

開水路流れの数値解析

井 上 和 也

はじめに

近年の電子計算機の驚異的な発達により、水理学の分野においても数値解析を用いた研究が活発に行なわれるようになった。すなわち、実験室における水路や水槽あるいは現地の河川、湖沼、貯水池および沿岸域など、種々の空間スケールと時間スケールを有する水域における流体運動とそれに伴う物質および熱などの輸送を対象として、水理学的な基礎式（多くの場合、偏微分方程式系によって記述される）に基いて各種の境界条件ならびに環境条件のもとでの数値解析が実施され、水理学的な諸現象の再現と予測が試みられている。これらの研究においては、定常な解だけでなく近年においては非定常な解を求めることが中心になりつつあるようである。このような非定常問題の数値解析においてはつぎの諸点についての考慮が必要とされる。^{1), 2)}

(i) 適切性：基礎方程式がある初期値のもとで一意的な解を有し、しかも初期値のわずかな変化に対して解はわずかしき変化しないこと。後述するように本稿で取扱う問題は双曲型もしくは放物型で記述され、この条件はつねに満たされていると考えてよい。

(ii) 一致性：数値解析にあたっては基礎方程式は何らかの方法で離散化（差分化）される。その結果の差分方程式が、差分の大きさを0に近ずけたときに、もとの微分方程式に一致すること。差分方程式にTaylor展開を導入することによって検討される。

(iii) 収束性：差分方程式の厳密解が、差分の大きさを0にしたときに、もとの微分方程式の解に一致すること。

(iv) 安定性：数値解に含まれる打ち切り誤差の累積が、全計算時間の範囲で時間的な離散化の大きさ（時間間隔 Δt ）を小さくしても増大しないこと。

これらのうち、(i)、(ii)および(iv)が成立すれば、(iii)は保証される。実際の数値解析において最も悩まされる問題は、時間間隔 Δt の大きさを直接制限することになる安定性の問題である。このためのいくつかの必要条件は示されているが、実際には計算を実施しながら試行錯誤的な検討を加えなければならないことも多い。

さて、水理学における非定常問題を数値解析する手法としては、対象とする個々の水域の水理学的な特徴を取り入れたきわめて数多くの方法が提案されており、それらの中には現在もおお発展の途上にあるものも少なくないといえる。これらのすべてを網羅することは筆者の能力を超えており、また紙幅も許されていない。本稿では自由表面を有する流れ（開水路流れ）のみを対象として、一次元および二次元の非定常な流体運動を差分法によって数値解析する手法の基礎的なものに限って述べるとともに、その適用例のいくつかを示すことにする。

1. 一次元開水路流れの数値解析

1-1. 基礎式とその特性曲線による表示

河川や各種の水路に代表される開水路一次元流れの基礎式には従来より次式が慣用されている。

$$\text{連続式:} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1.1)$$

$$\text{運動量式:} \quad \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda' \cos \theta}{A} \frac{\partial}{\partial x} (h_G A) = s_0 - s_f \quad (1.2)$$

$$\text{エネルギー式:} \quad \frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = s_0 - s_f \quad (1.3)$$

ここに h_G : 水面から流水断面の図心までの深さ, s_f : 摩擦こう配で, 抵抗則に Manning 公式を用いるとき, $s_f = n^2 v^2 / R^{4/3}$ と表わされる。(1.1) ~ (1.3) 式の流体力学的な原理からの誘導についてはすでに詳細に研究されている³⁾ので, ここでは省略する。

一次元開水路の不定流の解析は, (1.1) および (1.2) 式を用いる運動量解析法と, (1.1) および (1.3) 式を用いるエネルギー解析法に大別される。しかし, (1.2) 式の左辺第3項は

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_G A) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (h-y) B dy = \int_0^h (h-y) \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_{y: \text{const}} dy + A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.4)$$

と変形され (y : 水路床から上方にとられた座標, B : 水路幅), 運動量解析法の適用範囲から水路を一樣と仮定すると $(\partial B / \partial x)_{y: \text{const}} \equiv 0$ であるから, この場合には (1.2) 式は結局従来より Saint Venant の式と呼ばれている (1.3) 式と見掛上ほとんど変わらないことになる。

さて, ここでは後に示されるようにその計算例として変化の緩慢な洪水のような流れを主として扱うので, エネルギー解析法を適用する。いま, 次式で定義される全エネルギー水頭 H_t

$$H_t = z + \lambda h \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \quad (1.5)$$

を導入 (z : 基準面から河床までの高さ, $H = z + \lambda h \cos \theta$: 基準面から水面までの高さ, つまり水位)すれば, (1.3) 式はつぎのように改められる。

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial x} = -s_f \quad (1.6)$$

このように H_t によって式をまとめたのは以下の理由による。i) 河川などを対象とする場合に, 測量結果からは計量のしにくい量である s_0 や $(\partial A / \partial x)_{h: \text{const}}$ が計算法において陽に現われないようにする。ii) さらに, 上記のことより不等流の計算法と不定流のそれとを整合させることができる。iii) 形式上保存則系が構成される。

以上より, (1.1) および (1.6) 式よりなる系はつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = q \quad (1.7)$$

$$U = \begin{bmatrix} A \\ v \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ gH_t/\beta \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q \\ -g s_f/\beta \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

(1.7) 式は, $q=0$ の場合保存則系 (一次元) を表わすといわれる。すなわち, U の一つの成分をある物理量の x 方向の単位長さに含まれる貯留量とし, F の対応する成分をこの物理量の x 方向のフラックスとすると, (1.7) 式はこの物理量について収支の平衡状態が保たれていることを表わす。いまの場合,

$q \equiv 0$ ではないが拡張された意味で保存則系を表わすと解釈しておく。(1.7)式の第一式は、水の密度 ρ を両辺に乗ずれば、質量に関する上記の意味での保存則を表わしていることは明らかである。一方、第二式は流れのもつ力学的エネルギーに関しては、上記の意味での保存則を表わすものではないが、形式的に保存則としてまとめられているといえる。

(1.7)式の保存則系は、(1.8)式を用いてつぎのように展開される。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} = q' \quad (1.9)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} v & A \\ \lambda g \cos \theta / \beta B & \alpha v / \beta \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q \\ -g(s_f + (\partial H / \partial x)_{A: \text{const}}) / \beta \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

ここに、 $B = (\partial A / \partial h)_{x: \text{const}}$ で水面における水路幅（水面幅）であり、また $(\partial H / \partial x)_{A: \text{const}}$ とは断面積を一定とする水位の変化率であり水路の幾何学的形状より求められる（一様水路ではいうまでもなく $(\partial H / \partial x)_{A: \text{const}} = -s_0$ である）。

開水路流れの大きい特徴の一つとして擾乱の伝播が挙げられよう。すなわち、ある点に擾乱が与えられたとき、擾乱は dynamic wave として伝わりその影響も擾乱に伴って伝播するという周知の事実である。このことの数学的表現が特性曲線理論に他ならない。すなわち、一次元の場合 dynamic wave の伝播の $x-t$ 平面における軌跡を表わすのが特性曲線であり、また擾乱の伝播ということよりこの曲線を挟んで水量に不連続が生じうること、つまり (1.7) 式の解が不連続になりうることが分る。また、上のように物理的に意味のある特性曲線が存在することは、(1.7) 式（あるいは (1.9) 式）が双曲型であることを意味している。つぎに、基礎式を特性曲線による表示に改めよう。それにはいくつかの方法があるが、ここではこの曲線を挟んで解が不連続になりうることの別の表現として、この曲線上で解が一意的に定められないことより導く⁴⁾。つまり特性曲線は、 $x-t$ 平面上のある曲線 $C: \phi(x, t) = 0$ 上で、 U が与えられても (1.9) 式より $\partial U / \partial t$ （したがって $\partial U / \partial x$ ）が一意的に定められない曲線として定義される。いま、 C 上の隣接する2点 $P_1(x, t)$ および $P_2(x+dx, t+dt)$ での U の値の間には、

$$U_{P_2} = U_{P_1} + \left(\frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right)_{P_1} + \dots \quad (1.11)$$

が成立する。すなわち

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \dots \quad (1.11)'$$

である。ただし、添字は略し、右辺の点線の部分は C 上の U の与えられた値より既知としてよい量であることを表わす。また $dx/dt = -\phi_t/\phi_x$ は曲線 C の点 P_1 におけるこう配である。(1.11)' を (1.9) 式に代入すれば

$$(\tilde{A} - E \frac{dx}{dt}) \frac{\partial U}{\partial x} = \dots \quad (1.12)$$

となる。ただし E は単位行列であり、また右辺は既知である。ここで行列 $\tilde{Q}$ を

$$\tilde{Q} \equiv \tilde{A} - E \frac{dx}{dt} = \tilde{A} + E \phi_t / \phi_x \quad (1.13)$$

で定義するとき、

$$\det \tilde{Q} = 0 \quad (1.14)$$

ならば、(1.12)式より明らかなように $\partial U / \partial x$ は一意的に決められない。すなわち、特性曲線のこう配は (1.13) 式より分るように $\tilde{A}$ の固有値として与えられることになる。それらを (1.10) 式の $\tilde{A}$ を用いて求めるとつぎのようである。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v \pm c \approx v \pm c \quad (1.15)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v\right)^2 + \frac{\lambda g A \cos \theta}{\beta B}} \quad (\approx \sqrt{g A / B}) \quad (1.16)$$

いうまでもなく (1.15) 式は dynamic wave の伝播速度を表わす。また $\tilde{A}$ の固有値は (1.15) 式のように異なる実数であるから、(1.9) 式が双曲型であることが確かめられる。 dx/dt が (1.15) 式の値をとるとき、 $\det \tilde{Q} = 0$ より $\mu \tilde{Q} = 0$ をみたす $\mu \neq 0$ が存在する。すなわち

$$\mu = \left(\lambda g \cos / \beta B, \frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c \right) \quad (1.17)$$

である。いま、 μ を (1.9) 式に乗ずると $\mu \tilde{A} = \mu(dx/dt)$ より、

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) U = \mu q' \quad (1.18)$$

となる。 $\partial/\partial t + (dx/dt) \partial/\partial x$ は特性曲線に沿う微分を表わすから、(1.18) 式は特性曲線に沿った U の微分方程式の線型結合である。上式はさらに

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - q \right) = 0 \quad (1.19)$$

と変形されるから、結局上の微分方程式は、(1.1) 式および (1.6) 式の μ による線型結合に帰着され、その結果はつぎのようである。

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c \right) \left(\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial x} + s_f \right) = 0 \quad (1.20)$$

上式は、特性曲線 (1.15) 式に沿って成立する関係であるから、(1.20) 式中の微分はその方向に沿ってとられなければならないことはいうまでもない。流れを常流 ($c > v$) とすれば、(1.15) 式で示される 2 つの dynamic waves の伝播方向は互いに異符号であって、正のものは上流から下流に流下する dynamic wave を、負のものは下流から上流へ遡上する dynamic wave を表わし、また (1.20) 式はそれぞれの dynamic wave によって上・下流へ伝えられる影響を表わしている。以上が先述した dynamic wave とそれによる影響の伝播の数学的な表現である。

なお、開水路一次元流れの理論の重要な一部として kinematic wave 理論がある。この理論では基礎式は一階の偏微分方程式となり、この場合の特性曲線が kinematic wave の軌跡を表わす。この理論は

洪水に関する Kleitz-Seddon の法則の研究に始まることはよく知られているが、その理論的な面における役割^{5), 6)}はともかくとして、実際の計算の面においては一種の簡略法とみられ、とくに下流側からの背水の影響を評価しえないという重大な欠点を有している。計算機の発達した今日、計算法においてこのような簡略法をとることの利点は一般に少なくなっており、また数値解析の例も上記の欠点が大きい障害とならない流出解析を除けば、きわめて少ないので、ここでは省略する。

1-2. 数値解析法

開水路一次元流れの数値解析にあたって最も基本的な対象は、河川でいえば単一の河道区間のように、上・下流端の一つの組合せで区切られた間の流れであろう。したがって、ここでもこのような単一の河道区間およびこれが組合わされる場合の分・合流点の数値解析法を個別的に述べることにし、河川網のようにネットワークの構造を有する場合の流れは扱わないことにする。

通常の変流の計算では、与えられた境界条件と何らかの方法によって定められた初期条件のもとに、時間を追って順次流れの挙動が追跡されることが多い。その場合の計算法は、数値解析の立場からつぎの2つに大別されている。すなわち、(i) explicit 法と(ii) implicit 法である。(i)は前回の計算結果から、次の時間での未知量が陽に解かれた形となっている差分法であり、一方(ii)は陽に解かれていない差分式で、多くの場合未知数に関する多元の連立一次方程式に帰着される。explicit 法の特徴としては解法が比較的容易であり、したがってプログラムも簡単となる反面、計算の安定性に関して implicit 法より厳しい条件が加わるとされている。一方 implicit 法はこれとは全く逆の特徴をもっている。これらのうちいずれがよいかはもちろん一概には決められないが、ここで扱う流れの場合、いずれにしても後述する C.F.L. 条件が水理学的な観点からも考慮されるべきであるから、implicit 法における時間間隔 Δt を大きくとれるという特質は十分に活かされないおそれがあり、さらに最近の計算機の一層の高速化により、 Δt が小さくてもプログラムの簡単な explicit 法で十分に問題を処理しうようになってきている事情も考慮に入れておくべきであろう。

さて、これまでに不定流の数値解析法として比較的良好に使用されている差分法にはつぎのものが挙げられる。

- (i) leap-frog 法⁷⁾
- (ii) staggered 差分法²⁾
- (iii) box 型差分法 (Amein の 4 点法⁸⁾)
- (iv) Lax-Wendroff 法¹⁾
- (v) 特性曲線法⁹⁾

(i) および(ii)では、従属変数である断面積 A (あるいは水位 H) および流量 Q (あるいは平均流速 v) が、時間的にも空間的にも交互に求められる点に特徴があり、(i)の方法では(ii)より差分のとり方が一層複雑となっている。これらの方法は、一次元の流れに適用する場合、境界条件としてたとえば上流端で水位が与えられるか流量が与えられるかによって全体の差分式そのものを組変えなければならなくなる。つまり、この方法は一次元の流れに適用するのにこの点において柔軟性に欠けるといえる。なお(ii)の方法は後述するように二次元の流れに対して広く適用されている。(iii)の方法(後に少し触れる)は implicit 型の一つである。この方法は与えるべき境界条件の個数が、流れが常流・射流のいずれであっても、上流端で2個でもよく、上・下流端で1個ずつでもよく(この場合にはたとえば Dronker の解法¹⁰⁾にみられるように計算法は著しく複雑になる)、また下流端で2個でもよいというように、流れのもつ水理学的性質とは反したあいまい

さを有している。以下においては(i)および(ii)の方法について差分式とその計算法を明らかにし、ついで境界条件、分・合流点、初期条件および安定性について述べよう。

(i) Lax-Wendroff 法 (LW 法と略記)

この方法は、(1.7) 式のような保存則系に対して導かれた explicit 型のもので、つぎの 2 つがある。ただし変数の右肩に時間ステップを示す添字 n 、右下に計算断面の番号 j (下流から順につけられている) をつけることにする。

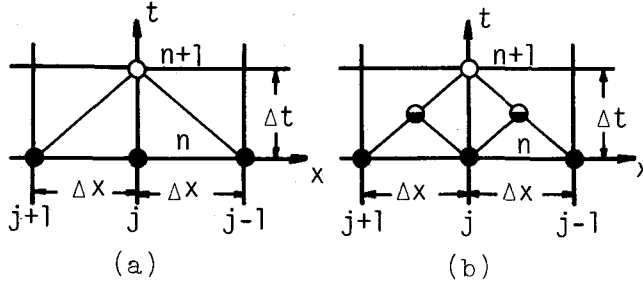


図 1.1 Lax-Wendroff scheme

(a) 1-step LW 法 (図-1.1(a))

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j-1}^n - F_{j+1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [\tilde{A}_{j-1/2}^n (F_{j-1}^n - F_j^n) - \tilde{A}_{j+1/2}^n (F_j^n - F_{j+1}^n)] + \frac{1}{4} (q_{j-1}^n + 2q_j^n + q_{j+1}^n) \quad (1.21)$$

ここに、 $F_j^n = F(U_j^n, x_j)$ などである。この方法では行列 $\tilde{A}$ の値が必要とされるが、通常これが現われないうつぎの方法がよく使われる。

(b) 2-step LW 法 (図-1.1(b))

$$\text{1st step } U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^n + U_j^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_j^n - F_{j+1}^n) + \frac{\Delta t}{4} (q_j^n + q_{j+1}^n) \quad (1.22)$$

$$\text{2nd step } U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j-1/2}^{n+1/2} - F_{j+1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2} (q_{j-1/2}^{n+1/2} + q_{j+1/2}^{n+1/2}) \quad (1.23)$$

$\Delta x = r\Delta t$ とするとき (a) および (b) のいずれも $O(\Delta t^3)$ の打ち切り誤差を有しているから、LW 法は 2 次の差分式である。この方法による計算法はつぎのようである。

① $t = n\Delta t$ における U_j ($j = 1, 2, \dots$) は初期条件あるいは前回の計算結果から既知である。

② 1-step LW 法の場合、 U_j^n の値から F_j^n などの値を求めておけば、(1.21) 式より直ちに未知数 U_j^{n+1} が計算される。

③ 2-step LW 法の場合、(1.22) 式を用いて $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ を求め、これより $F_{j+1/2}^{n+1/2}$ などを計算した後、(1.23) 式より未知数 U_j^{n+1} を求める。

2-step LW 法は一次元の流れの解析法として広く使用されており、精度も後に例が示されるように申し

分なく良いのであるが、河川などについてはつぎのような適用のしにくさを有している。

① $\tilde{A}_{j+1/2}$, $F_{j+1/2}$ および $q_{j+1/2}$ など本来の計算断面でない中間の断面についての水理量の計算が必要であり、そのために河道が一様でないときには断面資料が相当補充されなければならない。

② 境界点や分・合流点ではこの計算法をとることはできない（後述）。

③ 断面間の距離 (Δx) が一定でない場合には適用できないので、一様水路でないときには何らかの方法により断面資料を補充し、一定の Δx がとれるようにしなければならない。

④ 初期条件は通常不等流として与えられることが多く、標準逐次計算法などによって計算されるが、この計算法は2点間の差分であって、3点間の差分である LW 法とは整合しない。

(2) 特性曲線法

この方法は従来、適当な間隔で配置された (1.15) 式の異なる族 ((1.15) 式には正号の特性曲線の族と負号のそれとがある) の交点とそこにおける水理量を (1.15) および (1.20) 式から連立的に求める方法を指すことが多かった。つまり、この方法 (characteristics grid method¹¹⁾) では、 $x-t$ 平面が特性曲線の網で覆われその交点で解が求められるが、これではある地点のハイドログラフを求めたり、ある時間での水面形などを求めるのに複雑な内挿法を必要とする。ここでは、LW 法と同様に固定格子点に関する explicit 型の差分法を、特性曲線の方角に応じて x 方向の差分のとり方を変える Courant-Isaacson-Rees¹²⁾ の方法を適用して導く (以下これを特性曲線法と呼ぶことにする)。流れを常流とすれば、特性曲線の配置は図 1.2 のようになる。いま、(1.15) 式の正号の特性曲線 $(dx/dt)_+$ を PR とするとき、PR に沿う (1.20) 式をつぎのように差分化する¹³⁾

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - q_j\right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c\right)_j \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{tj}^n - H_{tj+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{fj}^n + s_{fj+1}^n}{2}\right) = 0 \quad (1.24)$$

同様に負の特性曲線 $(dx/dt)_-$ (図中の PS) に沿う差分式は

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j-1}^n - Q_j^n}{\Delta x_{j-1}} - q_{j-1}\right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c\right)_j \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{tj-1}^n - H_{tj}^n}{\Delta x_{j-1}} + \frac{s_{fj-1}^n + s_{fj}^n}{2}\right) = 0 \quad (1.25)$$

となる。ここに、 Δx_j は断面 j と $j+1$ の間の区間距離、 q_j はこの間に流入する単位長さあたりの横流入流量である。この差分法のたとえば (1.24) 式は、(1.20) 式の $\partial/\partial t$ を PM 間の差分に、また $\partial/\partial x$ を MR 間の差分にそれぞれ置き換え、さらに R での水理量を MA 間の線型内挿で求めた結果である。有名な Stoker の方法⁹⁾ は、水路を一様な広長方形断面として未知数を v および c に置き換え上と同様の近似を行なったもので、(1.24) および (1.25) 式はこれを一様でない任意断面の水路へ拡張した方法といえる。この方法は図-1.2 に示されるように常に異なる族の特性曲線が交わるとしているから、

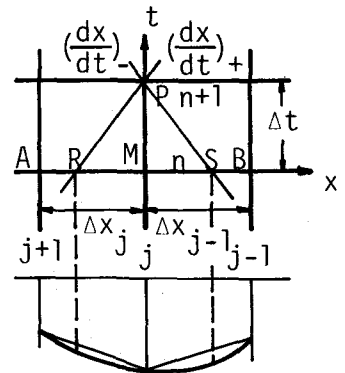


図 1.2 特性曲線法

同じ族の特性曲線が交差する段波などの計算は不可能である。

(1.24) および (1.25) 式による計算は、境界点および分・合流点を除けば、両式より未知数 A_j^{n+1} および v_j^{n+1} を連立的に求めればよく、きわめて簡単である。

この特性曲線法の打ち切り誤差は $O(\Delta t^2)$ であって一次の近似式である。 $\Delta x_j = \Delta x = \text{const}$ でしかも線型化された場合において、図-1.2のRおよびSでの水理量を求めるのにAMBの3点の値を用いた2次の内挿法を用いれば、(1.24) および (1.25) 式は (1.21) 式のLW法と一致することが証明される。これよりLW法と特性曲線法の相違がどの程度であるかを推察することができよう。

(3) 境界点の計算法

LW法は境界点において適用されないことは先述のとおりである。これを補うため境界においてはbox型の差分法がよく用いられている。たとえば上流端の断面番号をJとすると、この点で(1.1)式のみをつぎのように差分化することが行なわれる。

$$\frac{A_j^{n+1} + A_{j-1}^{n+1} - A_j^n - A_{j-1}^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j-1}^{n+1} + Q_{j-1}^n - Q_j^n - Q_j^{n+1}}{\Delta x_{j-1}} = 0 \quad (1.26)$$

ただし簡単のため $q = 0$ とされている。(1.26) 式で未知数は Q_j^{n+1} および A_j^{n+1} の2つであるから境界条件が1つあれば未知量を定めることができる。しかしこの方法は、境界点において連続式のみが考えられておりエネルギー式(1.3)が無視されている点に問題があるだけでなく、理論的には連続式も厳密には満たされていない。¹⁴⁾

境界点については、特性曲線理論によって水理学的にみて適切な計算法が得られる。流れを常流として上流端を考えた場合、その下流側より上流端に伝わる影響は(1.20)式の負号の関係式で与えられ、それを差分化したのが(1.25)式である。したがって、上流端においては(1.25)式と1つの境界条件とから解を求めればよい。たとえば上流端において境界条件として水位が与えられたときには、つぎの手順がとられる。

- ① 水位ハイドログラフより H_j^{n+1} を求める。
- ② 上流端の断面特性より A_j^{n+1} を求める。
- ③ (1.25) 式より v_j^{n+1} を計算し、 $Q_j^{n+1} = v_j^{n+1} A_j^{n+1}$ とする。

また流量が与えられたときにはつぎの収束計算を用いればよい。

- ① 水位 H_j^{n+1} を仮定する。
- ② 上記の②および③より流量を求める。
- ③ 上の流量が与えられた流量ハイドログラフの値に等しくなるまで繰返す。

下流端においては、上の(1.25)式の代りに上流から下流へ伝わる影響を表わす(1.24)式を用いる点だけが異なり、他は上と全く同様である。たとえば下流端(断面番号を1とする)において境界条件として水位-流量曲線が与えられたときはつぎの収束計算を用いればよい。

- ① 水位 H_1^{n+1} を仮定する。
- ② 断面特性より A_1^{n+1} を求め、これと(1.24)式から v_1^{n+1} および $Q_1^{n+1} = v_1^{n+1} A_1^{n+1}$ を求める。
- ③ 水位-流量曲線と①の H_1^{n+1} から求められる流量と②の流量が等しくなるまで繰返す。

以上のように特性曲線はとくに境界点において、影響の伝播という水理学的な事実をそのまま考慮した計算法にすることができる点に特徴がある。

(4) 分・合流点

例として合流点のみを考える。合流点の扱いとして、合流点に仮想的な瀬割堤を考える方法¹⁵⁾や合流流量を横流入流量と考える方法¹⁶⁾などが提案されている。合流点においてどのような計算法を採るかはそれぞれの場合に応じて検討されるべきであろうが、ここでは特性曲線法を用いて最も簡単な場合の計算法について述べる。図-1.3のような合流点において断面番号を図のようにつけるとき、(i)合流点における水位が等しい、すなわち $H_1 = H_3 = H_5$ 、および(ii)合流点において流量の連続性が成立する、すなわち $Q_1 + Q_3 = Q_5$ が成立するとする。このとき(i)および(ii)の3式と、断面1～2および断面3～4間で成立する(1.24)式、断面5～6間で成立する(1.25)式の計6式より、1, 3および5断面における水位および流量が求められる。その手順の一例はつぎのようである。

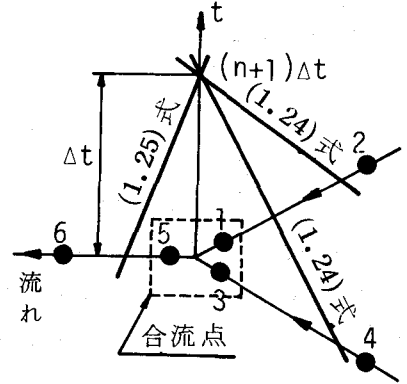


図 1.3 合流点の計算法

- ① 合流点水位 $H_1^{n+1} = H_3^{n+1} = H_5^{n+1}$ を仮定する。
- ② 断面1～2および断面3～4では下流端で水位が与えられたときの計算法より Q_1^{n+1} および Q_3^{n+1} を求める。
- ③ 断面5～6では上流端で水位が与えられたときの計算法により Q_5^{n+1} を求める。
- ④ $Q_5^{n+1} = Q_1^{n+1} + Q_3^{n+1}$ が成立するまで繰返す。
- (5) 初期条件
初期条件には、ある出発値を適当に与え、これから定常な境界条件のもとで不定流計算を実施し、解が時間的に変化しなくなった状態を初期条件とする一種の relaxation に似た方法が採られることがあるが、一次元流れの場合には一般的といえない。通常は不等流計算の結果が与えられる。その計算法としてはつぎの標準逐次計算法が一般的であろう。

$$Q_{j+1} = Q_j - q_j \Delta x_j \quad (1.27)$$

$$H_{t,j+1} = H_{t,j} + (s_{f,j} + s_{f,j+1}) \Delta x_j / 2 \quad (1.28)$$

(1.27) および (1.28) 式は、(1.24) および (1.25) 式においてすべての j について $v_j^{n+1} = v_j^n$ および $A_j^{n+1} = A_j^n$ とすれば導かれる関係でもある。すなわち、上の標準逐次計算法は定常状態を考えたときの(1.24) および (1.25) 式を自動的に満たしており、逆にいえば(1.24) および (1.25) 式の計算式は定常状態の計算法に非定常成分の計算法が重ねられたものとみなすことができ、不等流の計算法と不定流のそれとの整合がとれているといえよう。

(6) 安定性

従来の安定性の解析は線型化された初期値問題に関するもの中心であった。それらの解析結果より一様な長方形断面水路における不定流計算の安定性のための必要条件として次式が導かれている。

(i) LW法

Courant-Friedrichs-Lewy (C. F. L. 条件)¹⁾

$$\Delta t \leq \Delta x / |v \pm c| \quad (1.29)$$

Vasiliev の条件²⁾

$$\Delta t \leq v / g s_0 \quad (1.30)$$

(1.29) 式は図-1.2において点Pの従属域がAB間におさまるように、すなわちRおよびSがAB間に入るように $\Delta t / \Delta x$ を決めなければならないことを表わしており、物理的に考えても当然の条件である。また (1.30) 式は摩擦項に基く条件であって、 Δt が dynamic wave の減衰の時間スケール $v / g s_0$ より小さくなければならない⁶⁾ことを意味している。この条件はこう配の急な河川などに対しては (1.29) 式より厳しい条件になることがある。これを避けるには時間 $(n+1) \Delta t$ での摩擦項も考慮すればよいとされている。つまり、たとえば (1.21) 式の q_j^n の摩擦項に相当する成分を q_j^{n+1} に置換えればよいとされる²⁾ (次項参照)。

(ii) 特性曲線法

(1.24) および (1.25) 式の特性曲線法においては、(1.29) および (1.30) 式の他にさらに $|v| < c$ が必要条件として加わる。¹³⁾ つまりこの計算式は常流にのみ適用されることになる。なお、この場合 Vasiliev の条件を避けるには (1.24) および (1.25) 式においてそれぞれ $(s_{fj}^n + s_{fj+1}^n) / 2 \rightarrow (s_{fj}^{n+1} + s_{fj+1}^n) / 2$ および $(s_{fj-1}^n + s_{fj}^n) / 2 \rightarrow (s_{fj-1}^{n+1} + s_{fj}^{n+1}) / 2$ の置換えを行なえばよい。これに伴いこれまでに述べた計算法も若干変更しなければならないが、その方法については省略する。

1-3. 適用例

(i) 実験水路における不定流

図-1.4 は長さ 10 m、幅 25 cm の一様な長方形断面水路において上流端より非定常な給水を行なって発生させた不定流の実験結果と計算結果を比較したものである。上流端 ($x=0$) および下流端 ($x=L=8.75$ m) において測定された水位を境界条件として与え、 $x=3.0$ m (測点 1) および $x=6.0$ m (測点 2) における測定値を計算結果との検証に用いている。計算法は LW 法 (境界点は特性曲線法) および特性曲線

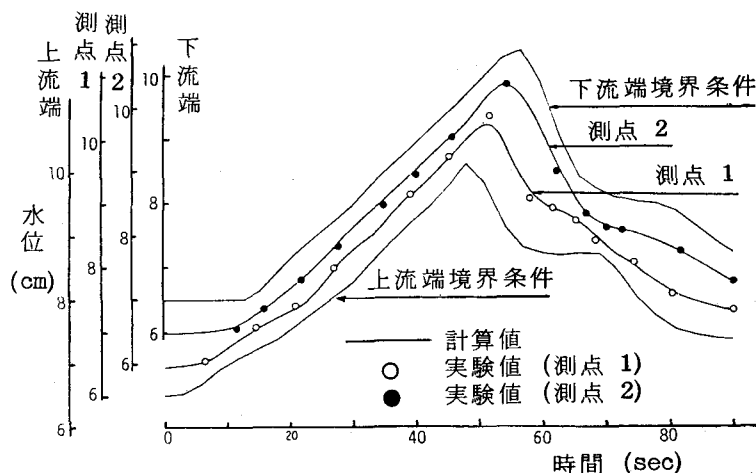


図 1.4 実験水路の不定流の計算例

法の2通りで行なったが、その差は図に示しえないほどわずかである。測点1および2のいずれにおいてもピーク値を含めた波形およびその伝播は計算によってきわめてよく再現されているといえよう。計算結果の精度をみるため、 $Q_{in}(t)=\int_0^t Q(0,t')dt'$ 、 $Q_{out}(t)=\int_0^t Q(L,t')dt'$ 、 $V(t)=\int_0^L A(x,t)dx$ とするとき、

$$C_r(t)=(Q_{in}(t)-Q_{out}(t)+V(0)-V(t))/Q_{out}(t) \tag{1.31}$$

の時間的变化をまとめたのが次の表1.1である。

表 1.1 積分された連続式の計算誤差

t (秒)		10	20	30	40	50	60	70	80	90
C_r (%)	L W 法	-0.08	-0.04	-0.02	-0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	特性曲線法	-2.10	-1.29	-0.79	-0.35	0.16	0.32	0.23	0.18	0.14

$C_r=0.0$ ならば積分された連続式が満たされていることになる。表から分るようにいずれの計算法の場合にも $C_r \approx 0$ とみてよい結果であり、とくにLW法の精度がきわめて高いことが注目される。

(2) 河川における洪水追跡¹⁷⁾

例として淀川中・下流部における6524出水の追跡結果をとり上げる。対象とした区間は図-1.5に模式的に示される区間で、下流端の枚方および上流端の羽束師、加茂においては観測水位、上流端の横尾山においてはすぐ上流の天ヶ瀬ダムの放流流量、山科においては流水解析より得られた流量をそれぞれ境界条件として与えた。計算法には、LW法には先述したような

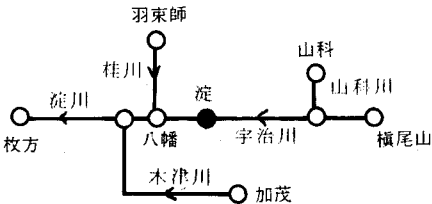


図 1.5 淀川中・下流部の模式図

適用しにくさがある上、洪水のような緩慢な流れでは特性曲線法の精度で十分であるとみなしこの方法によった。計算結果は図-1.6に示されるとおりで、全体的にみれば計算値と観測値との適合は満足すべきものといえよう。横尾山において流量が急減しているのは天ヶ瀬ダムによる洪水調節の結果であるが、そのときの計算水位が観測水位よりもかなり高くなっているのは、この附近の断面資料に少し不備があったためとみなされる。淀においては、流量は上記の洪水調節の結果減少しているにもかかわらず、水位が高いままであることは、下流の合流点より桂川および本津川の背水の影響を顕著に受けている結果であり、計算結果がこれをよく追跡していることはこの計算法が妥当なことを裏づけるものであろう。枚方における計算流量と観測流量はよく一致しており、また図示されていないが水位-流量曲線による流量とも一致しているので、水位-流量の履歴は大きいループを描くとは考えられない。つまりこの点は水位-流量曲線の設定点として適切な地点であるとみなされよう。

(3) 洪水の遡上追跡¹⁸⁾

ある区間の下流側で水位および流量ハイドログラフが観測されたときに、これが上流のどのようなハイドログラフによってもたらされたかを求めるものである。この問題は独立変数の x と t を入れ換えれば「初期値問題」に他ならない。したがって、前に述べた特性曲線の考え方によれば、遡上追跡のための計算式はつぎのように得られる(図1.7)。

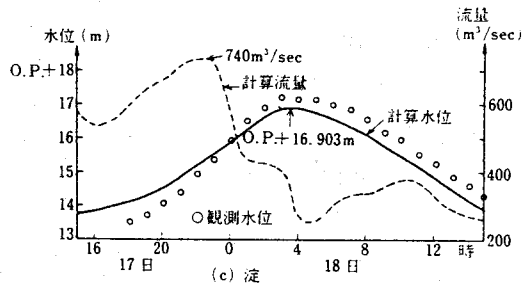
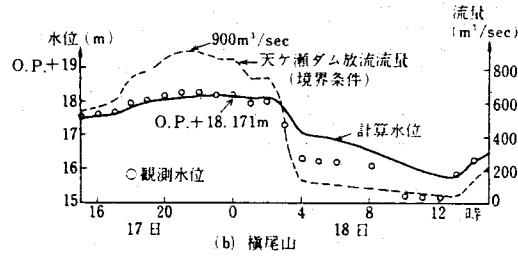
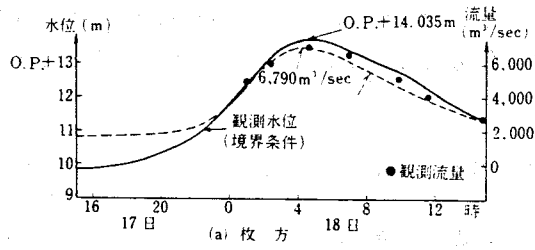


図 1.6 6524 出水の計算結果 (1965 年 9 月 17~18 日)

$(dx/dt)_+$ に沿う差分式:

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - q_j^n \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c \right)_j^n$$

$$\left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{tj}^n - H_{tj+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{fj+1}^n + s_{fj}^n}{2} \right) = 0$$

(1.32)

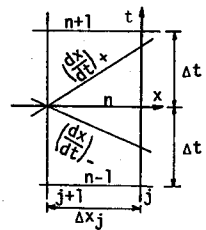


図 1.7 遡上追跡の差分

$(dx/dt)_-$ に沿う差分式：

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^n - A_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - q_j^n\right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c\right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{H_{t,j}^n - H_{t,j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{f,j+1}^n + s_{f,j}^n}{2}\right) = 0 \quad (1.33)$$

ここに未知数は上流側断面の水理量，すなわち添字 $j+1$ に関する量である。

計算例として，図-1.5に示される淀-横尾山間をとり，前項で計算された淀の水位および流量を下流端の条件として，横尾山まで遡上追跡を行なった結果が図-1.8である。図中の実線および破線は前項の不定流計算の水位および流量（境界条件）であって，これらの2つのハイドログラフはいずれも遡上追跡によってよく再現されている（図中の○印および●印）。この方法を用いれば，たとえば淀においても少し水位を下げたいとしたときに横尾山の流量（天ヶ瀬ダムの放流流量）をどのようにすればよいかが計算されうることになり，ダムの放流操作に一つの指針を与えることができよう。またこの方法は水面こう配が無視しえない貯水池の流入流量を推定するのにも応用される。

不定流の計算としてはこの他に遊水池系の含まれる河道の洪水やゲート操作によってそれより上流に生ずる水位の変化などの計算例があるが，紙面の都合上割愛する。

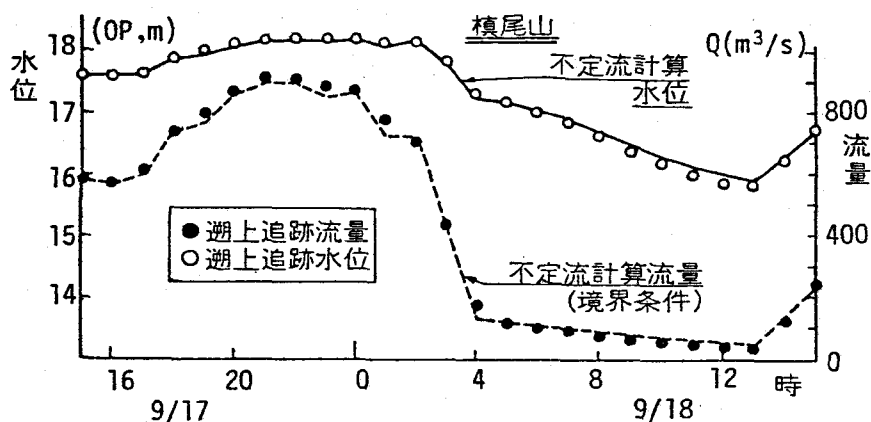


図1.8 遡上追跡の計算結果（6524 出水）

2. 二次元開水路流れの数値解析

二次元開水路流れの例として浅い湖沼における流れや貯水池における流れなどが挙げられよう。前者は、水深が浅く水理量の水深方向の変化が小さいとみなされる場合であって、水深方向について平均された水理量が対象となる。つまり水深方向の変化は考えなくてよく、結局水平面内における二次元の流体運動とみなされる場合である。一方、後者は貯水池のように、水深方向には水理量（例えば密度）の変化が大きい、横断方向には小さく、したがって横断方向について平均された水理量が対象とされ、しかも縦断方向の変化が無視しえない場合であって、このときには縦断および水深方向の鉛直面内の二次元の流体運動として扱われることになる。

以上のように、二次元開水路流れといっても水平面内のそれと鉛直面内のそれとの2通りがあり、これらの場での流体運動を解析するための基礎式も、上のような水理量の平均がとられる方向に応じて流体力学的な基礎式を積分して導かれることになる。したがって、上記の2つの場合をまとめて一般的に表わすことはできない。以下においては、まず流体力学的な三次元的な基礎式を示し、つぎに水平二次元流れおよび鉛直二次元流れのそれぞれについてそれらの基礎式と適用例について述べることにする。

2-1. 基礎式

流体運動に関する三次元的な基礎式はつぎのとおりである。

$$\text{連続式: } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

ここで、(2.2)式においてせん断応力 τ_{ij} に Newton 流体に関する表示を用いれば、(2.2)式は Navier-Stokes の方程式となるが、ここで扱う流れはすべて乱流であるので(2.1)および(2.2)式はある時間スケールについての平均がすでに行なわれた結果の式とする。したがって、 τ_{ij} には Reynolds 応力も含まれる。また水平二次元流れの場合には外力の項に Coriolis 力が含まれることが多い。

2-2. 水平二次元流れ

(1) 計算式

水平二次元流れの基礎式は、座標系を水平面内東向きに x 軸、北向きに y 軸、鉛直上向きに z 軸をとり、図-2.1に示される control volume について(2.1)および(2.2)式を積分することにより得られる。まず(2.2)式の z 軸に関する式において、鉛直方向の加速度が重力の加速度に比して十分小さいと仮定し、また自由表面では一定の大気圧に等しいとすると、静水圧分布 $p = \rho g (H - z)$ が得られる。つぎに、(2.1)および(2.2)式の x 軸と y 軸に関する式を積分し、その後に $x_{i+1} \rightarrow x_i$ ($\Delta x \rightarrow 0$), $y_{j+1} \rightarrow y_j$

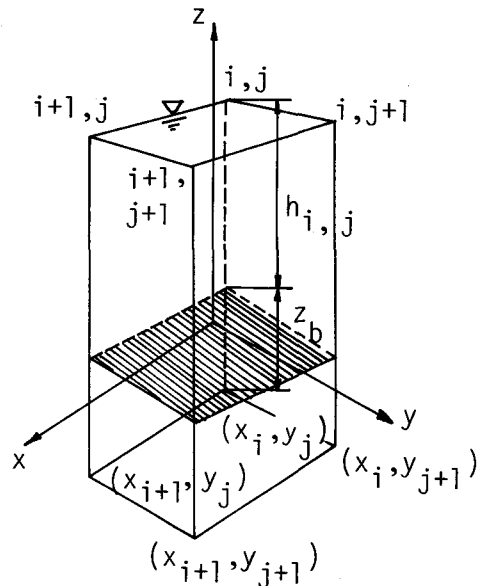


図-2.1 水平二次元流れの control volume (z_b : 底面の標高)

($\Delta y \rightarrow 0$) とすれば次式が得られる

連続式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

x 方向運動量式：

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uM + \frac{\partial}{\partial y} vM = -gh \frac{\partial H}{\partial x} + fN + \frac{1}{\rho} (\tau_{sx} - \tau_{bx}) \quad (2.4)$$

y 方向運動量式：

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uN + \frac{\partial}{\partial y} vN = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - fM + \frac{1}{\rho} (\tau_{sy} - \tau_{by}) \quad (2.5)$$

ここに、 u および v ：水深方向に平均された x および y 方向の流速、 h ：水深、 $M=uh$ および $N=vh$ 、 x および y 方向の流量フラックス、 f ：Coriolis の因子で $f=2\omega \sin \varphi$ (ω ：地球の自転の角速度、 φ ：緯度)、 τ_{sx} および τ_{bx} ：自由表面および底面に作用する x 方向のせん断応力であり、 τ_{sy} および τ_{by} についても同様である。(2.4) および (2.5) 式の誘導においては、局所的な流速と平均流速 (u あるいは v) との差に関する項は無視されている。

(2.3)～(2.5) 式を用いた水平二次元流れは数値解析の分野で現在最もよく実施されている対象の一つであろう。その手法の一つに有限要素法がある。この方法では空間的な離散化が任意の形状について行なわれ、複雑な境界形状が容易に計算法に組入れられる利点を有しているが、その計算式は複雑である上、非定常な流れを扱うとき時間方向には通常の差分法がとられている。その詳細は文献¹⁹⁾にゆずり、ここでは計算式の簡単な差分法によることにする。

(2.3)～(2.5) 式で構成される系は保存則系であり、また双曲型であるから、一次元流れの場合と同様に LW 法や特性曲線法の適用が考えられる。とくに特性曲線法は一次元流れの場合に述べたようにその水理学的な意義が明瞭であるので、これを計算法にとり入れる試みも行なわれている²⁰⁾が、一次元の場合と異なり数学的に相当複雑になるためまだ十分な成果は得られていないといえる。また、LW 法による計算も行なわれている²¹⁾が、境界条件の組込みに一次元流れの場合以上の困難が予想される。このような理由により、以下では現在水平二次元流れの解析に広く用いられている staggered scheme²²⁾による計算法について述べる。いま、求めるべき従属変数 M 、 N および h を図-2.2 のように千鳥状に配置するとき、この方法による差分式はつぎのように導かれる(変数の右肩に時間ステップを示す添字 n ，右下に x - y 平面での位置を示す添字 i および j を附す)。

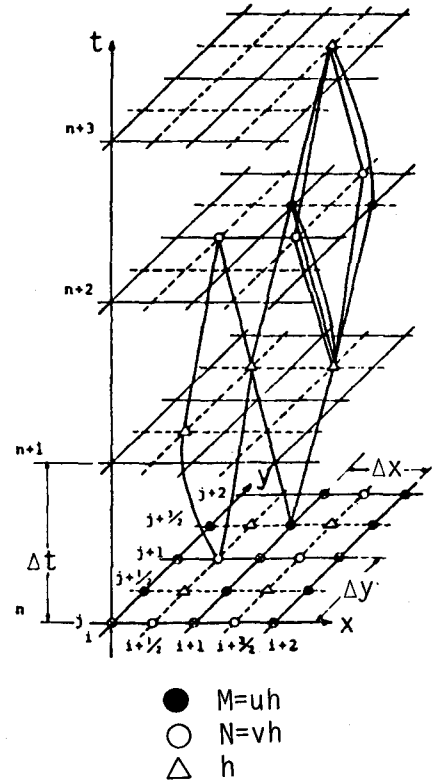


図-2.2 水平二次元流れの差分格子 (staggered scheme)

(2.4) 式 (x 方向運動量式) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_{i,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^n}{2 \Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} \left(\frac{M_{i+1,j+1/2}^n + M_{i,j+1/2}^n}{2} \right)^2 - \frac{1}{h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1}} \left(\frac{M_{i,j+1/2}^n + M_{i-1,j+1/2}^n}{2} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{(M_{i,j+1/2}^n + M_{i,j+3/2}^n)(N_{i+1/2,j+1}^n + N_{i-1/2,j+1}^n)}{h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+3/2}^{n+1} + h_{i-1/2,j+3/2}^{n+1}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(M_{i,j+1/2}^n + M_{i,j-1/2}^n)(N_{i+1/2,j}^n + N_{i-1/2,j}^n)}{h_{i-1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1}} \right] \\
 & = -g \frac{(h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1})(H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2,j+1/2}^{n+1})}{2 \Delta x} \\
 & + f \frac{N_{i+1/2,j}^n + N_{i+1/2,j+1}^n + N_{i-1/2,j+1}^n + N_{i-1/2,j}^n}{4} + \frac{1}{\rho} (\tau_{sx \ i,j+1/2}^n - \tau_{bx \ i,j+1/2}^n) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

(2.5) 式 (y 方向運動量式) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{N_{i+1/2,j}^{n+2} - N_{i+1/2,j}^n}{2 \Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{(M_{i+1,j+1/2}^n + M_{i+1,j-1/2}^n)(N_{i+1/2,j}^n + N_{i+3/2,j}^n)}{h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+3/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+3/2,j+1/2}^{n+1}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(M_{i,j+1/2}^n + M_{i,j-1/2}^n)(N_{i-1/2,j}^n + N_{i+1/2,j}^n)}{h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i-1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} \right] \\
 & + \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{1}{h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} \left(\frac{N_{i+1/2,j}^n + N_{i+1/2,j+1}^n}{2} \right)^2 - \frac{1}{h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1}} \left(\frac{N_{i+1/2,j-1}^n + N_{i+1/2,j}^n}{2} \right)^2 \right] \\
 & = -g \frac{(h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1})(H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2,j-1/2}^{n+1})}{2 \Delta y} \\
 & - f \frac{M_{i+1,j-1/2}^n + M_{i+1,j+1/2}^n + M_{i,j+1/2}^n + M_{i,j-1/2}^n}{4} + \frac{1}{\rho} (\tau_{sy \ i+1/2,j}^n - \tau_{by \ i+1/2,j}^n) \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

(2.3) 式 (連続式)

$$\frac{h_{i+1/2,j+1/2}^{n+3} - h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}}{2 \Delta t} + \frac{M_{i+1,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^{n+2}}{\Delta x} + \frac{N_{i+1/2,j+1}^{n+2} - N_{i+1/2,j}^{n+2}}{\Delta y} = 0 \quad (2.8)$$

(2.6)～(2.8)式による数値解析はつぎの手順で行なわれる。

- ① 初期値として、すべての i および j について、 $n=0$ のときの M および N 、および $n=1$ のときの h が与えられているとする(初期値の設定法は後述)
- ② M^n, N^n および h^{n+1} は初期値あるいは前回の計算結果から知られているから、まず(2.6)および(2.7)式から M^{n+2} および N^{n+2} を求める。
- ③ ②の結果と(2.8)式から h^{n+3} を求める。
- ④ 以下②～③を所定の計算時間の範囲で繰返す。

以上の計算過程から明らかなように M および N が求められる時間と h が求められる時間とは時間の1ステップ分(Δt)だけずれているが、実際には Δt は相当小さくとられるので、初期値を設定したときの時間の配置にならって、 M^n, N^n および h^{n+1} が同時刻での計算結果とみなされる。

境界条件の扱いは比較的容易である。すなわち、水位の変化によって汀線が移動しないとみなされる直立堤では、これに直角方向の流量フラックスが0であるとする。水位が与えられている点では(2.8)式の計算をせずにその水位を解とすればよく、また流量が与えられている点では、流量を方向に応じて流量フラックスに改め、(2.6)および/または(2.7)式を解く代りにこの流量フラックスを解とすればよい。

初期条件の設定は、定常な二次元流れの計算法が確立されていないので、つぎの方法がとられることが多いようである。つまり、出発値として適当な M, N および h を与え境界条件を定常に保ったまま(2.6)～(2.8)式による非定常な計算を行ない、解が時間的に変化しなくなった状態を初期値とする方法である。

(2.6)～(2.8)式の計算式の安定性の必要条件としてこの場合のC.F.L.条件²²⁾がある。

$$\Delta t < \min(\Delta x, \Delta y) / \sqrt{2gh_{\max}} \quad (2.9)$$

ただし、(2.9)式においては u および v は $\sqrt{gh_{\max}}$ に比して十分小さいとされている。(2.9)式の水理学的な意義は一次元の場合と同じように理解されよう。

(2) 湖流の計算²³⁾

図-2.3は琵琶湖南湖の湖流の計算結果で、境界条件として北端で水位、南端で流量($Q=80 \text{ m}^3/\text{s}$)を与え、また水表面に作用するせん断応力 τ_s に風による作用を考えた場合に、計算開始後20時間目から31時間目までの12時間の計算値を15分ごとにサンプリングして平均をとった湖流図である(琵琶湖疏水の取水流量 $20 \text{ m}^3/\text{s}$ も考慮されている)。ただし、この計算では流れの移流的变化が小さいとして(2.6)および(2.7)式の左辺第2および第3項は無視されている。またせん断応力には次式が適用されている。

$$\tau_{sx \text{ or } y} = r_a^2 \rho_a W_{x \text{ or } y} \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (2.10)$$

$$\tau_{bx \text{ or } y} = r_b^2 \rho_u \text{ or } v \sqrt{u^2 + v^2} - \beta \tau_{sx \text{ or } y} \quad (2.11)$$

ここに、 W_x および W_y ：湖面上の風速の x および y 成分、 ρ_a ：空気の密度であり、また $r_a^2 = 1.3 \times 10^{-3}$ 、 $r_b^2 = 2.6 \times 10^{-3}$ および $\beta=1$ の値がとられている。さらに 2 m/s の風が対象領域に一樣に吹くとし、風向は図-2.3のように8方位が考えられている。この図より、風向の変化によって湖流の特徴は著しく変化することが分る。すなわち、北西～東の風向では南下する流れは東岸に偏り、西岸には北上する流れが発生し、全体として時計回りの環流が見られるのに対し、風向が南東～西の場合には上と全く逆に南下する流れは西岸に偏るとともに東岸に北上する流れが発生し反時計回りの環流となっている。このような特

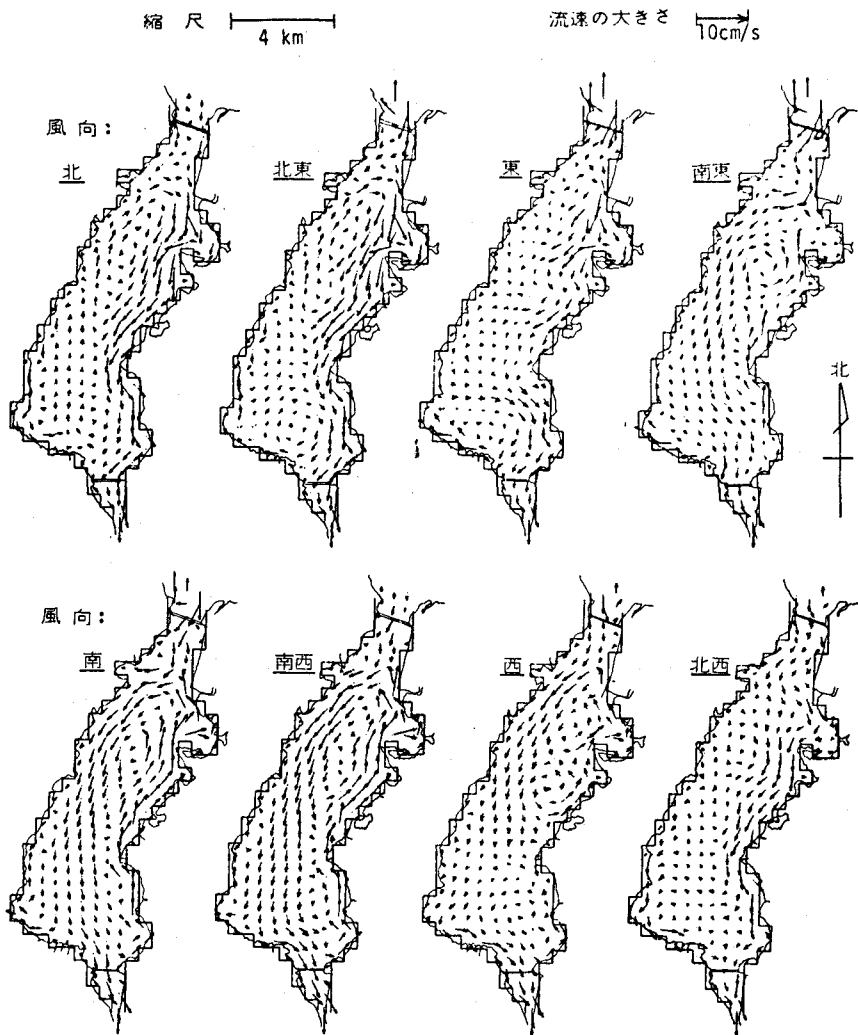


図-2.3 琵琶湖南湖の湖流の計算例

徴は、南湖の長軸方向（北北東—南南西）に風向がほぼ一致する北東風および南西風のときに最も顕著に現われており、比較的遠浅である東岸に風向と同じ向きの湖流が現われ、反対に湖底が比較的急峻な西岸に風向と逆の向きの湖流が生じていることになる。

(3) 氾濫水の解析²⁴⁾

河川の破堤によって堤内地に浸入する氾濫水の挙動も(2.6)～(2.8)式によって解析される。この場合の計算上の問題点として氾濫水の先端の取扱いがあるが、この部分を水理学的に厳密に扱うことは、氾濫水の挙動をある意味で巨視的に数値解析しようとする点からみればあまり大きい意味を持つとは考えられない。ここではつぎのようにしてこの問題を処理することにする。

(i) 周辺の水位より地盤の高い点で、前回の計算結果でその点の水深がある値 ε （たとえば 0.001 m をとる）以下であれば、この点の流量フラックス（流入・出とも）はないものとする。

(ii) 水深が ε 以下の点から流出する流量フラックスは、これを 0 で置換える。

(iii) 水深が ϵ 以下に計算されれば、これを0で置換える。

適用例として 図-2.4 に示される宇治川と木津川に挟まれた旧巨椋池干拓地を堤内地にとり、河川の洪水と堤内地における氾濫水の挙動を併せて数値解析した結果を以下に示す(ただし、河川の洪水については前節で示した一次元の特性曲線法を適用している。また破堤点、破堤幅、破堤開始外水位などは全く仮想的に想定し、さらに河川から堤内地への越流流量の算定には本間公式²⁵⁾を適用している)。

計算にあたって氾濫域はあまり広くないとしてCoriolis力を無視し、また水表面におけるせん断応力 τ_s もないとする。 τ_b については次式 (Manning 公式)

$$\tau_{bx \text{ or } y} = \rho g n^2 u_{or} v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \quad (2.12)$$

を適用し、これをたとえば τ_{xb} についてはつぎのように差分化する。

$$\tau_{bx, j+1/2} = \rho g n^2 u_{i,j+1/2} \frac{\overline{u}_{i,j+1/2} \sqrt{(u_{i,j+1/2}^n)^2 + (v_{i,j+1/2}^n)^2}}{[(h_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} + h_{i-1/2, j+1/2}^{n+1})/2]^{1/3}} \quad (2.13)$$

ここに、

$$\overline{u}_{i,j+1/2} = (M_{i,j+1/2}^{n+2} + M_{i,j+1/2}^n) / (h_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} + h_{i-1/2, j+1/2}^{n+1}) \quad (2.14)$$

である。(2.14)式にこの場合の未知量である $M_{i,j+1/2}^{n+2}$ が含まれているのは、摩擦項に基く不安定を避けるため、一次元流れの場合 Vasiliev の条件を避けるためにとられた方法と同じである。なお、粗度係数は、水田・畑地において $n = 0.025$ 、山地において $n = 0.060$ とする。

図-2.5 は破堤後1時間における堤内地の流量フラックスのベクトル図であって、かなり大きい流量フラックスが堤内地中央部の地盤の低い部分に向っており、氾濫水が地盤の高い所を避けながら順次低地へ浸水しつつあることがみられ、地形に従った氾濫水の拡散過程がとらえられているといえよう。図-2.6は、破堤後8時間経過し堤内地に大量の湛水が生じたときの水深の分布を示したものである。このときの浸水域の水位はほぼ水平になっている。つまり、水平な水位を保ったまま徐々に周辺に浸水してゆく湛水過程に入っているとみられよう。図-2.7はこの時間での各河道の流量の分布図である。破堤点より下流の宇治川に大きい流量の逆流が生じており、また桂川の流量が二分されていることがみられる。これは、このときの本津川の流量がきわめて大きいため、合流点からの背水の影響で桂川

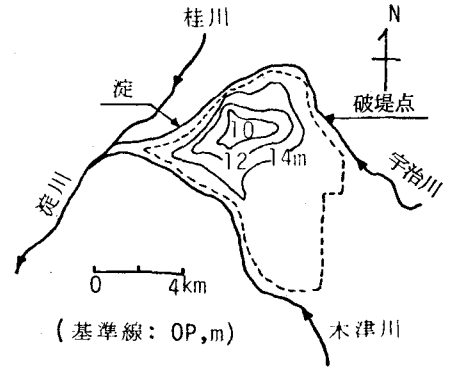


図-2.4 淀川中・下流部と旧巨椋池干拓地

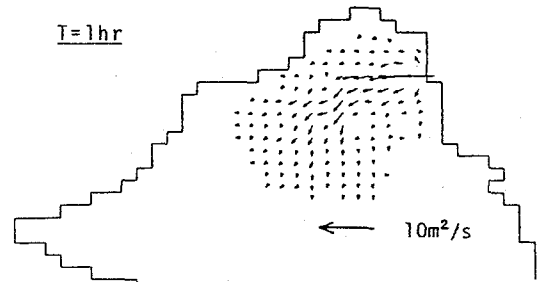


図-2.5 堤内地の流量フラックス

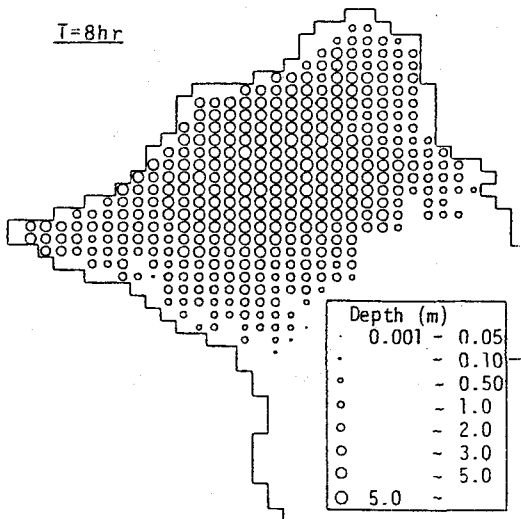


図-2.6 堤内地の水深分布

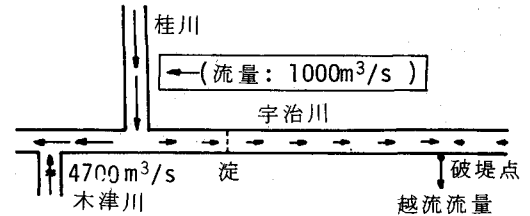


図-2.7 各河道の流量分布

の流量の一部が宇治川へ逆流した結果とみられ、この附近における洪水の複雑な挙動がうかがわれる。

2-3. 鉛直二次元流れ^{26), 27)}

前に述べたように、鉛直二次元流れの例としてダム貯水池が考えられる。いま横断方向の水理量の変化が小さいとして、これを図-2.8のような control volume に分けるとき、基礎式(2.1)および(2.2)式は最上層(水表面を含む control volume)を除いてつぎのように改められる。

連続式：

$$\left| uB \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta y + \left| vA \right|_{y_j}^{y_{j+1}} = 0 \quad (2.15)$$

x 方向運動量式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{A} \left| u^2 B \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \Delta y} \left| u v A \right|_{y_j}^{y_{j+1}} = - \frac{1}{\rho A} \left| p B \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (2.16)$$

y 方向運動量式(静水圧分布式)：

$$p = \int_y^{y_s} \rho g dy \quad (2.17)$$

ここに、 y_s は自由表面の位置であり、他の記号は図-2.8に示されているとおりである。また最上層においては基礎式はつぎようになる。

連続式：

$$\frac{\partial A_s \Delta y_s}{\partial t} + \left| u B \Delta y_s \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - v_{y_s-1} A_{y_s-1} = 0 \quad (2.18)$$

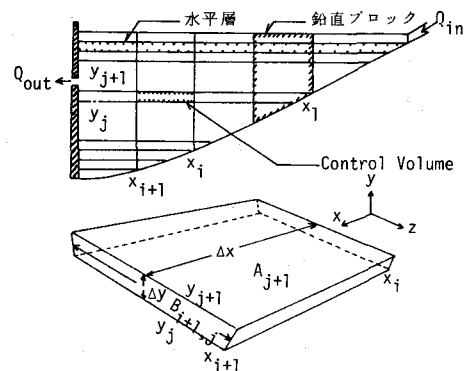


図-2.8 貯水池に関する control volume

x 方向運動量式：

$$\frac{\partial(uV_s)}{\partial t} + |u^2 B \Delta y_s|_{x_i}^{x_{i+1}} - u_{y_s-1} v_{y_s-1} A_{y_s-1} = \frac{1}{\rho} |p B \Delta y_s|_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (2.19)$$

y 方向運動量式は(2.17)式と同じである。ここに Δy_s および V_s はそれぞれ最上層の厚さおよび体積であり、 y_s-1 は最上層から一つ下の層を意味する。これらの式の誘導にあたっては貯水池壁面からの流入・出はないとし、またせん断応力は小さいとして無視されている。さらに、鉛直方向の運動量式はこの方向の加速度が重力のそれに比して小さいとして、静水圧分布式となっている。

貯水池の流体運動では、水温による密度の変化が重要な因子の一つである。水温 T に関して上記と同じ control volume について積分された基礎式はつぎのようである。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{A} |TuB|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \Delta y} |TvA|_{y_j}^{y_{j+1}} = \frac{1}{A} |D_{Tx} B \frac{\partial T}{\partial x}|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{A \Delta y} |D_{Ty} A \frac{\partial T}{\partial y}|_{y_j}^{y_{j+1}} + H \quad (2.20)$$

ただし最上層については

$$\frac{\partial(TV_s)}{\partial t} + |TuB \Delta y_s|_{x_i}^{x_{i+1}} - T_{y_s-1} v_{y_s-1} A_{y_s-1} = |D_{Tx} B \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y_s|_{x_i}^{x_{i+1}} - D_{Ty} A \frac{\partial T}{\partial y} |_{y_s-1} + H V_s \quad (2.21)$$

である。ここに D_{Tx} および D_{Ty} ：分散係数、 H ：発生温度である。

(2.15)～(2.21)式によって貯水池の流体運動ならびに水温を計算するための差分式は最上層以外ではつぎのようである

連続式：

$$\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} B_j + \frac{v_{i-1/2,j+1/2}^n B_{j+1/2} - v_{i+1/2,j-1/2}^n B_{j-1/2}}{\Delta y} = 0 \quad (2.22)$$

x 方向運動量式：

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{2} - u_{i-1+j}^n \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) \\ & + \frac{1}{\Delta y B_j} \left(u_{i,j+a}^n v_{i,j+1/2}^n B_{j+1/2} - u_{i,j-1+a}^n v_{i,j-1/2}^n B_{j-1/2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1/2,j}^{n+1/2} - p_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.23)$$

y 方向運動量式(静水圧分布式)

$$p_{i+1/2,j}^{n+1/2} = g \left\{ \rho_{i+1/2,j_s}^n \Delta y_{s,i+1/2}^{n+1/2} + \Delta y \left(\sum_{jj=j+1}^{j_s-1} \rho_{i+1/2,jj}^n + \frac{\rho_{i+1/2,j}^n}{2} \right) \right\} \quad (2.24)$$

水温：

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i+1/2,j}^{n+1} - T_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(T_{i+1/2+j,a}^n u_{i+1,j}^n - T_{i-1/2+j,a}^n u_{i,j}^n \right) \\ & + \frac{1}{B_j \Delta y} \left(T_{i+1/2,j+a}^n v_{i+1/2,j+1/2}^n B_{j+1/2} - T_{i+1/2,j-1+a}^n v_{i+1/2,j-1/2}^n B_{j-1/2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D_{T_x}}{\Delta x^2} (T_{i+3/2,j}^n - 2T_{i+1/2,j}^n + T_{i-1/2,j}^n) + \frac{D_{T_y}}{B_j \Delta y^2} \{ (T_{i+1/2,j+1}^n - T_{i+1/2,j}^n) B_{j+1/2} - \\
&\quad - (T_{i+1/2,j}^n - T_{i+1/2,j-1}^n) B_{j-1/2} \} + H_{i+1/2,j}^n \quad (2.25)
\end{aligned}$$

ここに、記号 a は上流側差分をとるためのもので、この記号のつけられた水理量に乗ぜられる流速が正のときには 0、負のときには 1 をとる。

最上層についてはつぎの計算式がとられる。

連続式：

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta y_{s,i+1/2}^{n+1/2} - \Delta y_{s,i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{\bar{B}_{s,i+1/2}^{n-1/2} \Delta x} (u_{i+1,j_s}^n \bar{B}_{s,i+1}^{n-1/2} \Delta y_{s,i+1}^{n-1/2} - u_{i,j_s}^n \bar{B}_{s,i}^{n-1/2} \Delta y_{s,i}^{n-1/2} \\
&\quad - v_{i+1/2,j_s-1/2}^n \Delta y_{s,i+1/2}^{n-1/2}) = 0 \quad (2.26)
\end{aligned}$$

x 方向運動量式：

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j_s}^{n+1} \bar{B}_{s,i}^{n+1/2} \Delta y_{s,i}^{n+1/2} - u_{i,j_s}^n \bar{B}_{s,i}^{n-1/2} \Delta y_{s,i}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ u_{i+a,j_s}^n \frac{u_{i,j_s}^n + u_{i+1,j_s}^n}{2} \bar{B}_{s,i+1/2}^{n-1/2} \Delta y_{s,i+1/2}^{n-1/2} \right. \\
&\quad \left. - u_{i-1+a,j_s}^n \frac{u_{i,j_s}^n + u_{i-1,j_s}^n}{2} \bar{B}_{s,i-1/2}^{n-1/2} \Delta y_{s,i-1/2}^{n-1/2} \right\} - u_{i,j_s-1}^n v_{i,j_s-1/2}^n B_{j_s-1/2}^{n-1/2} \\
&= -\frac{1}{\rho \Delta x} (p_{s,i+1/2}^{n+1/2} \Delta y_{s,i+1/2}^{n+1/2} \bar{B}_{s,i+1/2}^{n+1/2} - p_{s,i-1/2}^{n+1/2} \Delta y_{s,i-1/2}^{n+1/2} \bar{B}_{s,i-1/2}^{n+1/2}) \quad (2.27)
\end{aligned}$$

y 方向運動量式 (静水圧分布式)

$$p_{s,i+1/2}^{n+1/2} = \rho_{i+1/2,j_s}^n g \Delta y_{s,i+1/2}^{n+1/2} / 2 \quad (2.28)$$

水温：

$$\begin{aligned}
&\frac{T_{i+1/2,j_s}^{n+1} \bar{B}_{s,i+1/2}^{n+1/2} \Delta y_{s,i+1/2}^{n+1/2} - T_{i+1/2,j_s}^n \bar{B}_{s,i+1/2}^{n-1/2} \Delta y_{s,i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \{ T_{i+1/2+a,j_s}^n u_{i+1,j_s}^n \bar{B}_{s,i+1}^{n-1/2} \Delta y_{s,i+1}^{n-1/2} \\
&\quad - T_{i-1/2+a,j_s}^n u_{i,j_s}^n \bar{B}_{s,i}^{n-1/2} \Delta y_{s,i}^{n-1/2} \} - T_{i+1/2,j_s-1}^n v_{i+1/2,j_s-1/2}^n \bar{B}_{j_s-1/2}^{n-1/2} \\
&= D_{T_x} \frac{(T_{i+3/2,j_s}^n - T_{i+1/2,j_s}^n) \bar{B}_{s,i+1}^{n-1/2} \Delta y_{s,i+1}^{n-1/2} - (T_{i+1/2,j_s}^n - T_{i-1/2,j_s}^n) \bar{B}_{s,i}^{n-1/2} \Delta y_{s,i}^{n-1/2}}{\Delta x^2} \\
&\quad - D_{T_y} \frac{T_{i+1/2,j_s}^n - T_{i+1/2,j_s-1}^n}{\Delta y} B_{j_s-1/2} + H_{i+1/2,j_s}^n \bar{B}_{s,i}^{n-1/2} \Delta y_{s,i+1/2}^{n-1/2} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

ここに、 j_s ：最上層の水平要素における j の値、 $\bar{B}_s$ ：最上層の水平要素における平均貯水池幅である。

鉛直二次元流れでは上記のように水位の変化に伴ない水深方向の計算点の数になるので、計算法は水平二次元流れの場合より相当複雑である。(2.22)～(2.29)式による計算手順はつぎのようである。

- ① 初期値として $u^n, v^n, \Delta y_s^{n-1/2}$ および T^n が与えられているとする。
- ② (2.26)式より、 $\Delta y_s^{n+1/2}$ を求める。
- ③ (2.28)および(2.24)式より $p^{n+1/2}$ を求める。いうまでもなくこのとき水温と密度に関する物性式 $\rho=f(T)$ が用いられる。
- ④ (2.23)および(2.27)式より u^{n+1} を求める。
- ⑤ (2.22)式より v^{n+1} を求める。
- ⑥ (2.25)および(2.29)式より T^{n+1} を求める。
- ⑦ ②～⑥を所定の計算範囲で繰返す。

境界条件および初期条件などについては先に挙げた文献を参照されたい。

つぎに、以上の方法の適用例として、貯水池の水温および濁度（基礎式などは示されていないが、水温のそれと類似である）に関して数値解析した結果を示す。図-2.9は早明浦ダム貯水池の1年間（1976年）にわたる流出水温の計算値と観測値とを比較したものである。7月の洪水後の成層低下時と9月の洪水後の成層破壊時を除けば、成層期および循環期のいずれについても計算値と観測値はほぼ一致しており良好な結果といえよう。図-2.10は同じ計算結果より、7月に生じた洪水後の貯水池内の水温および濁度の分布を示したもので、水温についてはダムの直上流において計算値と観測値とのずれが大きいことおよび躍層での水温こう配が計算値の方がやや緩やかであることが見られるが、全体としては両者はほぼ同じパターンを示しているといえる。一方、濁度については濁水塊が躍層の上に存在している点においては計算値は観測

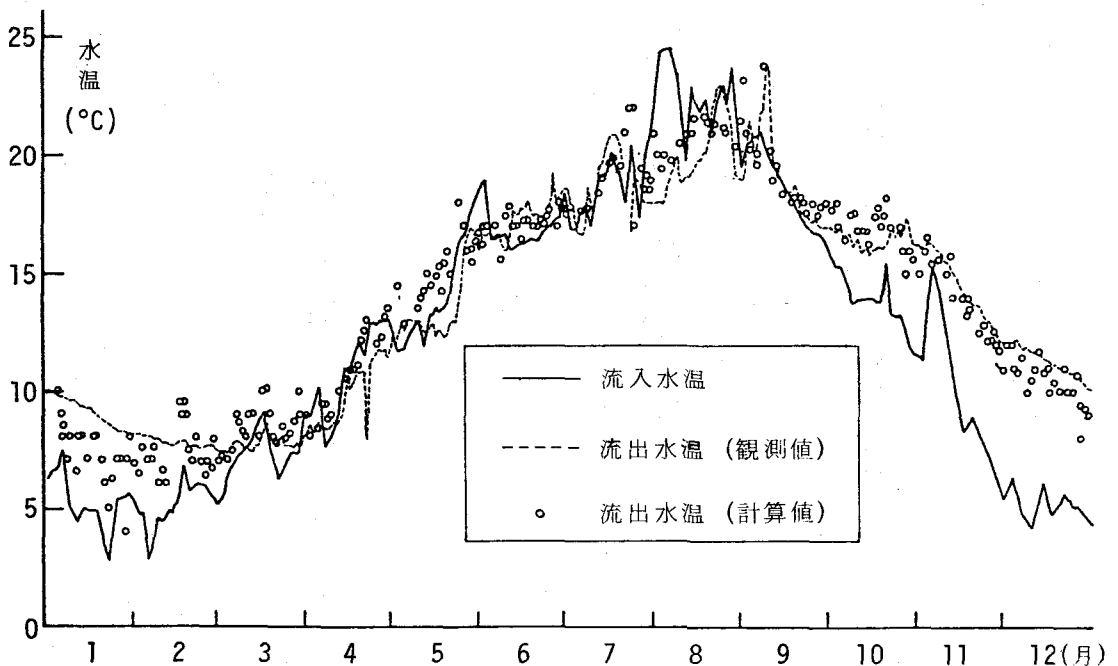


図-2.9 流出水温の計算結果（早明浦ダム貯水池，1976年）

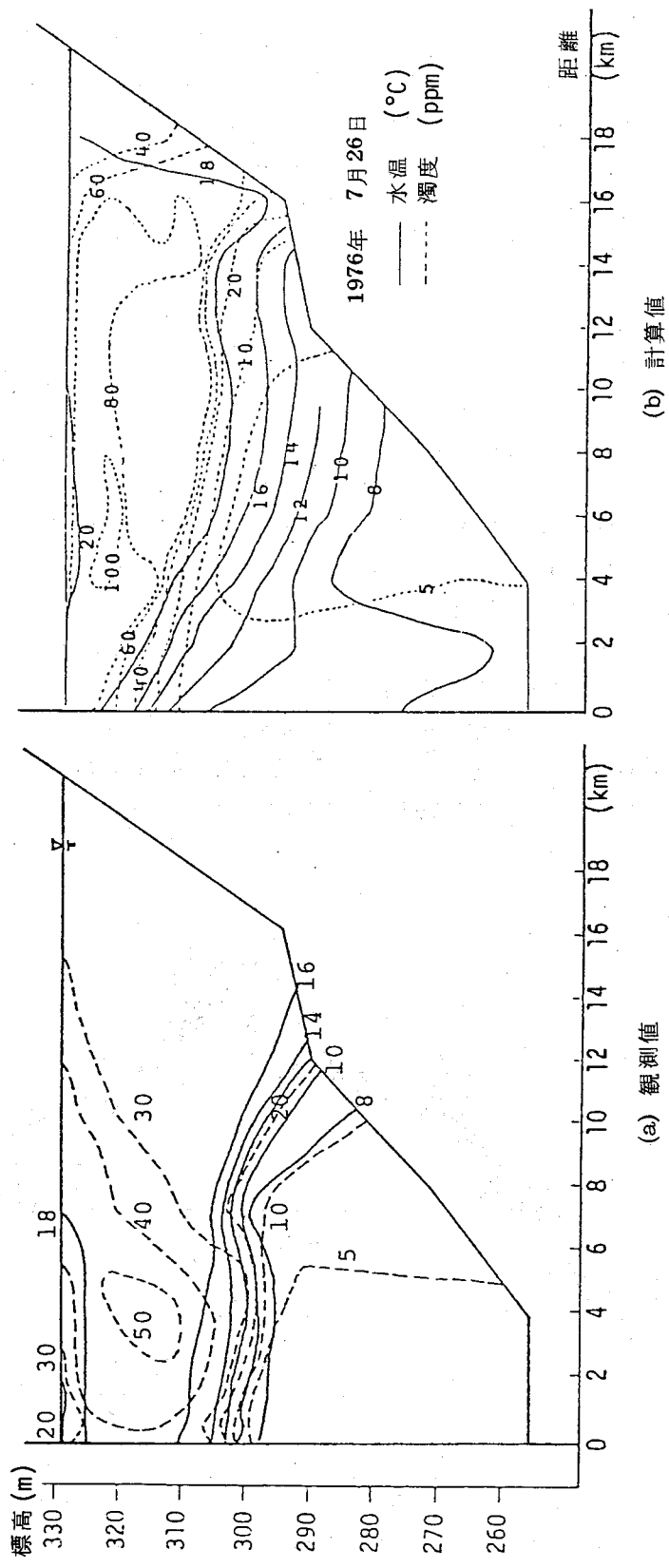


図-2.10 水温および濁度分布の比較

値をよく再現しているが、濁度の値そのものは計算値の方がかなり大きくなっている。境界条件である流入濁度の観測値が十分でないため、濁度の定量的な再現はむずかしく、また分布形状についても差違がみられるので、計算法についてもさらに検討する必要がある。

む す び

以上、一次元および二次元の開水路流れに関する非定常問題の差分法による数値解析法について述べてきた。対象とされた水域が限られており、また貯水池の例を除いて流れの解析法のみ主眼が置かれ、最近とくに問題となることの多い水域における物質および熱輸送については触れることができなかった。さらに計算手法の基礎的な部分の記述に多くをさき、実際への適用にあたっての細部については舌足らずになってしまった。この点については文献を参照していただければ幸いである。

最近においては水平二次元流れの方法を水深方向に何層か積重ねるいわゆる多層モデルやさらには三次元的な流れの解析も活発に行なわれており、今後の成果が期待されている。

最後に 2-3 の項については、本学科助手松尾直規氏より直接御教示を受けたことを記し、謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Richtmyer, R. D. and K. W. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1967, pp. 60~90 および pp. 288~350.
- 2) 伊藤 剛編: 数値解析の応用と基礎, アテネ出版, 1971, pp. 197~222.
- 3) 岩佐義朗: 水理学の解析法, 石原藤次郎編, 水工水理学, 丸善, 1972, pp. 1~21.
- 4) Courant, R. and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Pub., 1962, pp. 170~180.
- 5) Lighthill, M. J. and G. B. Whitham: On the Kinematic Waves, I, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 229, 1955, pp. 281~316.
- 6) 井上和也, 岩佐義朗, 西畑雅司: Kinematic wave と dynamic wave の特性について, 第34回 土木学会年次学術講演会講演概要, II-61, 1979.
- 7) 水理公式集, 土木学会編, 1971, pp. 180~197.
- 8) Amein, M.: An Implicit Method for Numerical Flood Routing, Water Resources Research, Vol. 4, No. 4, 1968, pp. 719~726.
- 9) Stoker, J. J.: Water Waves, Interscience Pub., 1957, pp. 451~509.
- 10) Dronker, J. J.: Tidal Computations for Rivers, Coastal Areas and Seas, Proc. ASCE, Vol. 95, HY. 1, 1969, pp. 29~77.
- 11) Liggett, J. A. and D. A. Woolhiser: Difference Solutions of the Shallow-Water Equation, Proc. ASCE, Vol. 93, EM2, 1967, pp. 39~71.
- 12) Courant, R., E. Isaacson and M. Rees: On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Difference, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. 5, 1952, pp. 243~255.
- 13) 岩佐義朗, 井上和也, 片山 猛: 開水路流れの数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第19号 B-2, 1976, pp. 187~200.

- 14) 岩佐義朗, 井上和也, 栗林棟一: 洪水流の数値シミュレーションについて (第三報), 第29回土木学会年次学術講演会講演概要, II-165, 1974.
- 15) 伊藤 剛: 非定常運動の境界条件について, 第18回水理講演会講演集, 1974, pp. 13~17.
- 16) 神田 徹, 北田隆久: 不定流の数値計算法に関する critical review, 建設工学研究所報告No. 17, 1975, pp. 43~77.
- 17) 石原藤次郎編: 河川工学百年の歩みと淀川, 建設省近畿地方建設局, 1978, pp. 211~216.
- 18) 井上和也, 岩佐義朗, 宮井 宏: 不定流の数値計算法の洪水問題への適用, 第22回水理講演会論文集, 1978, pp. 233~238.
- 19) 例えば川原陸人: 有限要素法による流体解析, 土木学会編, 土木工学における数値解析—流体解析編, サイエンス社, 1974, pp. 134~148.
余越正一郎, 富所五郎: 風による諏訪湖の流動特性, 土木学会論文報告集, No. 276, 1978, pp. 53~64.
- 20) 例えば Townson, J. M.: An Application of the Method of Characteristics to Tidal Calculations in (x-y-t) Space, Jour. Hydraulic Research, Vol. 12, No. 4, 1974, pp. 499~523.
吉田英信, 岩佐義朗, 井上和也: 特性曲線法による平面二次元流れの数値解析, 第34回土木学会年次学術講演会講演概要, II-117, 1979.
田坂昌彦, 松梨順三郎: 特性曲線法による二次元不定流の計算, 昭和53年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-28, 1978.
- 21) 和田 明, 角湯正剛: 瀬戸内海における流況の数値シミュレーション, 第22回海岸工学講演会論文集, 1975, pp. 161~166.
- 22) Masamori Miyazaki, Takeo Ueno and Sanae Unoki: Theoretical Investigation of Typhoon Surge along the Japanese Coast, The Oceanographical Magazine, Vol. 13, 1962, pp. 51~75およびpp. 103~117.
- 23) 岩佐義朗, 井上和也, 足立敏之: 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学防災研究所年報, 第21号 B-2, 1978, pp. 293~305.
- 24) 岩佐義朗, 井上和也, 水鳥雅文: 氾濫水の水理の数値解析法, 京都大学防災研究所年報, 第23号, 1980 (印刷中)
- 25) 前掲7) p. 265.
- 26) 岩佐義朗, 松尾直規, 翁 朝夫: 貯水池水理の数値解析法とその適用について, 京都大学防災研究所年報, 第22号 B-2, 1979, pp. 341~354.
- 27) 松尾直規, 岩佐義朗: 貯水池における水理特性の変化とその予測, 第24回水理講演会論文集, 1980, pp. 251~257.