

有限振幅波の理論

土 屋 義 人

1. 緒 言

浅海における波の特性を究明することは、波力など構造物に作用する外力の推定のみならず、波に伴う諸現象とくに海浜流や漂砂で代表される輸送現象を明らかにするうえで、きわめて重要である。

有限振幅波の最初の研究は、1802年の Gerstner によって、Lagrange の運動方程式の解として与えられて以来、1847年の Stokes¹⁾ によって現在 Stokes 波理論とよばれる有限振幅波のポテンシャル理論を経て、各種の理論または追計算が行われた。一方、1895年には、Korteweg-de Vries²⁾ によってクノイド波理論が提案されたが、最近ようやくこの理論がプラズマ力学や格子力学などにおいて注目され、海岸工学の分野とあいまって、その理論的展開と応用が急速に進められてきた。

この場合、基礎方程式がいわゆる非線形であるために、通常せつ動法が用いられ、より高次の近似解の追求が、計算機の利用によって行われてきた。たとえば、Stokes 波を対象としたものでは、Schwartz³⁾をはじめ、堀川⁴⁾によって、また孤立波については Fenton⁵⁾が、最近ではクノイド波の高次近似解が Fenton⁶⁾によって試みられた。一方、非線形波動場の研究においては、プラズマ力学などにおいて、とくに谷内⁷⁾によって提案された逓減せつ動法と、その高次近似への発展が注目される。また、この取扱の水の波への応用が土屋・安田^{8),9)}、または青山¹⁰⁾によって試みられてきた。

ここでは、現在もっとも多用されている定形進行波としての Stokes 波およびクノイド波理論における質量輸送の現象に注目してみると、必ずしも十分理解できない点がある。すなわち、せつ動法を適用して展開されたこれらの理論では、いずれにしても波速の定義という付加条件を必要としており、これに伴って、質量輸送の表示が全く異なってしまう。

表-1.1は波速の定義による有限振幅進行波の理論を分類したものである。ここに、波速の定義は Stokes¹⁾によって、つぎの2つが与えられている。

表-1.1 波速の定義による有限振幅波理論の分類

波速の定義 波動理論	第 1 定 義	第 2 定 義
Stokes 波	Stokes (第2次近似解) Skjelbreia (第3次近似解) 田中 (第3次近似解) Laitone (第3次近似解) 合田・安倍 (第3次近似解) Skjelbreia-Hendrickson (第5次近似解) Bretschneider (第5次近似解)	土屋・山口 (第4次近似解) 堀川・西村・磯部 (第51次近似解)
クノイド波	Fenton (第9次近似解)	Laitone (第2次近似解) 土屋・山口 (第3次近似解) 堀川・西村・磯部 (第24次近似解)

$$c = \frac{\int_0^L (c+u) dx}{\int_0^L dx} \quad (\text{第1定義}) \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

$$c = \frac{\int_0^L \int_{-h}^{\eta} (c+u) dz dx}{\int_0^L \int_{-h}^{\eta} dz dx} \quad (\text{第2定義}) \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

ここに、 c ；波速、 u ；水平水粒子速度、 η ；水面の変動、 h ；水深、および L ；波長である。前者は任意断面における1波長あたりの平均水平水粒子速度がゼロであることを、また後者は定常化された系における1波長あたりの平均運動量がゼロ、いかえれば波速が水塊の重心の速度に等しいことを意味する。図-1.1に波による質量輸送速度の鉛直分布を示す。Lagrange座標では質量輸送が存在し、それは式(1.1)または(1.2)による波速の定義によって、全く異なる。すなわち、前者によれば波の進行方向に質量輸送が

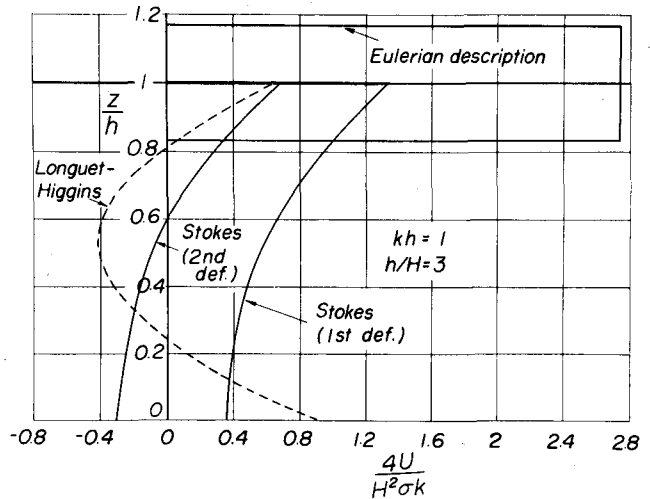


図-1.1 従来の理論による質量輸送速度の鉛直分布

存在するが、後者では全質量輸送量は存在しない。粘性の影響を考慮した Longuet-Higgins の理論は第2定義によっている。後者の場合は、ちょうど実験水槽のように質量輸送によるもどり流れがある場合に対応するという解釈もあるが、この場合は定形進行波とはいえないであろう。これに対して、Euler座標では質量輸送すなわち1周期平均の水平水粒子速度は、従来の理論では存在しないが、水面変動との干渉として評価すれば、その範囲にのみ存在し、全輸送量はLagrange座標によるものに等しい。

前述したように、波に伴う輸送現象を究明するためには、Lagrange座標のみならず、Euler座標においてもその表示を必要としよう。この立場から、あまりにも多用され、かつ数学的にも検討されてきたStokes波理論に1つの疑問を持ち、何かの手がかりを見出そうとするのが、著者の目的の1つである。このことは、逡減せつ動法で解かれた同じ方程式の解からも、確実に対応づけられるのである。ここでは、定形進行波を対象として、まずStokes波理論を考察したあと、逡減せつ動法によって擬Stokes波およびクノイド波理論を展開し、その特性を簡単に述べることにしたい。

2. Stokes波の理論¹⁶⁾

2.1 基礎方程式

速度ポテンシャル ϕ が存在する波動運動を考え、かつ座標および記号を図-2.1のようにとれば、その基礎方程式は

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

で与えられ、その自由表面での動力学および運動学的境界条件は、それぞれ次式で表される。

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g(z-h)|_{z=\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\eta_t + \eta_x \phi_x - \phi_z|_{z=\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

ここに、 g ；重力の加速度、 η ；平均水面からの水位変動、および h ；平均水深である。この場合、式(2.2)の右辺に現われる Bernoulli 定数 Q は、左辺第1項に含ませる。つぎに、水底における境界条件は、次式で与えられる。

$$\phi_z|_{z=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

このほか、定形進行波を対象とすることから、波形の周期性として、

$$\eta(x, t) = \eta(x + 2\pi/k, t) = \eta(x, t + 2\pi/\sigma) \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

また波形に関する連続条件

$$\int_0^{2\pi/k} \eta(x, t) dx = \int_0^{2\pi/\sigma} \eta(x, t) dt = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

と、水粒子速度の周期性として、

$$\nabla \phi(x, z, t) = \nabla \phi(x + 2\pi/k, z, t) = \nabla \phi(x, z, t + 2\pi/\sigma) \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

を満足させることになる。ここに、 k ；波数および σ ；周波数である。なお、式(2.7)の条件では、周期性のみを仮定することから、定数項が付加されてもよい。

2.2 従来の Stokes 波理論の考察

前述したように、従来 Stokes 波理論の追計算は数多く行われてきたが、必ずしも同一の方法ではなく、とくに Bernoulli 定数、速度ポテンシャルに含まれる時間項などの取扱いにおいて各種のものがある。表-2.1 は代表的な追計算におけるこれらの取扱いの相違を第2次近似解の表示において比較したものである。ここに、波数 $k = 2\pi/L$ 、周波数 $\sigma_0 = 2\pi/T$ および $\lambda = \pi H/L$ で表される微小パラメータで、いずれも第2次近似解までの表示による。この表から、次のことが指摘される。

表-2.1 Stokes 波理論の方法

著 者	Bernoulli 定数 (k^2/λ) Q	時 間 項 (k/λ) ² ($\phi/\sigma_0^2 t$)	平均水面と 静水面との差	平均水平水粒子 速度 $\bar{u}/c\lambda^2$	波速の定義
Skjelbreia	$-\frac{1}{2 \sinh kh}$	0	0	0	1
合田・阿部	0	$-\frac{1}{4}(\coth^2 kh - 1)$	0	0	1
Laitone	0	0	有限値(補正)	0	1
土屋・山口	$-(\frac{1}{2 \sinh kh} + \frac{1}{2 kh})$	$\frac{\coth kh}{2 kh}$	0	$\frac{\coth kh}{2 kh}$	2

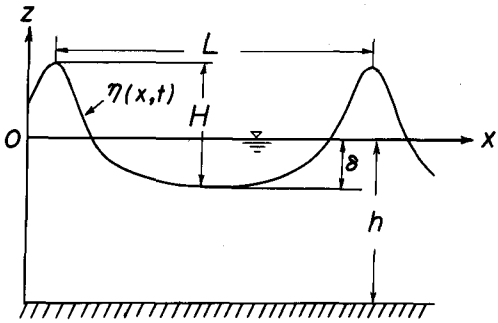


図-2.1 座標系および記号

まず、Bernoulli 定数の取扱いにおいては、流体力学としてたとえば友近¹¹⁾または Stoker¹²⁾が明記しているように、これを速度ポテンシャルに含めてよいが、Skjelbreia はせつ動して近似解を求めている。これは式(2.1)および(2.4)を満足する正弦関数を含む調和関数で速度ポテンシャルを表し、その係数を式(2.2)および(2.3)で決定する場合、前者の速度成分の自乗項から定数が現われ、それを消去するためである。このことは、また速度ポテンシャルに時間項を考慮していないためでもある。合田ら¹³⁾は Bernoulli 定数をゼロとした代りに、時間項を考慮している。しかし、Laitone¹⁴⁾は $\eta(x-ct)$ および $\phi(x-ct)$ として、Bernoulli 定数も時間項も考慮していないので、計算の結果、平均水面と静水面との差を消去することができず、実用的な補正を余儀なくされた。これらの理論は、いずれも正弦関数による調和関数で表示したために、波速の第1定義を用いたことになって、平均水平水粒子速度は存在しない。一方、表-2.1 に示した土屋・山口の追計算では、Bernoulli 定数のみならず、時間項をも含め、波速の第2定義を用いたので、平均水平水粒子速度が存在する。

なお、表-2.1 には示していないが、Whitham¹⁵⁾は Bernoulli 定数をゼロとし、かつ $\eta(x-ct)$ および $\phi(x-ct, z)$ とした。そして、式(2.2)の左辺第1項 ϕ_t の1周期平均はゼロでなく、 ϕ は少なくとも時間 t に比例する項を含むべきだと述べ、同時に x に比例する項も含み得るが、これは一様な水平水粒子速度を与えるので、ゼロとすることができると述べているが、これは $\phi(x-ct)$ ではない。

以上の考察から、Stokes 波理論をせつ動法によって展開する場合、著者は次のように取扱うこととした。すなわち、Bernoulli 定数はゼロとし、Laitone¹⁴⁾や Whitham¹⁵⁾にならって、

$$\eta = \eta(x-ct), \quad \phi = \phi(x-ct, z) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

とし、速度ポテンシャル ϕ の表示として、一般に次式を仮定する。

$$\phi^{(r)}(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_n^{(r)}(t) \sin n k x + B_n^{(r)} \cos n k x \} \cosh n k (z+h) + \sum_{n=0}^1 C_n^{(r)} x^n \dots\dots\dots (2.9)$$

ここに、 $A_n^{(r)}(t)$ 、 $B_n^{(r)}(t)$ および $C_n^{(r)}(t)$ はいずれも水面における境界条件および式(2.8)などによって決定される。この表示では、 $n=0$ のとき時間項が現われ、また永年項の表示も可能であり、さらに最低次の調和関数を含み、いずれも水底条件式(2.4)を満足する。

2.3 せつ動解

前述した基礎方程式のせつ動を求めるに当って、まず $X=x-ct$ によって式(2.1)~(2.4)を変数変換すれば、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ -c \phi_X + \frac{1}{2} \{ (\phi_X)^2 + (\phi_z)^2 \} + g \eta \Big|_{z=\eta} &= 0 \\ -c \eta_X + \eta_X \phi_X - \phi_z \Big|_{z=\eta} &= 0 \\ \phi_z \Big|_{z=-h} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

微小な展開パラメータ ε を用いて、未知量 $\phi(X, z)$ および $\eta(X)$ を、次式のように展開する。

$$\phi(X, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \phi_n(X, z) \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\eta(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \eta_n(X) \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

同時に、高次近似解において現われる永年項を消去するために、Stokes にならって波速 c を次式のように展開する。

$$c = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n c_n \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

さて、水面 $z = \eta$ における境界条件を $z = 0$ において評価するために、関数 $\phi(X, \eta)$ を式(2.11)および(2.12)を用い、かつ各項ごとに Taylor 級数に展開し、次式のように表す。

$$\phi(X, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} \left(\frac{\partial^m \phi_n}{\partial z^m} \right)_{z=0} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

これらを式(2.10)に代入し、 ε の次数ごとに整理すれば、まず $O(\varepsilon)$ の項においては、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0, \quad g\eta_1 + c_0 \phi_{1X} \Big|_{z=0} = 0 \\ c_0 \eta_1 + \phi_{1z} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \phi_{1z} \Big|_{z=-h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

となり、 $O(\varepsilon^2)$ の項は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_2 &= 0, \quad g\eta_2 - c_0 \phi_{2X} = c_1 \phi_{1X} + c_0 \eta_1 \phi_{1Xz} - \frac{1}{2} \{ (\phi_{1X})^2 - (\phi_{1z})^2 \} \Big|_{z=0} \\ c_0 \eta_{2X} + \phi_{2z} &= -c_1 \eta_{1X} + \eta_{1X} \phi_{1X} - \eta_1 \phi_{1zz} \Big|_{z=0}, \quad \phi_{2z} \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

また、 $O(\varepsilon^3)$ の項から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi_3 &= 0, \quad g\eta_3 - c_0 \phi_{3X} = c_0 (\eta_1 \phi_{2Xz} + \eta_2 \phi_{1Xz} + \frac{1}{2} \eta_1^2 \phi_{1Xzz}) \\ &+ c_1 (\eta_1 \phi_{1Xz} + \phi_{2X}) + c_2 \phi_{1X} - \phi_{1X} (\eta_{1X} \phi_{1Xz} + \phi_{2X}) - \phi_{1z} (\eta_1 \phi_{1zz} + \phi_{2z}) \Big|_{z=0} \\ c_0 \eta_{3X} + \phi_{3z} &= -c_1 \eta_{2X} - c_2 \eta_{1X} + \phi_{2X} \eta_{1X} + \phi_{1X} \eta_{2X} + \eta_1 \eta_{1X} \phi_{1Xz} - \eta_1 \phi_{2zz} \\ &- \eta_2 \phi_{1zz} - \frac{1}{2} \eta_1^2 \phi_{1zzz} \Big|_{z=0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

さらに、高次項について同様に表示することができるので、それらを式(2.5)～(2.7)と式(2.10)および(2.11)などの条件のもとに解けばよい。ただし、議論は省略するが、このせつ動解が収束するときのみ有効となることはいうまでもない。

1) 第1次近似解

式(2.17)の第2および第3式から、

$$\phi_{1XX} + \frac{g}{c_0^2} \phi_{1z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \eta_1 = \frac{c_0}{g} \phi_{1X} \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

が得られるので、式(2.11)によって、

$$\phi^{(r)}(X, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(r)} \sin nX \cosh nk(z+h) + \sum_{n=0}^1 C_n^{(r)} X^n \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

を仮定して係数を決定すれば、次式のように、周知の Airy の微小振幅波の解となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= A_1 c_0 \cosh k(z+h) \sin kX \\ \eta_1 &= A_1 \sinh kh \cos kX, \quad c_0^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.20)$$

ただし、 A_1 は波高 H との関係で定められる。

2) 第2次近似解

式(2.18)に対応して、式(2.16)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{2XX} + \frac{g}{c_0^2} \phi_{2zz} &= \frac{g}{c_0^2} \{ \eta_{1X} \phi_{1X} - c_1 \eta_{1X} - \eta_1 \phi_{1zz} \} + \frac{1}{c_0} \{ \phi_{1X} \phi_{1XX} + \phi_{1z} \phi_{1Xz} \\ &\quad - c_1 \phi_{1XX} - c_0 \eta_1 \phi_{1XXz} - c_0 \eta_{1X} \phi_{1Xz} \} \Big|_{z=0} \quad \dots\dots\dots (2.21) \end{aligned}$$

式(2.20)を代入して係数を定めると、結局次式のようになる。

$$A_2 = \frac{3}{8} \frac{k}{\sinh^2 kh} A_1, \quad c_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= \frac{3}{8} \frac{c_0 k}{\sinh^2 kh} A_1^2 \cosh 2k(z+h) \sin 2kX + B_2 X \\ \eta_2 &= \frac{c_0^2}{g} B_2 - \frac{k^2}{4g} c_0^2 A_1^2 + \frac{k}{4} A_1^2 (\cosh 2kh + 2) \coth kh \cos 2kX \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

となり、式(2.6)に代入して B_2 が次式となる。

$$B_2 = \frac{k^2}{4} A_1^2 \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

3) 第3次近似解

全く同様に、式(2.17)の解を求めれば、結局第3次近似解として、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{ac_0} &= \frac{\cosh kh}{\sinh kh} \sin kX + \frac{3ka}{8} \left\{ \frac{\cos 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} \sin 2kX + \frac{2}{3 \sinh^2 kh} X \right\} \\ &\quad + \frac{(ka)^2 (13 - 4 \cosh^2 kh)}{64 \sinh^7 kh} \cosh 3k(z+h) \sin 3kX \quad \dots\dots\dots (2.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{a} &= \left\{ 1 + \frac{(ka)^2}{8 \sinh^4 kh} (\cosh^4 kh + 5 \cosh^2 kh - \frac{9}{2}) \right\} \cos kX \\ &\quad + \frac{ka (\cosh 2kh + 2) \coth kh}{4 \sinh^2 kh} \cos 2kX + \frac{(ka)^2 (8 \cosh^6 kh + 1)}{64 \sinh^6 kh} \cos 3kX \quad \dots\dots\dots (2.26) \end{aligned}$$

ここに、波速 c は第3次近似解において補正されて、次のようになる。

$$c^2 = \frac{g}{k} (\tanh kh) \left\{ 1 + \frac{(kh)^2}{16 \sinh^4 kh} (9 + 8 \cosh^4 kh - 8 \cosh^2 kh + 4 \sinh^2 kh) \right\}^2 \dots\dots\dots (2.27)$$

すなわち、従来の Stokes 波理論と右辺カッコ内の最後の項だけの相違が現われる。また、式 (2.26) より波高 H との関係は、次式のようになる。

$$\frac{H}{2a} = 1 + \frac{(ka)^2(2\sinh^6 kh + 5\sinh^4 kh - 4\sinh^2 kh + 1)}{8\sinh^6 kh} \dots\dots\dots (2.28)$$

なお、水平および鉛直水粒子速度は、式 (2.25) より直ちに得られるが、ここでは前者のみを示す。

$$\begin{aligned} \frac{u}{c_0} = & \frac{ka \cosh kh}{\sinh kh} \cos kX + \frac{3ka}{4} \left\{ \frac{ka \cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh} \cos 2kX + \frac{1}{3 \sinh kh} \right\} \\ & + \frac{3(ka)^3(13 - 4 \cosh^2 kh)}{64 \sinh^7 kh} \cosh 3k(z+h) \cos 3kX \dots\dots\dots (2.29) \end{aligned}$$

2.4 Stokes 波の特性

1) 波形および波速

図-2.2に示すように、一般に無次元周期 $T\sqrt{g/h}$ および水深・波高比 h/H によって、波の非線性が異なる。図中 S-3-1 で示すが、通常 Stokes 波理論とほぼ同じである。また、波速は式 (2.27) で表されたが、これと従来の Stokes 波理論との比較を図-2.3 に示す。ここに、S-3 が式 (2.27) であり、また S-3-1

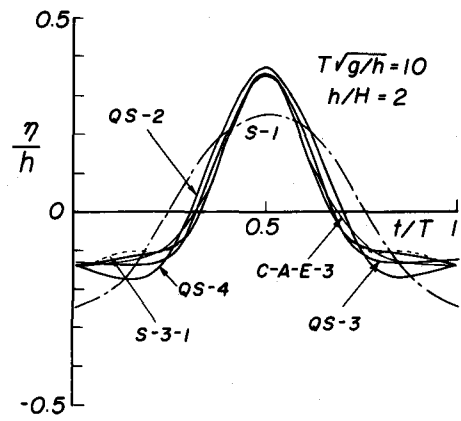


図-2.2 Stokes 波の時間波形

および S-3-2 はそれぞれ第 1 および第 2 定義による Stokes 波の波速である。

2) 水粒子速度および質量輸送速度

水平水粒子速度の表示は式 (2.29) で与えられ、とくにこの場合一様流が付加される。したがって、Euler 座標においても、質量輸送(あえてこういおう)が存在し、次式となる。

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{(ka)^2}{4 \sinh^2 kh} \left(\frac{\tanh kh}{kh} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (2.30)$$

一方、Lagrange 座標における質量輸送速度 $\bar{U}$ は、式 (2.29) を用いて水粒子の運動から計算され、次

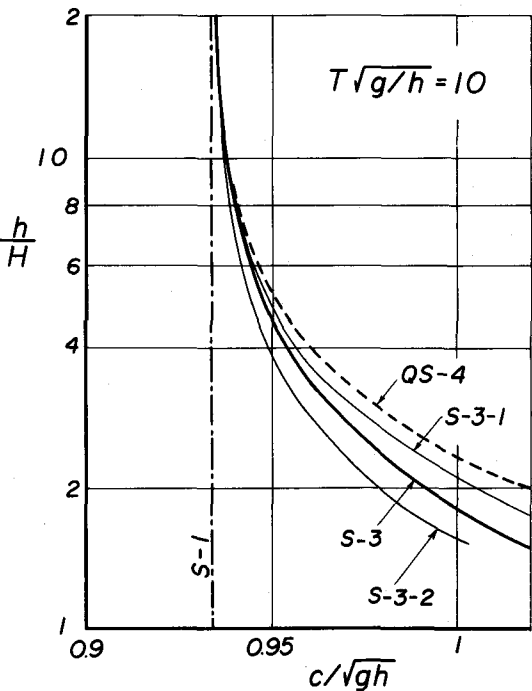


図-2.3 Stokes 波の波速

式となる。

$$\frac{\bar{U}}{\sqrt{gh}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} + \frac{(ka)^2 \tanh kh}{2kh \sinh^2 kh} \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right) \left\{ \cosh k(z+k) - \frac{ka}{2 \sinh kh} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

これらの表示から、質量流束 Q を求めれば、第2次近似解においては、両座標において一致する。なお、図-2.4には、質量輸送速度の鉛直分布(S-3)を示すが、図中S-3-1は通常の Stokes 波理論によるものである。

3) 保存量および極限波高

波のエネルギー、エネルギーフラックスなどの表示は、式(2.25)および(2.26)を用いて計算されるが、ここでは省略する。また、Rankine-Stokes の条件を用いれば、極限波高を求めることができる。

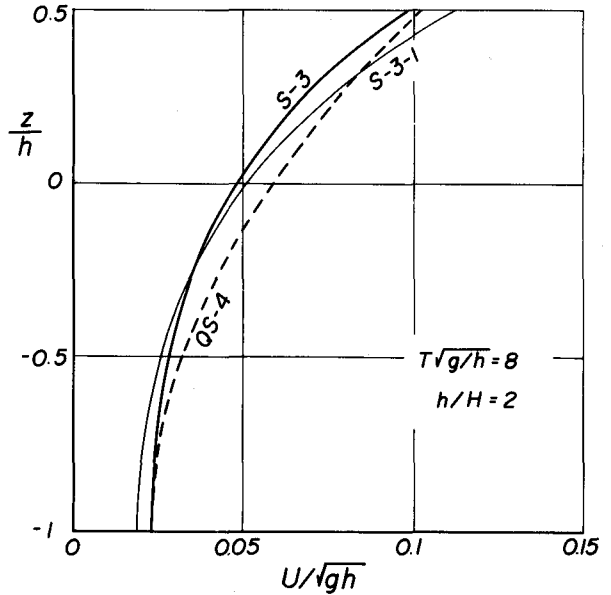


図-2.4 質量輸送速度の鉛直分布(1)

3. 擬 Stokes 波理論⁸⁾

3.1 基礎方程式

基礎方程式は、いうまでもなく式(2.1) ~ (2.4) または式(2.10)であるが、ここでは任意の攪乱によって生ずる波動運動に対して独立な量として水深 h を選び、これを基準長として、次の無次元量を定義する。

$$\phi^* = \frac{\phi}{h\sqrt{gh}}, \quad x^* = \frac{x}{h}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad t^* = t \frac{g}{\sqrt{h}}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{h}, \quad p^* = \frac{p}{\rho gh} \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

基礎方程式(2.1) ~ (2.4) は、次式のように変換される。

$$\nabla^2 \phi^* = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\phi_{t^*}^* + \frac{1}{2}(\phi_{x^*}^{*2} + \phi_{z^*}^{*2}) + z^* \Big|_{z^*=\eta^*} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

$$z_{t^*}^* + z_{x^*}^* \phi_{x^*}^* - \phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=\eta^*} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

$$\phi_{z^*}^* \Big|_{z^*=-1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

さて、式(3.2)を解くために、通常のせつ動法を適用すれば、前述した Stokes 波理論を導くことができるが、ここではいわゆる逓減せつ動法 (Reductive perturbation method) を用い、波の分散性及び非線形性の評価に便利のように、若干一般化する。まず、Gardner-Morikawa 変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t^*, \quad \zeta = z^* \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

を用い、次式で表されるせつ動解を考える。

$$\left. \begin{aligned} \eta^* &= \epsilon^n \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} \eta_m \\ \phi^* &= \epsilon^{n-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} \phi_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

ここに、 $\epsilon = (h/L)^2$ であり、また n は非線形性と分散性の比に相当し、たとえば 4. で述べるクノイド波理論の場合は $n=1$ である。また、以後 η^* を η 、 ϕ^* を ϕ と略記する。式 (3.6) および (3.7) を式 (3.2) ~ (3.5) に代入すれば、次式のようになる。

$$\epsilon^{n-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} (\epsilon \phi_{m\epsilon\epsilon} + \phi_{m\zeta\zeta}) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^n \left[- \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} (\phi_{m\epsilon} - \eta_m - \epsilon \phi_{m\tau}) + \epsilon^n \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \epsilon^{\ell, m-2} \left(-\eta_{\ell} \phi_{m\epsilon\zeta} + \frac{1}{2} \phi_{\ell\epsilon} \phi_{m\epsilon} + \frac{\epsilon^{-1}}{2} \phi_{\ell\zeta} \phi_{m\zeta} \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon \eta_{\ell} \phi_{m\tau\zeta} \right) + \epsilon^{2n} \sum_{k, \ell, m}^{\infty} \epsilon^{k+\ell+m-3} \left(-\frac{1}{2} \eta_k \eta_{\ell} \phi_{m\epsilon\zeta\zeta} + \eta_k \phi_{\ell\zeta} \phi_{m\epsilon\zeta} + \epsilon^{-1} \eta_k \phi_{\ell\zeta} \phi_{m\zeta\zeta} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \epsilon \eta_k \eta_{\ell} \phi_{m\tau\zeta\zeta} \right) + \dots\dots\dots \right] \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{n+1/2} \left[- \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} (\eta_{m\epsilon} - \epsilon \eta_{m\tau} + \epsilon^{-1} \phi_{m\zeta}) + \epsilon^n \sum_{\ell, m=1}^{\infty} \epsilon^{\ell+m-2} (\eta_{\ell\epsilon} \phi_{m\epsilon} - \epsilon^{-1} \eta_{\ell} \phi_{m\zeta\zeta}) \right. \\ \left. + \epsilon^{2n} \sum_{k, \ell, m}^{\infty} \epsilon^{k+\ell+m-3} (\eta_k \eta_{\ell\epsilon} \phi_{m\epsilon\zeta} - \frac{1}{2} \epsilon^{-1} \eta_k \eta_{\ell} \phi_{m\zeta\zeta\zeta}) + \dots\dots \right] \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \dots\dots (3.10) \end{aligned}$$

$$\epsilon^{n-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{m-1} \phi_{m\zeta} \Big|_{\zeta=-1} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

ここで、たとえば n を十分大きく与えることにすれば、水面変動のみで表した次式が得られる。

$$\eta_{\tau} + \frac{1}{6} \eta_{\epsilon\epsilon\epsilon} = -\frac{\epsilon}{15} \eta_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} - \frac{17}{630} \epsilon^2 \eta_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} - \dots\dots\dots (3.12)$$

この式の第 1 次近似解はいわゆる微小振幅波理論に対応し、その高次近似が波の分散性によって補正されることを表す。このように、 $1 \leq n < \infty$ の値によって任意の非線形性をもつ分散波動を表示できよう。ここでは、 $n=2$ の場合について考える。すなわち、式 (3.7) から次式のせつ動解となる。

$$\left. \begin{aligned} \eta(x^*, t^*) &= \epsilon^2 \eta_1(\xi, \tau) + \epsilon^3 \eta_2(\xi, \tau) + \dots\dots \\ \phi(x^*, z^*, t^*) &= \epsilon^{3/2} \{ \phi_1(\xi, \zeta, \tau) + \epsilon \phi_2(\xi, \zeta, \tau) + \dots\dots \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.13)$$

式 (3.8) ~ (3.11) において $n=2$ とし、 ϵ の次数ごとに整理すれば、次のようになる。まず、 ϵ の項に対しては、

$$\phi_1 = \phi_1(\xi, \tau) \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

となり、 ϵ^2 の項では、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= -\frac{1}{2}\zeta^2\phi_{1\xi\xi} + \varphi_1(\xi, \tau) \\ \eta_1 &= \phi_{1\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.15)$$

ここに、 $\varphi_1(\xi, \tau)$ は ζ に関する積分定数である。つぎに、 ε^3 の項においては、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{4!}\zeta^4\phi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\zeta^2\varphi_{1\xi\xi} + \varphi_2(\xi, \tau) \\ \varphi_{1\xi} &= \eta_2 + \frac{1}{2}\eta_{1\xi\xi} + \phi_{1\tau} \\ \eta_{1\tau} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

ここに、 $\varphi_2(\xi, \tau)$ は ζ に関する積分定数であり、最後の式は線形化された K-dV 方程式として知られている。同様に、 ε^4 の項は次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_4 &= -\frac{1}{6!}\zeta^6\phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!}\zeta^4\varphi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\zeta^2\varphi_{2\xi\xi} + \varphi_3(\xi, \tau) \\ \varphi_{2\xi} &= \eta_3 + \frac{1}{2}\eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_{1\xi\tau} - \frac{1}{24}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}\varphi_{1\xi\xi\xi} + \phi_{1\tau} \\ \eta_{2\tau} + \frac{1}{6}\eta_{2\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{1}{15}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\tau} + \frac{1}{2}\phi_{1\tau\tau} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.17)$$

ここに、 $\varphi_3(\xi, \tau)$ は ζ に関する積分定数である。全く同様な計算を進めると、結局水面変動 η と速度ポテンシャル $\mathcal{Q}$ に関する次式が得られるであろう。

$$\begin{aligned} \eta_\tau + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi} &= -\varepsilon\left\{\frac{3}{2}\eta\eta_\xi + \frac{1}{15}\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\tau} + \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{\tau\tau}\right\} - \varepsilon^2\left\{\frac{17}{630}\eta_{\xi\tau} + \frac{1}{15}\eta_{\xi\xi\xi\xi\tau}\right. \\ &\quad + \frac{3}{2}\eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta\eta_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{12}\eta_{\xi\tau\tau} + \frac{3}{2}\eta\eta_\tau + \eta_\xi\mathcal{Q}_\tau\left\} - \varepsilon^3\left\{\frac{31}{2835}\eta_{\xi^3} + \frac{17}{630}\eta_{\xi^3\tau}\right. \right. \\ &\quad - \frac{3}{80}\eta_{\xi\xi\xi\tau\tau} + 2\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{4}{3}\eta_\xi\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{2}{5}\eta\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{5}{3}\eta_\tau\eta_{\xi\xi} + \frac{5}{6}\eta\eta_{\xi\xi\tau} + \frac{4}{3}\eta_\xi\eta_{\xi\tau} \\ &\quad \left. - \frac{1}{12}\eta_{\tau\tau\tau} + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi}\mathcal{Q}_\tau + \frac{3}{2}\eta^2\eta_\xi + \frac{3}{2}\eta\mathcal{Q}_{\tau\tau} + \eta_\tau\mathcal{Q}_\tau\right\} + O(\varepsilon^4) \dots\dots\dots (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\xi - \eta &= \varepsilon\left\{\frac{1}{2}\eta_{\xi\xi} + \mathcal{Q}_\tau\right\} + \varepsilon^2\left\{\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{24}\eta_{\xi\xi\xi\xi}\right\} + \varepsilon^3\left\{\frac{61}{720}\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta\eta_{\xi\xi}\right. \\ &\quad \left. + \eta_\xi^2 + \eta\mathcal{Q}_\tau\right\} + O(\varepsilon^4) \dots\dots\dots (3.19) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \dots\dots\dots, \quad \eta/h = \varepsilon^2\eta \\ \mathcal{Q} &= \phi_1 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots\dots\dots, \quad \phi^* = \varepsilon^{3/2}(\mathcal{Q} - \varepsilon\zeta^2\mathcal{Q}_{\xi\xi}/2 + \varepsilon^2\zeta^4\mathcal{Q}_{\xi\xi\xi\xi}/4! - \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.20)$$

定形進行波を取扱うこととして、式(2.10)から式(3.15)および(3.16)の解として、固有値 c^* によって、

$$\eta(\xi, \tau) = \eta(\sigma), \quad \mathcal{Q}(\xi, \tau) = \mathcal{Q}(\sigma), \quad \sigma = \xi - c^* \tau \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

を満足する波動解を考えることにすれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} -c^* \eta_{\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{\sigma\sigma} = & -\varepsilon \left\{ \frac{3}{2} \eta_{\sigma} + \frac{1}{15} \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^* \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{2} c^{*2} \eta_{\sigma} \right\} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{17}{630} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ & - \frac{1}{15} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{6} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma} - \frac{5}{2} c^* \eta \eta_{\sigma} - \frac{1}{2} c^{*3} \eta_{\sigma} \left. \right\} - \varepsilon^3 \left\{ \frac{31}{2835} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ & + 2 \eta_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{5} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{17}{630} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{15} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{7}{2} c^* \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} \\ & \left. - c^* \eta \eta_{\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^{*3} \eta_{\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_{\sigma} + 4 c^{*2} \eta \eta_{\sigma} + \frac{1}{2} c^{*4} \eta_{\sigma} \right\} + O(\varepsilon^4) \quad \dots\dots\dots (3.22) \end{aligned}$$

ここに、波速 c^* は Stokes 波の場合と同様に、次式で表す。

$$c^* = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots\dots\dots (3.23)$$

水平および鉛直水粒子速度は、水面変動 η を用いて、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = \frac{\phi_x}{\sqrt{gh}} & = \varepsilon^2 \eta + \varepsilon^3 \left[-c^* \eta - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} \right] + \varepsilon^4 \left[\frac{1}{24} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 - 6 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 + 5 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \eta^2 + c^{*2} \eta \left. \right] + \varepsilon^5 \left[-\frac{1}{720} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^6 - 15 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 \right. \right. \\ & + 75 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 61 \left. \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 2 \right\} \eta_{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 3 \right\} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} \\ & \left. + \frac{1}{24} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 + 6 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 7 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{3}{2} c^* \eta^2 - c^{*3} \eta \right] + \dots\dots\dots (3.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = \frac{\phi_z}{\sqrt{gh}} & = -\varepsilon^{5/2} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \eta_{\sigma} + \varepsilon^{7/2} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \left[\frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 3 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + c^* \eta_{\sigma} \right] + \varepsilon^{9/2} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \\ & \left[-\frac{1}{120} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 - 10 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 + 25 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 3 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} - c^{*2} \eta_{\sigma} - \eta \eta_{\sigma} \right] \\ & + \varepsilon^{11/2} \left(1 + \frac{z}{h}\right) \left[\frac{1}{5040} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^6 - 21 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 + 175 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 427 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ & - \frac{1}{120} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 + 10 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 35 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 7 \right\} \eta_{\sigma} \eta_{\sigma\sigma} \\ & \left. + \frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 9 \right\} \eta \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 3 \right\} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma} + 3 c^* \eta \eta_{\sigma} + c^{*3} \eta_{\sigma} \right] + \dots\dots\dots (3.25) \end{aligned}$$

また、圧力は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho gh} = & 1 - \frac{z}{h} + \varepsilon^2 \eta + \varepsilon^3 \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} \right] + \varepsilon^4 \left[\frac{1}{24} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 \right. \right. \\ & - 6 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 + 5 \left. \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right] + \varepsilon^5 \left[-\frac{1}{720} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^6 - 15 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 + 75 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 61 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \eta \eta_{\sigma\sigma} - \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma}^2 \right] + \dots \quad (3.26) \end{aligned}$$

3.2 せつ動解

1) 第1次近似解

この場合の方程式は、式(3.22)より次式となる。

$$-c_0 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (3.27)$$

この方程式の解は、進行波を対象とし式(2.6)および波高の条件から、次式で与えられる。

$$\frac{\eta}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} \right) \cos \vartheta, \quad \vartheta = \frac{2\pi h}{L} \left(\frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \quad (3.28)$$

ここに、波速は次式で表される。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 \quad (3.29)$$

2) 第2次近似解

この場合には、同様に次式が得られる。

$$c_0 \eta_{2\sigma} - c_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{2\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta_{1\sigma} + \frac{1}{15} \eta_{1\sigma\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c_0 \eta_{1\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} c_0^2 \eta_{1\sigma} = 0 \quad (3.30)$$

この式の解として、第1次近似解に対応する特解のみを考えれば、それは永年項を含んだ次式で表される。

$$\eta_2 = \theta A_{21} \cos \vartheta + \sigma B_{21} \sin \vartheta + A_{22} \cos 2\vartheta + B_{22} \sin 2\vartheta \quad (3.31)$$

これを式(3.23)および(3.30)に代入し、永年項が消えるように係数を決定すれば、次式となる。

$$\eta_2 = \frac{3A^2}{16\pi^2} \cos 2\vartheta \quad (3.32)$$

ここに、 A は波高に関する条件から定まり、波速の補正項とともに、次式で表される。

$$c_1 = \frac{38}{45} \pi^4, \quad A = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(\frac{H}{h} \right) \quad (3.33)$$

したがって、第2次近似解は次式となる。

$$\frac{\eta}{h} = \frac{\lambda_0}{2} \cos \vartheta + \frac{3}{16} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \cos 2\vartheta \quad (3.34)$$

ここに、波速は次式で表される。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^4 \quad (3.35)$$

3) 高次近似解

同様な方法で、より高次の近似解を求めることができるが、ここでは第4次近似解の結果を示しておく。

まず、波形は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{h} = & \frac{1}{2} \lambda_0 \cos \vartheta + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 3 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + 2 + \frac{613}{1260} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \right\} \cos 2\vartheta \\ & + \frac{1}{512} \lambda_0^3 \left\{ 27 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} + 45 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right\} \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \cos 4\vartheta \cdots \quad (3.36) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \left(\frac{H}{h} \right)^{1/3} \left(\frac{256 (2\pi h/L)^4}{18 \{ 3 + 5 (2\pi h/L)^2 \}} \left[\left\{ 1 + \frac{16384 \pi^4}{243 (3 + 5 (2\pi h/L)^2)} \left(\frac{L^2 H}{h^3} \right)^{-2} \right\}^{1/2} + 1 \right] \right)^{1/3} \\ & - \left(\frac{H}{h} \right)^{1/3} \left(\frac{256 (2\pi h/L)^4}{18 \{ 3 + 5 (2\pi h/L)^2 \}} \left[\left\{ 1 + \frac{16384 \pi^4}{243 (3 + 5 (2\pi h/L)^2)} \left(\frac{L^2 H}{h^3} \right)^{-2} \right\}^{1/2} - 1 \right] \right)^{1/3} \\ & \cdots \cdots \cdots \quad (3.37) \end{aligned}$$

であり、また波速は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{19}{360} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \frac{2941}{604800} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^8 \\ & + \frac{9}{64} \lambda_0^2 \left\{ \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \right\} \cdots \cdots \cdots \quad (3.38) \end{aligned}$$

また、これらを式(3.24)および(3.25)に代入すれば、水平および鉛直水粒子速度を、また式(3.26)から、圧力が得られるが、ここでは水平水粒子速度のみを示す。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \lambda_0 \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 3 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} + \frac{1}{120} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^4 \right. \\ & \left. \left\{ 5 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 - 20 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 + 12 \right\} + \frac{1}{15120} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^6 \left\{ 21 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^6 - 420 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 756 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 278 \right\} - \frac{3}{64} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \right] \cos \vartheta \\ & + \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left[3 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left\{ 12 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 5 \right\} + \frac{1}{2520} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 \left\{ 5040 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 \right. \right. \\ & \left. \left. - 12600 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 + 3137 \right\} - \frac{27}{128} \lambda_0^2 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \right] \cos 2\vartheta + \frac{1}{512} \lambda_0^3 \left[27 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-4} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-2} \left\{ 81 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 35 \right\} \right] \cos 3\vartheta + \frac{27}{2048} \lambda_0^4 \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^{-6} \cos 4\vartheta \cdots \cdots \quad (3.39) \end{aligned}$$

なお、この理論は Stokes 波と相違して、線形長波を基準とし通減せつ動法によって展開されたが、むしろ Stokes 波に類似している。たとえば、 $(2\pi h/L)$ について波速の表示式を展開すれば、

$$c = \left(\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L} \right)^{1/2} = \sqrt{gh} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^2 + \frac{29}{360} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^4 - \frac{55}{3024} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)^6 + \cdots \right\} \cdots (3.40)$$

となるので、式(3.38)と比較して、それが Stokes 波の分散項を展開した形になっている。このことから著者らはこれを擬 Stokes 波ということにした。

3.3 擬 Stokes 波の特性

1) 波形および波速

図-2.2 に Stokes 波との比較を示したが、第4次近似解(QS-4)は無次元周期 $T\sqrt{g/h} = 10$ 付近にお

いてよい対応を示す。さらに大きい値においては、二次波が現われる。図-2.3に示した波速の表示においても、ほぼ同様である。

2) 水粒子速度および質量輸送速度

Euler および Lagrange 座標における質量輸送速度の表示は、それぞれ次式となる。

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{16} \lambda_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} (kh)^2 \right\} \dots\dots\dots (3.41)$$

$$\frac{\bar{U}}{\sqrt{gh}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} + \frac{1}{8} \lambda_0^2 \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right) \left[1 + \frac{2}{3} (kh)^2 \left\{ 3 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \right] \dots\dots\dots (3.42)$$

なお、図-3.1には質量輸送速度の鉛直分布を無次元周期 $T\sqrt{g/h}$ ごとに示したが、これから擬 Stokes 波

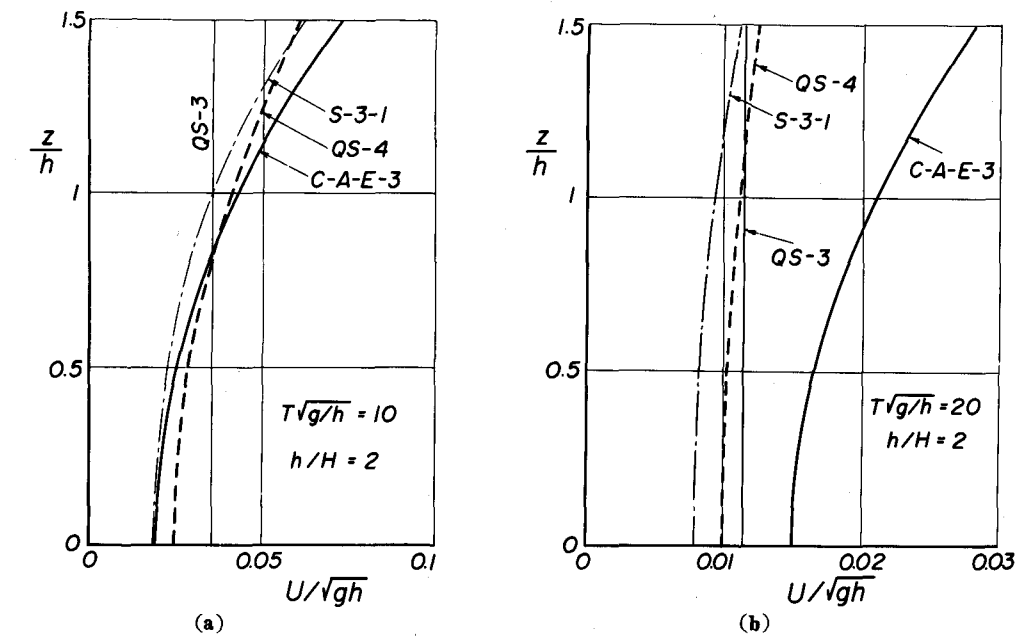


図-3.1 質量輸送速度の鉛直分布(2)

は第1定義による Stokes 波による表示と対応し、また図-4.5に示すように実験値ともよく一致する。

3) 保存量および極限波高

この場合も、波の保存量を表示できるが省略する。また、Rankine-Stokes の極限波の条件を用いて計算した極限波高・水深比 $(H/h)_{\max}$ は、

$$\left(\frac{H}{h} \right)_{\max} = \lambda_0 + \frac{27 \lambda_0^3}{1024} \left\{ \frac{1}{4 (kh)^4} + \frac{3}{(kh)^2} \right\} \dots\dots\dots (3.43)$$

で表されるが、図-4.6に示されるように、無次元周期 $T\sqrt{g/h}$ の限られた範囲のみ適用可能である。これは、この理論の限られた適用性によるものであるが、同一の基礎方程式を異なった方法で求めた近似解がある範囲においてよく対応していることに注目してよいであろう。

4. クノイド波の理論⁹⁾

4.1 基礎方程式

前述した逓減せつ動法による方法において、波の非線形性と分散性とは平衡しているとした解として得られるクノイド波理論を試みる。すなわち、この場合には、式(3.7)において $n=1$ とすればよく、これを式(3.2)～(3.5)に代入して、 ε の次数ごとに整理すれば、次のようになる。まず、 $O(\varepsilon)$ の項では、

$$\phi_1 = \phi_1(\xi, \tau) \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

となり、 $O(\varepsilon^2)$ の項は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= -\frac{1}{2}\zeta^2\phi_{1\xi\xi} + \varphi_1(\xi, \tau) \\ \eta_1 &= \phi_{1\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに、 $\varphi_1(\xi, \tau)$ は ζ に関する積分定数である。同様に、 $O(\varepsilon^3)$ の項においては、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{4!}\zeta^4\phi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\zeta^2\phi_{1\xi\xi} + \varphi_2(\xi, \tau) \\ \varphi_{1\xi} &= \eta_2 + \phi_{1\tau} + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\eta_{1\xi\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

$$\eta_{1\tau} + \frac{3}{2}\eta_1\eta_{1\xi} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

ここに、 $\varphi_2(\xi, \tau)$ も ζ に関する積分定数であり、また式(4.4)はいわゆる K-dV 方程式として知られている。同様に、 $O(\varepsilon^4)$ の項に対しては、

$$\left. \begin{aligned} \phi_4 &= -\frac{1}{6!}\zeta^6\phi_{1\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{4!}\zeta^4\phi_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2!}\zeta^2\phi_{2\xi\xi} + \varphi_3(\xi, \tau) \\ \varphi_{2\xi} &= \eta_3 + \frac{1}{2}\eta_1\eta_{1\xi\xi} - \frac{1}{24}\eta_{1\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2}\eta_{1\xi\tau} + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\phi_{1\xi\xi\xi} + \eta_1\phi_{1\xi} + \phi_{1\tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

$$\begin{aligned} \eta_{2\tau} + \frac{3}{2}(\eta_1\eta_2)_\xi + \frac{1}{6}\eta_{2\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta_1\eta_{1\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{1\xi\xi\tau} + \frac{3}{2}\eta_1^2\eta_{1\xi} \\ + \frac{5}{2}\eta_1\eta_{1\tau} + \eta_{1\xi}\phi_{1\tau} + \frac{1}{2}\phi_{1\tau\tau} + \frac{1}{15}\eta_{1\xi\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.6) \end{aligned}$$

が得られ、ここに、 $\varphi_3(\xi, \tau)$ も積分定数である。さらに同様な方法を進めると、結局次式が得られるであらう。

$$\begin{aligned} \eta_\tau + \frac{3}{2}\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi} = -\varepsilon \left\{ \frac{1}{15}\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\tau} + \frac{3}{2}\eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \frac{2}{3}\eta\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}\eta^2\eta_\xi \right. \\ \left. + \frac{3}{2}\eta\eta_\tau + \eta_\xi\mathcal{Q}_\tau + \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{\tau\tau} \right\} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{17}{630}\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{15}\eta_{\xi\xi\xi\xi\tau} + 2\eta_{\xi\xi}\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{4}{3}\eta_\xi\eta_{\xi\xi\xi\xi} \right. \\ \left. + \frac{2}{5}\eta\eta_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{5}{2}(\eta_\xi)^3 + \frac{15}{2}\eta\eta_\xi\eta_{\xi\xi} + \frac{5}{4}\eta^2\eta_{\xi\xi\xi} + \frac{5}{3}\eta_{\xi\xi}\eta_\tau + \frac{4}{3}\eta_\xi\eta_{\xi\tau} + \frac{5}{6}\eta\eta_{\xi\xi\tau} - \frac{1}{12}\eta_{\xi\tau\tau} \right. \\ \left. + 3\eta^2\eta_\tau + \frac{9}{4}\eta^3\eta_\xi + \frac{1}{6}\eta_{\xi\xi\xi}\mathcal{Q}_\tau + \eta_\tau\mathcal{Q}_\tau + \frac{3}{2}\eta\mathcal{Q}_{\tau\tau} + \frac{5}{2}\eta\eta_\xi\mathcal{Q}_\tau \right\} + \dots\dots\dots (4.7) \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q}_\varepsilon - \eta = \varepsilon \left\{ \mathcal{Q}_\tau + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta_{\varepsilon\varepsilon} \right\} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{3}{2} \eta \eta_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{5}{24} \eta_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \eta_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} \eta^3 + \eta \mathcal{Q}_\tau \right\} + \dots \quad (4.8)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \varepsilon \eta_2 + \varepsilon^2 \eta_3 + \dots, \quad z/h = \varepsilon \eta \\ \mathcal{Q} &= \phi_1 + \varepsilon \phi_2 + \varepsilon^2 \phi_3 + \dots, \quad \phi^* = \varepsilon^{1/2} \left(\mathcal{Q} - \varepsilon \zeta^2 \mathcal{Q}_{\zeta\zeta} / 2 + \varepsilon^2 \zeta^4 \mathcal{Q}_{\zeta\zeta\zeta\zeta} / 4! \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.9)$$

なお, 式(4.7)において, $\varepsilon=0$ とすれば K-dV 方程式に一致する。

さて, これらの方程式の解として, 擬 Stokes 波の場合と同じく, 式(3.21)を満足する定形進行波を考えることにすれば, その基礎方程式として, 次式が導かれる。

$$\begin{aligned} -c^* \eta_\sigma + \frac{3}{2} \eta \eta_\sigma + \frac{1}{6} \eta_{\sigma\sigma\sigma} &= -\varepsilon \left\{ \frac{3}{2} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{2}{3} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{1}{6} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} c^* \eta \eta_\sigma + \frac{1}{2} c^{*2} \eta_\sigma + \frac{1}{15} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right\} - \varepsilon^2 \left\{ 4 c^{*2} \eta \eta_\sigma - 6 c^* \eta^2 \eta_\sigma - \frac{7}{2} c^* \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} c^{*3} \eta_\sigma - c^* \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{6} c^{*2} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + 2 \eta_{\sigma\sigma} \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{4}{3} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{2}{5} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{2} \eta_\sigma^3 + \frac{15}{2} \eta \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{5}{4} \eta^2 \eta_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{9}{4} \eta^3 \eta_\sigma - \frac{1}{15} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{17}{630} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon^3) \quad \dots \quad (4.10) \end{aligned}$$

ここに,

$$c^* = 1 + \varepsilon c_0 + \varepsilon^2 c_1 + \varepsilon^3 c_2 + \dots \quad (4.11)$$

なお, この展開では, 水粒子速度や圧力の表示を水面変動 η によって, 次のように与えることができる。まず, 水平および鉛直水粒子速度は, それぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} &= \frac{\phi_x}{\sqrt{gh}} \\ &= \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} - c^* \eta \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{1}{24} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 - 6 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 5 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta \eta_{\sigma\sigma} - \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \eta_\sigma^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} c^* \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^3 + c^{*2} \eta \right] + \dots \quad (4.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} &= \frac{\phi_z}{\sqrt{gh}} \\ &= -\varepsilon^{3/2} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \eta_\sigma + \varepsilon^{5/2} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \left[\frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \eta \eta_\sigma + c^* \eta_\sigma \right] + \varepsilon^{7/2} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \\ &\quad \left[-\frac{1}{120} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^4 - 10 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 + 25 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 7 \right\} \eta_\sigma \eta_{\sigma\sigma} + \frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 9 \right\} \eta \eta_{\sigma\sigma\sigma} - \frac{3}{2} c^* \eta \eta_\sigma - \frac{3}{2} \eta^2 \eta_\sigma - c^{*2} \eta_\sigma - \frac{1}{6} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 3 \right\} c^* \eta_{\sigma\sigma\sigma} \right] + \dots \quad (4.13) \end{aligned}$$

また、圧力は Bernoulli の式を用いて、次式のようになる。

$$\frac{p}{\rho gh} = -\left(\frac{z}{h}\right) + \varepsilon \eta - \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma\sigma} \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{1}{24} \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^4 - 6 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 + 5 \right\} \eta_{\sigma\sigma\sigma\sigma} - \left\{ \left(1 + \frac{z}{h}\right)^2 - 1 \right\} \eta_{\sigma}^2 + \eta \eta_{\sigma\sigma} \right] + \dots \quad (4.14)$$

3.2 セツ動解

1) 第1次近似解

式(4.7)より、第1次近似解に対しては、次式が得られる。

$$-c_0 \eta_{1\sigma} + \frac{3}{2} \eta_1 \eta_{1\sigma} + \frac{1}{6} \eta_{1\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (4.15)$$

この周期解は次式で表される。

$$\eta_1 = \beta + (r - \beta) \operatorname{cn}^2 \vartheta \quad (4.16)$$

$$\text{ここに、} \vartheta = (3/4)(r - \alpha)\sigma, \quad k^2 = (r - \beta)/(r - \alpha) \quad (4.17)$$

また、 α, β および r ; いずれも積分定数で $r > \beta > \alpha$, cn ; Jacobi のだ円関数, および k ; だ円関数の母数である。波速 c_0 は式(4.16)を式(4.15)に代入して、次式で表される。

$$c_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + r) \quad (4.18)$$

したがって、これらの積分定数を式(2.6)の波形の連続条件および波高 H の定義から決定することができる。すなわち、

$$\int_0^{2k} \eta d\vartheta = \beta + (r - \beta) J_1 = 0, \quad J_1 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \quad (4.19)$$

$$\frac{H}{h} = \varepsilon(\eta_{\max} - \eta_{\min}) = \varepsilon(r - \beta) \quad (4.20)$$

より、次のようになる。

$$\varepsilon \alpha = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{E}{K} \right), \quad \varepsilon \beta = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right), \quad \varepsilon r = -\frac{1}{k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{E}{K} - 1 \right) \quad (4.21)$$

ここに、 K および E ; それぞれ第1種および第2種完全だ円積分である。また、その母数 k は水面変動の周期性から得られる次式で定められる。

$$2K = \frac{1}{2k} \left\{ 3\varepsilon(r - \alpha) \right\}^{1/2} (1 + \varepsilon c_0) T \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (4.22)$$

以上によって、第1次近似解は次のようになる。

$$\frac{\eta}{h} = \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ \operatorname{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\}, \quad \vartheta = \left\{ \frac{3}{4k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \right\}^{1/2} \left(\frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \quad (4.23)$$

ここに、

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} \quad (4.24)$$

なお、この場合の水平および鉛直水粒子速度、および圧力は、この解を式(4.12)～(4.14)に代入して、次式のように求められる。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

$$\frac{w}{\sqrt{gh}} = \left\{ \frac{3}{k^2} \left(\frac{H}{h} \right)^3 \right\}^{1/2} \left(\frac{z}{h} \right) \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

$$\frac{p}{\rho gh} = 1 - \frac{z}{h} + \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4.27)$$

式(4.27)によれば、鉛直水粒子速度が存在するにもかかわらず、第1次近似解では、圧力は静水圧分布である。

2) 第2近似解

この場合の基礎方程式は、式(4.7)より次式となる。

$$-c_0 \eta_{2s} + \frac{3}{2} (\eta_1 \eta_2)_s + \frac{1}{6} \eta_{2sss} = \frac{3}{20} (\eta_{1s}^3)_s - \frac{3}{10} (\eta_{1s}^3)_s + \frac{21}{10} c_0 (\eta_1^2)_s - \frac{19}{10} c_0^2 \eta_{1s} + c_1 \eta_{1s} \quad \dots\dots\dots (4.28)$$

定形進行波を対象とすることから、上式の特解のみを求めることにする。したがって、次式が仮定される。

$$\eta_2 = A_1 \text{cn}^4 \vartheta + A_2 \text{cn}^2 \vartheta + A_3 + A_4 \vartheta \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \quad \dots\dots\dots (4.29)$$

ここに、 A_1, A_2, A_3 および A_4 は上式を式(4.28)に代入し、永年項が残らないように未定係数法によって決定すれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{3}{4} (\beta - r)^2, \quad A_2 = -\frac{1}{2} (\beta + r) (\alpha + 4\beta + r) \\ A_3 &= -\frac{9}{20} (\alpha - \beta) (\beta - r) - \frac{19}{60} (r + \alpha)^2 + \frac{1}{60} \beta (46\alpha + 29\beta + 46r) + \frac{2}{3} c_1 \\ A_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

さらに、波形の連続条件より、 α, β および r は、新しい未知定数 λ および母数 k の関数として、次式となる。

$$\varepsilon \alpha = -\frac{\lambda}{k^2} \left(\frac{E}{K} \right), \quad \varepsilon \beta = -\frac{\lambda}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right), \quad \varepsilon r = -\frac{\lambda}{k^2} \left(\frac{E}{K} - 1 \right) \quad \dots\dots\dots (4.31)$$

これを式(4.30)に代入すれば、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 A_1 &= \frac{3}{4} \lambda^2, \quad \varepsilon^2 A_2 = -\frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 6 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\}, \\ \varepsilon^2 A_3 &= \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[4 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \\ \varepsilon^2 c_1 &= \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[45 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + 19k^4 - 64k^2 + 64 \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

また、波高の定義より、

$$\frac{H}{h} = \varepsilon (\eta_{\max} - \eta_{\min}) = \varepsilon (r - \beta) + \varepsilon^2 (A_1 + A_2) \quad \dots\dots\dots (4.33)$$

が得られ、これに式(4.30)および(4.31)を代入すると、 λ に関する2次方程式となり、その正根より λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{2k^2}{12(E/K) + 5k^2 - 10} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 12 \left(\frac{E}{K} \right) + 5k^2 - 10 \right\} \right]^{1/2} \right) \dots\dots\dots (4.34)$$

また、式(4.22)に対応する周期性の条件は、

$$2K(k) = \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} (1 + \varepsilon c^*) T \sqrt{\frac{g}{h}} \dots\dots\dots (4.35)$$

となり、母数 k が定められる。したがって、波速の補正項 c_1 は式(4.32)によって定まり、すべての積分定数が決定されたことになって、第2次近似解が確定する。すなわち、波形は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{h} = & \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^2} \left[4 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \\ & - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 6 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (4.36) \end{aligned}$$

ここに、

$$\vartheta = \frac{1}{2k} (3\lambda)^{1/2} \left(\frac{x}{h} - \frac{ct}{h} \right) \dots\dots\dots (4.37)$$

この場合、波の谷から平均水面までの高さ δ は、次式となる。

$$\frac{\delta}{h} = \frac{\lambda}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) - \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[4 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} + 5k^4 - 13k^2 + 8 \right] \dots\dots\dots (4.38)$$

波速は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[45 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} \right. \\ & \left. + 19k^4 - 64k^2 + 64 \right] \dots\dots\dots (4.39) \end{aligned}$$

また、水平および鉛直水粒子速度は、

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{gh}} = & \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[3k^2 (k^2 - 1) \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 + 2 \left(\frac{E}{K} \right) \right. \\ & \left. \left\{ 4 \left(\frac{E}{K} \right) + 6k^2 - 7 \right\} + 2k^4 - 8k^2 + 6 \right] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left\{ 3(2k^2 - 1) \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \\ & \left. + 5 \left(\frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 \right\} \text{cn}^2 \vartheta + \frac{\lambda^2}{4} \left\{ 9 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \dots\dots\dots (4.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{\sqrt{gh}} = & \left(\frac{3}{k^2} \lambda^3 \right)^{1/2} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \text{cn} \vartheta \text{sn} \vartheta \text{dn} \vartheta \left(1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left[(2k^2 - 1) \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 5 \left(\frac{E}{K} \right) - k^2 - 2 - \left\{ 3 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 4 \right\} k^2 \text{cn}^2 \vartheta \right] \right) \dots\dots\dots (4.41) \end{aligned}$$

となり、波動に伴う圧力は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho gh} = & -\frac{z}{h} + \lambda \left\{ \text{cn}^2 \vartheta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \right\} + \frac{\lambda^2}{4k^4} \left[4 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + 4k^2 - 5 \right\} \right. \\ & + 2k^4 - 10k^2 + 8 + 3k^2(k^2 - 1) \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \left. \right] - \frac{\lambda^2}{2k^2} \left[6 \left(\frac{E}{K} \right) - 2k^2 - 2 + 3(2k^2 - 1) \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 \right] \text{cn}^2 \vartheta + \frac{3}{4} \lambda^2 \left\{ 3 \left(1 + \frac{z}{h} \right)^2 - 2 \right\} \text{cn}^4 \vartheta \quad \dots\dots\dots (4.42) \end{aligned}$$

これから、第2次近似解では、圧力はもはや静水圧分布ではない。

なお、式(4.34)は $(1/k^2)(H/h) \ll 1$ の場合に、

$$\lambda = \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left\{ 12 \left(\frac{E}{K} \right) + 5k^2 - 10 \right\} + o \left\{ \left(\frac{H}{h} \right)^3 \right\} \quad \dots\dots\dots (4.43)$$

で表されるので、Laitoneの理論結果との比較ができる。

3) 第3次近似解

全く同様に、第3次近似解を求めることができる。数式が複雑になるので、ここでは波速の表示のみをあげる。

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{\lambda}{2k^2} \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{\lambda^2}{40k^4} \left[\left\{ 45 \left(\frac{E}{K} \right) + 2k^2 - 4 \right\} + 19k^4 - 64k^2 + 64 \right] \\ & + \frac{\lambda^3}{k^6} \left[\frac{1}{560} \left(\frac{E}{K} \right)^2 \left\{ 6927 \left(\frac{E}{K} \right) + 10799k^2 - 14112 \right\} - \frac{1}{2800} \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 4603k^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + 77092k^2 - 80317 \right\} - \frac{1}{5600} (24155k^6 - 74838k^4 + 5959k^2 + 41974) \right] \quad \dots\dots\dots (4.44) \end{aligned}$$

ただし、式(4.43)のような近似式を用いれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{gh}} = & 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{9}{8k^4} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left(\frac{E}{K} \right) \left(\frac{E}{K} - k^2 + 2 \right) \\ & - \frac{3}{20k^4} \left(\frac{H}{h} \right)^2 (k^4 - 6k^2 + 6) \quad \dots\dots\dots (4.45) \end{aligned}$$

なお、孤立波の場合には、 $k \rightarrow 1$, $E/K \rightarrow 0$, $\text{cn}^2 \vartheta \rightarrow \text{sech}^2 \vartheta$ とおけばよく、たとえば式(4.45)は次式となる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} \right) - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{h} \right)^2 + \frac{3}{56} \left(\frac{H}{h} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (4.46)$$

3.2 クノイド波の特性

前進したクノイド波の理論と従来の理論たとえばLaitone¹⁴⁾の理論との比較について述べながら、この理論によるクノイド波の特性を明らかにする。

1) 波形および波速

クノイド波の理論波形と実験値との比較を図-4.1に示す。波速は式(4.44)または(4.45)で表されるが、Laitone¹⁴⁾による表示は波速の第1および第2定義に対して、それぞれ次式で与えら

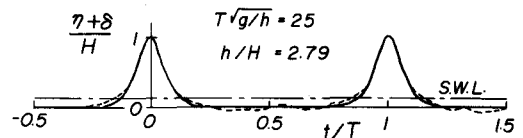


図-4.1 クノイド波の波形

れる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{1}{120k^4} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left[-5 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 15 \left(\frac{E}{K} \right) + 23k^2 - 40 \right\} - 33k^4 + 113k^2 - 98 \right] \quad (4.47)$$

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} + \frac{1}{40k^4} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left[5 \left(\frac{E}{K} \right) \left\{ 3 \left(\frac{E}{K} \right) + k^2 - 2 \right\} - 6k^4 + 16k^2 - 16 \right] \quad (4.48)$$

図-4.2は無次元波速 $c/\sqrt{gh}$ と水深・波高比 h/H との関係をこれらの式によって計算したものである。ここに、C-1、C-A-E-2またはC-A-2、およびC-A-3またはC-A-E-3はそれぞれ式(4.24)、(4.39)またはその近似式、および(4.44)またはその λ 表示による結果であり、さらにC-2-1およびC-2-2はそれぞれ式(4.47)および(4.48)による。この理論による波速はLaitoneによるものより、 h/H が小さい場合、若干大きくなる。また、波速の近似式は $T\sqrt{g/h} \geq 18$ の範囲ではきわめて良好である。図-4.3には、定形進行波の波速の実験値との比較を示す。図中には、通常の波浪水槽を用いた岩垣ら¹⁷⁾の実験値も示されているが、後述する質量輸送のため、若干小さくなる。

なお、孤立波の波速は図-4.4のようになり、Byatt-Smith¹⁸⁾の数値解とよく対応し、またFenton⁵⁾の第3次近似解とは完全に一致する。これは孤立波の場合、波速の定義に依存しないからである。

2) 水粒子速度および質量輸送速度

クノイド波の水平水粒子速度の鉛直分布を図-4.5に示すが、図中の記号は波速の場合と同じである。ただし、この理論においても、Euler座標において質量輸送が存在し、第2次近似解まででは、次式となる。

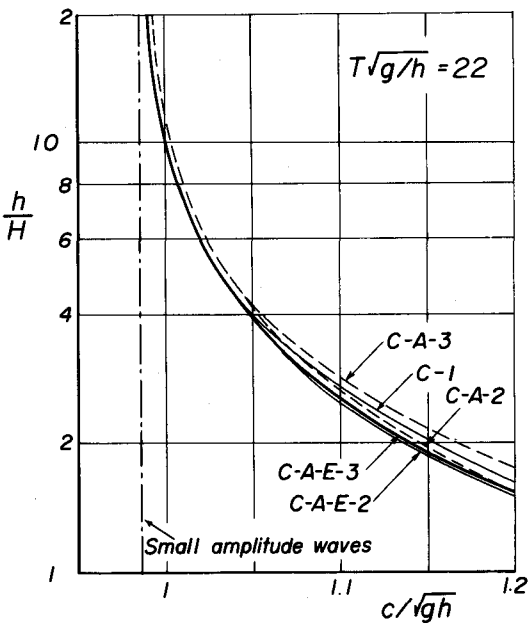


図-4.2 クノイド波の波速

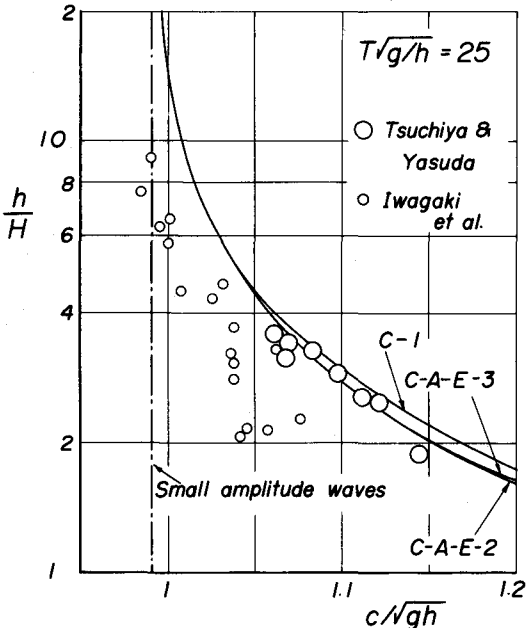


図-4.3 波速の実験値と理論値との比較

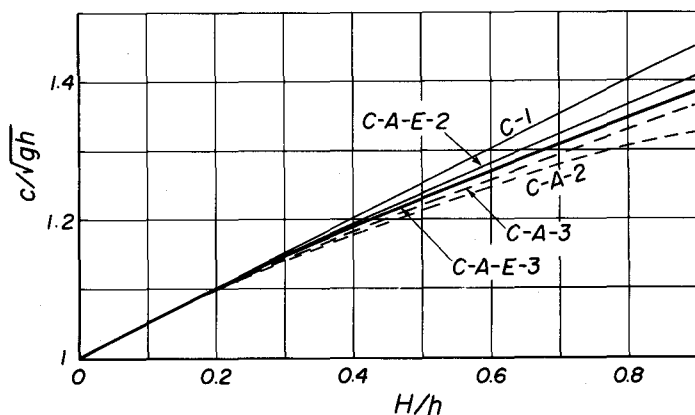


図-4.4 孤立波の波速

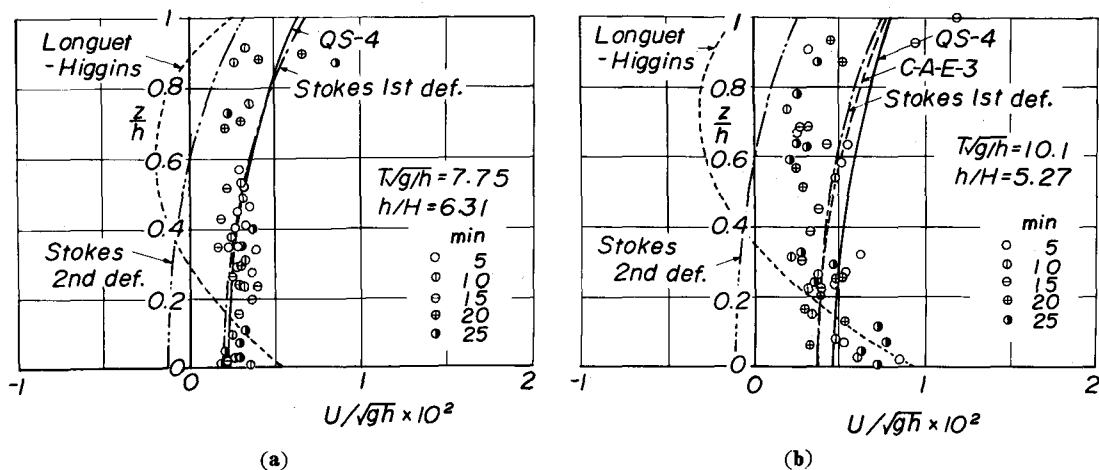


図-4.5 質量輸送速度の鉛直分布の実験値との比較

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \frac{\lambda^2}{6k^4} \left[-\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \quad (4.49)$$

また、Lagrange 座標においては、次式となる。

$$\frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} + \frac{\lambda^2}{3k^4} \left(\frac{\sqrt{gh}}{c} \right) \left[-\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 3\left(\frac{E}{K}\right) + 2k^2 - 4 \right\} + k^2 - 1 \right] \quad (4.50)$$

このように、第2次近似解まででは、質量輸送速度の鉛直分布はいずれも一様であるが、第3次近似解では、図-3.1に示したように鉛直分布をもつようになる。図中には、Stokes波および擬Stokes波における質量輸送速度の鉛直分布と比較してあるが、無次元周期 $T\sqrt{g/h} \approx 10$ 程度では、いずれもよく一致しており、また20程度になるとクノイド波のものが大きく表されることがわかる。

なお、図-4.5には質量輸送速度の鉛直分布を実験値と比較したものを示す。ただし、この実験値は通常の波浪水槽によるものではなく、波形のみならず質量輸送の定常性と一様性を確保した水槽による定

形進行波のものである。Lagrange 座標における質量輸送速度は波の進行方向に存在し、その鉛直分布が前述した理論や従来の第 1 定義による Stokes 波理論と一致する。

3) 保存量および極限波高

このクノイド波のエネルギー、エネルギーフラックスなどの保存量は、すでに定式化されているが、ここでは省略する。擬 Stokes 波の場合と同様に、Rankine-Stokes の条件から計算される極限波高は、第 3 次近似解において次式で与えられる。

$$\left(\frac{H}{h}\right)_{\max} = \lambda - \frac{\lambda^2}{4k^2} \left\{ 12 \left(\frac{E}{K}\right) + 5k^2 - 10 \right\} + \frac{\lambda^3}{8k^4} \left[\left(\frac{E}{K}\right) \left\{ 83 \left(\frac{E}{K}\right) + 76k^2 - 136 \right\} + 13k^4 - 56k^2 + 56 \right] \dots\dots\dots (4.51)$$

図-4.6 には、上式の関係が示されているが、孤立波の場合に対しては、 $H_{\max}/h=0.846$ となり、これは山田¹⁹⁾の与えた 0.83 と Byatt-Smith¹⁸⁾の 0.86 の中間の値となっている。

5. 結 語

以上、有限振幅波の理論として、定形進行波のせつ動解について述べたが、この場合、とくに通常のせつ動解の取扱について考察したあと、最低次の調和関数を付加した近似解を示し、さらに逓減せつ動法による 2 つの近似解として、波の分散性が非線形性より卓越する場合に擬 Stokes 波の理論を、また両者が平衡している場合にクノイド波の理論を展開した。これらの成果は、波による輸送現象の究明に適用されるであろう。たとえば、波の質量輸送を考慮した海浜流の理論にすでに適用され、その自明解および分枝解の誘導に成功している。

最後に、本文の大部分は岐阜大学工学部安田孝志助教授との協同研究によるものであり、同氏の御協力に深謝する。また、逓減せつ動法による有限振幅波理論の展開において御指導いただき、とくに誘導過程を検討して、貴重な御指摘をいただきました名古屋大学理学部谷内俊弥教授に心から御礼申しあげる次第である。また、芝野照夫および山下隆男両助手の御協力にも感謝したい。

参 考 文 献

- 1) Stokes, G. G.: On the theory of oscillatory waves, Trans. Cambridge Phil. Soc., Vol. 8, 1847, pp. 197-229.
- 2) Korteweg, D. J. and de Vries: On the change of form of long waves advancing in a canal and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., 5 (39), 1895, pp. 422-443.
- 3) Schwartz, L. W.: Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for

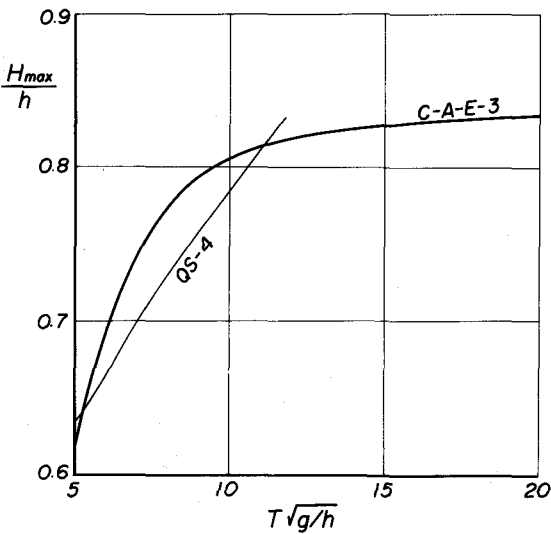


図-4.6 クノイド波および擬Stokes波の極限波高

- gravity waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 62, 1974, pp. 553–578.
- 4) 堀川清司・西村仁嗣・磯部雅彦：有限振幅波理論の適用範囲について，第24回海岸工学講演会論文集，1977，pp. 10–14.
 - 5) Fenton, J. D.: A ninth-order solution for the solitary wave, *J. Fluid Mech.*, Vol. 53, 1972, pp. 257–271.
 - 6) Fenton, J. D.: A high-order cnoidal wave theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 94, 1977, pp. 129–161.
 - 7) 谷内俊弥：たとえば非線形波動（西原功修共著），岩波応用数学叢書，1977，p. 94.
 - 8) 土屋義人・安田孝志：逡減せつ動法による擬 Stokes 波理論，第25回海岸工学講演会論文集，1978，pp. 6–9.
 - 9) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda: A cnoidal wave theory and its verification, *Proc. 3rd Australian Conf. on Coastal & Ocean Eng.*, 1977.
 - 10) Aoyama, T. and Y. H. Ichikawa: Contribution of the second terms to the nonlinear shallow water waves, *J. Phy. Soc. Japan*, Vol. 42, No. 1, 1977, pp. 313–318, および Vol. 41, 1976, pp. 1382–1386.
 - 11) 友近 晋：流体力学，共立，1950，p. 84.
 - 12) Stoker, J. J.: *Water waves*, Int. Sci. Inc., 1957, p. 10.
 - 13) Goda, Y. and Y. Abe: Apparent coefficient of partial reflection of finite amplitude waves, *Report of Port & Harbour Res. Inst.*, Vol. 7, No. 3, 1968, pp. 3–58.
 - 14) Laitone, E. V.: The second approximation to cnoidal and solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 9, 1960, pp. 430–444.
 - 15) Whitham, G. B.: *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 1974, p. 474.
 - 16) 土屋義人・安田孝志：Stokes 波理論について（投稿準備中）.
 - 17) 岩垣雄一・細見昌彦：クノイド波に関する二，三の実験，第13回海岸工学講演会講演集，1966，pp. 1–8.
 - 18) Byatt-Smith, J. G. B.: An exact integral equation for steady surface waves, *Proc. Roy. Soc. London*, A.315, 1970, pp. 405–418.
 - 19) Yamada, H.: Highest waves of permanent type on the surface of deep water, *Report, Res. Inst. Appl. Mech.*, Vol. 5, No. 8, 1956, pp. 37–52.