

開水路流れのモデリング法

岩 佐 義 朗

1. まえがき

長い間、土木技術者が主要な対象としてきた開水路水理学の課題は河川や水路の流れおよびそれに関連するものであり、いわゆる一次元解析法によって取り扱われうるものであった。その理由には多くのものがあるが、水理学の理論と実際をリードする先進諸国や地域では、一次元解析法が水理学を代表するという課題が中心であったからである。現在でもなお、この方法論の展開によるものが多いことは周知の事実であろう。

一方、水理学の研究課題も空間的、時間的に拡がりをみせるとともに、流れの運動のみならず、流れを構成する流体そのものの性質、水理現象のスケールの大小などすべての側面で多種多様のものを取り扱わなければならなくなった。たとえば、単に河川の等流、不等流、不定流といった古典的な研究課題から、次第に汚濁物質の輸送・混合、河口付近の淡水と塩水との複雑な相互挙動、さらには海岸、海洋、湖沼、貯水池など空間的スケールが極めて重要な意義をもつ研究課題への発展へとつながっている。このような変遷によって、現象のスケールの大小といった規模だけでなく、流れの二次元性、三次元性といった空間的拡がりの考慮が必要となり、また流れも流体の物理的、力学的性質が等質なものから、流れのなかでの流体の性質の不等質性、あるいは混相流といった概念の導入が望まれるようになった。

このような水理学の対象課題、範囲の多様性、複雑性によって用うべき水理解析の方法論も変わってくるようになった。すなわち従来の理論的解析法のように、現象を記述する数学モデルを巧妙な方法によって解くという華麗な応用数学、応用力学的方法論が適用されなくなり、対象課題に対し与えられた初期条件、境界条件のもとで数値的に解くといういわゆる数値解析法が一般的となってきたことである。そのため、極めて多くの労力と経費が新しく必要となったが、幸いにして電子計算機の発達とその普及はわれわれにとって好都合であった。

電子計算機の利用によって、一応われわれの対象とする水理現象の解析とそれにもとづく成果の水工学への応用が可能になると、別に新しい課題が登場してくることになる。その一つは、数値解析のアルゴリズムに関する多くの問題であり、その重要性はいままでもないが、細部に至ると、ノウハウに関連することになり、なかなか明らかにされ得ない性質のものである。いま一つは、解析に用う数学モデルである。電子計算機はみずから何も創造しない、ただ命令されたことをそのまま実行するだけである。したがって、われわれが実際の問題に対処してできるだけ現実の姿に近い解を得たいのであれば、まず電子計算機に組み込む数学モデルが現実の姿を再現しうるようなものでなければならない。これは数学モデルが複雑なものでなければならないということではなく、どのような形にせよ、とにかく現実の姿を再現しうるようなものであればよいということである。

このように考えてくると、われわれにとって解析に用いる数学モデルの作成はいかに重要であるかが理解される。ここでは、以上に述べた開水路水理学の発展の過程を頭に入れて、その数学モデルの作成法について論ずることにする。しかし、モデル作成法といっても取り扱うべき流体の性質、流体の運動、さらには対象範囲によって極めて多方面にまたがるものがある。したがって、ここでは流体力学の原理、すな

われ質量保存則、運動量保存則、熱力学第一法則を用いて誘導されるもののなかで、基本的なものに限って論ずることにする。あるいは具体的な応用例について述べると、従来から慣用されている河道の流れを対象とした Saint Venant 方程式による一次元流れ、比較的浅い湖沼や湾内の流れのような平面流を対象とした二次元流れ、さらには三次元的運動を取り扱う三次元流れがあり、また別の観点からすれば、河道や水路における輸送、貯水池、湖沼あるいは湾における滞留、ならびに氾濫などを対象とする拡がりなども分類されるものである。

2. モデリングのための基本事項

水理現象のみならずわれわれの対象とする現象を広くかつ一般的に取り扱うためには、現象をできるだけ忠実に再現するためのモデルの作成が必要であり、われわれが現象を認識する段階から、それを論理的に取り扱うまでの過程を手落ちなく、かつ無駄なくすすめていかなければならない。また同時に、その対象である流体そのものや流れについて研究すべき分野の全側面からの十分な考察も必要である。以下、そのための基本事項について要約してみよう。

(1) モデリングの手順

われわれの五感で感じうる水理現象をすべての人が納得しうる形としての数学モデルへの変換、すなわちモデリングの過程は、われわれが個人の体験、経験として独自に作り上げられてきたものであり、各人の気質や志向によって、いろいろに分類されるものである。これは、たとえ方法論が最新の科学技術的研究の成果に裏づけられたものになっても、若干残るものであり、ものの見方に対する研究者、技術者のフィロソフィーの問題に帰せられるものであり、いわゆるスクール(学派)となる。

しかし、問題解決のための論理的解析法やシステム解析が普及した今日では、モデリングの手順は相当程度まで統一化できるようになった。もちろん、各人によってその表現法には多くのものがあるが、一般的な手順をフロー・チャートの形にすると、図-1に示すようになる。

まず、取り扱うべき水理現象をわれわれの五感によって何らかの形で認識しなければならない。もちろん、この認識の度合は個人の素質、能力、経験などによって異なるが、とりあえず問題提起として認識する必要があることはいうまでもない。

この認識にもとづいて、水理現象をいかに言葉で表現するかがつぎの手順としてあらわれる。現象の表現をどのような形にするかどうかは別として、認識したことを並べたてることが必須条件である。並べられた記述を整理して数学モデルを組み立てる前の論理的な記述モデルに変換するのが次の段階である。この場合、水理現象に関する限り、流れをつくる流体そのものの性質(密度、圧縮性、粘性など)、流れの運動学的特徴(流体力学の原理など)、流れの場(本来の場の意味ではなく、流体運動がおこなわれるところという意味)の3側面に分類

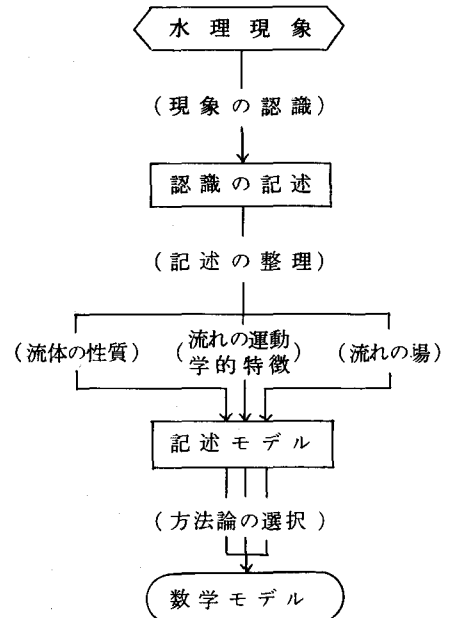


図-1 モデリングの手順

して記述を整理し、論理的表現になるようにする。この過程によって記述モデルが得られることになる。

記述モデルを上述の3側面に分類すると、数学モデルへ変換する方法論の選択が可能になり、またしたがって解析に用いる数学モデルが得られることになる。ここで述べた分類によらないものとして、運動が決定論的か確率統計論的かがある。しかしここでは、まえがきで述べたように、河川、水路、貯水池、湖沼、湾などの流れを取り扱うことにしているから、流体力学の原理を用いた決定論的立場より水理現象を表現する数学モデルを得ることになる。

(2) 流体の性質

開水路流れの水理で取り扱われる流体は例外なく水であり、それは連続体としての水である。水の性質は密度、圧縮性、粘性によって代表される。

i. 密度：水理学で対象となる水は化学的なものでなく、連続性にもとづくものであり、その密度 ρ は水温 T と水に含まれる物質の濃度 c の関数、すなわち

$$\rho = f(T, c)$$

(1)

である。図-2は、水温および濃度の関数としての密度である。この図からわかるように、密度に関係する主要要素は水温であることがわかり、濁度はふうには敏感に関係しない。

水理解析において水温や濁度の関数としての密度を考慮しなければならない問題は少ない。開水路の不等流、不定流、貯水池の流量制御、湖や湾における流れなどでは全く考える必要もなく、密度は一定としてよい。ところが、浮流砂、淡・塩水の混合、物質輸送、熱輸送、成層流などに示される新しい水理研究課題が重要な意義をもち、中心となってくると、水のなかの輸送物質、汚濁物質、熱などの存在が重要な項目となり、またしたがって、水の密度も式(1)に示すように水温や濃度の関数として取り扱われなければならない。

しかし図-2から理解されるように、貯水池の水温成層にみられるような水温差20℃の場合でも、密度差は1%にも達しない。まして、濁度の水の密度に及ぼす影響は極めて小さいことがみられる。したがって、現在の水理計測技術や問題による精度からみて、水の密度の変化が問題となるようなことは少なく、実際の水理解析では密度は一定と考えてよく、また水の圧縮性も不必要である。すなわち、水温や濁度の変化は水の密度に直接的に影響を及ぼすのではなく、むしろ後述するように、収支則において取り扱われるものである。

ii. 粘性：水が粘性をもち、いわゆる Newton 流体と分類されることはいうまでもなく、また水理解析にあらわれる問題の性質により非 Newton 流体としてモデル化される場合がある。水の運動により、せん断力とひずみとの関係から水がどのように分類されても、開水路の流れでは粘性そのものが大きく取

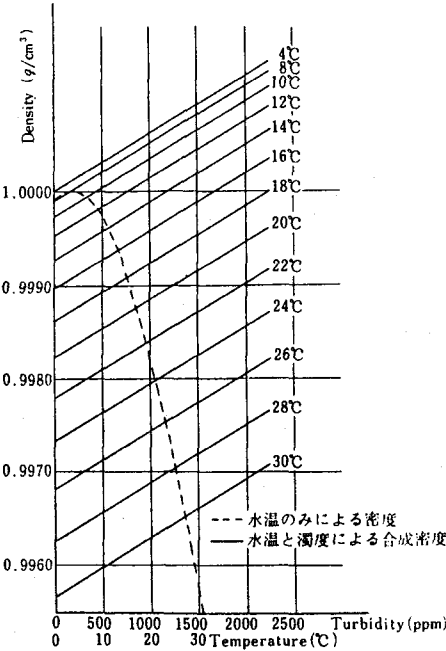


図-2 水の密度

り上げられることはない。

せん断力が大きな要素となるところは、速度勾配の極めて大きいところ、すなわち境界面近傍であり、具体的には水路境界面、成層境界面などである。その大きさの表示は慣用されているもの（たとえば Manning 公式など）で代用されており、その研究は恐らく永久につづく課題である。

(3) 流れの運動学的特徴

開水路流れの運動をどのような立場、観点に立って認識するかということである。

まず、運動が単相流であるか混相流であるかの観点がある。混相流の定義は、わが国では外国のそれと異なり、相（気相、液相、固相）および成分のそれぞれが単一でないものならびに両者が単一でないものを総称している。また、混相流のなかに二成層流（しばしば密度流といわれている）や多成層流（不均一流ともいわれる）がある。

一方、広く混相流といわれている浮流砂を含む流れ、物質輸送の流れでは、水と成分との関係をどうみるかにより、Newton 流、非 Newton 流、水のなかの輸送物質塊、その集りというように分類される。しかし、水理解析を比較的大きな空間的スケールでみる限り、これらのものも Newton 流とみなされる。

以上に示すように、水の流れはいろいろの観点からその運動学的特徴を示すことができるが、それらの記述の根底に横たわることは流体力学の原理によって水理解析がすすめられるという点である。もちろん、多くの方法論によって運動学や力学的な特徴を説明することができるが、ここで取り扱う種類や範囲のものでは流体力学のモデルによって表わされるということである。したがって、方法論の選択も流体力学の原理の応用ということが自動的に決まることになる。これ以外の方法論が必要となる水理解析の課題はむしろ特殊なものといえることができる。

(4) 流れの場合

開水路の流れが河川や水路における流れ、とくにその等流、不等流、不定流によって代表されている頃には、水理解析は一次元解析法によって代表され、今日に至ってきた。対象課題が混相流や物質輸送という現代的なものになっても同様である。これは、流下方向における流れの変化を知ろうとするものであり、流水断面内では平均値が取り扱われる。ジェットやブルームなどの現代的課題もそれ自体の運動を除いては、多くは一次元的なものとして取り扱われている。

水路のなかの一次元流れが拡張されたのは、河口付近の淡水、塩水の相互挙動を対象とする二成層流、貯水池での夏期水温分布を知る温度成層流、その他濃度成層流など、深さ方向に流体の性質や流れの運動学的特徴が変る問題を取り扱うようになってからである。これらは密度流、成層流などいろいろな言葉でいわれることもあるが、要は流れ全体を一つとみなさず、いくつかの層にわけて取り扱い、あわせて流れ全体の挙動とするものである。

平面的な流れ、すなわち二次元的な流れの挙動を知ることは、洪水氾濫の解析、比較的小い湖沼、湾内の流れの水理解析にあらわれる。いずれの例においても、水深が浅く、深さ方向の流体の性質、流れの運動学的特徴の変化を考える必要はなく、この方向での平均化操作がすすめられる。一方、平面的な二次元流れであるから、汚濁物質の湖沼、湾内での混合拡散などを取り扱う場合にはその拡がりの領域をきめておく必要がある。

さらに水深が大きくなって、深い湖沼、湾、海洋などでの流れを解析するときには、深さ方向の流体の性質、流れの運動学的特徴の変化を含めなければならない。したがって、水理解析は平面的な拡がり領域とともに水深方向にもいくつかの層に分割してすすめられなければならないことになる。

以上に示すように、開水路流れの場の特徴、あるいは問題を輸送、貯留、拡がりといった面のいずれより取り扱うかによって、解析に用いられる数学モデルはいろいろ変ってくる。以後、これらを中心に数学モデルの作成法について説明する。

3. 数学モデルの作成

(1) 水理解析の基礎概念とそのモデル

水理解析の基礎概念は流体力学の原理であって、熱をとり扱う場合も含め、

- i. 質量保存則：流体システムの質量は常に保存される。
- ii. 運動量保存則：流体に働く全外力のベクトル和は流体の運動量ベクトルの時間的变化に等しい。
- iii. 熱保存則：流体システムに加えられた熱とシステムのなす仕事との差はシステムの最初と最後の状態によってきまる。

というものである。その他の原理もあるが、ここでは省略する。

これらの基礎概念を水理解析に用いられる数学モデルへ変換しなければならない。このための表現法として、システム解析法 (Lagrange 的立場) とコントロール・ボリューム解析法 (Euler 的立場) との二つがあるが、ふつうには後者の解析法が用いられる。なお、両者の数学モデルの間に変換関係があることはいうまでもない。

ところが、上述の基礎概念を示した基礎数学モデルはそのまま水理解析に耐えうるものではない。事実、2. で述べたように、現実の水理現象のもつ特徴を抽出し、基礎モデルを単純化し、具体的な水理解析に使用されうるものに変換しなければならない。質量保存則は非圧縮性流体としての水の連続式と濃度収支則とに分けられ、また熱保存則は、機械的部分に比し熱の部分が大きく、水理解析では後者のみが用いられる。すなわち、熱収支則と単純化される。

したがって、基礎数学モデルは次の5つ¹⁾となる。

i. 水の連続式：

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (2)$$

ii. 濃度収支則：

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{c} + \nabla \cdot (\bar{c} \bar{V}') = 0 \quad (3)$$

iii. 熱収支則：

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{T} + \nabla \cdot (\bar{T} \bar{V}') = \bar{H} \quad (4)$$

iv. 運動量保存則：

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) (\rho \bar{V}) = -\nabla (\rho \bar{Q}) - \nabla \bar{p} + \nabla [\bar{\tau} - \rho \bar{V}' \bar{V}'] \quad (5)$$

v. 機械的エネルギー保存則 (近似式)：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \bar{V}^2}{2} \right) + (\bar{V} \cdot \nabla) \left(\frac{\rho \bar{V}^2}{2} + \frac{\rho \bar{V}'^2}{2} \right) + \nabla \cdot [\bar{V} \cdot \rho \bar{V}' \bar{V}'] = \\ -(\bar{V} \cdot \nabla) \rho \bar{Q} - (\bar{V} \cdot \nabla) \bar{p} + \bar{V} \cdot [\nabla \bar{\tau}] \end{aligned} \quad (6)$$

(2)～(6)式は基礎モデルに若干の条件を導入し、さらにわれわれの対象とするものは、たとえそれが時間的に変るものであっても、平均流を対象とするものであることから、時間的な平均操作を Reynoldsの方法によって行なった結果を示したものである。

(2) 水理解析のためのモデルの条件

上述の(2)～(6)式という数学モデルは、空間内のある一点 (x, y, z) においてある時間 t に成立するものである。与えられた各種の条件のもとで、これらの式を解析すれば、対象とする水理現象の解は得られる。しかし実際には、 (x, y, z, t) において求められる解をあわせたものを必要とすることは少ない。

事実、河川や水路の流れに関する一次元解析法は、水路断面内における流れの挙動の変化よりも、流れにつれてどう変化していくかという点に重点が置かれた解析法である。また、水深の深い貯水池での夏期水温成層は、流下方向ではなく深さ方向にのみ水温が変化することが知られている。この現象の解析では、水平層に切り、各層内で平均操作をしても差し支えない。ところが、洪水時およびその後におこる貯水池濁水化現象では、浮流物質の大きさが極めて小さい(数 μ 程度)こともあり、塊りをなして流下してくる。この場合には、水平層で切ったものでは解析が十分に行ない得なくなる。

一方、平面的な拡がりをもつ流れの水理解析も、具体的にはメッシュを作って行なわれるが、メッシュの大きさをどの程度にすれば、現象の再現性がうまくいくかという問題がおこる。もちろん、数値解析上の安定条件もさることながら、ここでいうのは水理学上のものである。すなわち、換言すれば、流体力学の基礎原理が満足される活動範囲としてのコントロール・ボリュームの大きさの決め方に関係するということである。

いずれにせよ、空間内のある一点である時刻に成立する基礎モデルをある程度の大きさの空間にまで拡張するのであるから、(2)～(6)式をその空間について平均化操作をする必要があり、そのための条件をまず取り扱わなければならない。

- i. コントロール・ボリューム、コントロール・サーフェス：図-3に示す六面体をコントロール・ボリュームにとると、次の関係が得られる。

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y = y_{j+1} - y_j,$$

$$\Delta z = z_{n+1} - z_n, \quad dV = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z,$$

$$dS_x = \Delta y \cdot \Delta z, \quad dS_y = \Delta z \cdot \Delta x,$$

$$dS_z = \Delta x \cdot \Delta y$$

- ii. コントロール・サーフェスでの幾何学的条件：

$ADHE(x_i)$ 面

$$\cos(x, n)_{x_i} = -1 \quad \cos(y, n)_{x_i} = 0 \quad \cos(z, n)_{x_i} = 0$$

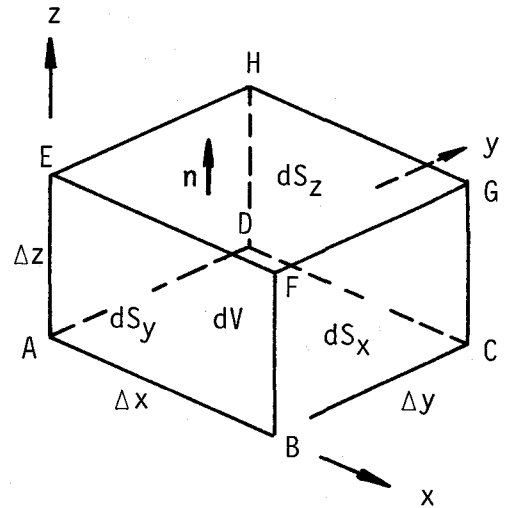


図-3 コントロール・ボリューム

$B CGF(x_{i+1})$ 面

$$\cos(x, n)_{x_{i+1}} = +1 \quad \cos(y, n)_{x_{i+1}} = 0 \quad \cos(z, n)_{x_{i+1}} = 0$$

$ABFE(y_j)$ 面

$$\cos(x, n)_{y_j} = 0 \quad \cos(y, n)_{y_j} = -1 \quad \cos(z, n)_{y_j} = 0$$

$DCGH(y_{j+1})$ 面

$$\cos(x, n)_{y_{j+1}} = 0 \quad \cos(y, n)_{y_{j+1}} = +1 \quad \cos(z, n)_{y_{j+1}} = 0$$

$ABCD(z_n)$ 面

$$\cos(x, n)_{z_n} = 0 \quad \cos(y, n)_{z_n} = 0 \quad \cos(z, n)_{z_n} = -1$$

$EFGH(z_{n+1})$ 面

$$\cos(x, n)_{z_{n+1}} = 0 \quad \cos(y, n)_{z_{n+1}} = 0 \quad \cos(z, n)_{z_{n+1}} = +1$$

ここに、 n はコントロール・サーフェスから外向きに立てた単位法線ベクトルである。

もし、 z 軸 (鉛直上向き) 上で水面と底とを z_s, z_b とすれば、

水面²⁾ :

$$\cos(x, n)_{z_s} \doteq -\frac{\partial z_s}{\partial x}, \quad \cos(y, n)_{z_s} \doteq -\frac{\partial z_s}{\partial y}, \quad \cos(z, n)_{z_s} = +1$$

底面³⁾ :

$$\cos(x, n)_{z_b} \doteq +\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad \cos(y, n)_{z_b} \doteq +\frac{\partial z_b}{\partial y}, \quad \cos(z, n)_{z_b} = -1$$

である。

iii. 水面および底面における運動学的条件^{2), 3)} :

水面

$$\frac{dz_s}{dt} = \bar{w}_s = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{v}_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (7)$$

底面 (移動床)

$$\frac{dz_b}{dt} = \bar{w}_b = \frac{\partial z_b}{\partial t} + \bar{u}_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (8)$$

底面 (固定床)

$$\bar{u}_b \cos_b(x, n) + \bar{v}_b \cos_b(y, n) + \bar{w}_b \cos_b(z, n) = q_{nb} \quad (9)$$

ここに、 q_{nb} は固定境界面より直角に出る流れの流速である。

(3) 連続条件式

連続条件式は図-4の手順で求められる。具体的には、次のようである。

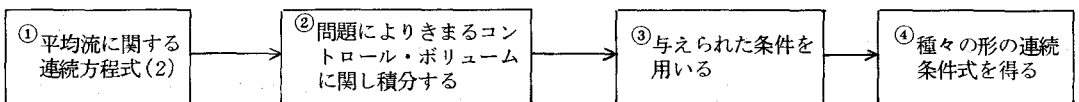


図-4 連続条件式の誘導

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \int \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dV = \int [\bar{u} \cos(x, n) + \bar{v} \cos(y, n) + \bar{w} \cos(z, n)] dS = 0$$

$$\textcircled{3} \quad |\bar{u}(z_{n+1} - z_n) \cdot \Delta y|_{x_i}^{x_{i+1}} + |\bar{v}(z_{n+1} - z_n) \cdot \Delta x|_{y_j}^{y_{j+1}} + |\bar{w} \cdot \Delta x \cdot \Delta y|_{z_n}^{z_{n+1}} = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x} |\bar{u}(z_{n+1} - z_n)|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |\bar{v}(z_{n+1} - z_n)|_{y_j}^{y_{j+1}} + |\bar{w}|_{z_n}^{z_{n+1}} = 0 \quad (10)$$

ここで流量フラックス, $M_n = \bar{u}(z_{n+1} - z_n)$, $N_n = \bar{v}(z_{n+1} - z_n)$ を導入すると, 上式は

$$\frac{1}{\Delta x} |M_n|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |N_n|_{y_j}^{y_{j+1}} + |\bar{w}|_{z_n}^{z_{n+1}} = 0 \quad (11)$$

$x_{i+1} \rightarrow x_i$, $y_{j+1} \rightarrow y_j$, $z_{n+1} \rightarrow z_n$ とすれば, 上式は微分方程式として表わされる。

(4) 濃度収支方程式

まったく同様な方法を(3)式に適用すればよいのであって, 結果だけを示すと, 次のようである。

$$\begin{aligned} (z_{n+1} - z_n) \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} |M_n \bar{c}|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |N_n \bar{c}|_{y_j}^{y_{j+1}} + |\bar{w} \bar{c}|_{z_n}^{z_{n+1}} = \\ - \frac{1}{\Delta x} |\bar{u}' \bar{c}'|_{x_i}^{x_{i+1}} (z_{n+1} - z_n) - \frac{1}{\Delta y} |\bar{v}' \bar{c}'|_{y_j}^{y_{j+1}} (z_{n+1} - z_n) - |\bar{w}' \bar{c}'|_{z_n}^{z_{n+1}} \end{aligned} \quad (12)$$

微分方程式としての表現も同様に得られる。

(5) 水温収支方程式

(11)式に熱発生項が加わるのみである。

(6) 運動量方程式

(5)式を図-4に示す手順で計算すれば運動量方程式が得られる。しかし, 運動量はベクトルであるので, この式は x, y, z の各方向の分値に対するものとなる。ここでは, x 方向の分値に関するものだけを示しておく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{z_{n+1} - z_n} \frac{1}{\Delta x} |\bar{u} \bar{u}(z_{n+1} - z_n)|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{z_{n+1} - z_n} \frac{1}{\Delta y} |\bar{u} \bar{v}(z_{n+1} - z_n)|_{y_j}^{y_{j+1}} \\ + \frac{1}{z_{n+1} - z_n} |\bar{w} \bar{u}|_{z_n}^{z_{n+1}} = - \frac{1}{z_{n+1} - z_n} \frac{1}{\Delta x} |(\bar{Q} + \frac{\bar{p}}{\rho})(z_{n+1} - z_n)|_{x_i}^{x_{i+1}} \\ + \frac{1}{z_{n+1} - z_n} \frac{1}{\Delta x} |(\frac{\bar{\sigma}_x}{\rho} - \bar{u}' \bar{u}') (z_{n+1} - z_n)|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{z_{n+1} - z_n} \frac{1}{\Delta y} |(\frac{\bar{\tau}_{xy}}{\rho} \\ - \bar{u}' \bar{v}') (z_{n+1} - z_n)|_{y_j}^{y_{j+1}} + \frac{1}{z_{n+1} - z_n} |(\frac{\bar{\tau}_{xy}}{\rho} - \bar{w}' \bar{u}')|_{z_n}^{z_{n+1}} \\ \vdots \end{aligned} \quad (13)$$

流量フラックス M_n, N_n を用いると, 上式は簡単化される。

4. 一次元解析法における数学モデル

3.で誘導した数学モデルは, 空間内の一点である瞬間に成立するものを流体の性質, 流れの運動学的特徴, 流れの場などよりみられる一様性が保ちうる範囲(これをコントロール・ボリュームとした)内に拡張

して示したものであった。このコントロール・ボリューム内で流れのもつさまの性質は平均化されたものとなっていることも理解されよう。

ところで、まえがきでも述べたように、河川や水路の流れは管路のそれと同様に、流下方向の流れの変化が中心となる一次元流れである。したがって、そのコントロール・ボリュームは Δx だけへだてた上・下流 2 断面間の流れの全容積、あるいは、水面、固定境界壁、上・下流 2 断面間の容積となる。

(1) 境界での条件

流れを一次元解析法によって取り扱うと、そのコントロール・ボリュームが変わるから、境界での各種の条件も変えなければならない。

まず、コントロール・ボリュームとコントロール・サーフェスについて示すと、図-5 を参照して次のようになる。

$$dV = \Delta x \cdot dA, \quad dA = \sum \lim (\Delta y \cdot \Delta z)$$

$$dA_b = \sum \lim (\Delta z \cdot \Delta x \sin \alpha + \Delta x \cdot \Delta y \cos \alpha) = s \cdot \Delta x$$

ここに s : 潤辺, α : 側・底面の水平となす角である。また、水面ならびに底面における条件は前述のようであるが、固定床であれば z_b の変化はない。

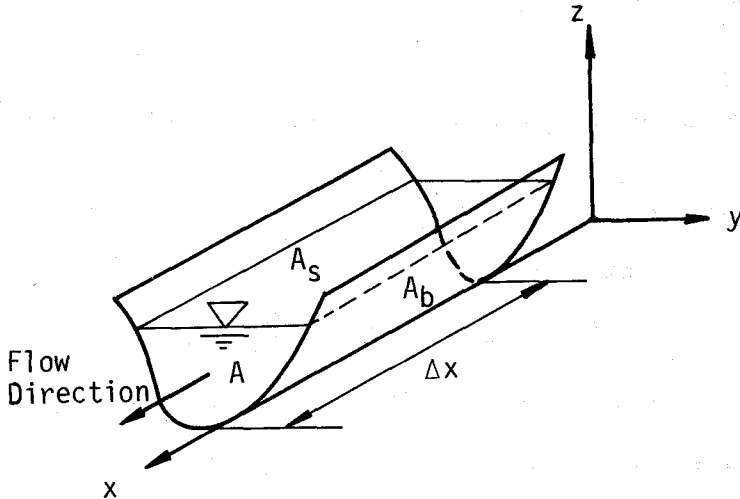


図-5 開水路の流れのコントロール・ボリューム

(2) 数学モデル

上述の条件のもとで、すでに得られている数学モデルを変形すれば一次元解析法におけるものが得られる。

i. 連続条件式

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0 \quad (14)$$

ここに、 A : 流水断面積, Q : 流量, q : 単位長さ当りの流出流量 (流入は負)

ii. 濃度収支方程式¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \bar{c} dA + \frac{\partial}{\partial x} \int \bar{c} \bar{u} dA + (1+K) c q + \frac{\partial}{\partial x} \int \bar{c}' \bar{u}' dA = 0 \quad (15)$$

あるいは

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{c}{A} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + (1+K)q \right] = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A D_c \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (16)$$

ここに、

$$K = \frac{1}{c q} \int K' \bar{c} q_{nb} ds$$

$$K' \bar{c} q_{nb} = (\bar{c' u'})_b \cos_b(x, n) + (\bar{c' v'})_b \cos_b(y, n) + (\bar{c' w'})_b \cos_b(z, n)$$

また、 v ：断面平均流速、 c ：断面平均濃度、 D_c ：濃度に関する分散係数である。

iii. 水温収支方程式

濃度収支方程式に熱の発生に関する項 H が付け加ったものである。

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{A} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + (1+K)q \right] = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A D_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + H \quad (17)$$

ここに、 H ：単位質量当りの熱発生量、 D_t ：温度に関する分散係数である。

これらの両式において、 K' や K が1に比べて極めて小さいと、ふつうに用いられる移流分散方程式になることはいうまでもない。

iv. 運動量方程式⁴⁾

Boussinesqの運動量係数 β （一定と仮定）およびJaegerの圧力分布係数 λ' （一定と仮定）を導入するとともに、

$$\int \bar{u}_s \frac{\partial h}{\partial t} dz_s - v_s \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{v_b}{v} q = 0$$

を用いると、慣用の運動量方程式が得られる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda' A h_G \cos \theta) = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \quad (18)$$

である。なお、水路が一様であれば、左辺の第3項は

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\lambda' A h_G \cos \theta) = \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \quad (19)$$

である。

v. 機械的エネルギー方程式⁴⁾

運動量はベクトルであるから、運動量方程式は各座標方向について与えられ、全運動量変化はそれらを合成する必要がある。ところが、流れが一方向的であるとみなしうる場合に、その方向の分値のみで代表したのが一次元解析法である。一方向流れであっても、運動量保存則から誘導される機械的エネルギー保存則を用いたエネルギー方程式の方がより詳細な流れの挙動を表わすことができる。この方法は図-6に示すよ

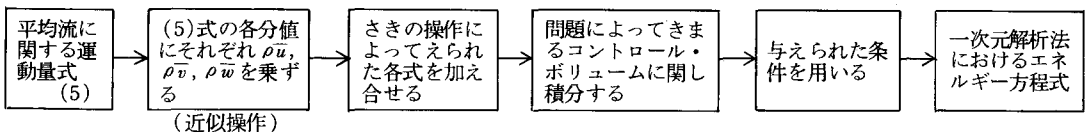


図-6 エネルギー方程式の誘導（近似）

うな手順である。なお、この誘導では変動量の2次相関までしか含まれていない。

その結果を示すと、次のようである。ここに、Coriolisのエネルギー係数 α 、Jaegerの圧力分布係数 λ は一定とし、また

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{v_b^2}{v^2} q = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda_b q = 0$$

としている。

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho g R} \frac{v_b}{v} \quad (20)$$

ここで求められた運動量方程式(18)およびエネルギー方程式(20)は誘導法において異なるものがあるが、結果において類似のものとなり、流れの一方向的な挙動を解析する限りは、さらに α, β, λ も1に近い一定値と考えられ、原理はともかくとし、形式的には同一となってくる。

5. 平面流れに対する数学モデル

ここでいう平面流れとは、洪水の堤内地への氾濫、浅い湖沼や湾内の流れのように、深さ方向の流体性質、流れの特徴の変化が少なく、一層流としてのモデル化が可能なのをいう。

(1) 境界での条件

この種の問題では、コントロール・ボリュームは図-7のように、深さ方向には水深 h (=水位 z_s - 地盤高 z_b)、平面的には $\Delta x, \Delta y$ で分割された六面体となる。

$$dV = h \cdot \Delta x \cdot \Delta y, \quad dS_x = h \cdot \Delta y, \quad dS_y = h \cdot \Delta x$$

$$dh_z = \Delta x \cdot \Delta y$$

また、水面および地盤において成立する幾何学的条件や運動学的条件は、3・(2)で述べたものがそのまま用いられる。

(2) 数学モデル

u, v を x, y 方向の水深全体にわたって平均した流速成分、 $M = uh$ 、 $N = vh$ をそれぞれの方向の流量フラックス、 $h = z_s - z_b$ を水深、 H を水位とすると、連続条件式や運動量方程式は次の数学モデルによって表わされる。なお、濃度や水温収支の式は同型であるので、ここでは省略した。別の文献^{5,6)}を参照されたい。

i. 連続条件式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} [M]_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} [N]_{y_j}^{y_{j+1}} = 0 \quad (21)$$

あるいは

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

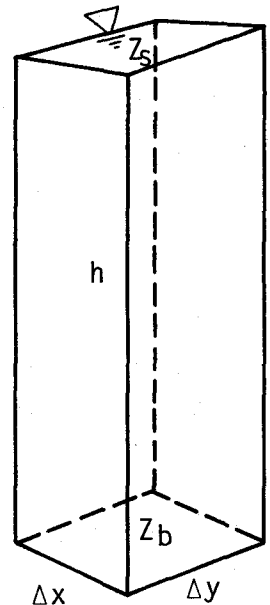


図-7 平面流れのコントロール・ボリューム

ii. x 方向の運動量方程式

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} |uM|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |vM|_{y_j}^{y_{j+1}} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_{xb}}{\rho} \quad (23)$$

あるいは

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uM) + \frac{\partial}{\partial y} (vM) = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_{xb}}{\rho} \quad (24)$$

iii. y 方向の運動量方程式

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} |uN|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta y} |vN|_{y_j}^{y_{j+1}} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_{yb}}{\rho} \quad (25)$$

あるいは

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uN) + \frac{\partial}{\partial y} (vN) = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_{yb}}{\rho} \quad (26)$$

なお、 τ_{xb} , τ_{yb} で示した、 x , y 方向の底面せん断力は Manning 公式を用いて次のように示すこともできる。

$$\frac{\tau_{xb}}{\rho}, \frac{\tau_{yb}}{\rho} = \left(gn^2 \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}} \right) (u, v) \quad (27)$$

6. 数学モデルの応用とあとがき

これまでに述べてきたことを要約すれば、以下のようである。

(1) われわれが取り扱う開水路の水理現象の大規模性、複雑多様性の増加と電子計算機の使用の日常性によって、水理解析法は水理模型実験よりも数値解析による方が好都合であり、再現性、柔軟性、確実性などの面においてもすぐれている。

(2) このような時代になってくると、解析の基礎となる数学モデルおよび数値解析のアルゴリズムの重要性や意義は極めて大きいものがあり、ここでは前者の数学モデルについての作成法やその境界環境条件に対応したいくつかのものを説明した。

(3) とくに、モデル作成に先立ち、流れの水理現象を流体の性質、流れの運動学的特徴および流れの場より分類、整理し、水理解析に用うべき方法論を明らかにしなければならないことを示すとともに、数値解析における数学的問題は別として、水理現象の空間的一様性が保たれる領域にわたって流体力学の基礎原理を適用すべきことを述べた。

(4) その結果、河川や水路の流れのように、一方向的なものは慣用されている一次元解析法の各種の式が数学モデルとして適用されることを示した。ただし、濃度(物質)や水温(熱)の輸送に関する多くの問題のように、基本となる水理現象がモデル作成法で用いた事実と必ずしも一致しない場合には、得られたモデルの精度は、当然のことながら、低下することがある。

(5) 山間部の河川に造られる貯水池は、貯水池水理の点で河川型、貯留型に分類されようが、そこでの流れはほぼ一方向的である。しかし、貯水池よりの選択取水、貯水池での濁水長期化、富栄養化などに関する水理現象を取り扱う場合には、方法論を変える必要がある。しかし、その数学モデルはここでは示さなかった。別の文献^{7,8)}を参照されたい。

(6) 成層型貯水池では、夏期水温成層が発達する。水温成層はほぼ水平であるので、水温予測、選択取水などの水理解析では貯水池を水平に分割した層の積み上げより成るコントロール・ボリュームに対する

数学モデルで十分である。その種のモデルはすでに開発されている。^{9), 10)}

(7) 一方、洪水時およびその直後に流入する濁水の濁度分布は塊状をなすこともあり、層状分布のモデル化では十分に解析され得ない。したがって、水平層に区切るとともに流れ方向にも分割したブロックの積み重ねによって解析する必要がある。その分割法はまだ十分明らかにされえないが、現在程度の解析では水深方向に2 m、水平方向に500~1000 mでよいとされている。しかし、特殊の問題ではその限りではない。^{7), 8)}

(8) 貯水池に流入する各種栄養塩による富栄養化現象も濁質物質の解析と同様にすすめられる。しかし、資料のみならず数学モデルの基本となる現象も十分でないので、今後の研究課題といえる。¹¹⁾

(9) 堤防の決潰による氾濫水の堤内地への侵入は、ここで示した平面流れに対する数学モデルを適用して解析される。その実例はすでにあり、結果は当時の状況や現在のそれが変わっているため、再現性の定量的比較はむずかしいが、少なくとも定性的には十分説明されうるものである。さらに最近では、河道内の洪水と堤内地への氾濫水との両者の挙動を組み合わせ、極めて実際的かつ重要な結果も得られている。³⁾

(10) 同様な平面流れの解析が、閉鎖水域(湖沼や湾内の流れなど)におけるものに適用され、また水理学的に必要な情報、成果を与えている。とくに、閉鎖水域では、流れにおよぼす風の影響が大きく、風向と風速によって、流れがいろいろの挙動を示すことが知られるようになり、実際の問題にも応用されている。⁶⁾

(11) したがって、このような閉鎖水域での汚濁物質の混合拡散などにも上述の水理的特徴が影響し、なかなか複雑な挙動を示すことが多い。

(12) 多層・平面流れの数学モデルとその成果、あるいは極端な三次元モデルの成果についてはここでは言及しなかった。多くの場合、あまりにも多種多様の境界環境条件のもとでの実例が多いため、なかなか一般化、抽象化しにくいところがあるためであろう。

(13) 以上は、スケールの比較的大きい、しかも複雑多様な条件のもとでおこる水理現象の数値解析の基礎となる数学モデルの作成法やその結果、またさらにはその実際への応用を要約して述べた。しかし、抵抗などの基本的な水理課題は依然として残されたままであり、ごく単純化された物理現象から得られた成果をそのまま適用しているに過ぎない。この課題は水理学での永久的なものとして残されるであろうが、さらに研究すべきものである。

参考文献

1. Iwasa, Y.: Mathematical aspect of one-dimensional equations of unsteady flows in open channels, Proc. International Symposium on unsteady flow in open channels, Newcastle-upon-Tyne, IAHR-BHRA, Apr. 1976.
2. Iwasa, Y.: Lecture notes on hydrodynamic aspects of one-dimensional method in hydraulic analysis, Hydraulics Lab., Kyoto University, Kyoto, May 1965.
3. 岩佐義朗, 井上和也: 氾濫の水理の数値解析モデル, 第16回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集 44, 1979.
4. 岩佐義朗: 水理学の解析法, 石原藤次郎編 水工水理学, 丸善, 東京, 1972.
5. 岩佐義朗, 井上和也, 足立敏之: 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学防災研究所年報 21-B, 1978.
6. 岩佐義朗, 井上和也, 磯久礼志, 村田直人: 琵琶湖南湖における湖流と滞留・拡散特性に関する数値

解析, 第25回海岸工学講演会論文集, 1978.

7. 岩佐義朗: ダム貯水池における水理特性, 日本河川水質年鑑, 研究編, 1977.
8. 岩佐義朗, 松尾直規, 井上素行: 貯水池における濁度解析について, 京都大学防災研究所年報 21-B, 1978.
9. Huber, W.C., Harleman, D. R. F. and Ryan, R. J.: Temperature Prediction in Stratified reservoirs, Jour. Hydraulics Division HY4, Proc. ASCE, 1972.
10. 安芸周一, 白砂孝夫: 貯水池流動形態のシミュレーション解析(その1) 発電専用貯水池の流動形態, 発電水力 134, 1975.
11. 岩佐義朗, 松尾直規, 仏原 肇: 貯水池水理モデルによる富栄養化のシミュレーション, 第34回 土木学会年次学術講演会講演概要 1979.