

河川の彎曲部における流れと河道形状

岸 力

1. 定曲率を持つ河道彎曲部の平衡流と横断面内二次流 — Engelund の研究

図-1(a), (b)に示すような座標と記号を用い
れば、円弧状の彎曲流路にあらわれる平衡
流の運動方程式、連続式は

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}(g\eta) + \epsilon \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$0 = gS + \epsilon \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(V_r \cdot r) = 0, \text{ すなわち}$$

$$V_r \cdot r = \text{const.} \quad (3)$$

ここに

V_θ, V_r は θ および r 方向流速； S は縦断
水面勾配すなわち $S = -\frac{\partial \eta}{r \partial \theta}$ ； η は水面の水
位； ϵ は渦動粘性係数

渦動粘性係数 ϵ を次式で与える：

$$\epsilon = \frac{1}{13} \sqrt{ghS} \quad (4)$$

ここに h は水深。

一方、均衡流では

$$Sr = \text{const.} \quad (5)$$

断面内の最深部の水深を H 、半径を R とすれ
ば(4), (5)から

$$\epsilon = \epsilon_R \cdot \frac{h}{H} \sqrt{\frac{hR}{Hr}} \quad (6)$$

$$\epsilon_R = \frac{1}{13} H \sqrt{gHS_R} \quad (6-a)$$

またまっつ速度 $U_f = \sqrt{ghS}$ は

$$U_f = U_{fR} \sqrt{\frac{hR}{Hr}} \quad (7)$$

$$U_{fR} = \sqrt{gHS_R} \quad (7-a)$$

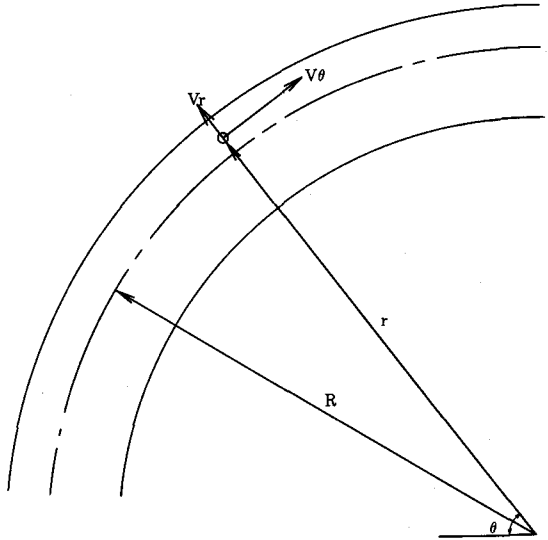


図-1(a) 座標系の記号

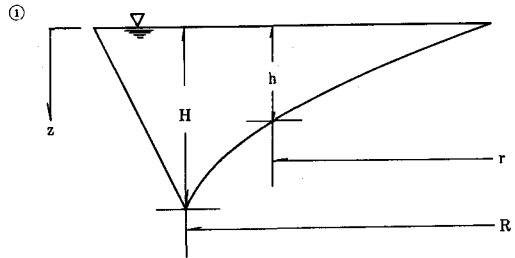


図-1(b) 横断面定義記号

(3)および(7)の関係を考慮し、流速および水面形を次式のようにあらわす：

$$V_r = U_R \cdot \frac{h}{r} \sqrt{\frac{hR}{Hr}} \cdot f\left(\frac{z}{h}\right) \quad (8)$$

$$V_\theta = U_R \sqrt{\frac{hR}{Hr}} \phi\left(\frac{z}{h}\right) \quad (9)$$

$$\eta = \frac{U_R^2}{g} \eta_0\left(\frac{r}{H}\right) \quad (10)$$

上式において $f(z/h)$, $\phi(z/h)$, $\eta_0(r/H)$ は未知関数である。

(5), (6)および(9)式を(2)に代入すれば

$$\phi''(\zeta) = -2\beta \quad (11)$$

ただし $\zeta \equiv z/h$,

$$\beta = 6.5 (U_{fR} / U_R) \quad (12)$$

V_θ に関する境界条件として

$$\zeta = 0 \text{ で } \phi(0) = 1 \quad (13)$$

$$\zeta = 1 \text{ で } V_\theta = U_b \text{ すなわち } U_R \sqrt{\frac{hR}{Hr}} \cdot \phi(1) = U_b \quad (14)$$

ただし U_b は底面流速で

$$\frac{\sqrt{\frac{hR}{Hr}} \cdot U_R - U_b}{U_f} = 6.5 \quad (15)$$

を満たす。なお(8)~(10)式において U_R は流れの代表流速として導入されていたが、境界条件(13)によれば U_R は最深部における表面流速をあらわす。境界条件(13), (14)によれば(11)式の解は

$$\phi(\zeta) = 1 - \beta \zeta^2 \quad (16)$$

次に(6), (8), (9), (10)の諸式を(11)式に代入すれば

$$f''(\zeta) = \frac{13U_R}{U_{fR}} (A - \phi^2) \quad (17)$$

$$\text{ここに } A = \frac{Hr^2}{hR} \frac{d\eta_0}{dr} \quad (18)$$

V_r に関する境界条件として

$$\zeta = 0 \text{ で } f'(0) = 0 \quad (19)$$

$$\text{および } \int_0^1 f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (20)$$

(19)および(20)式を満たす(17)式の解は

$$f(\zeta) = \frac{84.5}{\beta} \left[\frac{A-1}{2} \zeta^2 + \frac{\beta}{6} \zeta^4 - \frac{\beta^2}{30} \zeta^6 + K_1 \right] \quad (21)$$

$$K_1 = \frac{1-A}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210} \quad (22)$$

ここで(18)式で定義された A について考える。河床における流線の方向とセン断力の方向が一致するとの条件は

$$\frac{V_r}{V_\theta} = - \frac{\varepsilon \frac{\partial V_r}{\partial z}}{U_f^2} \quad (23)$$

(23)式から

$$A = \frac{1 - \beta + \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{1}{7}\beta^3}{1 - \frac{1}{3}\beta} \quad (24)$$

あらためて V_θ , V_r の式をまとめてみると

$$V_\theta = U_R \sqrt{\frac{hR}{Hr}} (1 - \beta \zeta^2) \quad (25)$$

$$V_r = 84.5 \frac{h}{r} \sqrt{\frac{hR}{Hr}} \cdot U_R \left[\frac{A-1}{2\beta} \zeta^2 + \frac{1}{6} \zeta^4 - \frac{\beta}{30} \zeta^6 + \frac{K_1}{\beta} \right] \quad (26)$$

(25), (26)式におけるパラメーター β は断面最深部における Chezy の流速係数 C と次式の関係を持つ：

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = \frac{V}{U_{fR}} = \frac{6.5 (1 - \beta/3)}{\beta} \quad (27)$$

ただし、 V は最深部の平均流速。自然河川においては β は 0.4 ～ 0.5 の値をもつ。

2. 定曲率を持つ河道彎曲部の平衡河床

図-2に示す様な平衡河床上にある砂粒子の運動を考える。砂粒子が河床上を滑動あるいは転動する

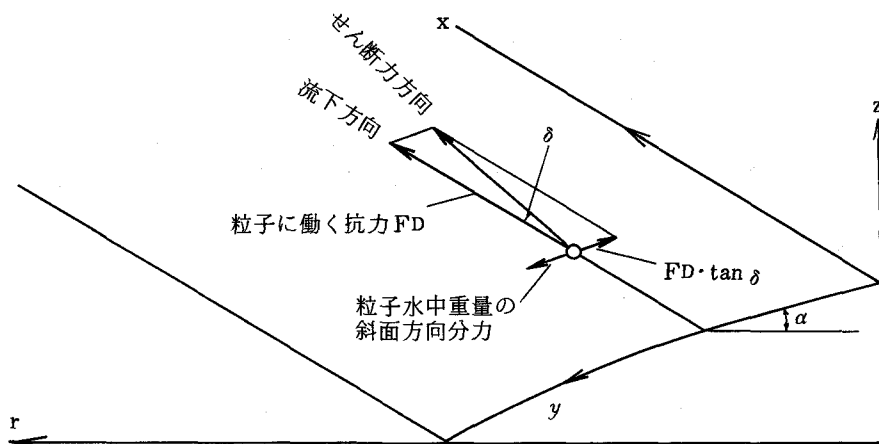


図-2 内岸側斜面における力の平衡

場合と跳躍運動をする場合を分けて扱わねばならない。

2.1 粒子運動が滑動あるいは転動の場合

図-2のように彎曲部の内岸側斜面上に原点をとり、主流の切線方向に x 軸、斜面に沿って y 軸、斜面に直角上向きに z 軸をとる。また斜面の傾角を α とする。流れには二次流が存在するから斜面上に働くセン断力の方向は x 軸とは一致せず偏角 δ をもつ。平衡河床では粒子の運動方向は x 軸に平行でなければならない。すなわち粒子に作用する y 方向の力の和は 0 である。

$$-F_D \tan \delta + (G - F_L) \sin \alpha = 0 \quad (28)$$

ここに F_D は粒子に作用する抗力の x 成分, G は粒子の水中重量, F_L は粒子に作用する揚力。

また平衡河床では x 方向についても粒子に作用する力の釣合いが成立するから

$$F_D - (G - F_L) \cos \alpha \tan \phi = 0 \quad (29)$$

ただし $\tan \phi$ は砂の動まさつ角

(28), (29)式から

$$\tan \alpha = dh/dr = \tan \phi \tan \delta \quad (30)$$

一方, 前章で求めた V_r , V_θ を用いれば

$$-\tan \delta = \frac{V_r}{V_\theta} \Big|_{z=1} = 84.5 \cdot \frac{h}{r} \frac{\frac{A-1}{3\beta} + \frac{2}{15} - \frac{\beta}{35}}{1-\beta} \quad (31)$$

(31)式を(30)式に代入すれば

$$\frac{dh}{dr} = -84.5 \cdot \frac{\frac{A-1}{3\beta} + \frac{2}{15} - \frac{\beta}{35}}{1-\beta} \tan \phi \frac{h}{r} \quad (32)$$

(32)式において

$$\nu = -84.5 \left(\frac{A-1}{3\beta} + \frac{2}{15} - \frac{\beta}{35} \right) / (1-\beta) \quad (33)$$

と置くと(32)式から

$$\frac{h}{H} = \left(\frac{r}{R} \right)^{\nu \tan \phi} \quad (34)$$

Engelund は $\nu = 7$, $\tan \phi = 0.6$ ($\phi = 30^\circ$) を与えているが森・岸の研究では $\nu = 11$ ととる方が河床形の式としては適合性が高い。

2.2 粒子運動が跳躍運動の場合—森・岸の研究

図-2において平衡河床上の砂粒子が跳躍運動を行うとして砂粒の運動方程式を次式で与える：

$$M \frac{du_d}{dt} = \frac{\pi}{8} \rho d^2 C_D q_d (U - u_d) \quad (35)$$

$$M \frac{dv_d}{dt} = \frac{\pi}{8} \rho d^2 C_D q_d (V - v_d) + G \sin \alpha \quad (36)$$

$$M \frac{dw_d}{dt} = -\frac{\pi}{8} \rho d^2 C_D q_d w_d - G \cos \alpha \quad (37)$$

ここに $M = \frac{\pi}{6} d^3 \left(\rho_s + \frac{\rho}{2} \right)$ 。 u_d , v_d , w_d は砂粒子の速度成分, U , V は底面流速の成分。 q_d は流れと砂粒子との相対速度。 $G = \frac{\pi}{6} d^3 \rho g s$, $s = (\rho_s - \rho) / \rho$, ρ_s , ρ は砂および水の密度。
平衡河床では dw_d/dt の時間平均は 0 でなければならないから

$$\frac{\pi}{8} \rho d^2 C_D \bar{q}_d (\bar{V} - \bar{v}_d) + G \sin \alpha = 0 \quad (38)$$

(38)式は(28)式に対応する関係である。 $\bar{q}_d = \bar{U} - \bar{u}_d$ と考えると(38)式から(39)式が得られる。

$$\frac{\bar{v}_d}{u_d} = \frac{U}{u_d} \left[\frac{V}{U} + \frac{\sin \alpha}{m} \right] \quad (39)$$

ここに

$$m = \frac{3}{4} C_D A_b^2 \left(1 - \frac{\bar{u}_d}{U} \right), \quad A_b = \frac{U}{\sqrt{sgd}} \quad (40)$$

平衡河床では $\bar{v}_d = 0$ であるから, $\sin \alpha = dh/dr$, $V/U = -\tan \delta = -\nu \frac{h}{r}$ を(39)式に代入すれば

$$\frac{dh}{dr} = \nu m \frac{h}{r}$$

すなわち平衡河床形状は

$$\frac{h}{H} = \left(\frac{r}{R} \right)^{\nu m} \quad (41)$$

前節の結論では $\nu = 11$ が妥当な値であるから, m が求められれば河床形状が求められる。

A. ($\bar{u}_d/U$) と A_b との関係

(35), (37)式を無次元化するため次の諸量を導入する:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_d}{U} - 1 &= \Delta U, \quad \frac{w_d}{U} = W_d \\ \tau &= \frac{3}{4} \frac{C_D U}{(s + 1.5) d} \cdot t, \quad \frac{1}{N} = \frac{3}{4} \frac{C_D A_b^2}{\cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

(42)式の諸量を用いれば, (35)式および(37)式は

$$\frac{d \Delta U}{d \tau} = (\Delta U)^2 \quad (43)$$

$$\frac{d W_d}{d \tau} = \Delta U \cdot W_d - N \quad (44)$$

これらの式を初期条件

$$\tau = 0 \text{ で } \Delta U = \Delta U_1, \quad W_d = W_{d1} \quad (45)$$

のもとで解くと

$$\Delta U = \frac{\Delta U_1}{1 - \Delta U_1 \cdot \tau} \quad (46)$$

$$W_d = \frac{\Delta U}{\Delta U_1} \left\{ W_{d1} - N \left(1 - \frac{\Delta U_1}{2} \tau \right) \tau \right\} \quad (47)$$

(47)式を積分して砂粒の上昇高を求め, さらに砂粒の跳躍時間 τ_s を求めると

$$\tau_s = \frac{2}{N} W_{d1} \quad (48)$$

次に $\tau = \tau_s$ のとき $\Delta U = \Delta U_2$ と書くと(46)式により

$$\Delta U_2 = \frac{\Delta U_1}{1 - \Delta U_1 \cdot \tau_s} \quad (49)$$

(49)式に(48)式を代入すると(50)式が得られる。

$$A_b^2 = \frac{2}{3 C_D W_{d1} \Delta U_1} \left(1 - \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} \right) \quad (50)$$

また(40)式によって $(\bar{u}_d / U)$ を求めると

$$\frac{\bar{u}_d}{U} = \frac{1}{\tau_s} \int_0^{\tau_s} \frac{u_d}{U} d\tau = 1 - \frac{1}{\tau_s} l_n \left(1 - \Delta U_1 \cdot \tau_s \right) \quad (51)$$

土屋らの実験を参照して $u_{d1} = 0.8 u_{d2}$, $W_{d1} = 0.4 u_{d1} / U = 0.4 (\Delta U_1 + 1)$ と仮定すると(48), (50)および(51)式によって $(\bar{u}_d / U)$ と A_b の関係が得られる。

B. A_b と τ_* の関係

河床近傍の流速分布に対数則を用い, また底面流速 U としては砂粒子の最大上昇高までの平均流速を考えると若干の計算の後次の関係が得られる:

$$\sqrt{\tau_*} = \frac{A_b}{\phi} + \delta(\tau_*) \quad (52)$$

$$\text{ここに } \tau_* = U_f^2 / sgd \quad (53)$$

$$\phi = 6.0 + 2.5 \left[l_n \left(\frac{Z_d}{d} + 0.5 \right) + \frac{d}{2 Z_d} l_n \left(1 + 2 \cdot \frac{Z_d}{d} \right) \right] \quad (54)$$

Z_d は砂粒子の最大上昇高で

$$\frac{Z_d}{d} = \frac{4}{3} \frac{s + 1.5}{C_D} \eta_p \quad (55)$$

η_p は(47)式から定まる無次元の最高位置

$$\text{また } \delta(\tau_*) = \frac{2.5 \sqrt{\tau_*}}{\phi} l_n \left[2 \left(1 + 2 (\tau_* - \tau_{*c}) \right) \right] \quad (56)$$

(52)~(56)の諸式によって求めた A_b と τ_* の関係を図-3に示す。また前項で求めた $(\bar{u}_d / U)$ と A_b のグラフを用い, あらためて $(\bar{u}_d / U) \sim \tau_*$ のグラフを作り図-4に示した。

図-3と図-4を用いれば(40)式によって m を τ_* の関数としてあらわすことができる。結果を図-5に示す。

C. 平衡河床形の理論値と実測値との比較

(41)式で与えた平衡河床形状の理論値と実測値とを比較し結果を図-6に示す。結論として次の関係が得られた。

$$\left. \begin{array}{ll} \tau_{*c} < \tau_* < 0.12 \text{ のとき} & m = \tan 30^\circ \\ 0.12 < \tau_* < 0.67 \text{ のとき} & m = 2.0 \tau_*^{0.60} \end{array} \right\} \quad (57)$$

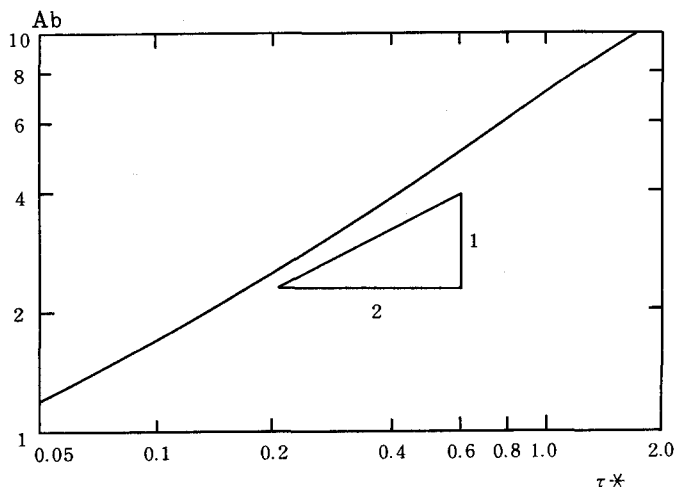


図-3 A_b と τ_* の関係

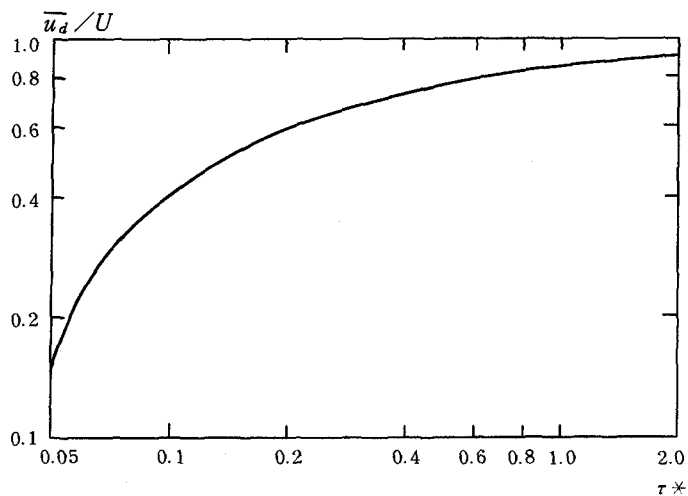


図-4 $\bar{u}_d/U$ と τ_* の関係

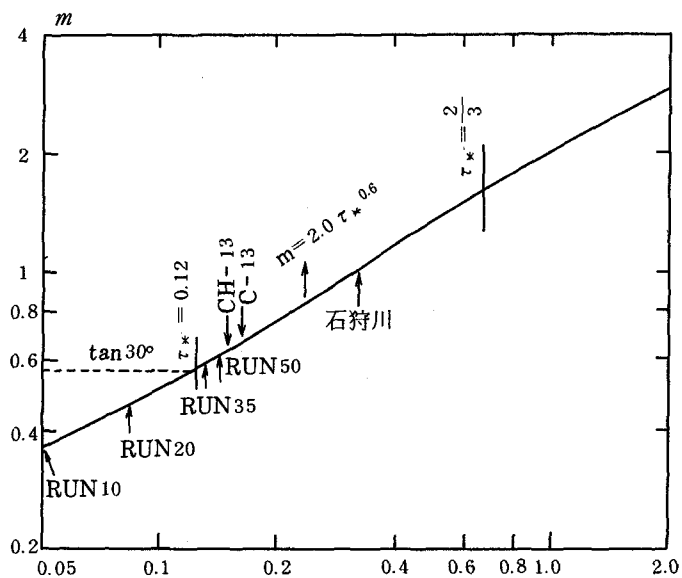
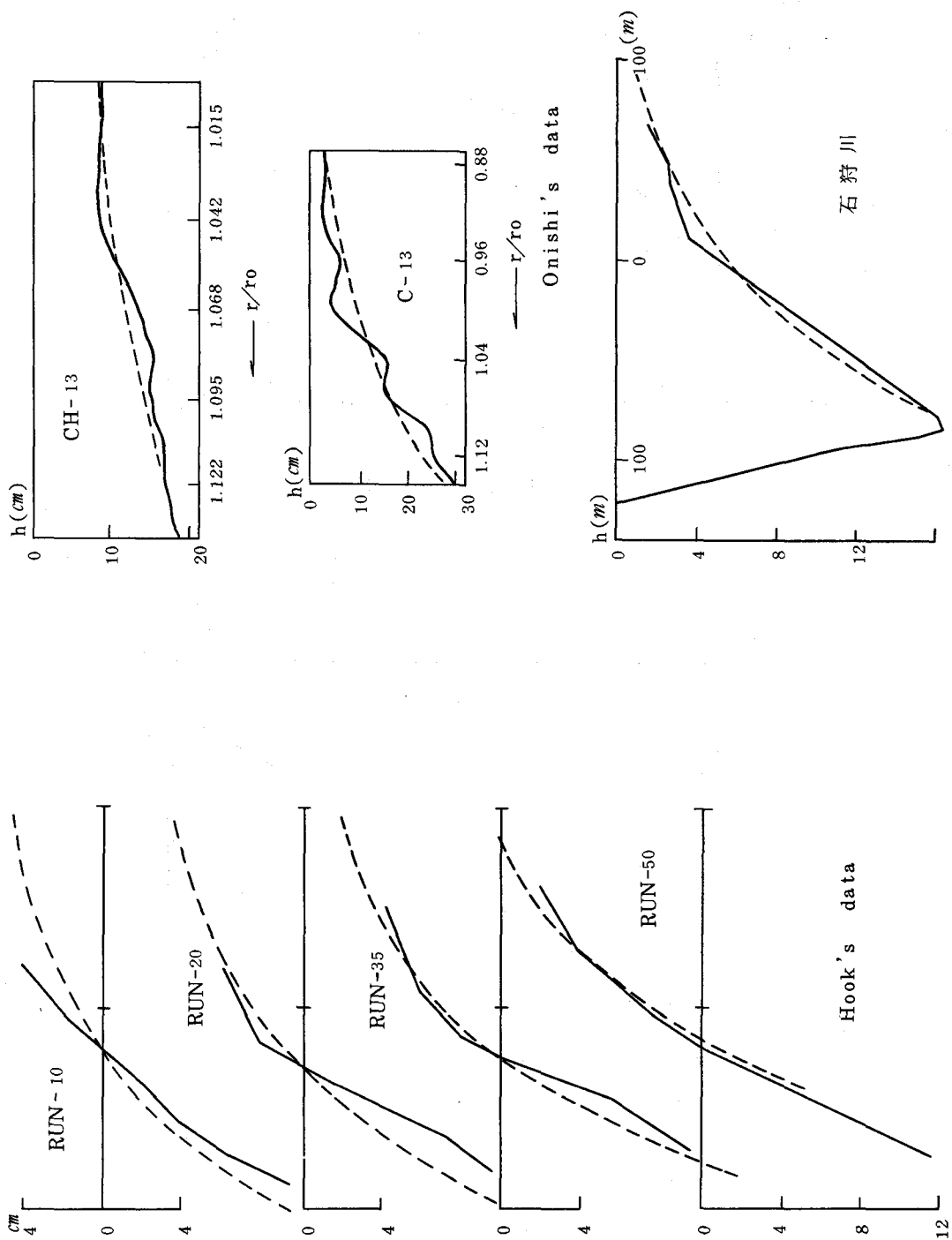


図-5 m と τ_* の関係



図一六 平衡河床形状の理論値と実測値の比較

参考文献

- 1) Engelund, F (1974): Flow and Bed Topography in Channel Bends, ASCE, HY11
- 2) 森明巨, 岸力 (1981): 河道弯曲部の河床形状に関する Engelund 理論の改良, 土木学会水理講演会論文集, 第25回
- 3) 岸力, 森明巨他 (1981): 一様な曲率を持つ河道弯曲部の河床形, 河川の機能に関する基礎的研究 (北大委託研究報告, 昭和55年度)
- 4) 山岡勲, 長谷川和義, 道口敏幸 (1980): 河岸浸食の研究, 河川の機能に関する基礎的研究 (北大委託研究報告, 昭和54年度)
- 5) Kikkawa, H., Ikeda, S., and Kitagawa, A. (1976): Flow and Bed Topography in Curved Open Channels, ASCE, HY9.
- 6) 池田駿介 (1974): 移転床河川の弯曲部における二次流と動的横断平衡河床について, 土木学会論文報告集 229号。
- 7) 土屋義人, 青山俊樹 (1970): 水流による砂粒の Saltation の機構(2), 京大防災研年報13号 B.
- 8) Rozovskii, I. L. (1957): Flow of Water in Bends of Open Channel, Academy Sci. of the USSR.