

流砂過程のモデル化

中 川 博 次

1. はしがき

掃流砂や浮流砂の運動とそれに伴う移動床現象の特性については、すでに本研修会で幾度かとりあげられており、¹⁾それらによって「流砂過程のモデル化」という著者に与えられた命題はほとんど尽されているように思える。そこで、本論では非平衡流砂過程の体系的記述を目的とした掃流砂の stochastic model とその移動床現象への適用に関する著者らの最近の研究成果をまとめると共に、掃流砂運動の特性量を推定するためのモデルとその評価について論じる。なお、ここでは移動床砂面の変形や河床構成材料の変化等流砂の非平衡状態の出現を含めて流砂過程と考えている。

2. 流砂の非平衡性と stochastic model の意義

いま、図-1のように粗度付けした固定床に接続した移動床部を考え、接続部から距離 x の位置での流砂量 $q_B(x)$ を考える。流砂の連続式は、 y を初期河床面からの高さ、 λ_0 を空隙率とすると、次式で与えられる。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{(1 - \lambda_0)} \frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

一方、従来提案されている平衡平坦河床上での流砂量式は一般に、

$$q_{B*} \equiv q_B / \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d^3} = \phi_B(\tau_*) \quad (2)$$

で表わされる。ここに、 σ : 砂の密度 ; ρ : 流体の密度 ; g : 重力加速度 ; d : 砂粒径、また、 τ_* は無次元せん断応力で、 $\tau_* \equiv \tau_0 / \{(\sigma - \rho) g d\}$ (τ_0 : 底面せん断応力) である。したがって、

$$\frac{\partial q_B}{\partial x} = \frac{\partial q_B}{\partial \tau_0} \cdot \frac{d \tau_0}{d x} \quad (3)$$

となり、せん断応力の変化が河床変化に対応している。もし、 x の全域にわたり τ_0 が一定なら、式(3)によってこの系では河床変化は生じないことになる。しかしながら、図-1のように固定床に接続する移動床における軽微な非平衡状態での流砂の挙動を 16mm 撮影で解析した結果²⁾では、図-2に示すように流砂量は流下方向に増加し、河床低下が生じる。十分下流では平衡状態での流砂量 q_{B0} に漸近するが、それまでの区間では非平衡状態にあり、各断面での流砂量はその断面の条件だけでは決定されず、上流側の影響を受けることになる。すなわち、砂れきの慣性のために流れの変化に対する「遅れ」が現われ、式(2)の流砂量式ではこの区間での流砂の運動を的確に表わせないといえる。このようなことは、河床波の発生を線型安定理論で解析した Kennedy³⁾ その他⁴⁾ いずれの研究でも、水理量の局所変動と流砂量との間に遅れ距離を仮定しなければ、河床波の形成が説明できないことからわかる。

もちろん、流砂の応答遅れが無視しうような流下方向のスケールが大きい一般の河床変動を解析するには、平衡流砂量式を用いた式(1)が近似的に適用できるが、河床変形個所が限定されている局所洗掘や

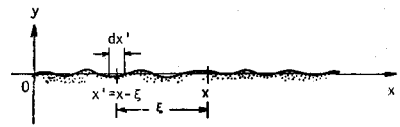


図-1 固定床に接続する移動床

河床波の問題には、流砂の非平衡性を考慮した流砂の運動方程式にもとづく解析が必要とされる。

このような流砂の水流に対する応答の遅れが流砂に固有な非平衡性を産む原因であるが、個々の砂粒運動のアンサンブル集合として移動床過程が現われるのであるから、実際の砂れきの運動を忠実に表現し、また変動を含めた現象を体系的に記述できる流砂モデルを得ることが要求される。

さて、掃流砂れきの運動のもう一つの特徴は現象が連続的でなく、粒の単位でおこる離散的かつ確率的なことであり、この意味からも掃流過程を確率過程として扱うことは現象に忠実であり、また発展性も期待できると考えられる。流砂運動の stochastic model は 1937 年に Einstein⁵⁾ によって初めて提案され、図-3 に示すように掃流砂運動の河床での長い休止時間 (rest period) と瞬間的な位置の変化 (step length) に着目し、これらを時間 t と距離 x の独立座標系での確率変数とする zig-zag model を考えた。後に 1960 年代に入って、統計的均質場における複合 Poisson 過程としての特性が Hubbel と Sayre,⁶⁾ 矢野・土屋・道上⁷⁾ によって明らかにされたが、これについては既に 1970 年の本研修会講義集に土屋によって詳細に論じられている。しかし、実際の移動床場では表-1 に示すように、統計的に非均質である場合が多く、こうした条件下での砂粒群の分散過程を記述するモデルの一般化が Yang と

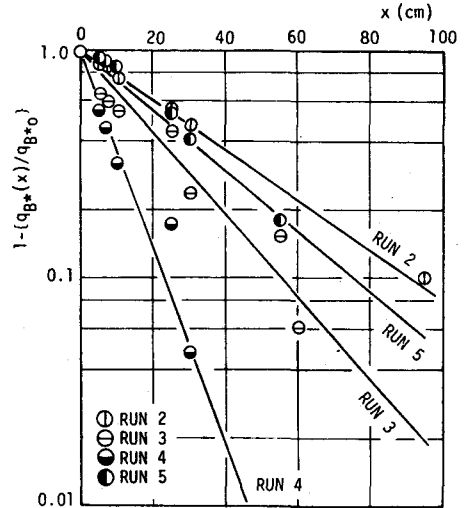


図-2 流砂量の場所的变化

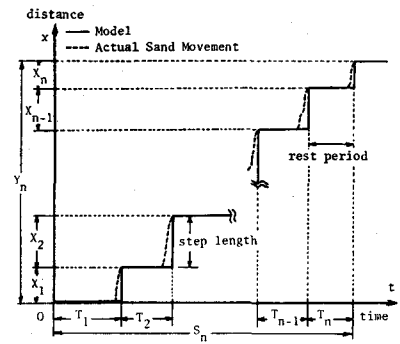


図-3 掃流砂移動のモデル (Einstein)

表-1 確率モデルの場の均質性にもとづく分類

	時間の場合	距離の場合	p_s, A	具 体 例
1	均 質	均 質	$p_s, A = \text{一定}$	平坦河床での流砂現象 (E. E. M)
2	均 質	非 均 質	$p_s = \text{一定}$ $A = \text{一定}$	河床波の発生平衡状態 (G. E. M) 強度一定の渦による局所洗掘
3	非 均 質	均 質	$p_s = p_s(t)$ $A = \text{一定}$	洪水による河床変動
4	非 均 質	非 均 質	$p_s = p_s(t)$ $A = A(x)$	河床波の発達段階, 一般の流砂現象

p_s : 平均 pick-up rate = 平均 rest period の逆数

A : 平均 step length

Sayre⁸⁾によって行われ、一方、Shen と Todorovic⁹⁾は非均質場の Poisson 過程の考え方を導入し、rest period と step length の分布についての一般化を図った。その後も stochastic model の一般化のための研究が相次いで行われているが、^{10), 11)} いずれも実際現象との対応において適用性に乏しい。

3. Stochastic model の一般化と掃流砂の分散過程¹²⁾

著者らは移動床現象は個々の砂れきの確率的挙動を素過程として形成されていることから、その構成単位である step length と rest period の分布形を与える一般的な確率モデルを示し、それらの継続量の確率的特性の検討から砂粒群の分散過程を記述する一般化された stochastic model を導くとともに、単一トレーサー法による実験でモデルの妥当性を検証している。この研究では平衡平坦河床に近い状態を対象としているが、軽微な非平衡状態では粒子の運動特性は保存されるから、非平衡状態の出現過程に対してもこのモデルは有効であり、さらに河床形状特性と rest period, step length を関連づけることによって平衡状態の河床波での砂粒の分散過程の記述にも適用できる。以下に著者らの確率モデルの理論展開を簡単に述べる。

まず、rest period の確率的特性は平衡平坦河床では流体力の変動と砂粒の河床での着き状態によって支配される。前者は統計的に均質場を形成していると考えられるが、後者では離脱角度や相対露出度の分布による砂れきの離脱待ち状態の確率が考えられる。任意の待ち状態での条件付 pick-up rate を p_s 、待ち状態の確率密度関数を $f_r(\alpha)$ 、河床砂れきの原点残留確率を $P_0(t)$ とすると、 $P_0(t)$ の時間変化を考慮して、rest period $[T]$ の確率密度関数 $f_T(t)$ は、次式で与えられる。

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt}P_0(t) = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} p_s(\alpha) \exp\{-p_s(\alpha)t\} \cdot f_r(\alpha) d\alpha \quad (4)$$

ここに、 α は実数で待ち状態を表わす変数である。式(4)によると各待ち状態ごとの条件付でみると、 $[T]$ の分布は指数分布となるが、全体としての分布は指数分布からずれることになる。離脱角度が一定な河床上の典型的な粒子に着目し、離脱待ち状態が同等であるとする、 $f_r(\alpha)$ は delta 関数となり、次式の均質場の Poisson 過程の結果と一致する。

$$f_T(t) = p_s \exp(-p_s t) \quad (5)$$

一方、step length $[X]$ の確率密度関数は河床面の凹凸、流体力の変動ともに均質な確率場となり、運動中の砂れきについての条件はほぼ均質となるので、

$$f_X(x) = \frac{1}{A} \exp(-x/A) \quad (6)$$

の指数分布を示す。しかし、河床波が形成された場合には河床形状の影響を強く受けて分布形は偏奇する。

掃流砂の移動状況は着目した砂粒群の分散過程として示されるが、上のように構成単位の確率分布が指数分布に従わない時の分散性状を知ることは比較的困難で、stochastic dispersion model の一般化を図る必要がある。分散性状を端的に示すのは、 t 時間内の移動距離 $x(t)$ (確率過程) のモーメントである。いま、 t 時間に n 回の step をとる確率 $P_n(t)$ は rest period の確率密度関数 $f_T(t)$ が与えられたとき、畳み込みの手法を用いた確率論的考察によって、

$$P_n(t) = \int_0^t \{f_T^{n*}(\tau) - f_T^{(n+1)*}(\tau)\} d\tau \quad (7)$$

となる。ここに、 f_T^{n*} は f_T の n 重畳み込みを表わす。

次に、砂粒の分散性状、すなわち時刻 0 に位置 0 にあった砂粒が時刻 t に位置 x にいる確率密度関数 $f_T(x)$ を考える。 t 時間内の生起 step 数 $N(t) = 1$ のとき、時刻 t に砂粒が $(x, x + dx)$ に存在する条件付確率は $f_T(x)dx$ 、 $N(t) = 2$ なら $f_X^{2*}(x)dx$ である。一般に、 $N(t) = n$ の場合は条件付確率が $f_X^{n*}(x)dx$ となり、 $N(t) = n$ である確率は $P_n(t)$ で表わされるから、 $f_t(x)$ は結局次式で与えられる。

$$f_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_X^{n*}(x) P_n(t) \quad (8)$$

したがって、 $x(t)$ の r 次のモーメントは次式で与えられる。

$$E[\{x(t)\}^r] = \int_0^{\infty} x^r f_t(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \{E[Y_n^r] \cdot P_n(t)\} \quad (9)$$

ここに、 $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ なる確率変数である。いま、各 step が独立である場合、 $E[Y_n^r]$ は係数を $\{x\}$ の特性量とする r 次以下の n の多項式となり、式 (9) は $N(t)$ の r 次以下のモーメントだけで与えられることになる。

特に、一次モーメントと分散を示すと、次のようである。

$$E[x(t)] = E[X] \cdot E[N(t)] \quad (10)$$

$$Var[x(t)] = \{E[X]\}^2 \cdot \{Var[N(t)] + \alpha_X^2 E[N(t)]\} \quad (11)$$

ここに、 α_X は step length の変動係数で、 $\alpha_X = \sqrt{Var[X]}/E[X]$ である。

同様に、距離 x に達する時間 $\{t(x)\}$ の確率密度関数 $f_x(t)$ とそのモーメントについても次のように求められる。

$$f_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T^{(n+1)*}(t) P_n(x) \quad (12)$$

$$E[\{t(x)\}^r] = \sum_{n=0}^{\infty} \{E[S_{n+1}^r] \cdot P_n(x)\} \quad (13)$$

ここに、 $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ である。

step length や rest period の任意の分布形に対して分散過程の stochastic model の一般化を図る場合、式 (9) での $N(t)$ のモーメントの計算が難点となるが、積分変換と無限級数に対する漸化式で求められ、特に $r = 1$ 及び 2 の場合には次のようになる。

$$E[N(t)] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\phi}_T / (1 - \tilde{\phi}_T)] d\tau \quad (14)$$

$$E[\{N(t)\}^2] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\phi}_T (1 + \tilde{\phi}_T) / (1 - \tilde{\phi}_T)^2] d\tau \quad (15)$$

ここに、 $\mathcal{L}$ は Laplace 変換、 $\mathcal{L}^{-1}$ は Laplace 逆変換であり、 $\tilde{\phi}_T(s) = \mathcal{L}[f_T(\tau)]$ である。

いま、 $t \rightarrow \infty$ の場合の漸近的挙動を中心極限定理を用いて調べると、 $\{N(t)\}$ は $t \rightarrow \infty$ で平均値 $t/E[T]$ 、分散 $t \cdot Var[T]/\{E[T]\}^3$ の正規分布に従うことが示される。すなわち、漸近曲線として、

$$E[N(t)] = t/E[T] \quad (16)$$

$$\text{Var}[N(t)] = \alpha_T^2 t / E[T] \quad (17)$$

が得られる。式(17)には rest period の変動係数が含まれており、決定論的扱いでは勿論のこと、Poisson 過程（指数分布）のモデルでも説明し得ないもので、現象のばらつき自体が問題となる移動床過程の記述には、このような確率過程論的手法が必須であることがわかる。式(10)及び(11)に上式を代入すると、 $t \rightarrow \infty$ での砂粒の分散過程の漸近曲線として次式が得られる。

$$E[x(t)] = \{E[X]/E[T]\} \cdot t \quad (18)$$

$$\text{Var}[x(t)] = \{(E[X])^2/E[T]\} \cdot (\alpha_X^2 + \alpha_T^2) \cdot t \quad (19)$$

一方、 $\{t(x)\}$ については、この場合 step length が式(6)の指数分布に従っているから、平均 step 数と距離との関係は、 $E[N(x)] = x/A$ で与えられ、

$$E[t(x)] = \{E[T]/E[X]\} \cdot x + E[T] \quad (20)$$

となる。また、分散は $x \rightarrow \infty$ の漸近挙動として次式で与えられる。

$$\text{Var}[t(x)] = \{(E[T])^2/E[X]\}(\alpha_X^2 + \alpha_T^2) \cdot x + \text{Var}[T] \quad (21)$$

掃流砂れきの確率過程としての特性を調べるために、平坦河床が保たれるように限界掃流力をやや上回る範囲で single tracer 法による粒子移動の測定を行ない、rest period と step length の分布特性を明らかにすると共に、上述の stochastic model の組立てにそって理論結果が実験的に検証された。図-4 は着目砂粒の平均的な分散過程についての実験結果を示したもので、 $E[t(x)]$ に関するものである。図中の実線は式(20)であり、分散過程の平均的挙動が良く説明される。図-5 は $\{t(x)\}$ の分散を示したもので、

図中の破線は式(21)を示す。砂粒の分散過程における平均所要時間まわりのばらつきも一般化モデルと $\{N(t)\}$ のモーメントに関する漸近表示とでよく説明できることがわかり、また $\{t(x)\}$ の2次モーメントの挙動は指数分布を仮定したものとはかなり異なり、この場合に一般化モデルが有効なことが実証されている。

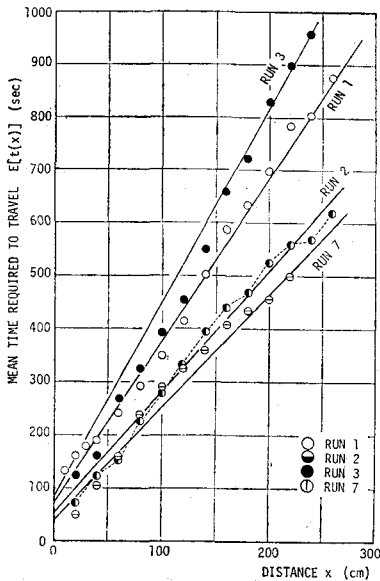


図-4 $E[t(x)] \sim x$

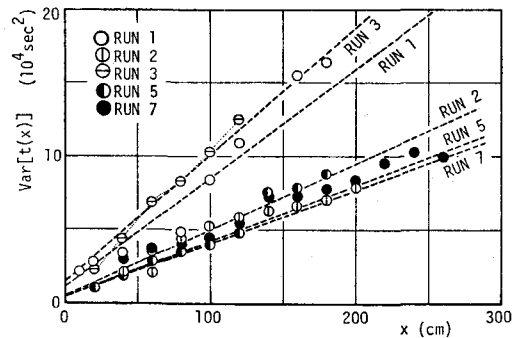


図-5 $\text{Var}[t(x)] \sim x$

4. Stochastic Model のオイラー的解釈と移動床過程への適用

(1) 非平衡流砂量

掃流過程に対する従来のstochastic modelは3.で述べたような砂粒群の分散過程を対象としたラグランジュ的モデルであったために、流砂量、河床変動などオイラー的に扱われる問題への応用的発展はほとんど見られなかった。しかし、オイラー的な立場での理解にもついたstochastic modelの構成も可能で、その適用によって種々の非平衡流砂過程を巧みに記述できる。

いま、位置 x での単位時間当たり、砂粒1個の占める面積当りの砂粒落下個数を deposite rate p_d と定義すると、これは図-1を参考にして pick-up rate p_s と step length の確率密度関数 $f_X(\xi)$ を用いて次のようになる。

$$p_d = \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi \quad (22)$$

ここに、 x_0 は流砂の原点で、平衡河床では $x_0 \rightarrow -\infty$ である。上式から p_s は各断面での底面せん断応力で決定される量であるのに対し、 p_d はその断面の条件だけでは決定されず、step length を介して上流側の流砂状況がある比率で影響を及ぼし、この比率が step length の分布である。すなわち、流砂の応答遅れが step length を媒介にして生じ、これが流砂固有の非平衡性を生む原因である。

いま、 $x_0 = 0$ として流砂量及び砂粒運動に伴う河床高の変化を表わす式は次のようになる。

$$q_B(x) = (A_3 d / A_2) \cdot \int_0^x p_s(x') dx' \int_{x-x'}^{\infty} f_X(\xi) d\xi \quad (23)$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial t} = A_1 d \left\{ \int_0^x p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi - p_s(x) \right\} \quad (24)$$

ここに、 A_1, A_2, A_3 はそれぞれ 1, 2, 3 次元の砂粒の形状係数である。

図-2に示した固定床に接続する移動床での流砂量を考えると、 p_s を一定にし、 $f_X(\xi)$ が式(6)の指数分布で与えられるものとする、

$$\left. \begin{aligned} p_d(x) &= p_s F_X(x) = p_s \{ 1 - \exp(-x/A) \} \\ q_B(x) &= p_s (A_3 / A_2) d \int_0^x \{ 1 - F_X(x-x') \} dx' = (A_3 / A_2) p_s A d \{ 1 - \exp(-x/A) \} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となり、 $x \rightarrow \infty$ とすると、平衡流砂量 $q_{B_0} = (A_3 / A_2) p_s A d$ が得られ、これより

$$q_B(x) / q_{B_0} = 1 - \exp(-x/A) \quad (26)$$

となる。図-2で式(26)の非平衡流砂量式が実験的に検証されている。

pick-up rate と step length の2つの構成要素で個々の掃流砂れきの運動を表現することにより、それに伴う非平衡な流砂過程を合理的に説明できる。ただし、平衡平坦河床あるいはそれからわずかにずれた非平衡状態での構成要素は砂粒運動の力学モデルによって推定されるが、河床変形が進んだ状態では流砂は河床形状に強く規制され、砂粒の運動機構を力学的に記述することは困難である。したがって、この場合 pick-up rate と step length を河床波の波高、波長あるいは波速に置き換えることによって、平坦河床に対する一般化された stochastic model を dune の存在する河床に適用できる。著者らはこのような観

点に立って河床波上での砂粒の分散過程¹³⁾や河床波の変形過程¹⁴⁾を検討しているが、その取扱いを平坦河床の場合と比較すると図-6に示すとおりである。

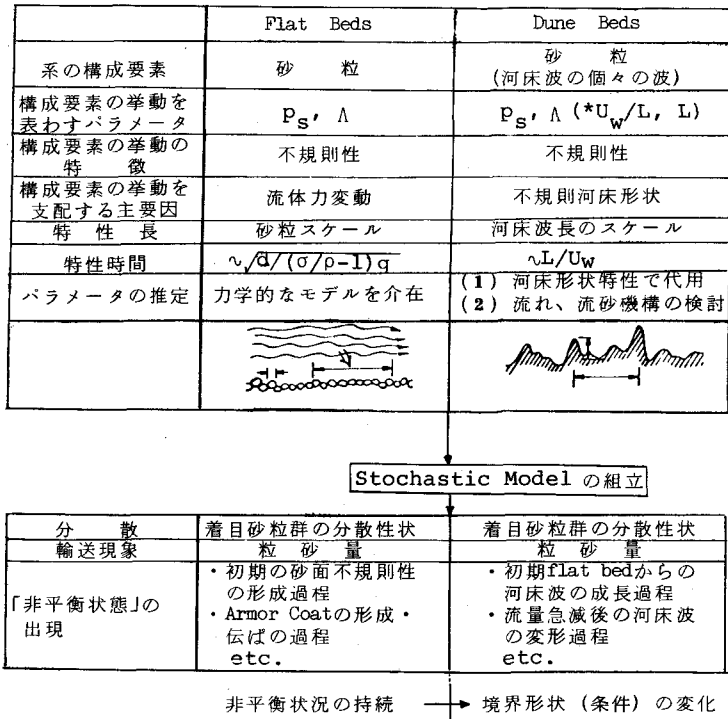


図-6 平坦河床とdune bedの移動床過程の取扱いの比較

(2) 砂面擾乱の発生機構

河床波の発生機構に関しては従来安定理論に基づく数多くの研究があるが、いずれもその基礎となる砂面の初期擾乱を仮定している。一方、初期擾乱の発生に注目した実験的研究¹⁵⁾や河床変動と水流の乱れ特性との関連を論じた理論的研究^{16),17)}でも具体的に河床波の形成と結びつけた例はほとんどない。ここでは、河床での砂粒の不規則な離脱・落下の繰返しによって河床高の変動が現われる過程を論じる。¹⁸⁾

いま、単位時間当りの砂粒の河床からの離脱及び落下の生起確率密度をそれぞれ μ_s 及び μ_d とすると、確率論におけるSmoluchowskiの条件から次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 p(n; t + \Delta t) = & \{ 1 - (\mu_s + \mu_d) \Delta t \} p(n; t) + \mu_s \cdot \Delta t \cdot p(n+1; t) \\
 & + \mu_d \cdot \Delta t \cdot p(n-1; t) + o(\Delta t)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

ここに、 $p(n; t)$ は初期砂面高が0のとき時刻 t で $y = nd$ (d :粒径)である条件付確率、 $o(\Delta t)$ はLandauのsmall 0である。 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、 $p(n; t)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} p(n; t) = -(\mu_s + \mu_d) p(n; t) + \mu_s p(n+1; t) + \mu_d p(n-1; t)
 \tag{28}$$

式(28)の特性を知るために、若干の確率的手法を用いて式(28)を n の期待値 $E[n]$ に関する微分方程式

に書きかえると,

$$\frac{d}{dt}E[n] = -(\mu_s - \mu_d) \quad (29)$$

同様に n の j 次のモーメントは次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}E[n^j] = \sum_{i=1}^j ({}_jC_i \{ \mu_d + (-1)^i \mu_s \} \cdot E[n^{j-i}]) \quad (30)$$

ただし, ${}_jC_i = j(j-1)\cdots(j-i+1)/i!$ である。

いま, 流砂が全体として平均的には均衡している場合を考えると, $\mu_s = \mu_d = \mu$ であり, このとき $E[n^j]$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E[n] &= 0, \quad E[n^2] = 2\mu t + C, \quad E[n^3] = 0 \\ E[n^4] &= 2\mu^2 t^2 + 2\mu(6C+1)t + C' \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ここに, C, C' は積分定数で $t=0$ の河床特性で決まる。

さて, 上に展開したモデルは河床の一点での繰返しに対する確率過程であるが, 水路方向の場所的変動系列との間にエルゴード性を仮定すると, 水路方向の河床形状についての河床高の分散 σ_y^2 , ひずみ度 S_k , 尖り度 k_r が求められることになる。すなわち,

$$\sigma_y^2/d^2 = 2\mu t + C \quad (32)$$

$$S_k = E[n^3]/\{E[n^2]\}^{3/2} = 0 \quad (33)$$

$$k_r = E[n^4]/\{E[n^2]\}^2 = 3 + \frac{2\mu t + C' - C^2}{(2\mu t + C)^2} \quad (34)$$

ところで, 初期河床面がほぼ正規分布に従い ($S_k \rightarrow 0, k_r \rightarrow 3$), 初期河床高の標準偏差が粒径程度であると考え, 積分定数は $C' = C^2 \approx 1$ となる。

以上の結果から, 個々の砂粒の離脱・落下の繰返しによって河床面に不規則性が現われ, その分散が時間に比例して増加し, 河床高分布は正規分布で近似できることが示された。なお, μ はいわゆる pick-up rate p_s と同じであるから, 後述の p_s の推定式 (45) を用いて砂面擾乱の増幅率が次式のように求められる。

$$(\sigma_y/d)/\sqrt{tu_*}/d = \sqrt{2F_0} \cdot \tau_*^{1/4} \{1 - (\tau_{*c}/\tau_*)\}^{3/2} \quad (35)$$

ここに, τ_{*c} : 移動限界の無次元掃流力, F_0 : 実験定数 ($= 0.03$) である。図-7 は平坦砂面床上に通水したときの河床縦断形状の時間変化を超音波測深器で測定した実験から, 河床高分布の時間変化の一部を示したもので, これから河床高分布は正規分布に従っており, その分散が時間とともに増加しているのが認められる。図-8 は河床高の標準偏差を示しているが, 初期の段階では時間の平方根に比例しており, 式 (32) で表される。図-9 は τ_* と砂面擾乱の増幅率の関係を示したもので, 実験値と式 (35) とは大体一致するが, 理論値がやや大きい。これは理論展開で離脱と落下を独立事象として扱ったことによると考えられ, これらの相関を考慮した取扱が必要となる。

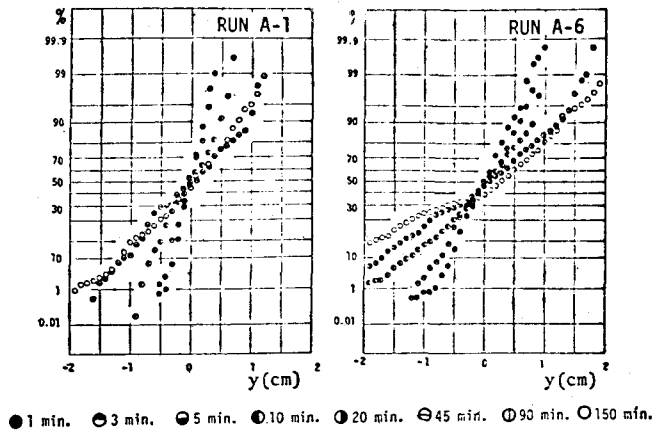


図-7 河床高分布の時間的变化

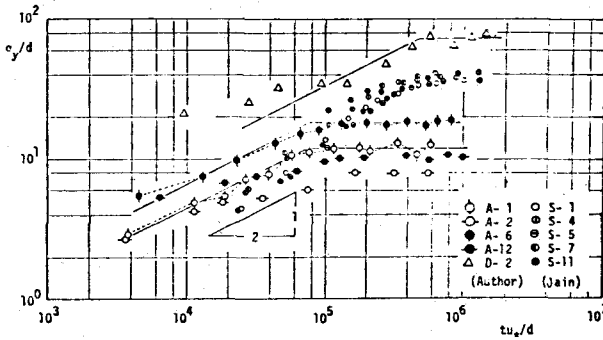


図-8 河床高標準偏差の時間的变化

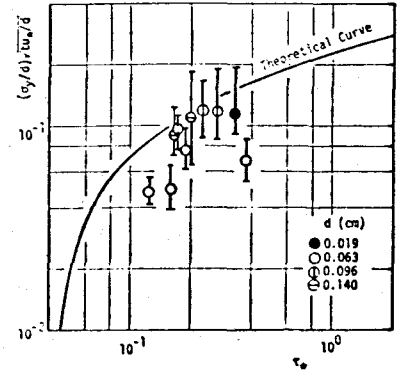


図-9 砂面擾乱の増幅率と τ_* との関係

(3) 初期砂面擾乱のスペクトル特性¹⁸⁾

移動床の一点に着目した上記の砂面擾乱を河床波の発生源と考えると、これは何らかの場所的相関を有しているはずであり、次に step length に関する情報を加味してその統計的性質を求めることができる。

いま、点 x における単位時間当りの離脱及び落下個数をそれぞれ p_s , p_d とし、その変動成分を $\hat{p}_s$, $\hat{p}_d$ とすると、 p_s と p_d の平均値は等しいと考えられるので、式 (22) 及び (24) は変動分についても成立する。すなわち、

$$\hat{p}_d(x) = \int_0^\infty \hat{p}_s(x - \xi) f_X(\xi) d\xi \quad (36)$$

また、河床高変化は次式で与えられる。

$$y(x|t) = -\{\hat{p}_s(x) - \hat{p}_d(x)\} A_1 d \cdot t \quad (37)$$

式 (36) によると、 $\hat{p}_d$ は $\hat{p}_s$ と $f_X(\xi)$ の畳み込み積分となっている。すなわち、 $\hat{p}_d$ は $\hat{p}_s$ を入力、 $f_X(\xi) \cdot U(\xi)$ を impulse response とする線型系の出力となる。ここに、 $U(\xi)$ は unit step 関数である。

$y(x|t)$ の自己相関関数 R_{yy} は定義により次式で表される。

$$\begin{aligned} R_{yy}(\xi) &= (A_1 d)^2 \cdot t \cdot E \left[\{ \hat{p}_d(x) - \hat{p}_s(x) \} \{ \hat{p}_d(x - \xi) - \hat{p}_s(x - \xi) \} \right] \\ &= (A_1 d)^2 \cdot t \cdot \{ R_{dd}(\xi) + R_{ss}(\xi) - R_{ds}(\xi) - R_{sd}(\xi) \} \end{aligned} \quad (38)$$

ここに、 R_{dd} 、 R_{ss} はそれぞれ $\hat{p}_d(x)$ 、 $\hat{p}_s(x)$ の自己相関関数、 R_{ds} 、 R_{sd} はそれらの相互相関関数である。一方、式(36)から $R_{ds}(\xi)$ 、 $R_{sd}(\xi)$ 、 $R_{dd}(\xi)$ は $R_{ss}(\xi)$ と $f_X(\xi)$ の畳み込み積分となり、それらをフーリエ変換すると次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} S_{sd}(\kappa) &= H^*(i\kappa) \cdot S_{ss}(\kappa) \\ S_{ds}(\kappa) &= H(i\kappa) \cdot S_{ss}(\kappa) \\ S_{dd}(\kappa) &= |H(i\kappa)|^2 \cdot S_{ss}(\kappa) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

ここで、 $S_{dd}(\kappa)$ 、 $S_{ss}(\kappa)$ は $\hat{p}_d(x)$ 、 $\hat{p}_s(x)$ のパワースペクトル密度関数、 $S_{ds}(\kappa)$ 、 $S_{sd}(\kappa)$ はこれらのクロススペクトル密度関数である。また、 $H(i\kappa)$ は $f_X(\xi)$ のフーリエ変換、 κ は角波数、 H^* は H の共役複素数である。

したがって、式(38)に式(39)を代入すると、step length が指数分布に従うとしたときの河床高の波数スペクトルは次式で与えられる。

$$S_{yy}(\kappa) = (A_1 d)^2 t \cdot \left[\kappa^2 / \{ (1/A)^2 + \kappa^2 \} \right] \cdot S_{ss}(\kappa) \quad (40)$$

この式は pick-up rate の場所的変動が河床面擾乱を生む可能性を示唆しており、平坦河床でも水流の乱れ等による底面せん断応力の場所的相関が現われ、そのため有限の大きさの $S_{ss}(\kappa)$ が存在するものと考えられる。いま、pick-up rate の場所的変動の相関関数が、 $R_{ss}(\xi) = p_s \exp(-\alpha_0 \xi)$ の指数型で与えられるものとする、式(40)は次式で与えられる。

$$S_{yy}(\kappa) = 4\alpha_0 p_s (A_1 d)^2 \kappa^2 t / [(\kappa^2 + \alpha_0^2) \{ \kappa^2 + (1/A)^2 \}] \quad (41)$$

ここに、 α_0 の逆数は pick-up rate の場所的相関の緩和距離で、 $\alpha_0 = 1/A$ とした場合の式(41)の計算曲線と測定結果を図-10に比較するが、ほぼ良好な一致が見られる。なお、式(41)からスペクトルピークに対応する波長を計算すると、 $L_g = 2\pi \sqrt{A/\alpha_0}$ となり、波長の変化はみられない。これは河床波のごく初期に現われる現象で、その後は波同志の追付き統合など波数間の相互作用が顕著になり、波長の変化が生じてくる。

以上の検討ではこれまで余り考慮されなかった掃流砂れき運動の確率過程としての立場から初期砂面擾乱の発生が説明されたが、これを初期擾乱として移動床の不安定解析を進めることができる。さらに、掃流砂の stochastic model に基づいて混合砂れき床での粗粒化現象など非平衡流砂過程を合理的に説明

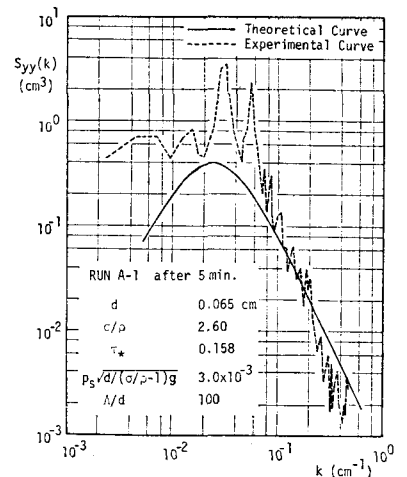


図-10 初期砂面擾乱の波数スペクトル

できるが、これらについては著者らの研究成果^{19),20)}を参照されたい。

5. 砂れきの掃流機構と流砂モデル

(1) 掃流砂量の表示

上述の掃流砂の stochastic model によって種々の移動床現象を説明するには、その構成単位である step length, pick-up rate の平均値と水理量や河床砂れき特性との関係が明らかにされねばならない。ここでは、既往の流砂モデルがいずれも平衡平坦河床での流砂量を対象としたものであるところから、stochastic model の構成単位についても平坦河床での特性を論じる。

この場合、rest period が式 (5) の指数分布をとるものとする、式 (14) で $E[N(t)] = p_s t$ 、したがって、式 (10) は $E[x(t)] = p_s A t$ となって、砂粒群の平均移動速度 $\bar{V}_g$ は、

$$\bar{V}_g = \frac{\partial}{\partial t} E[x(t)] = p_s A \quad (42)$$

で与えられる。移動層厚を $a_1 d$ 、砂の空隙率を λ_0 とすると、流砂量式として次式が導かれる^{6),7)}

$$q_B = (1 - \lambda_0) \bar{V}_g a_1 d = K_1 p_s A d \quad (43)$$

これは砂粒の分散過程に対する stochastic model から求められた平衡平坦河床での流砂量式である。この場合、stochastic model というのは、rest period と step length の2つの確率変数を組合せた確率過程として砂粒の分散性状を表示したモデルをいうのであり、流体力の変動を考慮するなど単に確率変数を導入しただけの流砂モデルはむしろ probabilistic model というべきである。

一方、Kalinske²¹⁾による流砂モデルでは原理的に次の表示が与えられる。

$$q_B = A_3 d^3 \bar{V}_g \bar{c}_g = (A_3/A_2) d \bar{V}_g \bar{c}_g \quad (44)$$

ここで、 $\bar{c}_g$: 単位面積当り移動中の平均砂れき個数、 $\bar{c}_g$: 掃流砂の平均面積濃度、 $A_3 d^3$: 砂れき一個の体積である。Kalinske は水理条件によって $\bar{V}_g$ のみが変化するものとしたが、実際には $\bar{c}_g$ の変化の方が卓越している。ただ、 $\bar{V}_g$ を求めるモデルに比べ $\bar{c}_g$ を求めるモデルは考えにくいことや、ある瞬間に運動する砂れきを計測することが困難であることから、実測流砂量と $\bar{V}_g$ の推定値から $\bar{c}_g$ を逆算しているものが多い。

式 (43)、(44) のいずれの表示をとるにしても、その構成要素である p_s 、 A あるいは $\bar{V}_g$ 、 $\bar{c}_g$ を掃流砂運動の力学的機構に基づいて評価しなければならない。とはいっても掃流砂れきの運動は水流と河床面との複雑な条件に支配されるからその力学的解明は容易でなく、従来の流砂理論は構成要素を簡単にモデル化して流砂量を求めたものが多い。これらの取扱いについては既に多くの文献²²⁾に詳述されているので敢て説明する必要はないが、最近になって粒子運動に立脚して流砂力学を見直すために、砂粒の運動を直接計測する研究が盛んになっており、それらの成果に基づいた構成要素の評価方法について述べる。

(2) 河床砂れきの初期移動

掃流機構を考えると、その河床からの離脱過程である「初期移動」と、粒子が河床面を運動して次に停止するまでの「流送過程」に分けると便利である。初期移動については、従来限界掃流力の研究として主として砂粒に作用する力の釣合式で検討されている。砂粒の移動確率を与える pick-up rate の推定でも、Einstein²³⁾は揚力の変動を考え、それが砂粒重量を超す確率を無次元移動確率 p_0 としているが、

やはり力の釣合だけの静的な問題として扱われている。Paintal²⁴⁾は河床での砂れきの配列の確率的特性をさらに考慮しているが、それらを比較した図-11から、考え方によって p_0 が大幅に異なることがわかる。また、 p_0 をpick-up rate p_s に変換する場合の変換時間(砂粒が河床から離脱するに要する時間に相当する)のとり方がまちまちであり、流体力の変動もその強さの確率分布を考えるだけで変動周期に対する考慮が欠いているなど、 p_s を正確に評価しているとはいえない。

一方、これまでの掃流砂の初期移動に関する観察によると、床面砂粒は移動開始前に乱れによる小刻みな揺動を示すことが認められており、離脱過程として運動方程式を用いた解析が必要と考えられる。また、砂面の凹凸を考えると転動離脱過程が支配的であり、このことは土屋²⁵⁾の固定床での単一粒子の跳躍(saltation)実験でも指摘されている。

著者²⁶⁾はこれらの実験事実から砂粒の初期移動を単に力の釣合いでなく、転動離脱過程として運動方程式で表して初期角加速度を求め、また初期移動に支配的な乱れの周期に着目して流体力の作用持続時間を考え、離脱に要する時間の逆数として p_s を求めた。トレーサーの原点残留確率の時間変化の測定から得られた著者及び他の研究者の実験値と理論式及び次式の近似式とを図-12に比較して示すが、3者の一致は良好である。

$$p_s \sqrt{d/[(\sigma/\rho)-1]} g = 0.03 \tau_* \{1 - (0.035/\tau_*)\}^3 \quad (45)$$

一方、式(44)における $\bar{v}_g$ (または $\bar{c}_g$)に関しては、佐藤・吉川・芦田²⁷⁾が平衡状態では作用揚圧力が粒子群に与える力積は重力による下向きの力積に等しいとする考えに立脚して揚圧力の変動を考慮したモデルを提示し、さらに河床粗度の影響を加味した流砂量式を与えているが、実用上も優れたものとして広く用いられている。これによると、底面せん断応力 τ_0 が移動限界 τ_c より十分大きいとき $\bar{c}_g$ は τ_* に比例し、砂粒の移動速度が u_* に比例するとすると、無次元流砂量 q_{B*} は $\tau_*^{3/2}$ に比例することになり、他の多くの流砂量公式の表示とも一致する。一方、LuqueとBeek²⁸⁾は掃流砂量及び砂粒速度の測定結果から、

$$\bar{c}_g = 0.93(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} / (\tau_*^{1/2} - 0.7 \tau_{*c}^{1/2}) \quad (46)$$

を与え、 $0.01 \leq (\tau_* - \tau_{*c}) \leq 0.1$ の範囲で、 $\bar{c}_g = 1.4 (\tau_* - \tau_{*c})$ となることを示している。

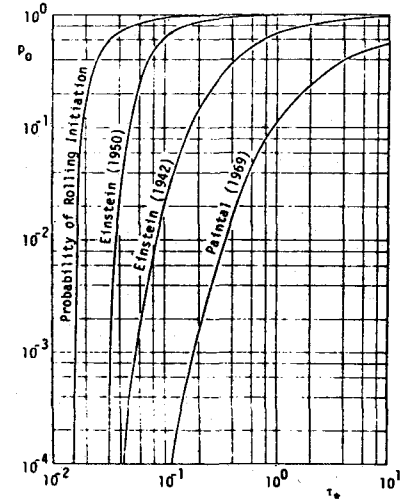


図-11 砂れきの移動確率の評価の比較

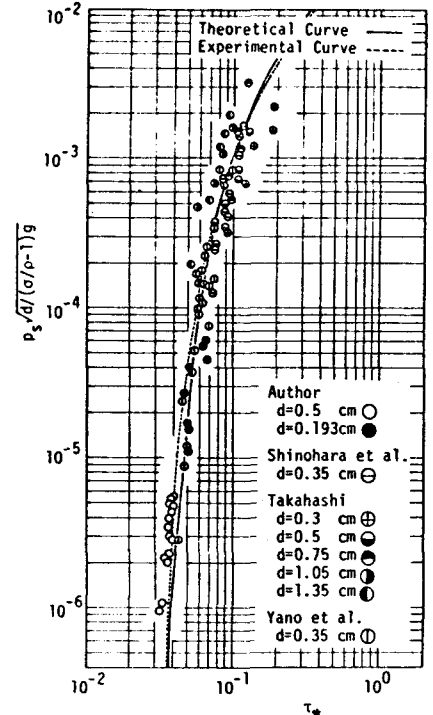


図-12 平均pick-up rateの推定式

(3) 砂れきの流送過程

移動床での掃流砂れきの運動は転動、滑動、跳躍の様式が混在した複雑な現象であり、その厳密な表示を得ることはむずかしい。また、掃流力の大きい場合の移動床での計測が困難なこともあって、掃流砂の流送機構に関する従来の研究はほとんど固定床粗面での単一粒子の運動を対象としており、その解析結果に基づいて複雑な条件での移動床上の砂粒運動を説明しようとしている。

Yalin²⁹⁾に始まる流砂の跳躍機構に関する研究はその代表的なものであり、わが国でも岸・福岡³⁰⁾や土屋³¹⁾による理論的、実験的研究があるが、Yalin、岸らが揚力の作用による砂粒の離脱を考えているのに対し、土屋らは最初の跳躍は転動からの移行が顕著なことを観察によって確かめ、跳躍への移行条件を理論的に明らかにしている。さらに、土屋らは運動砂粒の床面との衝突、反発の繰返しによって定常的な跳躍が出現する過程を解析し、³²⁾その場合の平均跳躍高及び平均跳躍距離を用いて運動量保存則にもとづく流砂量式を導いている。³³⁾このように床面との継続的な衝突によって上向きの力を得るのが掃流砂の跳躍運動の特徴であり、乱れの鉛直方向成分によって砂粒の重量が支えられる浮流砂の運動とは本質的に異なるものとみなしてよい。³⁴⁾

さて、水流によって固定粗面上を運動する単一粒子の平衡速度の測定値と無次元せん断応力 τ_* との関係が図-13に示される。³⁵⁾粒子速度は u_* で無次元化されている。図中の実線及び破線はそれぞれ滑動及び転動形式を仮定した場合の理論曲線であるが、掃流力の小さい場合を除けば底面砂粒との頻繁な衝突によって回転運動が激減し、滑動形式としての挙動を示し、巨視的な摩擦過程が現われる。

このように、転動、滑動、跳躍といった運動形式を仮定した砂粒の流送過程の解析は流砂モデルの展開には有用な手段であるが、これらがそのまま移動床での砂れきの運動を表わすものとは言えない。移動床での砂粒運動を観察した土屋らの結果²⁵⁾によると、固定床の場合に比べて砂れきの運動形式を明確に区別しにくいこと、床面に落下する砂れきの30%近くが停止すること、また落下砂れきの衝突により河床砂れきの飛び出しが起ることなど、単体砂れきの運動機構モデルでは表せない現象が認められている。

ところで、移動床での掃流砂の運動を16mmカメラで撮影し、解析した著者らの結果³⁵⁾によると、砂粒の平均移動速度 $\bar{V}_g$ は軽微な非平衡状態($\tau_* < 0.08$)で $\bar{V}_g \approx 2.9 u_{*c}$ であり、運動砂粒間の干渉効果や河床粒子との運動量交換などによって図-13の固定床での単一粒子の場合に比べるとかなり小さくなる。なお、粒子の移動速度の変動は変動係数 $\alpha_V = 0.5$ のガンマ分布に従うことが示された。LuqueとBeek²⁸⁾が $\tau_* < 0.064$ の範囲で16mmカメラで測定した結果では、 $\bar{V}_g = 9.2(u_* - 0.7 u_{*c})$ である。ここに、 u_{*c} はShieldsの条件での限界摩擦速度である。

このような決定論的立場からの砂粒の平均移動速度に関する検討とは別に、掃流砂れきの運動の不規則性に着目した場合には、移動砂粒の床面突起との衝突が変動の支配的要因となることが見い出される。すなわち、図-14は移動床上で砂粒が動き始めて完全に停止するまでの速度の時間的、距離的变化を測定し

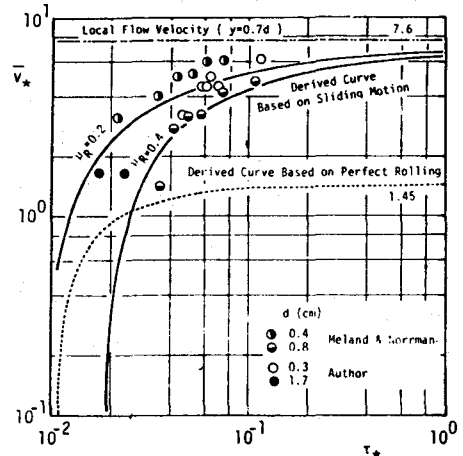


図-13 粗面上での単一粒子の平衡速度と τ_* の関係

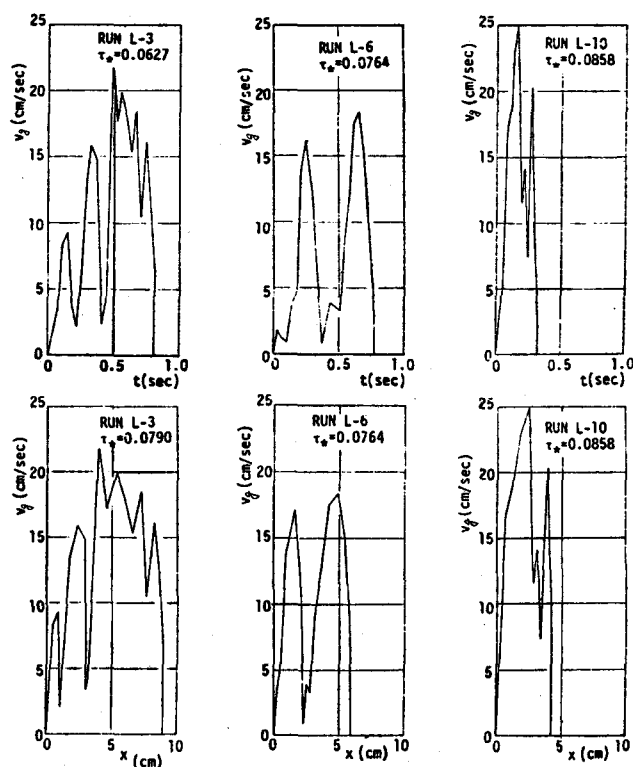


図-14 砂粒の運動速度の変化
(移動床)

た著者らの結果³⁵⁾の一例であるが、速度の急激な変動は床面突起との衝突による急減を、小さな変動は水流の乱れや砂粒の相互干渉による運動中の変動を示している。したがって、粒子速度のピーク間はそれぞれ衝突時間間隔 T 及び有効突起間隔 λ を表しており、10 種の実験条件についてそれぞれ 100 個ずつの測定資料を解析した結果、水理条件に無関係にその平均値が $\bar{T}u_*/d = 2 \sim 3$ 、 $\bar{\lambda}/d = 5 \sim 7$ 、変動係数 $\alpha_T = 0.4 \sim 0.5$ 、 $\alpha_\lambda = 0.6 \sim 0.7$ のガウス分布に適合することが認められた。また、突起との衝突直前の粒子速度 V_{g_1} と直後の速度 V_{g_0} の分布特性はともにガウス分布に従い、その平均値及び変動係数はそれぞれ $\bar{V}_{g_1} = 3.2 u_*$ 、 $\alpha_{V_{g_1}} \approx 0.4$ 及び $\bar{V}_{g_0} = 1.2 u_*$ 、 $\alpha_{V_{g_0}} \approx 0.73$ となることが示された。衝突によって平均砂粒速度は $1/3$ に減ずるのに対し、変動係数が約 2 倍に増加しているのは、床面突起高の確率的性状によって不規則性が助長されることを表している。

このように掃流砂れきの運動は床面との間断ない接触と、床面砂粒との衝突による停止と運動の繰返しによって特徴づけられるが、移動床面の不規則性、水流の乱れ、運動砂粒の相互作用と流砂の挙動との関係を力学的に厳密に表現するまでには至っていない。

いま、stochastic model の構成要素である step length を推定する場合、step は運動状態と停止状態の繰返しで形成されるから、移動砂面が床面突起との衝突によって停止する現象に着目する必要がある。この場合の step length は単一の saltation の飛距離として与えられるようなものではなく、初期移動から次に確実に停止するまでの距離である。

Einstein^{23), 26)} は step length が粒径 d の 100 倍程度であるという実験事実から無次元平均 step length

$\lambda (= A/d)$ を 100 とし、さらに流体力による非停止確率を考慮して次式の関係を与えている。

$$\lambda = 100 / (1 - p_0) \quad (47)$$

ここに、 p_0 は無次元移動確率である。Paintal 他^{24), 37)} も λ の推定を試みているが、いずれも平坦河床における実験値と必ずしも良い一致を示していない。

著者ら²⁶⁾ は step length を規定する最も重要な要素は床面突起の配列とそれへの運動砂れきの衝突であることを実験で確かめ、突起砂粒間隔の分布が指数分布である粗面モデルを想定した。突起の平均間隔が $\zeta_0 d$ 、運動砂粒が突起砂粒を乗り越すに必要な運動距離を $\zeta_c d$ とするとき、砂粒の突起乗越確率 p_{r0} は次式で与えられる。

$$p_{r0} = \int_{\zeta_c}^{\infty} \psi(\zeta) d\zeta = \zeta_0 \psi(\zeta_c) \quad (48)$$

ここで、 $\psi(\zeta)$ は無次元突起間隔 ζ の確率密度関数で、この場合、 $\psi(\zeta) = (1/\zeta_0) \exp(-\zeta/\zeta_0)$ である。 p_{r0} と流体力による非停止確率を考慮すると、無次元平均 step length は、

$$\lambda = \zeta_0 / \{ (1 - p_{r0})(1 - p_0) \} \quad (49)$$

となる。 ζ_c に関しては、砂粒の転動運動を仮定して転動距離と転動速度の関係を求め、これに衝突前後の運動量保存則及び衝突後の突起乗越し条件にエネルギー保存則を適用して求められる突起乗越限界速度を代入して、乗越しに必要な転動距離としての ζ_c を与えた。

このモデルによる平均 step length は固定粗面上での実験値とは良く一致するが、移動床上での測定値は十分に説明できない。移動床では衝突時に河床砂れきがずれ動き、そのため転動砂粒のもつ運動量が減少し停止し易くなることが観測された。そこで、衝突の際に突起砂粒を含めて n 個の砂粒が動くことによって転動砂粒が停止するものとし、突起平均間隔を $\zeta' d$ 、一つの砂粒が可動状態にある確率を p_0 、各粒子について独立であるとする、結局転動砂粒が停止する突起平均間隔は $\zeta' d / p_0^n$ となり、

$$\lambda = \zeta'_0 / \{ p_0^n (1 - p_0) \} \quad (50)$$

が得られる。図-15 には無次元突起高 $A_{*0} (= A_0/d)$ が 0.25, $\zeta_0 = 5, 10$ に対する固定床での step length の計算曲線、 $\zeta'_0 = 10$, $n = 2, 3, 4$ に対する 3 本の移動床モデルの計算曲線及び移動床での実験値とを比較して示している。 τ_* が増加すると、固定床では step length が増加するが、平均的な移動限界を超えると、移動砂粒の衝突時の運動量減少によって減少し、さらに τ_* が大きくなると流体力の効果が運動量減少の効果を上回り、再び step length が増加するという特性が示される。なお、図-12 に示した pick-up rate に比べ、平均 step length の τ_* に対する変化がかなり鈍いことが注目される。

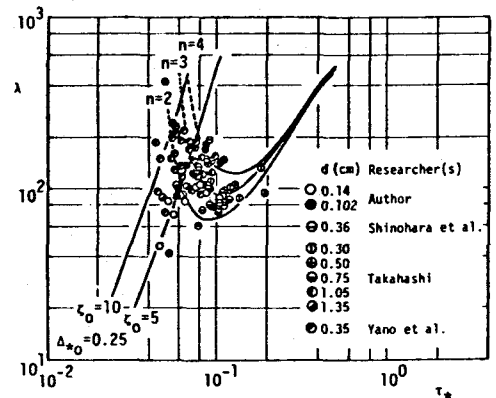


図-15 平均step lengthと τ_* の関係

6. むすび

以上、移動床における河床変形や河床粒度構成の変化など非平衡流砂過程は掃流砂れきに固有な確率的、離散的な運動の結果として現われるとの立場から、そうした流砂の特性をうまく表現した stochastic model を用いて移動床過程の記述を試みた。その結果、個々の砂粒の運動にもとづく理論を展開することによって、従来その物理的意味が不明確なままに移動床現象の解析に導入されていたいくつかの仮定が砂粒運動の構成要素の性質によって説明されることがわかった。

このように stochastic model が掃流現象の本質を捉えているといっても、単なる流砂量の推定という従来の研究の立場からでは、非平衡流砂過程へのモデルの適用性は期待できず、その構成要素である pick-up rate や step length の特性が砂粒運動の力学的機構との関連で明確にされなければならない。本論の後半では、掃流砂モデルの構成要素を砂粒運動に基づいて評価した従来の研究成果の一部を述べたが、平坦河床の場合ですら現象の複雑さのために厳密な力学的表示を得るまでに至っていない。

著者らは移動床上での掃流砂運動の詳細な観察と砂粒への作用流体力の測定を行っており、粒子の挙動の力学的モデルと stochastic なモデルとの結合を果すことによって、流砂理論の体系化に努めたいと考えている。

参考文献

- 1) 芦田和男：ダムにおける Sedimentation (1965), 椿東一郎：流砂 (1966), 土屋義人：掃流砂礫の流送機構 (1970), 杉尾捨三郎：移動床の抵抗法則 (1971), 岸 力：移動床流れにおける粗度 (1972), 芦田和男：移動床流れの河床形態 (1972), 芦田和男：浮遊砂 (1974), 杉尾捨三郎：浮遊砂による貯水池の堆砂過程 (1974), 岸 力：沖積地河川の水理学序説 (1975), 河村三郎：流送土砂の推算 (1977), いずれも水工学に関する夏期研修会講義集。
- 2) 中川博次・辻本哲郎・宮本博司：16mm撮影による掃流砂運動の特性量解析と流砂の平衡状態について, 京都大学防災研究所年報, 第21号B, 1978, pp. 407-421.
- 3) Kennedy, J. F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, Jour. Fluid Mech., Vol. 16, Part 4, 1963, pp. 521-544.
- 4) Hayashi, T. : Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Vol. 96, HY2, 1970, pp. 357-366.
- 5) Einstein, H. A. : Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem, Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau an der Eidgenössische Technische Hochschule in Zurich, Verlag Rascher, 1937, 110p.
- 6) Hubbell, D. W. and W. W. Sayre: Sand transport studies with radioactive tracers, Proc. ASCE, Vol. 90, HY3, 1964, pp. 39-68.
- 7) 矢野勝正・土屋義人・道上正規：砂れきの流送機構の確率過程としての特性について, 京都大学防災研究所年報, 第11号B, 1968, pp. 61-73.
- 8) Yang, C. T. and W. W. Sayre: Stochastic model for sand dispersion, Proc. ASCE, Vol. 97, HY2, 1971, pp. 265-288.
- 9) Shen, H. W. and P. Todorovic: A general stochastic model for the transport of sediment bed

- material, Proc. the 1st Int'l Symp. on Stochastic Hydraulics, Pittsburgh, 1971, pp. 489-503.
- 10) Hung, C. S. and H. W. Shen: Stochastic model of sediment motion on flat bed, Proc. ASCE, Vol. 102, HY12, 1976, pp. 1745-1759.
 - 11) Cheong, H. F. and H. W. Shen: Stochastic characteristics of sediment motions, Proc. ASCE, Vol. 102, HY7, 1976, pp. 1035-1049.
 - 12) 中川博次・辻本哲郎：掃流過程に対する確率モデルとその一般化，土木学会論文報告集，第291号，1979，pp. 73-83.
 - 13) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto: Characteristics of sediment transport process on dunes analyzed by stochastic approach, Bull., D.P.R.I., Kyoto Univ., Vol. 29, Part 1, 1979, pp. 47-67.
 - 14) 中川博次・辻本哲郎・矢田 篤：河床形状と流砂の相互関係と河床波の変形過程について，京都大学防災研究所年報，第21号B-2, 1978，pp. 385-405.
 - 15) Raudkivi, A. J. : Study of sediment ripple formation, Proc. ASCE, Vol. 89, HY6, 1963, pp. 15-33.
 - 16) Yalin, M. S. : On the formation of dunes and meander, Proc. the XIVth Congress, IAHR, Paris, Vol. III, Paper C-13, 1971, pp. 101-108.
 - 17) 白砂孝夫：流れと河床波の相互作用についての二，三の考察，電力中央研究所技術第二研究所報告，No 72003, 1972，pp. 1-21.
 - 18) 中川博次・辻本哲郎：砂礫の運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程，土木学会論文報告集，第291号，1979，pp. 53-62.
 - 19) 中川博次・辻本哲郎：河床波の発生時における流砂と河床形状の相互作用系の確率過程としての性質，第24回水理講演会論文集，1980，pp. 19-25.
 - 20) 中川博次・辻本哲郎・原 稔明：混合砂れき床面の粗粒化過程について，京都大学防災研究所年報，第20号B-2, 1977，pp. 355-370.
 - 21) Kalinske, A. A.: Movement of sediment as bed load in rivers, Trans. AGU, Vol. 28, No. 4, 1947, pp. 615-620.
 - 22) 例えば，Yalin, M. S.: Sediment transport, 2nd ed., Pergamon Press, pp. 112-165, 1977.
 - 23) Einstein, H. A.: Formulas for the transportation of bed load, Trans. ASCE, Paper No. 2140, 1942, pp. 561-597.
 - 24) Paintal, A. S.: Stochastic model of bed load transport, Jour. Hydr. Res., IAHR, Vol. 9, No. 4, 1971, pp. 527-554.
 - 25) 土屋義人・角野 稔：水流による砂粒の運動機構に関する実験，京都大学防災研究所年報，第10号B, 1967，pp. 97-107.
 - 26) Nakagawa, H. And T. Tsujimoto: On probabilistic characteristics of motion of individual sediment particles on stream beds, Proc. the 2nd Int'l Symp. on Stochastic Hydraulics, Lund, 1976, pp. 293-316.
 - 27) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男：河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1)，土木研究所報告，第98号2, 1956，pp. 13-30.

- 28) Luque, R. F. and R. van Beek: Erosion and transport of bed-load sediment, Jour. Hydr. Res., IAHR, Vol. 14, No. 2, 1976, pp. 127-144.
- 29) Yalin, M. S.: An expression for bed load transportation, Proc. ASCE, Vol. 89, HY3, 1963, pp. 221-250.
- 30) 岸 力・福岡捷二: 河床粒子の Saltation の機構と流砂量, 土木技術資料, 土木学会北海道支部, 第 22 号, 1966, pp. 113-120.
- 31) 土屋義人・渡戸健介・青山俊樹: 水流による saltation の機構(1), 京都大学防災研究所年報, 第12号 B, 1969, pp. 475-490.
- 32) 土屋義人・青山俊樹: 水流による砂れきの saltation の機構(2), 京都大学防災研究所年報, 第13号 B, 1970, pp. 199-216.
- 33) 土屋義人・河田恵昭: Saltation 機構にもとづく流砂量式について, 土木学会関西支部年次学術講演会概要, I-28, 1973.
- 34) Bagnold, R. A.: The nature of saltation and of 'bed-load' transport in water, Proc. Roy. Soc. Lond., A.332, 1973, pp. 473-504.
- 35) 中川博次・辻本哲郎・細川泰廣: 移動床における掃流砂れきの不規則運動性状, 京都大学防災研究所年報.
- 36) Einstein, H. A.: The bed load function for sediment transportation in open channel flows, Tech. Bull., No. 1026, U.S. Dept. of Agri., Soil Cons. Serv., 1950, 78p.
- 37) Christensen, B. A. and T. Y. Chiu: Water and air transport of cohesionless materials, Proc. the XVth Congress, IAHR, Vol. 1, Istanbul, 1973, pp. 245-252.