{matrix} x_3 = a(x_1, x_2), t \\ x_3 = h + \zeta, t \end{matrix} \quad (15)$$

考えている河口域(長さ L)の上流端では

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Q_f(t)/A(t) \\ U_2 &= U_3 = 0 \\ S &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ for all } x_1 = L, x_2, x_3, t \quad (16)$$

Q は河川流量, A は断面積である。河口では

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_f(x_2, t) \\ S &= S_0 & 0 \leq t \leq T/2 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} &= 0 & T/2 < t < T \end{aligned} \right\} \text{for all } x_1=0, x_2, x_3, t \quad (17)$$

T は潮汐周期である。添字 f は既知函数を示す。

境界条件(14)よりも流速分布を使う方が普通で, 例えば対数分布則

$$\frac{U_i}{u_{\tau i}} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{x_3}{z_0}\right) + \frac{u_{\tau i}}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi (x_3 - a - z_0)}{(h - a + \zeta - z_0)} \right], \quad i=1, 2 \quad (18)$$

である。 u_{τ} はマサツ速度, K はカルマン定数, z_0 は組度高, u_r は Coles の後流函数である。この場合, 水面での条件は風による摩擦力を用いて

$$\tau_{w_1} = N_{13} \frac{\partial U_1}{\partial x_3}, \quad \tau_{w_2} = N_{23} \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \quad (19)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \tau_{w_1} &= C_D W_1 | (W_1^2 + W_2^2)^{1/2} | \\ \tau_{w_2} &= C_D W_2 | (W_1^2 + W_2^2)^{1/2} | \end{aligned} \quad (20)$$

C_D は摩擦抵抗係数, W_i は風速成分である。

C_D の値は簡単にはいかず, 例えば

$$\begin{aligned} C_D &= 0.565 \times 10^{-3} & |W| \leq 5 \text{ m/s} \\ C_D &= (0.13 |W| - 0.12) \times 10^{-3} & 5 < |W| \leq 19.22 \text{ m/s} \\ C_D &= 2.513 \times 10^{-3} & 19.22 < |W| \text{ m/s} \end{aligned} \quad (21)$$

である。

3. 横断方向に積分した方程式

前節で示した式を直接計算するのは大変なので, それらを河幅方向に積分したものを使う。河幅方向に平均したものを次のように定義する。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= \frac{1}{b(x_1, x_2)} \int_{b_1}^{b_2} \phi_i dx_2 \\ \phi_i &= \tilde{\phi}_i + \phi'_i \\ \tilde{\phi}'_i &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

記号は図3を見よ。この定義に従い, 前述の方程式を河幅で平均すると, 連続方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (b \tilde{U}_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{U}_3) = 0 \quad (23)$$

流下方向の運動方程式は

$$b \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (b \tilde{U}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{U}_1 \tilde{U}_3) = -bg \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{(h+\zeta-x_3)}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{\tau}_{13}) - \tau_b \left(\frac{1}{G_2} - \frac{1}{G_1} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (b \tilde{U}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \widetilde{U'_1 U'_3}) \right] \quad (24)$$

(a) (b) (c)

水面上昇は

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^{h+\tilde{\zeta}} b U_1 dx_3 = 0 \quad (25)$$

塩分保存則は

$$b \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (b \tilde{U}_1 \tilde{S}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{U}_3 \tilde{S}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (b \tilde{F}_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{F}_3) - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (b \widetilde{U'_1 S'}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \widetilde{U'_3 S'}) \right] \quad (26)$$

(d) (e)

となる。ここで各項のオーダーを推定して、上式の(b), (c), (e)項、それに流下方向の質量流量の項 $\partial/\partial x_1 (b \tilde{F}_1)$ は無視できることがわかる。 $G_1(x_1, x_3)$, $G_2(x_1, x_3)$ は流路断面の x_3 の高さでの横断勾配である。

底面摩擦はシェジの式を使えば

$$\tau_b = \frac{g}{C^2 r} \frac{Q|Q|}{A^2} \quad (27)$$

C はシェジの係数, r は径深である。分散項(d)は分散係数 D_x を用いて

$$-\widetilde{U'_1 S'} = D_x \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_1} \quad (28)$$

と表すことができる。

23～28式に対する境界条件と初期条件は22を使って(14～20)から求めることができる。

4. レイノルズ応力と乱流拡散係数

成層剪断流の乱流粘性はエネルギー散逸密度 ϵ を用いて

$$N_{13} = \Gamma(Ri) \frac{k^2}{\epsilon} \quad (29)$$

ここに k は乱流エネルギー $\overline{u_i^2}/2$, Γ は勾配リチャードソン数

$$Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{-1} \quad (30)$$

の函数である。拡散係数は次の形である。

$$K_3 = \frac{\Gamma(Ri)}{Sc(Ri)} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (31)$$

Sc は乱流シュミット数で、それは運動量の拡散と質量の拡散の比をあらわしている。

②9, ③1 式中の乱流エネルギー k に関する方程式は

$$\frac{Dk}{Dt} = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \beta g_i \overline{U_i S} - \varepsilon + \Delta \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{k}{\varepsilon} (\overline{U_i U_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{U_i U_k} + \overline{U_k U_l} \frac{\partial k}{\partial x_l}) \right] \quad (32)$$

で、式中 Δ は定数である。またエネルギー散逸密度 ε は γ を定数として

$$\varepsilon = \gamma \frac{k^{3/2}}{L_0} \quad (33)$$

から求めることができる。散逸長 L_0 は次式で近似される。

$$\frac{L_0}{(h + \zeta - a)} = \lambda \operatorname{erf} [4(x_3 - a)(h + \zeta - a)^{-1}] \quad (34)$$

$\lambda = 0.105$, erf は誤差函数である。

エネルギー方程式 ③2 を河幅方向に積分すると

$$\begin{aligned} b \frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (b \tilde{U}_1 \tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{U}_3 \tilde{k}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (b D_k \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (b \frac{\tilde{N}_{13}}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_3}) \\ &+ \frac{\tilde{N}_{13}}{b} (\frac{\partial}{\partial x_3} b \tilde{U}_1)^2 + \frac{g \beta \tilde{N}_{13}}{Sc} \frac{\partial}{\partial x_3} (b \tilde{S}) + b [\tilde{p} - \tilde{\varepsilon}] \end{aligned} \quad (35)$$

$\tilde{p}$ は側壁によるエネルギー生成で

$$\tilde{p} = \frac{2g}{C^2 (h + \zeta - a)} \tilde{U}_1^2 |\tilde{U}_1| \quad (36)$$

σ_k は有効プラントル数, D_k は乱流エネルギーの分散係数である。

$\Gamma(Ri)$ と $Sc(Ri)$ も決めなければならない。さらに成層流では ③4 式の λ も Ri の函数となる。

Sc はフラックスリチャードソン数

$$Rf = -g \alpha \overline{u_3 s} (\overline{u_1 u_3} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{1/2})^{-1} \quad (37)$$

を用いて

$$\frac{Sc_0}{Sc} = \frac{(1 - Rf/R_{fcrit})}{1 - 2Rf} \quad (38)$$

とあらわされる。 R_{fcrit} は限界リチャードソン数, Sc_0 は中立状態での乱流シュミット数である。

乱流シュミット数と成層の関係を 図 4 に示す。 R_{fcrit} と Sc_0 の値としては 0.15 と 1.0 を用いることにした。

$\Gamma(R_i)$ は $R_{fcrit} \ll 1$ では

$$\Gamma(R_i) = \Gamma_0 = \text{const.} \quad (39)$$

としてよいようである。実験結果から $\Gamma_0 \gamma = 0.09$ を用いる。 λ については次式を用いる。

$$\lambda = \lambda' (1 + 0.24 R_i)^{-1} \quad (40)$$

$\lambda' = 0.105$ 。

5. 分散係数

すでに述べた横断方向に積分したモデルを実際に適用するためには分散係数を決めなければならない。分散係数の値は潮汐周期 T と横断方向の混合の時間スケール

$$T' = \frac{b^2}{(h-a)u_\tau} \quad (41)$$

との比 T/T' に関係している。すなわち

$$\begin{aligned} T/T' > 1, \quad Dx &= 0.075 T' \widetilde{U}_1^2 \quad (SI \text{ Units}) \\ T/T' \lesssim 1, \quad Dx &= 0.16 T' \widetilde{U}_1^2 \left(\frac{T}{T'} \right) \quad (SI \text{ Units}) \end{aligned} \quad (42)$$

である。しかしこれらの式には摩擦速度 u_τ や $\widetilde{U}_1^2$ などを含んでおりおもしろくない。実用形としてはもっと簡単な次式を使う

$$\begin{aligned} T/T' > 1, \quad Dx &= \alpha_1 b^2 (h-a)^{-1} \\ T/T' \leq 1, \quad Dx &= \alpha_2 b^{-2} (h-a) \end{aligned} \quad (43)$$

ここで α_1 と α_2 は定数である。

6. 適用例

以下に横方向に積分した方程式を差分法で解き、実測と比較したものを結果のみ示す。

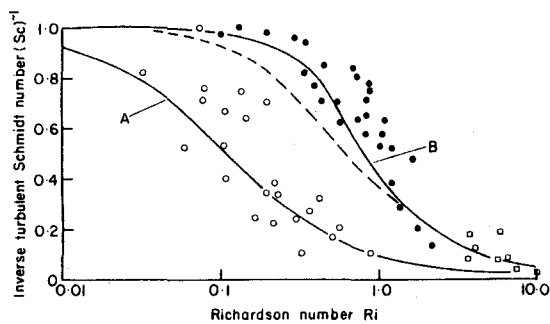


図4 乱流シュミット数

- A) $Sc_0 = 1.0, R_{fcrit} = 0.1$
B) $Sc_0 = 1.0, R_{fcrit} = 0.45$

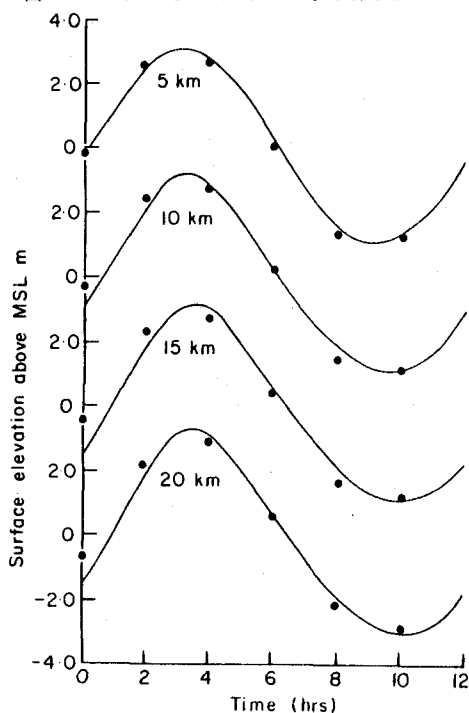


図5 水位変化の計算値と観測値

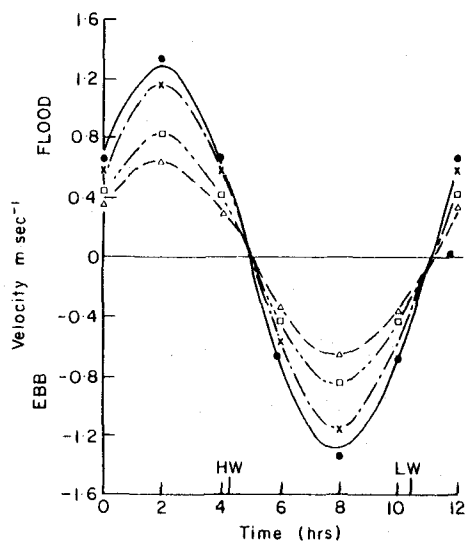


図6 流速変動の計算値と実測値
相対的な深さは
0.0 (—, ●), 0.5 (---, ×)
0.89 (- · - ·, □), 0.93 (····, △)

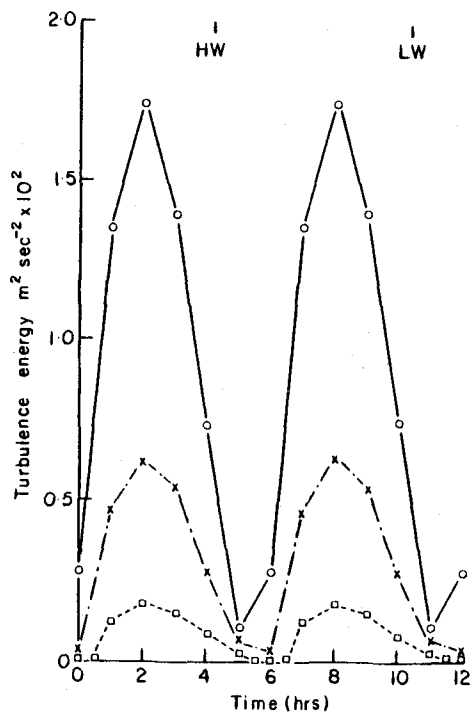


図7 乱流エネルギーの変化
○河床, ×中層, □水面

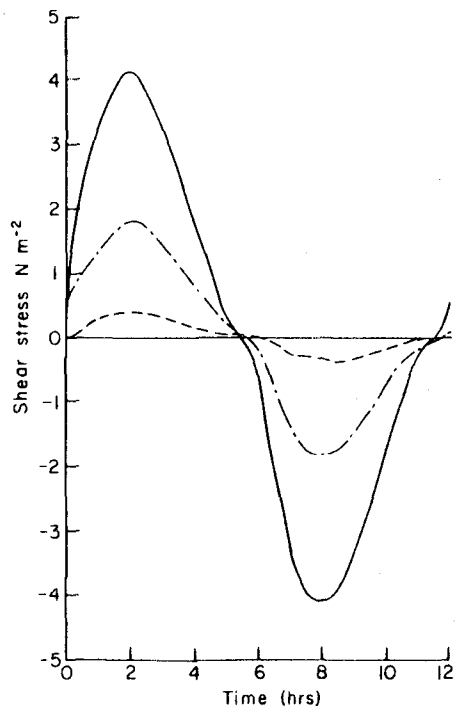


図8 剪断応力の変化
——河床, ---中層, - · - ·深さ0.1

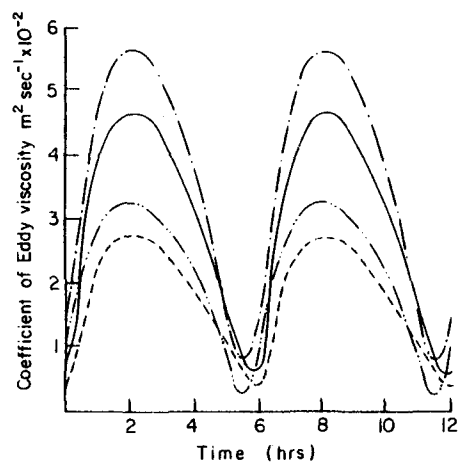


図9 乱流粘性係数の変化
---水面, ——深さ0.4
- · - ·深さ0.7, ····深さ0.9

参 考 文 献

- 1) 川西澄, 余越正一郎, 感潮河川におけるレイノルズ応力の経時変化。
土木学会第37回年次学術講演会概要集, 第2部 (1982)。
- 2) Smith, T. J. and Dyer, K. R., Mathematical modeling of circulation and mixing
in estuaries. Mathematical Modeling of Turbulent Diffusion in the Environment.
Edited by C. J. Harris. Academic Press (1979).