

河川の非定常流の計算モデル (一次元及び多次元モデル)

岩 佐 義 朗

1. まえがき

河川の非定常流の代表例は河道内の洪水とその流下である。水理学的により詳しく分類すれば、漸変非定常流といわれている。その研究は、急変非定常流とともに、長らくヨーロッパ水理学の中心課題であり、現在でも世界の各地で幅広く進められている。

研究の方法論はいわゆる Saint-Venant の式（一次元非定常連続式及びエネルギー式）を何らかの数学的手段によって解こうとすることから成り立っている。解き方には歴史的な変遷があり、その時代に流行した解析法や興味のある方法にしたがって行われている。すなわち、数値解析が実際上不可能であったごく最近の時代までは、Saint-Venant の式の解析解を求めることが方法論の中心であった。しかし、解きうるものではないから、経験や野外観測にもとづいて、もとの Saint-Venant の数学モデルを多くの仮定や前提を導入して近似化したり（したがってまた、間違ったあるいは役に立たない仮定を用いたものも多い）、あるいは数学的手段を用いた何らかの近似解を求める方法を追求するということが研究であった。したがって、非定常流、あるいは具体的には洪水の流れの解析や研究は実際におこった洪水それ自体の水理学的な特徴を後から追求しようとするよりも、むしろ洪水や非定常流の性質、すなわち定性的な特徴を知り、その結果を通じて、洪水というものの一般的な特性を認識しようということであった。これはわが国においても同様であるといえる。

ところが、漸変非定常流あるいは洪水の流れの解析法がわが国において画期的に変ってきたのは、第二次世界大戦後の永らくとだえていた海外の文献がどっと入り出し、研究活動が再び盛んになり出した頃からである。この時代から、現在ではよく知られている dynamic waves, すなわち特性曲線法による洪水の流れの解析が初まることになる。もともと、この数学モデルは双曲型連立 1 階偏微分方程式であるから、その数学理論、とくに特性曲線理論は古くから開発されていた。しかし、その実際問題への具体的な応用は第二次世界大戦末期になるといってもよく、欧米諸国で大いに研究が進められ、その実用化は Re (フランス) や Lin (当時アメリカ, 現在中国) の研究に俟つところが大きい。当時はまだコンピュータ時代に入っていないから、計算をすすめるのは大変な仕事であったが、Lin の図解法はわれわれに大きな刺激を与えてくれた。現在はわが国の水理学、河川工学の権威となっておられる多くの方のため、若い頃には数ヶ月かかって一つの問題を図解法で解かれたという体験をお持ちになっておられることが多い。

非定常流や洪水の流れの解析が、われわれの問題に身近な研究課題として登場するのはコンピュータ時代になってからであり、数値解析法の問題として取り扱われるのである。しかし、数値解析のなかで、そのほとんどがいわゆる階差法（たとえば、Lax-Wendroff 法）であり、その理論的な明快さにもかかわらず特性曲線法による解析は少なかった。この理由にはいろいろのものが挙げられるが、Saint-Venant 型の式を一般的な形で特性曲線法によるモデルへの変換過程、特性曲線法の $x \sim t$ 格子平面上での解析、とくに新しいコンピュータ時代に対応しきれないわれわれの古くからの研究方法などの問題のために、実際上なかなか用いられなかった。

非定常流あるいは洪水の流れを階差式や特性曲線法によって解く場合、その基本となる数学モデルはすでに述べた Saint-Venant の式である。このモデルは一次元解析法による開水路流れの基礎式であるから、その流れは河道や水路内という限られた幾何学的境界内での一方向的なものであり、とくに多くの場合、水深変化に比べて河幅が極めて広いというより簡単化された条件下のものである。ところが、水理学での分類中の非定常流は別として、現実におこる河川工学上の洪水の流れは、計画河道における挙動を予測する場合は別として、そのような単純なものではない。とくに、洪水が何らかの原因によって堤内の氾濫原を流れる氾濫をとまなうときには、氾濫水は地形形態にしたがって、平面的な拡りをもつ流れとなる。このような洪水の氾濫水の水理学的挙動が実際にはしばしばおこるのであって、河道内の流れという一次元の洪水の流れだけを対象としていては、河川工学や災害防止の点からみても、十分な情報が得られないことが多い。日本のように、堤防が造られ、河道が比較的整備されているところであっても、今後におこる新しいより大きな洪水を対象に計画を改訂する場合には、実際上氾濫を取り扱い、土地利用のあり方との関連より治水事業を実施すべく計画立案しなければならなくなってきた。建設省において最近話題となっている総合治水対策政策を技術行政という側面でなく、実際上の課題として考えれば、これが当然重要な研究課題として入ってくることになる。このような、堤防や各種の河川構造物、さらには堤内地の多くの土地利用形態にとまなう地形条件を考えに入れた非定常流は従来のような Saint-Venant 型の一次元方程式では取り扱いえないものであり、少くとも平面的な拡りをもつ流れの挙動をも計算しうる二次元的モデルを導入しなければならない。

問題はそれだけではない。対象を河川ということにしばってみても、貯水池内の流れは水理学の基本にかかわる意味からしても複雑である。わが国の貯水池の多くは、山間溪谷部に高いダムを造って得られたものである。したがって、水深も深く、夏期には水温成層が発達する。さらに、貯水池の多くは多目的であるから、比較的深いところに取水施設、放流施設などがある。この場合、成層発達の過程が水理施設によって制限をうけ、水温成層も天然湖のそれと異なってくる。まして水温成層状態にある貯水池に洪水時の濁水が流入すると、濁水の分布も水温成層によって影響されると同時に、著しく異なることがあり、しばしばブロック状になって流下する。勿論、水の密度に及ぼす濁度の影響は水温のそれに比し小さいのが普通であるが、濁水長期化というような比較的時間的スケールの大きい研究課題を取り扱うときには、濁水の分布そのものが主要な要素となる。これに似たようなことが、栄養塩の多い（必ずしもそうではないらしい）貯水池における富栄養化と淡水赤潮の発生の問題でもおこる。これらのことは、水の物理的性質が等質であるという概念をはずれるものであり、実際におこっている現実の問題の時間的、空間的スケールよりみてどのようなモデルに置き換えるべきであるかという問いかけになってくる。

貯水池における以上の水温成層、濁水長期化、富栄養化などという最近の研究課題は、貯水池の形状が流下方向に長い河川型であるということから、多くの場合、貯水池幅の方向に対する水理量の変化は考える必要のないものであった。ところが、同じような水理現象を天然湖沼で取り扱うとすれば、その幾何学的な形状からみて平面的かつ深さ方向にも変化するという純三次元的取扱いが必要となる。浅い湖沼で、水温分布ならびに普通に用いられる水理量が一様な分布であると見なせるところは少なく、多くの湖沼では水温成層があると考えなければならない。その他の例として、冷却水の放流などがある。この問題はブルームの水理であって、周囲の水と物理的性質の異なる（実際には水温、したがって密度）水の混合を対象としている。これをどのようにモデル化するかが問題であって、単純な一次元的ブルーム

ムから三次元の取扱いにまで多くのものになる。

以上のいくつかの例からわかることは次の二つの点である。まず第一には、開水路の非定常流（もちろん、定常流をも含めて）のモデルは従来の教科書や専門書に記載されている Saint-Venant の式で代表される一次元解析法におけるものだけでは新しい多様な問題に対応しきれず、平面的、さらには空間的な拡がりをもつ流れを対象としたものへと発展すべきであるということである。

次いで第二には、河川水を初め取り扱う水の物理的性質の相違が流れのモデルの作成に当って導入されるべきかどうかという問題である。従来までは、この種の問題は非等質の流れ、混相流という形で取り扱われてきた。しかし、貯水池内の濁水塊、富栄養塩の分布などよりみれば、単に物理的特性の異なるものに連続体モデルをあてはめるべきか、あるいは空間的な拡りに制限をもたせたモデルにすべきかもあわせて考えなければならない。

ここでは、以上の二点を考慮した空間的に多次元な非定常流の数学モデルの作成法を取り扱う。何度もくどくど述べるようであるが、従来の開水路水理学では、一次元解析法にもとづくものしか用いられなかったといっても過言ではなく、また現在でもそうである。しかし実際には、空間的に多次元の流れが種々の物理的特徴をもって存在しており、また、それらを何らかの方法で解析しなければならなくなった。コンピュータのなかった時代には、Saint-Venant 式で代表される一次元流れを理論的に取り扱うというのが中心的な研究課題であった。コンピュータが創造され、その使用が日常のこととなると、同じ Saint-Venant 式を取り扱っても多様で複雑な条件のもとでの解析がすすめられるようになり、水工事業の計画や設計に当っての情報、資料が豊かになり、われわれが望みうる解決策への前進が大いに期待されることともなった。しかし、自然界で現実におこっている現象の解析にはこれだけでは十分でなく、多次元モデルの利用が図られなければならない。しかも、近年多くの緊急かつ重要な研究課題が水理学の多くの分野であらわれてきた。今後は、コンピュータの利用によりこの方面の解析が大いにすすめられ、新しい水理学が建設されることになるう。

事実、水理学のなかでの実際的な問題はコンピュータ・シミュレーションによって初めて取り扱われるから、水工事業の計画、設計のための多くの情報、資料が得られるようになる。一方、多くの実際問題への関与を通じて、水理学がふたたびもとの水理学へ新しい衣をきて登場することになるう。

2. 水理解析のための数学モデル作成法

数値シミュレーションによる水理解析の基本的課題は用うべき数学モデルそれ自体である。水理模型実験による物理モデルでの解析にも同じことがいいうる。というのは、模型実験に用いた相似律は実際におこっている水理現象を再現した数学モデルによって作られるからである。ここでは、数学モデルの作成法を順をおって記述的に説明する。その数学的誘導については、次節で詳しく説明する。

(1) 水理解析に用うべき基礎原理の確認とその適用

河川流に限らず水理解析で対象とする流れは流体力学の原理によって表現されるとしている。すなわち、

1. 質量保存則
2. 運動量保存則
3. 熱力学第一法則（熱の保存則）

である。実際には、河道内の河川流のように一方向的な流れでは、運動量保存則から誘導される機械

的エネルギー保存則が用いられ、また貯水池水理や冷却水放流の水理のように熱や水温の変化を取り扱う場合を除いて、熱の保存則が用いられることは少ない。いずれにせよ、基本は1.質量保存則、2.運動量保存則である。

したがって、対象とする河川流が基礎原理による表現の対象であるかどうかを確認ということになる。ふつうには、このようなことは問題にならない。しかし、河川流と違って土石流やその他極めて複雑な混相流を取り扱うときには、基礎原理より一つ下のレベルの法則ともいべき応力と歪との関係の表現法が問題となる。すなわち、Newton流か否かである。

つぎの課題は基礎原理をどのような立場に立って適用するかであり、これは、

1. システム解析法

2. コントロール・ボリューム解析法

とに分けられる¹⁾。ふつうには、コントロール・ボリューム解析法が用いられ、基礎原理が常に満足される活動を流れの場のなかにとったある空間(コントロール・ボリューム)内に適用するというものである。なお、コントロール・ボリュームについては後に説明を加える。

(2) 河川流の特性の取扱い

従来より河川の非定常流、洪水の流れはいわゆる連続性の性質より誘導される水であるとするのが水理学であった。したがって、土砂を多く含む流れなどは流砂の水理として別に取り扱われている。ところが、実際は水路や運河などの非定常流は別として、洪水の流れは高濁度であることも多く、貯水池などでの濁水の伝播では当然この課題が入ってくる。水理学では混相流の一種と考えられている。

混相流の定義は外国のそれと違って、日本では比較的広義に相及び流体の性質の異なる流れ全体をさしている。いずれにせよ、混相流の水理解析は大別して、

1. 混在している物質をも含め、新しい一つの水として取り扱う。ただし、応力と歪との関係により、Newton流体と非Newton流体とに分けられる。しかし、ふつうはすべてNewton流体でよい。
2. 混在している物質と水とを別々に取り扱い、それらを合せて、全体のものとする。ただし、運動量保存則は全体の系についてのみ記述される。
3. 混在している物質が流れのなかでその特性を保ちうるとき、流体のなかの物質(塊)として取り扱う。

われわれの対象とする河川流が以上のどれにあてはめるのがもっとも好ましいかを、観測、実験、経験などによって決めなければならない。もっともこの場合、3.のような流体内におかれた物体、物質という解析法はとられないが、その他のうちのどれかである。

たとえ濁った洪水の流れでも、ふつうは1.のNewton流体として取り扱われ、非Newton流体は極めて限られた場合だけである。一方、Newton流体として分類される濁質分を含む流れは、それ自体について流体力学の原理が適用されるが、さらに水そのものと濁質物質の濃度(濁度)とに関する保存則に分けられる。もちろん、後者の保存則はある仮定のもとで成立するもの²⁾であるが、ふつうには問題なく用いられ、従来より濃度の収支則といわれるものである。

(3) 階差式とコントロール・ボリューム

微分方程式を数値解析によって解く手段の一つとして、階差式を用いる方法がある。時間的に Δt 、空間的に Δx 、 Δy 、 Δz という間隔にしてもとの微分方程式を書き直したものである。これはあくまで数値解析的な方法であって、いずれも0に近づけると、もとの微分方程式にならなければならない。

上述の Δx , Δy , Δz という各辺の長さで作られた空間の大きさのなかでは、水の物理的性質、たとえば水温や濁度などは一定であると考えよう。ただし、となりのものとの性質の同一性はまた別であり、どのブロック ($\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$) でも同じであれば、もっと簡単な形でよい。したがって、一般に Δx , Δy , Δz はすべてのブロックで同じ長さではない。表現上の問題である。この空間ブロックをコントロール・ボリュームと考えても別に差支えはない。このなかの水の性質は同じであり、いずれも流体運動の基礎原理が満たされるとするのである。すなわち、微分方程式を数値解析上階差式になおしたとき、 Δx , Δy , Δz を空間的な大きさとする力学的なコントロール・ボリュームとしたのであって、両者の間は表現上の関係があるだけである。

(4) コントロール・ボリューム内での基礎原理

基礎原理が常に満足される活動がおこるコントロール・ボリューム $dV (= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$ 内では、基礎原理を書きあらわせば次のようになる。

1. 質量保存則

(dV 内での質量フラックスの純増加)

容積 dV のなかでの 水の質量の増加率	=	容積 dV の表面 dS よりはいる単位時間 当たりの水の質量	-	容積 dV の表面 dS より出る単位時間当 たりの水の質量
---------------------------	---	---	---	--

2. 運動量保存則

(dV 内での運動量フラックスの純増加)

容積 dV のなかでの水の運動量増加率	=	容積 dV の表面 dS よりはいる単位時間 当たりの運動量	-	容積 dV の表面 dS より出る単位時間当 たりの運動量	+	容積 dV の水に作用するすべての力
-----------------------	---	--	---	---	---	----------------------

3. 機械的エネルギー保存則

運動量保存則から得られる基礎原理である機械的エネルギー保存則は次のように表現される。

(dV 内での運動エネルギー・フラックスの純増加)

容積 dV のなかでの水のもつ運動エネルギーの増加率	=	容積 dV の表面 dS よりはいる単位時間 当たりの運動エネルギー	-	容積 dV の表面 dS より出る単位時間当 たりの運動エネルギー	+	容積 dV の水に作用するすべての力のなす仕事
------------------------------	---	--	---	---	---	---------------------------

以上に示した基礎原理をコントロール・ボリューム dV 内で積分すれば数学モデルが得られる。

3. 数学モデルの誘導

前項で述べた事柄を数学的に表現された基礎原理について順序をおってすすめていけば、非定常流の数学モデルが得られる。もともと、基礎原理のモデルはある大きさの空間 (以前にはコントロール・ボリュームとはいわなかった) について得られたものを極限操作で点におけるものとしたものである。なお、記号については最後に一括して表示している。

(1) 流体力学の基礎原理の数学的表示

1. 水の非圧縮性による連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

2. 濃度の連続式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{c'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{c'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{c'w'}) \dots\dots\dots (2)$$

3. 運動量保存則 (運動量式)

x -分値

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = & - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_x}{\rho} - \overline{u'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{u'w'} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

y -分値

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = & - \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sigma_y}{\rho} - \overline{v'v'} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{yz}}{\rho} - \overline{v'w'} \right) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

z -分値

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = & - \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{u'w'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{yz}}{\rho} - \overline{v'w'} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_z}{\rho} - \overline{w'w'} \right) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

4. 機械的エネルギー方程式 (近似)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{q^2}{2} + Q + \frac{p}{\rho} \right) \\ + u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_x}{\rho} - \overline{u'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{u'w'} \right) \right] \\ + v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sigma_y}{\rho} - \overline{v'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{yz}}{\rho} - \overline{v'w'} \right) \right] \\ + w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{u'w'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{yz}}{\rho} - \overline{v'w'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_z}{\rho} - \overline{w'w'} \right) \right] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ (合速度)

5. 水温収支式

熱力学の第一法則を形づくる各項のうち、水理学で対象する流れでは熱に関する各項が運動に関する各項よりオーダーが大きく、濃度の連続式と同じような形の水温収支則がえられる。すなわち、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = H - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{T'w'}) \dots\dots\dots (7)$$

(2) 六面体コントロール・ボリュームに対する境界条件

図-1 に示す六面体コントロール・ボリューム dV において成立する各種の関係を一括して表示すれば、表-1 に示すようになる。

表-1 図-1のコントロール・ボリュームに
対する各種の関係

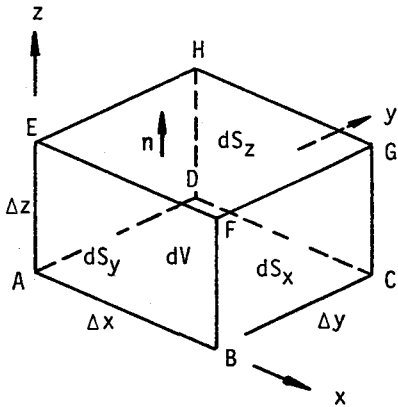


図-1 六面体コントロール・ボ
リュームとコントロール・
サーフェス

幾何学的な大きさ

	x	y	z
長さ	$dx = x_{i+1} - x_i$	$dy = y_{j+1} - y_j$	$dz = z_{n+1} - z_n$
面積	$dS_x = dy \cdot dz$	$dS_y = dz \cdot dx$	$dS_z = dx \cdot dy$
容積	$dV = dx \cdot dy \cdot dz$		

方向余弦

	$\cos(x, n)$	$\cos(y, n)$	$\cos(z, n)$
x_i	-1	0	0
x_{i+1}	+1	0	0
y_j	0	-1	0
y_{j+1}	0	+1	0
z_n	0	0	-1
z_{n+1}	0	0	+1

- (3) 自由表面や底面を含むコントロール・ボリュームに対する境界条件及び運動学的条件
コントロール・ボリュームが自由表面、底面あるいは側壁境界面を含む場合には、境界条件及び運動学的条件は次の表-2のようになる。

表-2 特殊な条件のコントロール・ボリュームに対する境界条件及び運動学的条件

幾何学的条件(方向余弦)

	x	y	z
自由表面	$-\frac{\partial z_s}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}$ $\div -\frac{\partial z_s}{\partial x}$	$-\frac{\partial z_s}{\partial y} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}$ $\div -\frac{\partial z_s}{\partial y}$	$1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}$ $\div 1$
底面	$\frac{\partial z_b}{\partial x} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y}\right)^2}$ $\div \frac{\partial z_b}{\partial x}$	$\frac{\partial z_b}{\partial y} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y}\right)^2}$ $\div \frac{\partial z_b}{\partial y}$	$-1 / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial y}\right)^2}$ $\div -1$
側壁面 ($y: +$)	0	+1	0
側壁面 ($y: -$)	0	-1	0

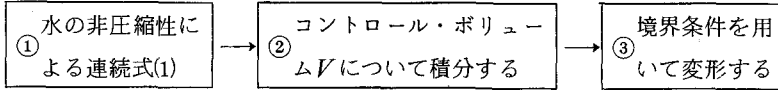
運動学的条件

自由表面	$\frac{dz_s}{dt} = w_s = \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y}$
------	---

底面 (移動床)	$\frac{dz_b}{dt} = w_b = \frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y}$
固定境界面	$q_b = u_b \cos_b(x, n) + v_b \cos_b(y, n) + w_b \cos_b(z, n)$

(4) 水の非圧縮性による連続条件式

次の手順にしたがって数学的演算をすすめる。



$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = \int [u \cos(x, n) + v \cos(y, n) + w \cos(z, n)] dS = 0$$

$$\textcircled{3} \quad |u \cdot \Delta y \cdot \Delta z|_{x_i}^{x_{i+1}} + |v \cdot \Delta z \cdot \Delta x|_{y_j}^{y_{j+1}} + |w \cdot \Delta x \cdot \Delta y|_{z_n}^{z_{n+1}} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x} |u \cdot \Delta z|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |v \cdot \Delta z|_{y_j}^{y_{j+1}} + |w|_{z_n}^{z_{n+1}} = 0$$

あるいは、各座標軸方向の流量フラックス、 $M_n = |u \cdot \Delta z|_{z_n}^{z_{n+1}}$ および $N_n = |v \cdot \Delta z|_{z_n}^{z_{n+1}}$ を用いると、

$$\frac{1}{\Delta x} |M_n|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |N_n|_{y_j}^{y_{j+1}} + |w|_{z_n}^{z_{n+1}} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。もちろん、 $x_i \rightarrow x_{i+1}$, $y_j \rightarrow y_{j+1}$, $z_n \rightarrow z_{n+1}$ という極限演算をすすめると、微分方程式

$$\frac{\partial M_n}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} + w = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

(5) 濃度の連続式

連続式を得るのと全く同じ手順である。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (cu) + \frac{\partial}{\partial y} (cv) + \frac{\partial}{\partial z} (cw) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{c'u'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{c'v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{c'w'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int \frac{\partial c}{\partial t} dV + \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (cu) + \frac{\partial}{\partial y} (cv) + \frac{\partial}{\partial z} (cw) \right] dV \\ = - \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{c'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{c'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{c'w'}) \right] dV \end{aligned}$$

$$\int \frac{\partial c}{\partial t} dV + \int c [u \cos(x, n) + v \cos(y, n) + w \cos(z, n)] dS$$

$$= - \int [\overline{c'u'} \cos(x, n) + \overline{c'v'} \cos(y, n) + \overline{c'w'} \cos(z, n)] dS$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \left| \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right| + \left| cu \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \left| cv \cdot \Delta z \cdot \Delta x \right|_{y_j}^{y_{j+1}} \\ & + \left| cw \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right|_{z_n}^{z_{n+1}} = \left| -\overline{c'u'} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \left| -\overline{c'v'} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \right|_{y_j}^{y_{j+1}} \\ & + \left| -\overline{c'w'} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \\ & \left| \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \Delta z \right| + \frac{1}{\Delta x} \left| cu \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| cv \cdot \Delta z \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| cw \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left| -\overline{c'u'} \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| -\overline{c'v'} \cdot \Delta z \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| -\overline{c'w'} \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \end{aligned}$$

あるいは流量フラックスを用いて

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \Delta z \right| + \frac{1}{\Delta x} \left| cM_n \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| cN_n \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| cw \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left| -\overline{c'u'} \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| -\overline{c'v'} \cdot \Delta z \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| -\overline{c'w'} \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \end{aligned}$$

また、コントロール・ボリューム内での濃度に関する平均的な乱流拡散係数を次のように定義すると、上式も変形される。

$$\begin{aligned} & -\overline{c'u'} = \epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x}, \quad -\overline{c'v'} = \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y}, \quad -\overline{c'w'} = \epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \\ & \left| \frac{\partial c}{\partial t} \cdot \Delta z \right| + \frac{1}{\Delta x} \left| cM_n \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| cN_n \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| cw \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left| \epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \cdot \Delta z \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| \epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

極限演算に対する微分方程式は次のようである。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (c \cdot \Delta z) + \frac{\partial}{\partial x} (cM_n) + \frac{\partial}{\partial y} (cM_n) + cw = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \Delta z \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \cdot \Delta z \right) + \epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

(6) 運動量保存則の x -分値

全く同様の手順であるので、若干省略して説明する。

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dV = - \int \frac{\partial Q}{\partial x} dV - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dV \\ & + \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_x}{\rho} - \overline{u'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{u'w'} \right) \right] dV \end{aligned}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int u [u \cos(x, n) + v \cos(y, n) + w \cos(z, n)] dS$$

$$= - \int Q \cos(x, n) dS - \int \frac{p}{\rho} \cos(x, n) dS + \int [(\frac{\sigma_x}{\rho} - \overline{u'u'}) \cos(x, n)$$

$$+ (\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'}) \cos(x, u) + (\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{w'u'}) \cos(z, n)] dS$$

$$\textcircled{3} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right| + \left| uu \cdot \Delta y \cdot \Delta x \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \left| uv \cdot \Delta z \cdot \Delta x \right|_{y_j}^{y_{j+1}}$$

$$+ \left| uw \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right|_{z_n}^{z_{n+1}}$$

$$= - \left| Q \Delta y \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - \left| \frac{p}{\rho} \Delta y \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \left| \left(\frac{\sigma_x}{\rho} - \overline{u'u'} \right) \Delta y \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$+ \left| \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \right) \cdot \Delta z \cdot \Delta x \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| \left(\frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{w'u'} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \right|_{z_n}^{z_{n+1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta z + \frac{1}{\Delta x} \left| uu \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| uv \cdot \Delta z \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| uw \right|_{z_n}^{z_{n+1}}$$

$$= - \frac{1}{\Delta x} \left| Q \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{\Delta x} \left| \frac{p}{\rho} \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta x} \left| \left(\frac{\sigma_x}{\rho} - \overline{u'u'} \cdot \Delta z \right) \right|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$+ \frac{1}{\Delta y} \left| \left(\frac{\tau_{xy}}{\rho} - \overline{u'v'} \cdot \Delta z \right) \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| \frac{\tau_{zx}}{\rho} - \overline{w'u'} \right|_{z_n}^{z_{n+1}}$$

流量フラックス及び運動量に関する平均的な乱流拡散係数をさきと同じように定義して、書きあらためると、上式は次のようになる。ただし、変形による応力項については省いている。

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta z + \frac{1}{\Delta x} \left| uM_n \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| uN_n \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| uw \right|_{z_n}^{z_{n+1}} = - \frac{1}{\Delta x} \left| Q \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$- \frac{1}{\Delta x} \left| \frac{p}{\rho} \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta x} \left| \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta z \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| \varepsilon_y \frac{\partial u}{\partial y} \Delta z \right|_{y_j}^{y_{j+1}} + \left| \varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_n}^{z_{n+1}}$$

..... (12)

なお、微分方程式系に変換するためには、 M_n, N_n をやめてもとの形にした方が都合がよい。

(7) 運動量保存則の y -, z -分値

上式と全く同じようにして求められる。

(8) 機械的エネルギー方程式

これは運動量方程式と異なってスカラー量を取り扱っている。その利点は河川や水路内の一方向的な流れに対して解析が都合よく行われるというものであり、この項での説明は省略する。

(9) 水温収支式

式の形からみて、濃度の連続式に水温発生項がつけ加わったものである。したがって、濃度連続式の誘導と同じようであることが理解されよう。

4. 一次元非定常モデル

いうまでもなく、このモデルは Saint-Venant 方程式として広く知られているものである。河道や水路など境界形状がはっきりしたところの一方向的な流れを対象としている。したがって、コントロール・ボリュームのとり方に関係してくる。これまでに述べたような直角六面体を積み重ねて河道形状を作ってもよいが、もっとも簡単な方法は河道形状を一つのコントロール・ボリュームとするというものである。この場合、コントロール・ボリュームの形は直方体ではないが、自由表面と境界面（固定、移動）、 Δx だけへだたった上・下流面より構成されていることは理解されよう。

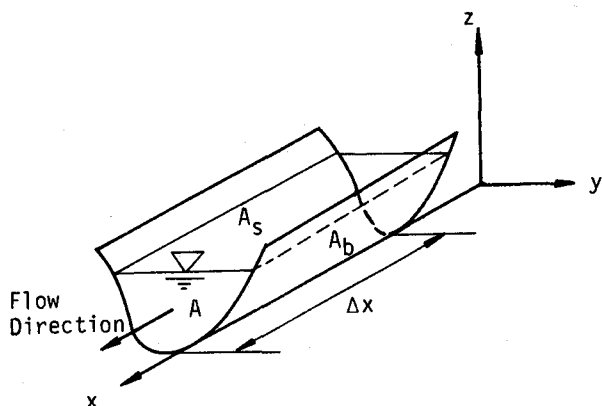


図-2 開水路一次元流れのコントロール・ボリューム

数学モデルの誘導に当たってすすめる積分は、上・下流面、自由表面及び境界面（固定、移動）に関して行えばよい。また、それに対する境界条件や運動学的条件は表-1及び-2を組み合せればよい。その詳しい誘導は著者の著書¹⁾や論文³⁾に示されているので、ここではその結果だけを示すにとどめておく。

(1) 水の連続式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、この説明では外向きの法線ベクトルを正にとっているの、流下方向の単位長さ当りの流入流量 q は負、流出流量は正であり、 A ：流下断面積、 Q ：流量、 t ：時間、 x ：流下方向の距離である。

(2) 濃度の連続式³⁾

$$\frac{\partial}{\partial t}(cA) + \frac{\partial}{\partial x}(cvA) = \frac{\partial}{\partial x}(D_c \cdot A \frac{\partial c}{\partial x}) - (1+K)cq \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 c ：濃度、 v ：断面平均流速、 D_c ：濃度に関する分散係数、 K ：濃度の流出や浸透にともなう係数である。もちろん、流出などがなければ、右辺の最終項はない。

(3) 運動量保存則の x -分値

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda' Ah_G \cos \theta) = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 h_G ：流水断面積の重心までの深さ、 τ_b ：境界面に働く抵抗力、 R ：径深、 β ：Boussinesq の運動量係数、 λ' ：Jaeger の圧力分布係数であり、いずれの係数も 1 とおいて差支えない。

この式は実験室内での実験などのように、水路の断面形状が一様であるとき、極めて都合よく用いられる。これは、(15) 式の誘導に当たっての前提条件や仮定が少ないためである。しかし、全運動量変化のうちの x -分値のみであるので、その他の分値に比べて x -分値が極めて卓越する場合以外には不適当である。

(4) 機械的エネルギー方程式

いわゆる Saint-Venant の式といわれるものであり、

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \frac{v_b}{v} = \sin \theta - \frac{v^2}{C^2 R} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 α : Coriolis のエネルギー係数、 λ : Jaeger の圧力分布係数、 C : Chezy係数、 v_b : 境界面付近でのせん断力のなす仕事に関係する流速で、実際には評価されえない。この式に近似化するまでにはいくつかの前提や仮定が用いられているが、結果としての数学的表現は極めて簡単である。しかも实际的に都合なのは、座標軸系がどのようなであっても最後にはこの形となることである。したがって、開水路の流れの巨視的な挙動をみるには、エネルギー式の方が便利である。

(15) 及び (16) 式を比較すれば、この数学モデルを誘導する原理及び方法論に違いがあっても、最終結果は同じになる。したがって、実用上には差支えなくても、モデルを用いるに当って得られた式的前提や仮定を理解し、対象とする水理現象が用いられた前提や仮定を含みうるものかどうかを知っておく必要がある。

(5) 熱の収支式

$$\frac{\partial}{\partial t}(TA) + \frac{\partial}{\partial x}(TvA) = \frac{\partial}{\partial x}(D_T \cdot A \frac{\partial T}{\partial x}) - (1+K)Tq \quad \dots\dots\dots (17)$$

この式については(14)式と同様である。ここに、 D_T : 水温に関する分散係数であって、これはなかなか評価しうるものではなく、多くの場合間接的に求められる。なお、 D_T は D_c と同じ値とされることがふつうである。

5. 平面的一層モデル

洪水氾濫原への洪水の氾濫、水深10m以下程度の浅くて、それ程大きくない湖沼、貯水池、内湾などの流れは、物理的性質(水温、濁度、密度)は一樣で、平面的な流れであると近似してよいものである。もちろん、局所的な流れの挙動の解析はまた別であり、規模が大きくなると、Coriolis 力を導入しなければならぬ⁴⁾。

この流れに対するコントロール・ボリュームは、平面的には $\Delta x, \Delta y$ という長方形、深さ方向には自由表面 z_s と底面 z_b で区切った六面体とすればよい。すなわち、 Δz を水深 $h(=z_s - z_b)$ 、 $\Delta x, \Delta y$ は対象とする問題の性質、解析範囲などによって定められるものとするということである(図-3)。湖沼などでは500 mのメッシュ間隔を用いればよいし、氾濫解析などでは土地利用に関係するメッシュ間隔とすればよい。

得られた結果を一括して表示すれば、以下の数学モデルが得られる⁵⁾。

(1) 水の連続式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} \left| M \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| N \right|_{y_j}^{y_{j+1}} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

あるいは、微分方程式系として

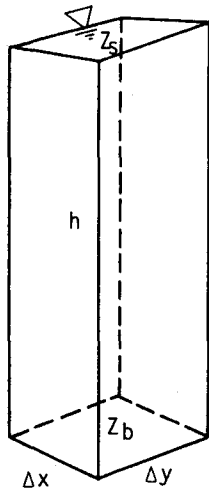


図-3 平面的一層モデルに対するコントロール・ボリューム

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)'$$

(2) 濃度の連続式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(ch) + \frac{1}{\Delta x} \left| cuh \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| cvh \right|_{y_j}^{y_{j+1}} = \frac{1}{\Delta x} \left| hD_{cx} \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \\ + \frac{1}{\Delta y} \left| hD_{cy} \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y_j}^{y_{j+1}} \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

あるいは,

$$\frac{\partial(ch)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu h) + \frac{\partial}{\partial y}(cv h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(hD_{cx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(hD_{cy} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (19)'$$

(3) 運動量方程式の x -分値

一次元流れの数学モデルと異なって、平面流れでは x 及び y -方向の分値式が必要となる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} \left| uM \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| vM \right|_{y_j}^{y_{j+1}} = - \frac{gh}{\Delta x} \left| z_s \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{\tau_{xb}}{\rho} \quad \dots\dots\dots (20)$$

あるいは,

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uM) + \frac{\partial}{\partial y}(vM) = - gh \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{\tau_{xb}}{\rho} \quad \dots\dots\dots (20)'$$

(4) 運動量方程式の y -分値

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} \left| uN \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} \left| vN \right|_{y_j}^{y_{j+1}} = - \frac{gh}{\Delta y} \left| z_s \right|_{y_j}^{y_{j+1}} - \frac{\tau_{yb}}{\rho} \quad \dots\dots\dots (21)$$

あるいは,

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uN) + \frac{\partial}{\partial y}(vN) = - gh \left(\frac{\partial z_s}{\partial y} \right) - \frac{\tau_{yb}}{\rho} \quad \dots\dots\dots (21)'$$

以上の各式において、 x 、 y 方向の底面せん断応力はそれぞれ、Manning公式を用いて

$$\left(\frac{\tau_{xb}}{\rho}, \frac{\tau_{yb}}{\rho} \right) = \left(gn^2 \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \right) (u, v)$$

である。

なお、内湾や湖沼などで風による流れを取り扱うときには、上式に自由表面におけるせん断応力項がつけ加えられる⁴⁾。

(5) 熱の連続式

濃度の収支式 (19) あるいは (19)' と同形であって、その右辺に $H \cdot h$ を付加したものである。

6. 貯水池における多層モデル

わが国の多目的貯水池は河川の上流部の峡谷に比較的高いダムを建設して作られている。したがって、夏期には水温が成層化している。貯水池の水温成層による分類とその特性についてはここでは述べないが、このような貯水池ではほぼ水平な等水温層より構成されていることが、これまでの多くの実測によりよく知られたことである。より詳細な実測では貯水池幅方向に流れ、濁度、栄養分の変化はみられるものの、流下方向に比べて巨視的には考慮しなくてもよいと思われる。

したがって、貯水池の流れに対するコントロール・ボリュームは、流下方向 Δx 、深さ方向 Δz 、貯水池幅 B という六面体とすればよい。もちろん、貯水池幅 B は流下方向の距離 x の関数であるから、 Δx は B を一定とみなしうる大きさにすべきであるとともに、濁度や栄養塩の分布が一様とみなしうる程度に圧切るべきである。これは与えられた問題によってきめられるべきものであるが、従来よりの経験によれば数 100 m から 1 ~ 2 km とすればよい。

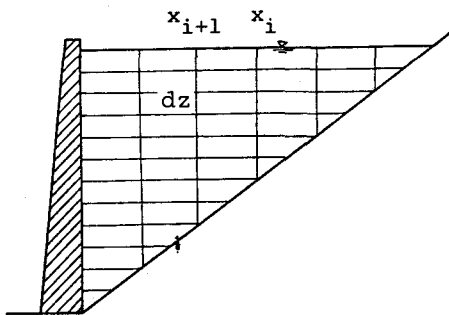


図-4 貯水池における多層モデル

このように考えにもとづく数学モデルを以下に一括して述べておく^{3), 6)}。

(1) 水の連続式

$$\left| uB \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \cdot \Delta z + \left| wA \right|_{z_n}^{z_{n+1}} + q_b = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 B ：貯水池幅、 A ：この標高 (z_n) における貯水池面積、 q_n ：このブロックより流出する流量である。

(2) 濃度の連続式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{A} \left| cuB \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| cwA \right|_{z_n}^{z_{n+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} c_b q_b \\ &= \frac{1}{A} \left| D_{cx} B \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| D_{cz} A \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z_n}^{z_{n+1}} - \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| cw_0 A \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここに、 D_{cx} 及び D_{cz} ： x 及び z - 方向に関する濃度の分散係数、 w_0 ：濃度を構成する濁質成分の沈降速度である。

(3) 運動量方程式の x - 分値

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{A} \left| uuA \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| uwA \right|_{z_n}^{z_{n+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} u_b q_b + \frac{1}{A} \left| \frac{p}{\rho} \cdot B \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \frac{1}{A} \left| D_{ux} B \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| D_{uz} A \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_n}^{z_{n+1}} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに、 D_{ux} 及び D_{uz} ： x 及び z - 方向に関する運動量の分散係数、 ρ ：流体圧である。

(4) 運動量方程式の z - 分値

$$p = - \int_z^{z_s} \rho g dz \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 g ：重力の加速度である。この式は z - 方向の加速度が無視される極めて変化の緩慢な流れをもとにして得られるものである。

(5) 熱の収支式

全く同じであるが、実際に用いられることが多いために再記しておく。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{A} \left| TuB \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| TwA \right|_{z_n}^{z_{n+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} T_b q_b$$

$$= \frac{1}{A} \left| D_{Tx} B \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_i^{i+1}} + \frac{1}{A \cdot \Delta z} \left| D_{Tz} \cdot A \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z_n^{n+1}} - \frac{1}{p C_w A \cdot \Delta z} \left| \phi A \right|_{z_n^{n+1}} \dots \dots \dots (24)$$

ここに、 ϕ ：気象要因による熱フラックス、 D_{Tx} 、 D_{Tz} ： x 、 z 方向の温度分散係数、ならびに C_w ：水の比熱である。

これらの式を用いて実際に数値解析をすすめるさいの境界条件などを一括すれば、以下のように示される。

流入部（上流端条件）

$$\int u \, dA = Q_{in}$$

流出部（主として下流端条件）

$$\sum_{z_m}^{z_{m+1}} b u \, dz = Q_{dis} \quad (\text{流出})$$

$$u = 0 \quad (\text{固定部})$$

側面条件

$$\sum q_b = Q_{bin} \quad (\text{流出入河川のある全ブロックでの和})$$

$$q_b = 0 \quad (\text{流出入なし})$$

底面

$$w_b = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_b = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_b = 0, \quad \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)_b = 0$$

自由表面

$$w_s = \frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\left| D_{Tz} \frac{\partial T}{\partial z} \right|_s = - \frac{1}{\rho c w} (\phi_L + \phi_a)$$

$$\left| D_{cz} \frac{\partial c}{\partial z} \right|_s = \left| c w_0 \right|_s$$

となる。

なお、富栄養化の計算に際してあらわれる各種の栄養塩の計算でも同様の式を連立して解くことができるが、これについては別の論文を参考されたい。

7. 実際問題への応用

以上に示した多くの環境境界条件下における数学モデルを実際に応用して、著者らは多くの実用問題を解析し、これまでの単なる現象の定性的特性を把握することから、すべての条件に対する定量的特性の解明を行ってきた。得られた成果はそれぞれの文献を参考にして頂きたいが、大別すれば以下のようである。

1. 河道内の洪水流の解析

2. 氾濫原での洪水の挙動
3. 湖沼、内湾における流れの解析と濁質物質の輸送及び拡散
4. 貯水池水理の解析

なお、これら以外にも多くの研究をすすめており、数学モデルを用いた数値解析、すなわち数値シミュレーションが新しい水理解析法の大きな分野を形成していくことと思われる。

参 考 文 献

1. 岩佐義朗：水理学の解析法，石原藤次郎編，水工水理学，丸善，東京，1972
2. Harleman, D. R. F.: Diffusion processes in stratified flow, Chapter 12, Estuary and Coastline Hydrodynamics, edited by A. T. Ippen, Engineering Societies Monographs, McGraw Hill, New York, 1966.
3. Iwasa, Y.: Mathematical aspect of one-dimensional equations of unsteady flows in open channels, Proc. International Symposium on Unsteady Flow in Open Channels, IAHR-BHRA, 1976.
4. 岩佐義朗，井上和也，足立敏之：琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション，京都大学防災研究年報21-B, 1978.
5. 岩佐義朗，井上和也：氾濫の水理の数値解析モデル，第16回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集44, 1979.
6. Iwasa, Y. and N. Matsuo: Estimation of turbidity in reservoirs, Proc. 19th IAHR Congress, New Delhi, India, Feb. 1981.