

ソリトン分裂 — 分散波動論 —

岩 崎 敏 夫

1. 線型分散波

1.1 任意波形と分散関係

最も簡単な波面の方程式から始める。

$$\zeta = a \cos(kx - wt + \alpha) \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

ここに ζ は静水面からの波面の高さ, k は波数, w は角振動数, α は固有位相角である。このとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{k} = c \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

なる一定速度 c を位相速度といい, 波の山, 谷など任意の位相点の速度を示す。

w が波数 k の関数, すなわち

$$w = W(k) \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

であたえられるとき, 位相速度もまた次式のように波数の関数である。

$$c(k) = \frac{w}{k} = k^{-1} W(k) \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

たとえば線型長波のように $c = \sqrt{gh}$ (h : 水深) であたえられれば c は波数によらない。その場合の波は非分散であるという。また (1.3) を分散関係という。

非分散であれば $\zeta(x, 0)$ の初期波形が任意に与えられていれば, 任意時刻の波形は h = 一定なら初期波形と変らない。しかし (1.3) が成立すれば変形してゆく。

微小振幅表面波においては分散関係が

$$w^2 = gk \quad \text{深海波} \quad : \quad w^2 = gk \tanh kh \quad \text{浅海波} \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

であたえられる。すなわち異なった波数あるいは周波数を有する調和波列は異なった速度をもつ。したがって, 任意波形を調和波列の重ね合せに分解した場合, 成分波は進行速度が異なるのでこれを合成した波形は変わってゆく。重力場においてこの現象が生ずることから, 表面波の進行する水の場合, 分散媒質ともいう。また (1.5) の誘導よりわかるように, この分散関係は線型分散波の特性である。

$-\infty < x < \infty$ にある分散媒質における波動が, つぎの速度ポテンシャルをもつとする。

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_1(k) \exp[i(kx - wt)] + F_2(k) \exp[i(kx + wt)]\} dk \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

ここに周波数 w は分散関係 (1.3) を満足し振幅 A, B は初期条件

$$\phi(x, 0) = f(x), \quad \phi_t(x, 0) = g(x) \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

より決定せられる。すなわち $f(x), g(x)$ のフーリエ変換, f_*, g_* を用いて

$$f_*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx, \quad g_*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-ikx) dx \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

したがってフーリエ逆変換により,

$$\phi(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_*(k) \exp(ikx) dk \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

$$\phi_t(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_*(k) \exp(ikx) dk \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

(1.6) で $t=0$ として (1.9) と比較すれば $F_1 + F_2 = f^*/2\pi$, (1.6) を t で微分したのちに $t=0$ として (1.10) と比較すれば $F_1 - F_2 = -g_*/2\pi iw$ となるから, 結局

$$4\pi F_1 = f_* - \frac{g_*}{iw}, \quad 4\pi F_2 = f_* + \frac{g_*}{iw} \quad \dots\dots\dots (1.11)$$

で, これを (1.6) に入ればよい。

こうして任意の波形 (1.7) は (1.6) に示される (k, w) なる素波に分解され, (1.3) なる分散関係がある場合には (1.4) のような異なった伝播速度で素波が進行するので, 素波は分散してゆく。

ただし, (1.3) において $W(k)$ は実数であり, かつ, $ak+b$ のような一次関係は除外される。それは, 群速度 c_g が

$$c_g = \frac{dW}{dk} \quad \dots\dots\dots (1.12)$$

によってあらわされるので, これが一定値になると, 波群として分散しない為である。実際, 進行性の素波では $c_g = a$ (一定) とすれば (1.12) より $w = ak + b$ 。従って波形 ζ は,

$$e^{-ibt} \exp ik(x-at)$$

であるので, そのフーリエ重畳は $e^{-ibt} f(x-at)$ となり, 初期波形 $f(x)$ は振幅は変化しても, 波形が変化せぬまま進行する。

式 (1.5) は分散関係 (1.3) の特殊な場合である。Whitham は分散波の定義として, 空間的な振動波形が, 分散関係によって時間的な振動と couple されている時は常に分散波の典型的な効果が期待できる, と述べた¹⁾。

いまつぎのような積分微分方程式を考える。

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (1.13)$$

基本解として, $\varphi = F \cdot e^{ikx - iwt}$ を考え, これを (1.13) に代入すれば,

$$-iwe^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) ike^{ik\xi} d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (1.14)$$

$$\text{よって } c = \frac{w}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta, \quad \zeta = x - \xi \quad \dots\dots\dots (1.15)$$

すなわち c は核 $K(x)$ のフーリエ変換である。

フーリエ逆変換によって

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk \quad \dots\dots\dots (1.16)$$

このことから, (1.4) なる関係式が与えられていれば, (1.16) により積分核を求め, これを (1.13) に入れて, $c(k)$ の満足する微分方程式が得られる。

たとえば,

$$c(k) = c_0 + c_2 k^2 + \cdots + c_{2m} k^{2m} \quad \cdots (1.17)$$

であれば

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + \cdots + (-1)^m c_{2m} \delta^{(2m)}(x) \quad \cdots (1.18)$$

で、式(1.13)はつぎの微分方程式となる。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \cdots + (-1)^m c_{2m} \frac{\partial^{2m+1} \varphi}{\partial x^{2m+1}} = 0 \quad \cdots (1.19)$$

1.2 線型分散波群の挙動

いま平均波数 $\bar{k}$ 、平均周波数(角振動数) $\bar{\omega} = \bar{W} = W(\bar{k})$ をもつ一群の線型素波が、 x の正方向に進行しているものとする。したがって ϕ は、

$$\phi = \frac{1}{\Delta k} \int_{\bar{k}-\Delta k}^{\bar{k}+\Delta k} F(k) \exp[i(kx - W(k))t] dk \quad \cdots (1.20)$$

ここに Δk は波群の波数の平均値よりの偏りの範囲であり、振幅 F は k によって緩慢に変化する関数、また $\Delta k \rightarrow 0$ の際 ϕ が 0 にならないようにする為に $(\Delta k)^{-1}$ が用いられている。

いま W を $\bar{W}$ のまわりに k について Taylor 展開すると、

$$W = \bar{W} + \frac{\partial W}{\partial k} \delta k + \cdots \doteq \bar{W} + (k - \bar{k}) \bar{c} + \cdots \quad \cdots (1.21)$$

ここに $\bar{c} = c(\bar{k})$ は平均波数に対応する群速度である。

いま $k - \bar{k}$ を K とし、 $F(k)$ を $F(\bar{k}) = \bar{A}$ で近似すると

$$\begin{aligned} \phi &\simeq \frac{\bar{A}}{\Delta k} \exp[i(\bar{k}x - \bar{W}t)] \int_{-\Delta k}^{\Delta k} \exp[iK(x - \bar{c}t)] dK \\ &= 2\bar{A} \frac{\sin \Delta k(x - \bar{c}t)}{\Delta k(x - \bar{c}t)} \exp[i(\bar{k}x - \bar{W}t)] \quad \cdots (1.22) \end{aligned}$$

これを Fig. 1.1 に図示した。これは群速度 $\bar{c}$ で進行するが、波数はほぼ $\bar{k}$ であり振幅は個々の波に対する包絡線となっている。また振幅項には分母に $(x - \bar{c}t)$ がかかっているために $\bar{c}$ で移動する点から見ると、 x の差に逆比例して振幅が減少する。 $x = \bar{c}t$ における振幅は $2\bar{A}$ である。

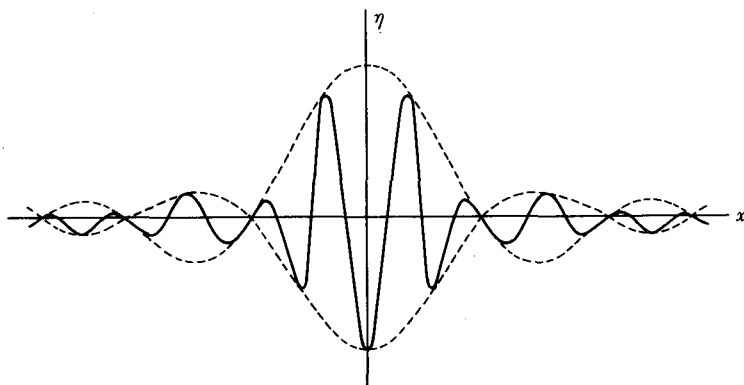


Fig. 1.1 線型分散波 (near-field)

1.3 定位相法

この波群は永い時間がたつと W の展開で無視した項が効いてきて(1.22)では表わされなくなる。この際用いられるのは Kelvin (1887) の定位相法 (method of stationary phase) といわれるものである。

まず、つぎの積分を考える。

$$\varphi(t) = \int_a^b F(k) e^{-ixt} dk \quad \dots\dots\dots (1.23)$$

ここに

$$\chi(k) = W(k) - k \frac{x}{t} \quad \dots\dots\dots (1.24)$$

x/t を一定にとれば χ はただ k を独立変数としており、種々の $c = (x/t)$ に対し、 c で移動する点における速度ポテンシャルの波数による貢献を加えあわせたものになる。 $e^{-ixt} = \cos(\chi t) - i \sin(\chi t)$ であるから、 t が大きいときは $d\chi/dk = 0$ の附近を除いては k の変化による χ の変化が僅かであっても $\exp(-i\chi t)$ は急速に変化し、従って正負の値をめまぐるしくとるために $\varphi(t)$ に対するこれら正負の値の寄与の程度が相互に相殺しあう。したがってこの積分 $\varphi(t)$ に対する寄与は主として $\chi(k)t$ (あるいは t が実数だから $\chi(k)$) なる位相が k によって変らない点すなわち定位相点の附近の値に依存する。

この考え方によって求められた $\varphi(t)$ の近似値は次式であらわされる。²⁾

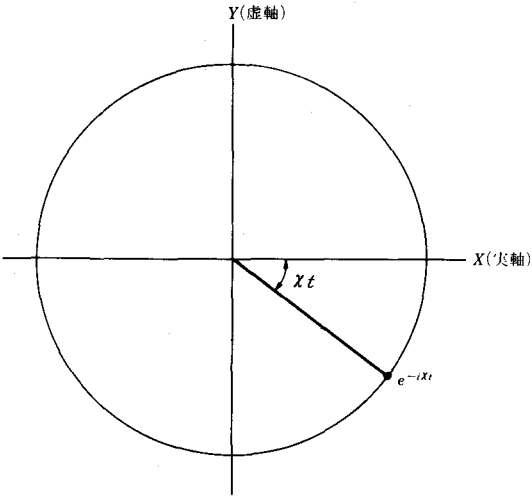


Fig. 1.2 e^{-ixt}

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \Sigma F(\alpha_r) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(\alpha_r)|}} \exp \left[-i \left(\chi(\alpha_r)t + \frac{\pi}{4} \text{sgn } \chi''(\alpha_r) \right) \right] \\ & + \Sigma F(\alpha_s) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{t|\chi'''(\alpha_s)|}} \exp \{ -it\chi(\alpha_s) \} + O\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1.25)$$

ここに α_r は $a \leq k \leq b$ の範囲内で $\chi'(k) = 0$ を満足する k のすべてのゼロ点 (ただし $\chi''(\alpha_r) \neq 0$) であり、また α_s は $\chi'(k) = 0$ を満足するが $\chi''(\alpha_s) = 0$ 、しかし $\chi'''(\alpha_s) \neq 0$ なる k のゼロ点である。この式は $F(k, t)$ および $\chi(k)$ が、 $a \leq k \leq b$ の範囲で k の解析関数でかつ、 $\chi(k)$ の定位相点においてのみ、 $\chi''(k)$ 、 $\chi'''(k)$ が同時にゼロにさえない場合には正しい。(上記の証明は Stoker pp. 181 ~ 186 参照) また $\text{sgn } \chi''(\alpha_r)$ は χ'' の符号という意味でその正負に応じて $\pi/4$ は正、負の符号をとることを示す。

さて特別なケースとして $w = \pm W(k)$ であれば進行波と逆行波とあるから (1.6) が解であるが $k > 0$ の値に対し $W'(k)$ は単調で正であるとし、 $x > 0$ における (1.6) の漸近解を考えて見る。もし $W(k)$ が奇関数なら $W'(k)$ は偶関数であり、 $\chi'(k) = 0$ は 2 コの根を持つ。(k が $\chi' = W'(k) - \frac{x}{t} = 0$ を満足するならば、 $W'(k) = W'(-k)$ だから $\chi'(-k) = W'(-k) - \frac{x}{t} = 0$ が成立する。) よって (1.6) の右辺第一項に対する漸近解として (1.25) より、

$$\varphi(t) = F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}} \exp \left[-i \left(\chi(k)t + \frac{\pi}{4} \text{sgn } \chi''(k) \right) \right]$$

$$+ F_1(-k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(-k)|}} \exp \left[-i \left(\chi(-k)t + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \chi''(-k) \right) \right] \quad \dots (1.26)$$

(1.8)(1.11)を用いると

$$F_1(-k) = F_1^*(k) \quad \dots (1.27)$$

また

$$\chi(-k) = W(-k) + k \frac{x}{t} = -W(k) + k \frac{x}{t} = -\chi(k) \quad \dots (1.28)$$

χ'' も奇関数の筈だから

$$\operatorname{sgn} \chi''(-k) = -\operatorname{sgn} \chi''(k) \quad \dots (1.29)$$

したがって (1.20) ~ (1.22) を用いると (1.26) 右辺第二項は

$$F_1^*(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}} \exp \left[i \left(\chi(k)t + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \chi''(k) \right) \right] \quad \dots (1.30)$$

$F_1 e^{iz} + F_1^* e^{-iz} = R_e(2F_1 e^{iz})$ であるから (1.26) は

$$\varphi(t) = R_e \left[2F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}} \exp \left[-i \left(\chi(k)t + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \chi''(k) \right) \right] \right] \quad \dots (1.31)$$

$$\text{ただし, } k(x, t); \quad W'(k) = \frac{x}{t}, \quad \chi(k) = W(k) - k \frac{x}{t} \quad \dots (1.32 \cdot 1)$$

$$k > 0, \quad \frac{x}{t} > 0 \quad \dots (1.32 \cdot 2)$$

となる。 $W(k)$ の奇関数に対し (1.6) の右辺第二項に対する漸近解は (1.24) より

$$\chi_1(k) = W(k) + k \frac{x}{t} \quad \dots (1.33)$$

に対して $d\chi_1/dk = 0$ を満足する k でなければならないことから, $x < 0$ に対し (1.31) と同様な形がえられるが, $x > 0$ に対する寄与はない。

$W(k)$ が偶関数のときは $W'(k)$ は奇関数であり, $\chi'(k) = 0$ は 1 コの根のみで, 正の値である。(1.6) の第一項からは 1 コの定位相点が貢献し, また第二の積分項には

$$W'(k) = -\frac{x}{t}$$

を満足する定位相点が貢献する。しかるに $W'(k)$ は奇関数なので $x > 0$ に対し

$$\frac{x}{t} = -W'(k) = W'(-k)$$

であるから, $-k$ もまた定位相点として貢献する。若干の計算の後に, この場合も (1.31) が導びかれる。

1.4 局所波数, 局所振動数, 群速度

さて任意の点 (x, t) において (1.32・1) によりある波数 $k(x, t)$ が求まり, 分散関数 $w = W(k)$ はまたその点における角周波数 $w(x, t)$ を与える。位相は

$$\theta(x, t) = -\chi(k, t)t = k(x, t) \cdot x - w(x, t) \cdot t \quad \dots (1.34)$$

であり, (1.31) は

$$\varphi = R \left\{ A(x, t) e^{i\theta(x, t)} \right\} \quad \dots\dots\dots (1.35)$$

と書くことができる。ここに

$$A(x, t) = 2F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}} e^{-\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} W''} \quad \dots\dots\dots (1.36)$$

これによって分散波は基本解と同じ形式をとる波列であることがわかるが, A, k, w は (x, t) の関数である。(1.34) より

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = k + \{x - W'(k)t\} \frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -W(k) + \{x - W'(k)t\} \frac{\partial k}{\partial t}$$

(1.32・1) より $x - W'(k)t = 0$ であるから,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -W(k) = -w(x, t) \quad \dots\dots\dots (1.37)$$

すなわち θ_x は局所波数, $-\theta_t$ は局所角振動数になる。(k, w がフーリエ積分の素波をあらわすと定義されていたのに, ここでは定位相点よりの寄与としてあらわれていることに注意!) しかも $\theta_x, -\theta_t$ は非一様な波列にあっても分散関係を満足している。

以上によって (1.6) のようにフーリエ積分であらわされる波群は初期には (1.22) のような波のかたまりであるが, 長い時間がたつと (1.25) であらわされ, また, $w = \pm W(k)$ であれば (1.35) と簡単化される。この最後の関係より, 波数, 角振動数が局所的に (1.37) であたえられ振幅は (1.36) によって求まるということになる。ただし, (1.32・1) より

$$\frac{k_x}{k} = \frac{W'}{k W''} \frac{1}{x}, \quad \frac{k_t}{k} = -\frac{1}{k W''(k)} \cdot \frac{1}{t}$$

であって, x, t は大きいから 1 波長, 1 週期あたりの k の変化は小さく, k も従って w もごく緩慢に変化し, また A も緩慢に変化することに留意せねばならない。

ある指定された k_0 の存在する場所は (1.32・1) より

$$x = W'(k_0) t \quad \dots\dots\dots (1.38)$$

で与えられる。いいかえると, $W'(k_0)$ の速度で動く点の上での波数は常に k_0 , 角周波数は $W(k_0)$ である。しかも, 群速度は dw/dk で与えられるので, $k = \text{一定}$ の波は群速度で伝播することになる。これに反してある指定された位相の値 θ_0 は

$$\theta(x, t) = \theta_0$$

で伝播する。これより, $\theta_x(dx/dt) + \theta_t = 0$ がえられ, 従って

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{w}{k} \quad \dots\dots\dots (1.39)$$

すなわち位相速度 c は, w, k の意味が拡張されても, やはり, w/k によって与えられる。

例えば深海波の場合, 分散関係は $W = \sqrt{gk}$ であるから, (1.32) (1.34) を用いて

$$k = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad w = \frac{gt}{2x}, \quad \theta = -\frac{gt^2}{4x} \quad \dots\dots\dots (1.40)$$

群速度 $W'(k)$ は $\frac{1}{2} \sqrt{g/k}$, 位相速度 w/k は $\sqrt{g/k}$ となる。この関係は **Fig. 1.3** に与えられる。

(1.36)よりつぎの量を計算する。

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} A A^* dx$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{F_1(k) F_1^*(k)}{t |W''(k)|} dx$$

$W''(k) > 0$ の場合, $x = W'(k)t$ を用いると

$$Q(t) = (8\pi)^{-1} \int_{k_1}^{k_2} F_1(k) F_1^*(k) dk \quad \dots\dots\dots (1.41)$$

これはエネルギーをあらわす指標と考えられるが, k_1, k_2 を固定すれば, その点 $x_1 = W'(k_1)t, x_2 = W'(k_2)t$ は群速度で移動するので, **Fig. 1.3** で示す

ように $Q(t)$ は 2 直線の間に含まれ, 群速度で伝播する。 $|A|$ は $t^{-1/2}$ で減少する。

1.5 浅海波の分散とフロント付近の挙動

一様水深 h_0 における微小振幅表面波の分散関係は, (1.5) であたえられ, 2 コのモードがある。すなわち

$$w = \pm W(k), \quad W(k) = \sqrt{g k \tanh k h_0} \quad \dots\dots\dots (1.42)$$

そこで深海波の場合の **Fig. 1.3** に対応して **Fig. 1.4** がえられる。 $|k h_0| < \pi/2$ のとき

$$\tanh k h_0 = (k h_0) - \frac{1}{3} (k h_0)^3$$

$$+ \frac{2}{15} (k h_0)^5 - \dots \quad \dots\dots\dots (1.43)$$

と展開できるので

$$c = \frac{w}{k} = \sqrt{g(h_0 - \frac{1}{3} k^2 h_0^3 + \frac{2}{15} k^4 h_0^5 \dots\dots)}$$

$$\dots\dots\dots (1.44)$$

従って $k h_0 \rightarrow 0$ のとき $c = \sqrt{g h_0}$ でこれは位相速度であるが, $W'(k)$ についても同じ値になる。

Fig. 1.4 で知られるようにある時刻においては $k h_0$ の小さい波要素ほど伝播速度が早く, 前方に出る。従って $h_0 = \text{一定}$ から, 先頭ほど波長が長い。

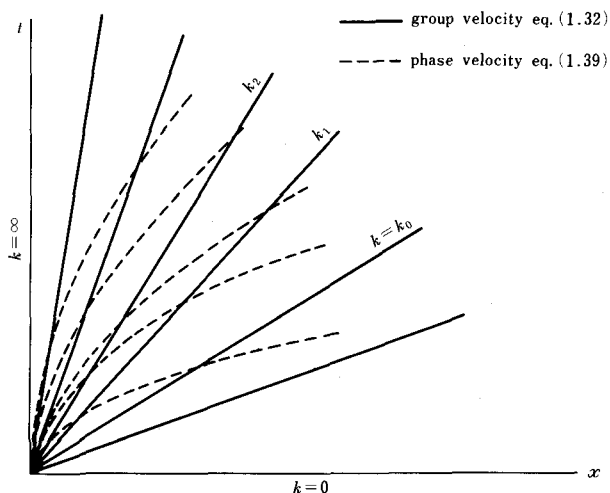


Fig. 1.3 深海波の分散関係

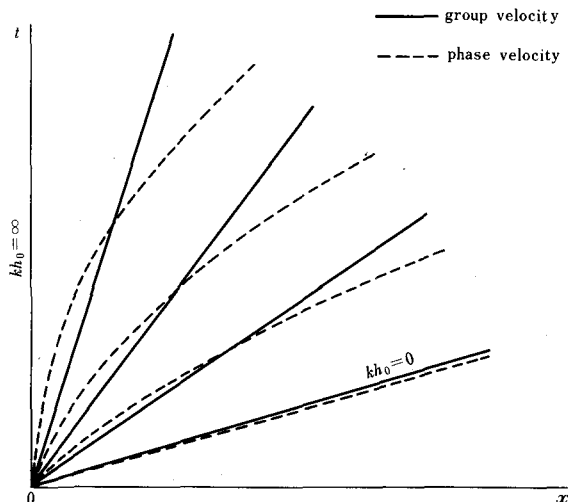


Fig. 1.4 浅海波の分散関係

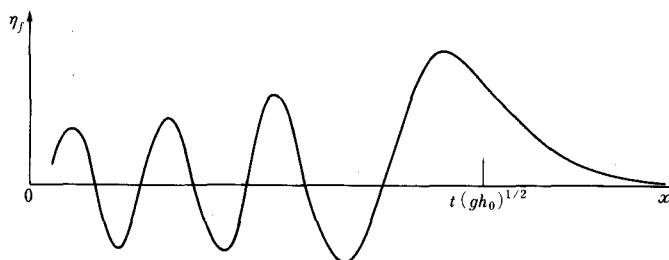


Fig. 1.5 フロント附近の波列

しかし明らかに (1.42) より $kh_0 \rightarrow 0$ においては $W''(0)=0$ であり, また $W'''(0) \neq 0$ なので, その時は (1.25) 右辺第 2 項が効いてきて η は $t^{1/2}$ でなく $t^{1/3}$ で減少する。

(1.42) を (1.43) によって展開すると,

$$\begin{aligned} W(k) &= \left[gk \left\{ (kh_0) - \frac{1}{3} (kh_0)^3 + \frac{2}{15} (kh_0)^5 - \dots \right\} \right]^{1/2} \\ &= k \sqrt{gh_0} \left[1 - \frac{1}{3} (kh_0)^2 + \frac{2}{15} (kh_0)^4 - \dots \right]^{1/2} \\ &\approx k \sqrt{gh_0} \left(1 - \frac{1}{6} (kh_0)^2 \right) \end{aligned}$$

すなわち

$$W(k) \sim c_0 k - \gamma k^3 \quad \dots\dots\dots (1.45)$$

$$c_0 = \sqrt{gh_0} \quad \gamma = \frac{1}{6} h_0^2 \sqrt{gh_0} \quad \dots\dots\dots (1.46)$$

右の方へ進行する成分は従って, フーリエ積分を用いて,

$$\begin{aligned} \eta &\sim \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp \{ i (kx - Wt) \} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp \{ i k (x - c_0 t) + i \gamma k^3 t \} dk \quad \dots\dots\dots (1.47) \end{aligned}$$

いま $t=0$ で $\eta(x) = \delta(x)$, $\eta_t(x) = 0$ とすると, (1.8) より類推してフーリエ逆変換は

$$\begin{aligned} \eta_*(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp (-i k x) dx = \exp (0) = 1 \\ g_*(k) &= 0 \end{aligned}$$

よって進行波成分では $F = \frac{1}{4\pi}$

そこで (1.6) に入れると

$$\eta \sim \eta_f = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ i k (x - c_0 t) + i \gamma k^3 t \} dk \quad \dots\dots\dots (1.48)$$

いま

$$s = \sqrt[3]{3\gamma t} \cdot k, \quad z = \frac{x - c_0 t}{\sqrt[3]{3\gamma t}} \quad \dots\dots\dots (1.49)$$

として上式を書直すと, 積分はつぎの形に帰着する。

$$A_i(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(sz + \frac{1}{3} s^3 \right) \right\} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(sz + \frac{1}{3} s^3 \right) ds \quad \dots\dots\dots (1.50)$$

これをエアリー積分という。³⁾ (1.48) はこの時

$$\eta_f = \frac{1}{2 \sqrt[3]{3\gamma t}} A_i(z) \quad \dots\dots\dots (1.51)$$

となる。

$A_i(z)$ の一般的形状は Fig. 1.5 に示され、漸近的性状は

$$A_i(z) \sim \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) , & z \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) , & z \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \dots\dots (1.52)$$

となる。 η_f は $x = c_0 t$ より前では指数関数的に減少し、後ろでは振動する。 $x = c_0 t$ 上では (1.51) より正しく $t^{-1/3}$ に比例し、まさしく (1.25) 右辺第 2 項に一致する。また $x = c_0 t$ をはなれると、 $(x - c_0 t)/(3\gamma t)^{1/3} \rightarrow -\infty$ になるにつれて

$$\eta_f \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3\gamma t(c_0 t - x)}} \sin\left\{\frac{2}{3} \frac{(c_0 t - x)^{3/2}}{\sqrt{3\gamma t}} + \frac{\pi}{4}\right\} \dots\dots\dots (1.53)$$

となり、これは (1.31) よりも得ることができる。

つぎに Heaviside の階段関数は原点について

$$Y(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad H(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \dots\dots (1.54)$$

Dirac の δ 関数を用いると

$$Y = \int_{-\infty}^x \delta \cdot dx \quad ; \quad H = \int_x^{\infty} \delta \cdot dx \dots\dots\dots (1.55)$$

したがって (1.51) の η_f を用いて、 Y , H に対し、

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &\sim \int_{-\infty}^x \eta_f dx \quad , \quad \text{or} \quad \eta_2 \sim \int_x^{\infty} \eta_f dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z A_i(z) dz \quad , \quad = \frac{1}{2} \int_z^{\infty} A_i(z) dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.56)$$

$$z = \frac{x - c_0 t}{\sqrt[3]{3\gamma t}}$$

(1.45) を用いると (1.4) (1.17) ~ (1.19) より直ちに $W(k) = c_0 k - \gamma k^3$ なる分散関係の満足する微分方程式は

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0 \dots\dots\dots (1.57)$$

であることが知れる。この式は線型化された Korteweg-deVries 方程式 (KdV 方程式) といい、その解が (1.51) あるいは (1.56) で与えられるのである。

2. 非線型分散波

2.1 Boussinesq 方程式, Korteweg-deVries 方程式

水平な底よりはかった距離を y とした場合ラプラス方程式は

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \dots\dots\dots (2.1)$$

で、 $y = 0$ で $\varphi_y = 0$ である。いま振幅 a 、水深 h_0 、波長 ℓ として、振幅水深比 $\alpha = a/h_0$ 、(水深波長比)² $\beta = h_0^2/\ell^2$ を用い、次元をもつ量に ' をつけ、無次元量に ' のつかない記号を用い、変

数を無次元化する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} x' &= \ell x, & y' &= h_0 y, & t' &= \ell t / c_0 \\ \eta' &= a \eta, & \varphi' &= \frac{g \ell a \varphi}{c_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

これによって基礎方程式と境界条件はつぎの通りとなる。

$$(2.1) \text{ 式} \quad \beta \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad 0 < y < 1 + \alpha \eta \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\text{底の条件} \quad y = 0 \quad \text{で} \quad \varphi_y = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\text{水面の条件} \quad y = 1 + \alpha \eta \quad \text{で} \quad \eta_t + \alpha \varphi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \varphi_y = 0 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\eta + \varphi_t + \frac{1}{2} \alpha \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \varphi_y^2 = 0 \quad \dots\dots (2.6)$$

浅水理論では φ_x は近似的に y に無関係であり、かつ β なる量は小さい。そこで φ を β の多項式に展開し、(2.4)を用いると、次式がえられる。

$$\varphi = \sum_0^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{y^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \cdot \beta^m \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

水面条件に代入すると β^2 以下の項を無視して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \{ (1 + \alpha \eta) f_x \}_x - \left\{ \frac{1}{6} (1 + \alpha \eta)^3 f_{xxx} + \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha \eta)^2 \eta_x f_{xx} \right\} \beta &= 0 \\ \eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 - \frac{1}{2} (1 + \alpha \eta)^2 \left\{ f_{xt} + \alpha f_x f_{xx} - \alpha f_{xx}^2 \right\} \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

β の項を無視すると非線型浅水波の式

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \{ (1 + \alpha \eta) w \}_x &= 0 \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x &= 0, \quad w = f_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

をうる。また β の 1 次の項まで残し、 $\alpha \beta$ の項を無視すると

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \{ (1 + \alpha \eta) w \}_x - \frac{1}{6} \beta w_{xxx} &= 0 \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x - \frac{1}{2} \beta w_{xt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

ただし、(2.9) (2.10) の第 2 式は (2.8) 第 2 式を x で微分している。しかるに

$$\varphi_x = w - \beta \frac{y^2}{2} w_{xx} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

で、水深にわたった平均値は

$$\bar{u} = w - \frac{\beta}{6} w_{xx} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

逆関数は

$$w = \bar{u} + \frac{1}{6} \beta \bar{u}_{xx} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

これを(2.10)に入れると

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \{ (1 + \alpha \eta) \bar{u} \}_x &= 0 \\ \bar{u}_t + \alpha \bar{u} \bar{u}_x + \eta_x - \frac{1}{3} \beta \bar{u}_{xxt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

ただし $O(\alpha\beta)$, $O(\beta^2)$ の項は無視している。

最後に第1式より, $\bar{u}_x \doteq -\eta_t$ として第2式に入れると, 結局

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \{ (1 + \alpha \eta) \bar{u} \}_x &= 0 \\ \bar{u}_t + \alpha \bar{u} \bar{u}_x + \eta_x + \frac{1}{3} \beta \eta_{xtt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

(2.14)(2.15)を Boussinesq 方程式という。

また,

$$w = \eta + \alpha A + \beta B \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

とにおいて(2.10)に入れ, 進行波では $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha, \beta)$ であるので t の微係数を $-x$ の微係数とよみかえ, (2.10)の両式を比較すると

$$A = -\frac{1}{4} \eta^2, \quad B = \frac{1}{3} \eta_{xx}$$

がえられ, これより, (2.16)は

$$w = \eta - \frac{\alpha}{4} \eta^2 + \frac{\beta}{3} \eta_{xx} \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

(2.10)は

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2} \alpha \eta \eta_x + \frac{1}{6} \beta \eta_{xxx} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

この式は Korteweg-deVries (KdV) 方程式である。(2.18)で, α, β の項を無視すると直ちに知れるようにこの波は x の正方向に進行する波である。

2.2 孤立波, クノイド波

式(2.18)をもとの次元のある記号に直すと, KdV方程式は

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \eta_{xxx} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

$\eta/h_0 = 0$ のとき線型化された KdV 方程式(1.57)をうる。

$$\eta = h_0 \zeta(X), \quad X = x - Ut \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

を用いると(2.19)は

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta''' + \frac{3}{2} \zeta \zeta' - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta' = 0 \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

これは直ちに積分されて

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta'' + \frac{3}{4} \zeta^2 - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta + G = 0 \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

これに ζ' をかけて積分すれば

$$\frac{1}{3} h_0^2 \zeta'^2 + \zeta^3 - 2 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta^2 + 4 G \zeta + H = 0 \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

$X = \infty$ で $\zeta, \zeta' = 0$, また $\zeta = \alpha = (a/h_0)$ で $\zeta' = 0$ とすると $G = H = 0$ となり

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 = \zeta^2 (\alpha - \zeta), \quad \frac{U}{c_0} = 1 + \frac{\alpha}{2} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

これを積分すると

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3\alpha}{4h_0^2}} \cdot X \right) \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

よって

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{3\eta_0}{4h_0^3}} \cdot (x - Ut) \right\} \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

なる孤立波がえられる。

一般的に $G, H \neq 0$ とすると (2.23) 左辺第 2 項以下は ζ に関する 3 次方程式である。そこでこの 3 次方程式の根を考えるのに、 ζ がその値になれば (2.23) より、残りの第一項がゼロになることを考えれば、 $d\zeta/dX = 0$ ならしめる ζ の値は、 ζ の定義からひとつは波の底、ひとつは波の峯において考えられる。従って、 $\zeta = 0$, α を 3 次方程式の 2 根にとれる筈である。このことからあとの 1 根は負である。そこでその値を $(\alpha - \beta')$ とする。これによって (2.23) は

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 = \zeta (\alpha - \zeta) (\zeta - \alpha + \beta') \quad , \quad 0 < \alpha < \beta' \quad \dots\dots (2.27)$$

これと (2.23) との比較により

$$\frac{U}{c_0} = 1 + \frac{2\alpha - \beta'}{2} \quad , \quad G = \frac{1}{4} \alpha (\alpha - \beta') \quad , \quad H = 0 \quad \dots\dots (2.28)$$

このように係数を定めれば (2.27) の解は

$$\zeta = \alpha \operatorname{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{3\beta'}{4h_0^2}} \cdot (x - Ut), k_1 \right) \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

これをクノイド波 (Cnoidal Wave: cn 波) という。母数は

$$k_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta'}} \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

従って cn の週期から波長 ℓ は次式であたえられる。

$$2K = \sqrt{\frac{3\beta'}{4h_0^2}} \cdot \ell \quad \text{or} \quad \ell = \frac{4h_0}{\sqrt{3\beta'}} K \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

ここに K は

$$K(k_1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} \quad : \quad k_1 : \text{母数} \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

であたえられる。

(2.26), (2.29) で知られるように孤立波もクノイド波も波形を変えずに伝播する。すなわち保存波である。クノイド波の分散関係は、

$$w = Uk = \left(1 + \frac{2\alpha - \beta'}{2}\right) k \quad : \quad k : \text{波数} \quad \dots\dots\dots (2.33)$$

β' は (2.30) ~ (2.31) より ℓ と α の関数となるので (2.33) は $w = w(k, \alpha)$ である。非線型分散波ではこのように k の外に振幅が分散関係に入ってくる。

ここでパラメーターの意味をまとめておく。

(i) $\alpha = \frac{a}{h_0}$: 非線型性効果 ($\beta \neq 0$ とした非線型長波の式 (2.9) により, 特性曲線法で知れるように静水面より高まる波では, 波の高い部分は低い部分より早く進むので, 波の前面が次第に急になる。このことから, : 振幅分散効果: といえる。⁴⁾

(ii) $\beta = \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2$: 分散効果。また振幅分散効果と区別して: 周波数分散効果: ともいう。線型波の分散において kh_0 が意味をもつが, kh_0 は $(2\pi h_0/\ell)$ となるので β と同じ意味であるからである。

(2.29) にあらわれる β' は (2.31) より

$$\beta' = \frac{16}{3} \left(\frac{h_0}{\ell}\right)^2 [K(k_1)]^2 = \frac{16}{3} \beta [K(k_1)]^2 \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

であり, 母数 k_1 は (2.30) のように α と β' との比の示標である。従って $\beta' = f(\alpha, \beta)$ であり, cn 波は非線型効果と分散効果の両作用をうけている。 $k_1 = 0$ では線型波 (cos 波) となり, $k_1 = 1$ では孤立波 (sech 波) となる。

非線型効果と分散効果との比率を考えて

$$U = \frac{\alpha}{\beta} \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

をアーセル数 (Ursell number) という。KdV 方程式の誘導過程から考えて, $0 \leq \alpha \leq \beta' \ll O(1)$ であったが, α, β と同じオーダーと考えて, U は 1 付近の大きさとしてよいであろう。線型波では U は 1 よりも非常に小さい値である。他方あまりに小さくなれば (2.18) より知られるように線型の KdV 方程式となる。また U が大変大きくて β が無視できるようであれば, 非線型浅水理論の式となり, 特性曲線法で記述できる。従って KdV 方程式が有効な為にはアーセル数が 1 の付近, あるいはもっと厳密に考えると式 (2.18) より $I = 9 \left(\frac{\eta \eta_x}{\eta_{xxx}}\right) U$ の値が 1 のオーダーであることが望ましいということになる。

なお孤立波やクノイド波が従来のように面倒な摂動展開を経なくて, 比較的意味の明瞭な式 (2.23) より初等的に解けることは現象の理解上極めて意味のあることである。

3. ソリトン分裂

3.1 孤立性段波の遷移過程

前節末尾で, α, β が同じ程度に小さければ KdV 方程式で記述される波が存在することを述べた。孤立波にしる, クノイド波にしる, その波形は $X = x - Ut$ の関数なので, 伝播速度 U によって波形を変化せずに水路を伝播する。有限振幅の浅水長波において波形が進行につれて前傾化するのはよく知られているので, 孤立波やクノイド波のようなのは振幅分散効果と周波数分散効果が拮抗して平衡を保っていると解釈される。これらは, 保存波 (permanent wave) の一種である。KdV 方程式の成立

範囲で任意の波形があれば、分散効果をうけて次第に変形する。クノイド波は無限波列であるから、有限な任意波形の変形によって終局的に得られる波形でないとすれば、それはいかなるものかといえ、孤立波の群となるのではないかという考えに到達する。そしてここ数年来の研究によって、確かに任意の波形は分散しながら終局的には数コの孤立波列に分裂することが分った。式(2.24)より知られるように孤立波は α が大きいほど早く進むから、高い波が低い波を追い越すことも考えられる。このとき孤立波はお互いに通り抜けてもとの形をとり戻して離れていく。すなわち孤立波は衝突してもこわれないで、相互作用をしながらも独立性を失わない。そこで素粒子との類推からこの孤立波をソリトン Soliton と呼んでいる。ソリトンの衝突、分裂、浅水増幅などについては首藤博士の解説がある。⁶⁾

一山とさざ波とからなる波を孤立性段波と名づける。この波の分散過程は、海岸付近でしばしば起っているにもかかわらず、あまり技術的に取り入れて検討されていない。それが本講の動機でもあるが以下に1974年以降著者らの研究室で行なった研究成果を中心にして講述する。⁷⁾⁸⁾⁹⁾

3.2 逆散乱問題

いま $X = x - c_0 t$, $T = t$ において(2.19)を書直すと, $\eta_x = \eta_X$, $\eta_t = c_0(\eta_T - \eta_X)$ だから

$$c_0 \left[\eta_T + \frac{3}{2h_0} \eta \eta_X + \frac{h_0^2}{6} \eta_{XXX} \right] = 0$$

これに

$$\eta = -\frac{4}{\sqrt[3]{6}} h_0^{5/3} u, \quad X = \sqrt[3]{\frac{h_0^2}{6}} \xi \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

なる変換をほどこすと結局

$$u_T - 6 u u_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

なる標準型のKdV方程式をうる。ここで変数 ξ は物理的水平座標とつぎの関係になっていることに注意が必要である。

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{6}{h_0^2}} (x - c_0 t) \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

以下は便宜上の為に記号 ξ を X と書く。 すなわち

$$u_T - 6 u u_X + u_{XXX} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

さてここで

$$\left. \begin{aligned} -\infty < x < \infty, \quad & \text{で} \quad u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

なる初期値問題をとく。

$$\text{いま} \quad Q_v \equiv v_T - 6 v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

を満足する解 v を用い

$$u = v^2 + v_x \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

とおけば、この u は(3.4)を満足する。それは

$$P_u \equiv u_T - 6 u u_X + u_{XXX}$$

とおけば、

$$P_u = \left(\frac{\partial}{\partial X} + 2\nu \right) Q_v \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

であるからである。また KdV方程式は変換

$$t \rightarrow t', \quad x \rightarrow x' - 6ct', \quad u \rightarrow u' + c \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

とおいた時、やはり $P'_u \equiv u'_t - 6u'u'_x + u'_x x'x'$ となる。これをガリレオ不変 (galilean iuvariant) という。(3.7)の変換関係は u が既知の関数であれば Ricatti の微分方程式である。いま線型変換

$$\nu = \phi_x / \phi \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

を用いて (3.7) を書き直すと

$$\phi_{xx} - u\phi = 0 \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

(3.9) のように u は定数 λ を用いて ($u' - \lambda$) とし、 t は t' にうつしたときにも Pu' を満足するから (3.11) を

$$\phi_{xx} - (u - \lambda)\phi = 0 \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

とおくことができる。量子力学においては u はポテンシャル、 λ はエネルギーレベル、 ϕ は波動関数である。そして与えられたポテンシャル u に対し ϕ と λ を決定するのが散乱問題であるが、ここでは u を決定するので、逆散乱問題と呼ばれる。

(3.12) は Schrödinger 方程式である。また u は時間 t によって異なった分布をするが、ここでは t を時間と考えずパラメーターと考える。関数

$$\varphi(x, \tau, t) = \phi(x, t) e^{i\lambda\tau} \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

では $\phi(x, t)$ は $e^{i\lambda\tau}$ によって時間 τ で振動する振幅となるが、 t はパラメーターである。そして方程式

$$\varphi_{xx} - \varphi_{\tau\tau} - u(x, t)\varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

は (3.13) によって (3.12) に帰着する。しかも (3.12) は

$$L[\phi] \equiv \phi_{xx} - u(X)\phi, \quad L[\phi] + \lambda\phi = 0 \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

で Sturm-Liouville 型方程式であり、与えられた条件に対し、固有値 λ を決定し固有関数 ϕ を求めるのが散乱問題である。その条件は (3.5) であるが量子力学においては極めて巧妙な解法が提示されており、その詳細と興味ある例題について首藤博士の解説がなされている。⁶⁾

その要点は $t=0$ における波形 $u(X)$ を用いて ($u < 0$)、Schrödinger 方程式によって離散固有値 λ_n と $t=0$ における固有関数 ϕ の形が決定されさえすれば、固有値 λ が t にかかわらず一定ということから任意の t での無限遠での ϕ が定まり、これに対応する u が線型積分方程式である Gel'fand-Levitan 方程式の解より求められるのである。

3.3 変分法による固有値問題の解

領域 G における Sturm-Liouville 型の微分方程式

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda y = 0 \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

について、固有値問題をそれと等価な変分問題に対応させることは、ある汎関数を考えてその第一変分を 0 とおいてできたオイラーの方程式が、固有値問題の微分方程式になるようにすればよい。

(3.16) がオイラーの方程式となる汎関数は

$$J[y] \equiv \int_G (p y'^2 + q y^2) dx - \lambda \int_G y^2 dx \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

である。完全関数系を $w_K(X)$ として停留関数を近似的に $y = \sum_{k=1}^n a_k w_K(x)$ とおき $J[y]$ に代入して J が極値となるように係数 a_k を定める。 $J[y]$ の第一変分を 0 とおき上の y を代入すれば

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_{kh} + \lambda \gamma_{kh}) a_k = 0 \quad (h=1, 2, \dots\dots\dots, n) \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{kh} &= \int_G [(p W_k')' - q W_k] W_h dx \\ \gamma_{k,h} &= \int_G W_k W_h dx \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

α_{kh} , γ_{kh} は既知であるから上の n 次方程式から a_k を求めることができる。解が存在するためには係数行列が 0 でなければならない。

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda \gamma_{1,1} & \alpha_{2,1} + \lambda \gamma_{2,1} & \dots\dots\dots \alpha_{n,1} + \lambda \gamma_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,n} + \lambda \gamma_{1,n} & \alpha_{2,n} + \lambda \gamma_{2,n} & \dots\dots\dots \alpha_{nn} + \lambda \gamma_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (3.20)$$

$\Delta = 0$ は λ に関する n 次方程式である。この n 個の根を小さい順に並べれば $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_2^{(n)}$, $\dots\dots\dots$, $\lambda_n^{(n)}$ がそれぞれ第 1, 2, $\dots\dots\dots$, n 固有値の近似値となる。この方法が Galerkin の方法である。

(3.17) を極値にすると

$$I[y] \equiv \int_G (p y'^2 + q y^2) dx \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

を付帯条件

$$H[y] \equiv \int_G y^2 dx = 1 \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

のもとに最小にすることである。付帯条件の代りに $I[y]/H[y]$ を最小にしてもそれが第 1 固有値の近似値となる。そのように停留関数の係数 a_k を定めるのである。第 n 固有値は直交条件

$$\int_G y_k \cdot y dx \quad (k=1, 2, \dots\dots\dots, h-1) \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

のもとに $R[y]$ を最小にすればよい。この方法が Rayleigh-Ritz の方法である。

Schrödinger 方程式は (3.16) で $p=1$, $q=u$, $y=\phi$ である。Galerkin 法では第 $(2n-1)$ 固有値に対し、境界条件 $x \rightarrow \pm \infty$ で $\phi=0$ を満足する偶関数として

$$\phi = \phi_0 (a_1 + a_2 x^2) \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

第 $2n$ 固有値に対し同じ境界条件を満足する奇関数として

$$\phi = \phi_0 (a_1 x + a_2 x^3) \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

を用いる。また Rayleigh-Ritz 法では

$$\phi = \phi_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3 + a_4 \phi_4 \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \cdot H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \quad (3.27)$$

である。第2固有値を求める時の直交条件は φ_n が正規直交系であるので

$$1 + a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 + a_4 a'_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

となる。 a'_n は第2固有関数の係数を表わす。

Schrödinger 方程式 (3.12) のポテンシャルが

$$u = -U_0 \operatorname{sech}^2 \alpha x \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

の場合の固有値 λ は⁶⁾

$$\lambda = -\frac{\alpha^2}{4} \left[-(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{4U_0}{\alpha^2}} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

[] 内が正となる n の

表-1 変分法による固有値

個数が発生ソリトン数
に対応する。そこで

$u = -6 \operatorname{sech}^2 x$ のときは

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1$$

$u = -2 \operatorname{sech}^2 x$ のときは

$$\lambda_1 = -1$$

	理論解		R-R 法		G-法	
u	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
$-6 \operatorname{sech}^2 X$	-4	-1	-3.98684	-0.90924	-3.98324	-0.91220
$-2 \operatorname{sech}^2 X$	-1		-0.98214		-0.98189	

である。これに対し、上述変分法による数値解を表-1に示す。すなわち精度は非常に良い。

孤立性段波の実験波形の検討から、 $t=0$ の波形として、Fig. 3.1がえられた。 $\tanh$ 波は

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \eta_{\max} \left\{ 1 - \tanh \left(\frac{X}{A} + 2.5 \right) \right\} & -(2.5A + X_c) \leq X \leq 0 \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\max} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{5A + 2X_c + X}{A} - 2.5 \right) \right\} & -2(2.5A + X_c) \leq X \leq -12.5A + X_c \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

X_c : 波形の変曲点より対称軸ま
での距離

A : 波前面の勾配を決定するパ
ラメーター

$\sin^2$ 波は

$$\eta = \eta_{\max} \sin^2 \frac{\pi X}{L} \quad \dots (3.32)$$

実験波が実線で、(3.31)(3.32)に示したの
は点線である。

Fig. 3.2は $\sin^2$ 波の初期波高水深比 H_0/h
が0.2で、周期 T がことなる場合に、ソリ
トン波高 $(2|\lambda|)$ が初期波高の何倍になる
かを示したものである。2.0 < T < 6.0で
はGalerkin法がRayleigh-Ritz法よりやや
小さい値を示すのは、前者の試験関数項の

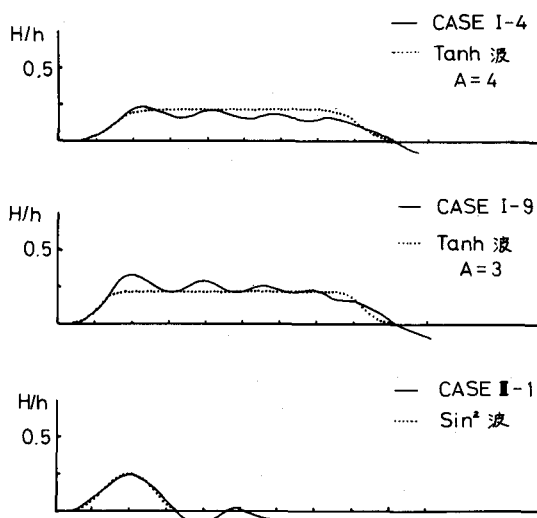


Fig. 3.1 $\tanh$ 波と $\sin^2$ 波

数が少ない為のようである。

式(3.29)で $\alpha = \sqrt{U_0/2}$ は孤立波である。それ以外の、 $\alpha = c\sqrt{U_0/2}$ について、 $0 < c < 1$ のときは(3.30)より初期波高 U_0 より大きい波高のソリトンが発生し、その数も2以上ある。 $c > 1$ のときは $2|\lambda| < U_0$ である固有値が求まるだけで、分裂してソリトンが生ずることはない。前者は孤立波に比べ波長が長く、後者は孤立波より急で波長も短い。

$T = 1.0 \text{ sec}$ の $\sin^2$ 波の有効波長は同じ波高の孤立波の有効波長より短かったので増幅度は1より小となった。

Fig. 3.3 は $\tanh$ 波の増幅度を周期を横軸に波面の勾配に関係する A をパラメーターとして示した。このように増幅度は2倍に漸近してゆく。

しかし実験では小さな波動が加わり、 $\tanh$ 波のような理想的な台形状の波がえられないせいか、2倍にまで達するソリトン分裂は起っていない。

実際の実験波を用いた場合、R-R法は5%以内でよく増幅度を示し、G法については項数の増加が望まれた。

3.4 ソリトン分裂過程の数値解との比較

いま式(2.19)を

$$\xi = \frac{X}{c_0} - t \quad , \quad X = x \tag{3.33}$$

とおいて独立変数 (x, t) を (X, ξ) に変換してみる。実験では $x = \text{一定}$ の場所に波高計を据えて記録するから、えられた記録 $\eta = \eta(t)$ を用い t 軸を反対にとって測定点の x より x/c_0 だけ原点をずらせば、 ξ の横軸がえられる。したがって数値解と実験値との比較には便利である。変換式は

$$\eta_t = -\eta_\xi \quad , \quad \eta_x = \eta_X + \eta_\xi / c_0 \tag{3.34}$$

であるので、次式をうる。

$$\eta_X + \frac{3}{2} \frac{1}{c_0 h_0} \eta \eta_\xi + \frac{h_0^2}{6 c_0^3} \eta_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2 h_0} \eta \eta_X + \frac{h_0^2}{4 c_0^2} \eta_{\xi\xi X} + \frac{h_0^2}{4 c_0} \eta_{\xi X X} + \frac{h_0^2}{6} \eta_{X X X} = 0 \tag{3.35}$$

ここで第4項以下を無視すると水路幅一定、一様水深の場合の首藤博士の式をうる。¹³⁾

$$\eta_X + \frac{3}{2} g^{-\frac{1}{2}} h_0^{-\frac{3}{2}} \eta \eta_\xi + \frac{1}{6} g^{-\frac{3}{2}} h_0^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{3.36}$$

この基本式を数値積分した解と実験値との比較をおこなってみる。

Fig. 3.4 は周期が比較的小さい場合、Fig. 3.5 は周期が比較的小さい場合で、計算値は最上段の波形を与えて計算し、点線で示した。いずれの場合もまず先頭の方から波高が高くなり始め次第にソリトン分裂をおこし、このような分裂過程が、波の伝播に従って後方の波へ及んでゆく様子がわかる。計

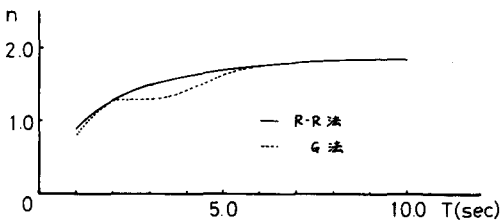


Fig. 3.2 $\sin^2$ 波の増幅度特性

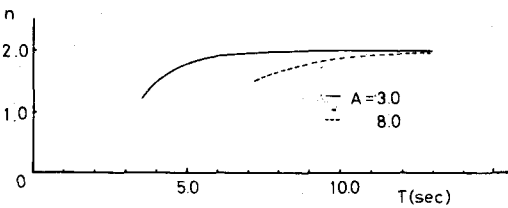


Fig. 3.3 $\tanh$ 波の増幅度特性

算で求めた分裂の速さは実験値よりも速やかで、かつえられる波高は実験値より高い。このような相違は、計算値において分散の効果がより著るしく、これを抑制する非線型効果が小さく見込まれていることを示している。

Fig. 3.6 は Fig. 3.1 の $\tanh$ 波、Fig. 3.7 は Fig. 3.2 の $\sin^2$ 波である。 $\tanh$ 波は Fig. 3.5 の Case 1-9 を Fig. 3.1 のように模擬したものであるので、Fig. 3.5 と Fig. 3.6 を比較すると分裂波数は両者ではほとんど等しい。ただ初期波高を、理想段波波高が波状段波波高の $2/3$ と考えて $\tanh$ 波を設定したが、これは過少であった。

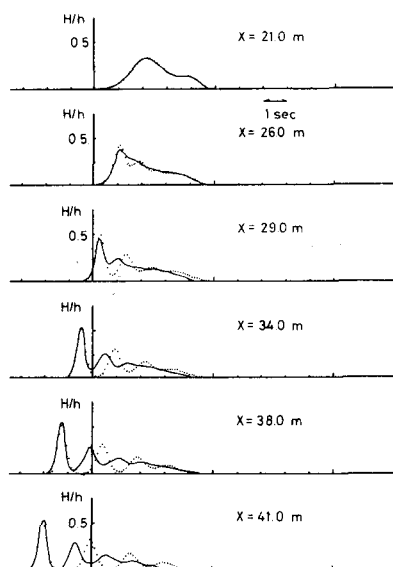


Fig. 3.4 Case 1-3

$$h_0 = 20.0 \text{ cm} \quad T = 4.9 \text{ sec} \quad H_0/h_0 = 0.325$$

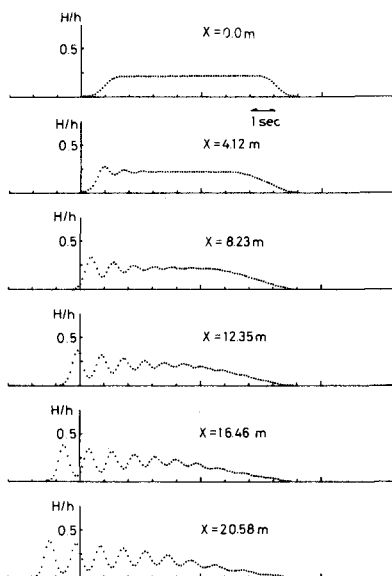


Fig. 3.6 $\tanh$ 波の分裂状況

$$A = 3.0, \quad X_c = 25.0$$

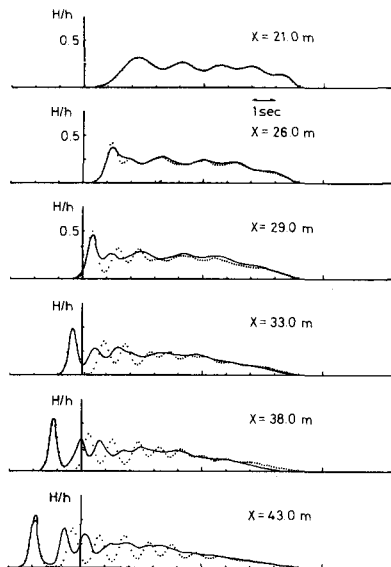


Fig. 3.5 Case 1-9

$$h_0 = 20 \text{ cm} \quad T = 9.1 \text{ sec} \quad H_0/h_0 = 0.325$$

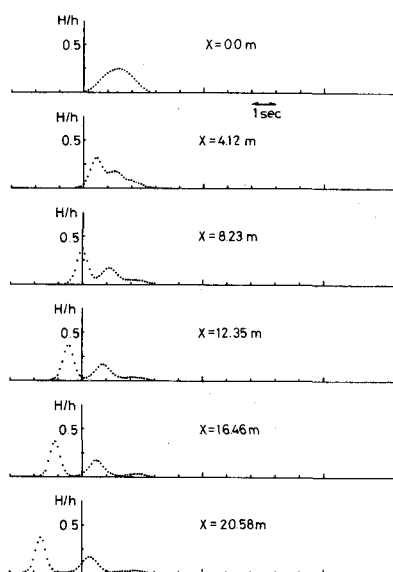


Fig. 3.7 $\sin^2$ 波の分裂状況

$$H_0/h_0 = 0.25$$

3.5 ソリトン分裂の過程に関するその他の知見

ソリトン分裂の過程は以上述べたように理論解，数値解析解によって物理機構をよく理解できる段階にある。しかしその過程の定量的把握のためには実験による知見も必要であると考えられるので，東北大学において得られた結果をここに抜萃する。

1) 波高増幅過程：段波の先端は次第に分裂の過程を辿りつつ波高を高くしてゆき，ソリトン形成が完了するとほぼ一定となる。その状況の1例を Fig. 3.8 に示す。このように初期の波高増加は伝播距離に直線比例する。いま $H = \alpha X + H_0$ のようにあらわすとき増加率 α は

$$\alpha_U = 1.70 (H_0/h - 0.1) \times 10^{-2} \quad (3.37)$$

$$\alpha_L = 1.27 (H_0/h - 0.1) \times 10^{-2} \quad (3.38)$$

であらわされる。⁹⁾ここに h は水深， H_0 は波高，添字 U は上限， L は下限である。

これより，最高波高 H_{max} に達する迄の距離 X_{max} (Fig. 3.8 参照) がえられる。

2) えり分け距離：台形状の孤立性段波がソリトン波列に分裂しおわるまでの波の進行した距離をえり分け距離という。孤立性段波の静水面より上の部分の水平長さを ℓ ，初期最大波高を η_0 とすると，えり分け距離は概略次式で計算できる。^{1) 7)}

$$\frac{d_s}{h} = \left(\frac{\eta_0}{\ell_0}\right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

3) 初期波形が比較的簡単な場合には分裂ソリトン数は次式で上限と下限が与えられる。¹⁴⁾

$$\tan\left(\ell_2 Q_2^{1/2}\right) \leq \frac{2 Q_2^{1/2}}{Q_2 - Q_3} \quad \text{のとき}$$

$$\frac{\ell_2 Q_2^{1/2}}{\pi} - 1 < N < \frac{\ell_1 Q_1^{1/2}}{\pi} + 1 \quad \dots (3.40)$$

$$\tan(\ell_2 Q_2^{1/2}) \geq \frac{2 Q_2^{1/2}}{Q_2 - Q_3} \quad \text{のとき}$$

$$\frac{\ell_2 Q_2^{1/2}}{\pi} \leq N < \frac{\ell_1 Q_1^{1/2}}{\pi} + 1 \quad \dots\dots (3.41)$$

ただし記号は Fig. 3.9 に示す。

4) 先導ソリトンは初期孤立性段波の波高水深比 η_0/h_0 が約 0.4 以上の時，ある距

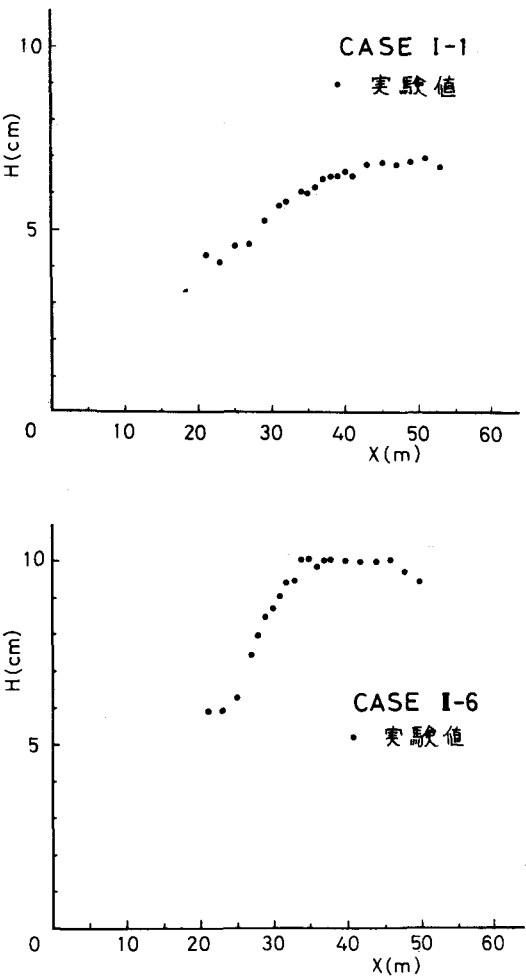


Fig. 3.8 段波先端の波高増幅状況

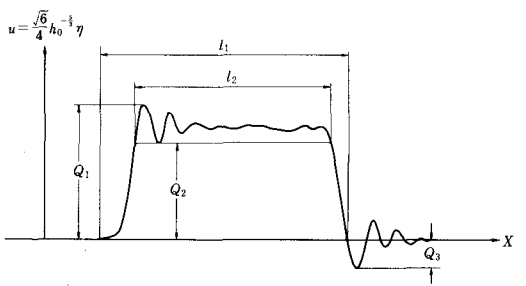


Fig. 3.9 孤立性段波諸量の定義

離 X_B において碎波する。初期波形が十分非対称な場合、その前面における時間波形の最急勾配を $(\partial\eta/\partial t)_{\max 0}$ とした場合、その位置から碎波が生ずるまでの距離（碎波距離） X_B は次式であらわれる。

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{\max 0} / \sqrt{g h_0} = \frac{2}{3} \left(X_B - 0.996\right)^{-1} + 0.0321 \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

この式は Seliger の導いた碎波条件式¹⁵⁾を実験によって修正したものである。なお碎波形式は Spilling 型である。

5) 碎波した先導ソリトン
は碎波後波面に気泡を保持しつつ波高は急激に減少し、いったん極少となる。さらに波形を整えながら気泡が徐々に少なくなり、それと共に波高が増大して再びソリトンを形成し始める。(Fig. 3.10)

碎波による波高減衰は次式であらわされる。⁸⁾

$$\frac{d(H/h)}{d(x/h)} = -\frac{8f}{15} \left(\frac{H}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{H}{h}\right) - \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{(H/h)^{5/2}}{\left(1 + \frac{H}{h}\right)} \cdot \frac{(1-\beta)^3}{\left(1 + \beta \frac{H}{h}\right)} \quad \dots\dots\dots (3.43)$$

ここに β は Fig. 3.11 で示したように碎波前面の気泡をまき込んだ部分を除いた高さ、波高 H との比であり、

$$\beta = \exp(-0.3 X/h) \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

また f は摩擦損失係数で、剪断力 $\tau = \rho f u^2$ とあらわしたものである。($n = 0.013$ のとき $f = 0.0068$)

ソリトン→碎波→再成長
→ソリトン→第2次碎波と
いった過程が繰返されることもある。場合によっては3次、4次といった碎波もあって、次第にエネルギーが減殺されてゆく。1回の碎波ではほぼ30%のエネルギー

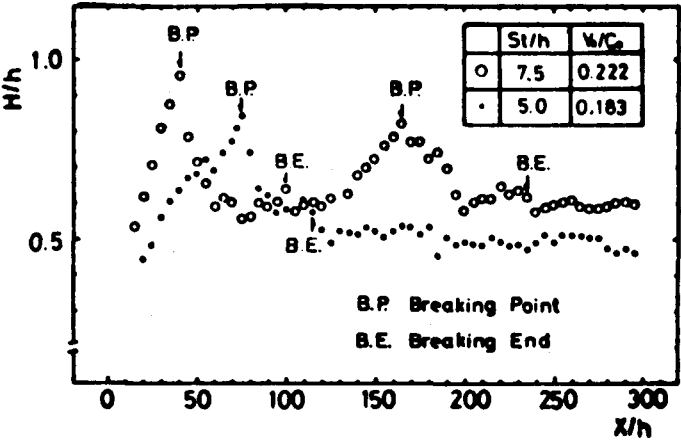


Fig. 3.10 先導ソリトンの波高変化

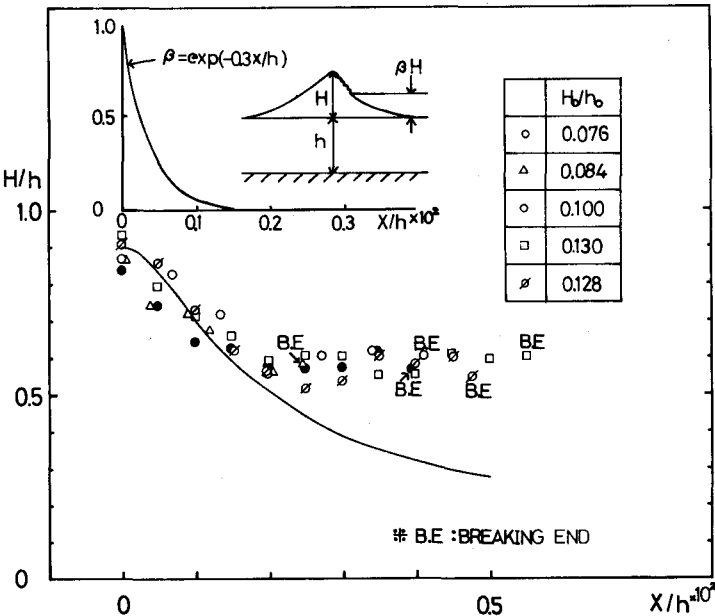


Fig. 3.11 ソリトンの減衰

ーが消滅する。遠浅の海岸で碎波が何段にもわたって見られることのあるのはこの現象とつながりがある。

参 考 文 献

- 1) Whitham, G. B., "Linear and Nonlinear Waves" John Wiley & Sons., 1974. p. 369
- 2) Stoker, J. J. "Water Waves" Interscience Publishers INC, New York. 1957. p. 164
- 3) Jeffreys & Jeffreys "Methods of Mathematical Physics" Cambridge Univ. Press 1972. p. 508
- 4) Peregrine, H. "Equations for Water Waves and the Approximation behind Them." in "Waves on Beaches" edited by R.E. Meyer. Academic Press, 1972. p. 105
- 5) 井島武士: "海岸工学" 朝倉土木講座 19, 1970. p. 85
- 6) 首藤伸夫: "非線型波動論" 1974年度(第10回)水工学に関する夏期研修会講義集 B I, 1974.
- 7) 岩崎敏夫・真野 明・小杉達郎: "孤立性段波のソリトン分裂に関する研究" 第22回海岸工学講演会論文集, 1975, pp. 47-51
- 8) 岩崎敏夫・鈴木義和: "孤立性段波よりのソリトンの変形と碎波に関する研究" 第24回海岸工学講演会論文集, 1977, pp. 45-49
- 9) 岩崎敏夫・首藤伸夫・鈴木義和・栗田 悟: "孤立性段波のえりわけ距離に関する研究" 第25回海岸工学講演会論文集, 1978, pp. 132-136
- 10) 室田 明・岩田好一郎: "段波に関する研究" 土木学会論文集第160号, 1968.
- 11) Hammack J.L. and Segur H., "The Kortweg-de Vries equation and Water Waves, Part 2" J. Fluid. Mech. Vol. 65 Part 2, 1974, pp. 289-314.
- 12) 佐々木 健, 好村滋洋: "ランダウ=リフシッツ量子力学1" 東京図書 1973.
- 13) 首藤伸夫: "海底摩擦による非線型長波の減衰" 第22回海岸工学講演会論文集 1975, pp. 65-68
- 14) Segur H. "The Korteweg-de Vries Equation and Water Waves, Part 1.," J. Fluid Mech., Vol. 59 Part 4, 1973, pp. 721-736.
- 15) Seliger, R.L. "A Note on the breaking of waves." Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 303, 1968, pp. 493-496