

成層密度流の界面現象

阿 部 至 雄

1. はじめに

河水と海水が遭遇する河口付近の流れのように混合し易い密度の異なる2流体があって、それが相対的に速度差をもつような流れの界面現象についての報告は G. I. Taylor (1927) に始まる (Lamb, P 371)。しかし、2流体の相対速度差の大きさによって生ずる界面現象の差異が明らかにされたのは、水理実験が詳細に行なわれるようになった比較的最近のことに属し、Keulegan (1949), Ippen と Harleman¹⁾ (1951), Macagno と Rouse (1961), Hinwood (1967) などの研究結果を総合すると表 1.1 のように分類されよう。

流況 D は界面波の波頂が尖ってきてあるものは砕け、投げ出された下層流塊が上層乱れのために上方へ巻き上げられて拡散するいわゆる乱れ拡散である。成層密度流における界面現象の特徴は界面波で代表される遷移モードであり、Hinwood は流況 B-2 がその下限で、上限は流況 C と D-2 の間にあると述べている。図 1.1 に Hinwood の流況判別図を掲げる。図中の安定と不安定は層流と乱流モードに対応する。

界面現象に関する研究はこれらの各段階で行なわれており、大別すると、界面の不安定問題、波群スペクトルの形成、砕波条件、乱れ拡散、界面抵抗、平均流としての速度及び密度の鉛直分布といえようが、これらの各種の問題が相互に関連しあっていることは勿論である。

本小論は界面現象に関する既往の研究成果の一端について概説しただけに過ぎず、すでに密度流に関する主題は過去の夏期研修会においてもしばしば取り上げられ、優れた解説がなされているので参

表 1.1 相対速度差による界面現象の変化

		流 況		安定度	エネルギー 移行
弱 混 合	層流モード	A：安 定 な 層 流	Laminar flow with straight Parallel streamlines	安 定	one-way transport process
		B：規則波を伴う層流	B-1:Some streamlines slightly curved B-2:Interface slightly curved		
	遷移モード	C：非砕波の界面波を伴う流れ	Small interfacial waves present, but not breaking	遷 移	
		D：砕波による拡散を伴う流れ 〔Two-layer flow with entrainment〕	D-1: Interfacial waves present, some breaking, remainder of flow laminar D-2: Larger interfacial waves, some breaking, little mixing		
		E：全面的混合を伴う流れ 〔Two-layer flow with vertical mixing〕	Turbulent zone around the interface due to breaking waves		
緩 混 合	乱流モード			不 安 定	Two-way transport process

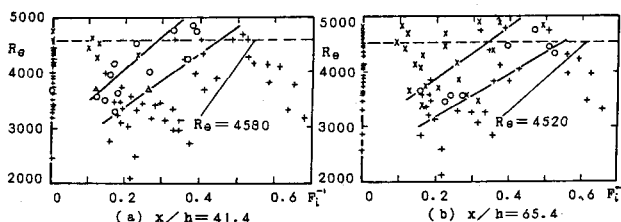


図 1.1 Hinwood の流況判別図 +: 安定, O: 遷移, x: 不安定
 $F_i = U / (g h \Delta \rho / \rho)^{1/2}$ $R_g = U h / \nu$

考にして戴きたい。

2. 不等質流れにおける基本事項

2.1 基礎方程式とその近似

静的に安定な成層状態にある成層流に対する運動量及び質量保存の式は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

である。ここに、 $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$: 速度ベクトル, x, y, z 軸: u, v, w 方向, μ : 粘性係数, また重力ベクトル $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$, 流体密度 $\rho = \rho_0(y) + \rho'(\mathbf{r}, t)$, 圧力 $p = p_0(y) + p'(\mathbf{r}, t)$ とする。ここに、 ρ' と p' は基準密度 ρ_0 と基準圧力 p_0 からの偏り, $\mathbf{r} = (x, y, z)$: 位置ベクトルである。

非圧縮・非拡散・非粘性の仮定: 運動が起こる場の密度は深いところほど圧縮されて大きい, そこに生ずる運動自体による密度は圧縮の影響を受けない (非圧縮) と仮定し, また温度や塩分の分子拡散効果を見捨てる (非拡散) と, 流体密度の変化はないことになり,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3a, b)$$

次に, 静水圧の釣り合い $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$ を考慮し, 流体は非粘性とすると, N-S の式 (2.1) は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' + \rho' \mathbf{g} \quad (2.4)$$

となり Euler の式をうる。

線形近似: 界面の運動と速度が微小であれば, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \ll \partial \mathbf{u} / \partial t$ であり 非線形項は微量 δ の 2 乗のオーダーで省略でき, 式 (2.4) は

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho' \mathbf{g} \quad (2.5)$$

Boussinesq の近似: いま $\rho' \ll \rho_0$ であれば, ρ' / ρ_0 は微小なので浮力項においては重要であるが慣性項に及ぼす影響は小さいと考えて

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) \mathbf{g} \quad (2.6a)$$

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) \mathbf{g} \quad (2.6b)$$

としてよい。この近似は非圧縮性の仮定でもあり, また粘性や拡散がある場合でもそれによる流体の性質の変化は見捨てることを意味する。

2.2 基本指標

浮力振動数 N : 安定成層流体の中で流体塊が η だけ鉛直に変位したとき, $v = \partial \eta / \partial t$ とおいて式 (2.3a), 式 (2.6b) から ρ' を消去すると,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left\{ -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} \right\} \eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$\text{いま, } N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} \quad (2.8)$$

とおく。 N^2 = 一定で, 鉛直変位に圧力変動量は微小として見捨てる, 式 (2.7) は単なる振動の式でその周期が $2\pi/N$, 復元力が単位密度あたり $-N^2 \eta$ である。丁度この振動数 N でゆれ動く流体の運動は進行することなく, N は存在しうる安定な内部波の振動数の最大値を与えることになる。

リチャードソン数 R_i : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$, $\mathbf{u}_0(y) = (u_0(y), 0, 0)$ なる剪断流場において, du_0/dy は振動数の次元を有するので N^2 との比をとると,

$$R_i = N^2 / \left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 = - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} / \left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

この "gradient" R_i 数が成層流の安定条件に関する指標であり, 成層が安定であるか不安定であるかの基準は $R_i = 0$ である。

R_i 数は元来大気乱流の熱的安定成層の中における乱れが減衰するか発達するかの判定指標として導入されたもので, 浮力のなす仕事量とシアーによる乱れエネルギー発生量との比である。したがって, $R_i = 1$ であれば乱れは増大も減衰もしないで維持される訳であるが, $R_i = 1$ を乱れの発達・減衰の判定指標とするには議論がある。

内部フルード数 F_i 及びその他の指標: 式 (2.6a) で運動が定常として浮力項と慣性項との比から

$$J = (\rho'/\rho_0) \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} = g'H/U^2 = F_i^{-2} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

ここに, U : 代表速度, H : 代表長さ, $g' = (\rho'/\rho_0)g$ で, $F_i = U/\sqrt{g'H}$, J : "Over-all" R_i 数は共に非粘性流れにおいて有用な無次元量である。慣性項と粘性項とのバランスの尺度を表わす R_e 数は, $R_e = UH/\nu$, ここに動粘性係数 $\nu = \mu/\rho \approx \mu/\rho_0$ ($\because \rho_0 \gg \rho'$) であり, また二成層流における界面波の安定指標であるクーリガン数 Θ は

$$\Theta = (R_e F_i^2)^{-1/3} = \Psi^{-1/3}, \quad \Psi = R_e F_i^2 \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

である。 U_* : 摩擦速度, $B = -g \overline{\rho'v'}/\rho_0$: 浮力 flux とするとき, Monin - Obukhov 長さ (安定度長さ) L は

$$L = -U_*^3/\kappa B \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

で示され, 場の安定度や長さの尺度単位として用いられる。普遍定数 κ は便宜上入れられたものであり, 中立のとき $|L|$ は無限大となる。

2.3 内部波の基本解の性質

安定に成層して静止している状態の基本場が乱され, 波動が生じたために速度が $\mathbf{u} = (u, v, o)$ になり, 密度が $\rho = \rho_0 + \rho'$ に, 圧力が $p = p_0 + p'$ に変化したとする。式 (2.3), (2.6b) から p' と g' を消去し, 波数 k , 角振動数 σ なる波動を仮定して $v \sim V(y) \exp i(kx - \sigma t)$ とおき, 微量量 ($\ll 1$) を省略すると次式をうる。

$$\frac{d^2 V}{dy^2} + m^2 V = 0, \quad m^2 = \left(\frac{k}{\sigma} \right)^2 (N^2 - \sigma^2) \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

密度分布モデルを $\rho_0(y) = \rho_{0s} e^{-\alpha y}$ (ρ_{0s} : 水表面密度) とすると, $N^2 = g\alpha = \text{一定}$, m^2 は y によらないので $N^2 > \sigma^2$ の場合に内部波が存在しうる。この波動によって生ずる流速は $V(y) = \hat{V} e^{imy}$ とすれば次式で与えられる。

$$v = \kappa_e [\hat{V} \exp i(kx + my - \sigma t)] \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

いま, 波数ベクトル $\mathbf{k} = (k, m)$ の大きさを $\bar{k}$ とすると, $|\mathbf{k}|^2 = \bar{k}^2 = k^2 + m^2$ であり, k, m, σ の関係は $f(k, m, \sigma) = k^2(N^2 - \sigma^2) - m^2\sigma^2 = 0$ であるから

$$\sigma^2 = N^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

とかける。ここに $\theta = \tan^{-1} m/k$ ($|\theta| \leq \pi/2$) は $\mathbf{k}$ が水平軸 x となす角である。 σ は $\mathbf{k}$ の方向 θ と N によって決まり, 式 (2.14) は $x-y$ 面内の波線が $\mathbf{k}$ の方向に進むような内部波を表わす。 $\sigma = N$ (バイサラ振動) の場合には $\theta = 0$ であるから $\mathbf{k}$ は水平であり, 流体塊は単に上下運動をするだけとなるし, $\theta \rightarrow \pi/2$ のとき $\mathbf{k}$ は垂直方向に近づき, 水平方向にシアーのある流れに近づいてゆくことがわかる。

群速度は $\mathbf{c}_g = d\sigma/d\mathbf{k}$ であるから、その x, y 成分 c_{gx}, c_{gy} は

$$\left. \begin{aligned} c_{gx} &= \frac{\partial \sigma}{\partial k} = - \frac{\partial f / \partial k}{\partial f / \partial \sigma} = \frac{k}{\sigma} \frac{N^2 - \sigma^2}{k^2} \\ c_{gy} &= \frac{\partial \sigma}{\partial m} = - \frac{\partial f / \partial m}{\partial f / \partial \sigma} = - \frac{m}{\sigma} \frac{\sigma^2}{k^2} = - \frac{k}{m} c_{gx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.16)$$

となる。群速度の大きさは $|\mathbf{c}_g| = N \sin \theta / k$ ，方向は $\tan \theta = m/k$ であるので， $\mathbf{k}$ と $\mathbf{c}_g$ は直交しており， c_{gx} は k と同符号， c_{gy} は m と反対向きになる。

$\mathbf{k}$ 方向の位相変化の速さを $\mathbf{c}$ とすると $\mathbf{c} = (\mathbf{k}/k) N k / k^2$ であり， $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}_g = \mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_g = 0$ であるので，内部波の energy の流れがその内部波の位相速度に直角である。また，連続の式から明らかなように， $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ， $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ であるので， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ すなわち $\mathbf{k} \perp \mathbf{u}$ であって， $\mathbf{u}$ は $\mathbf{k}$ を含む面内にあることがわかる。図 2.1 に分散面 $m = \pm Rk$ ，($R = N^2/\sigma^2 - 1$) 上の $\mathbf{k}$ と $\mathbf{c}_g$ との関係を示す。

図 2.2 は，Holmboe の密度分布 $\rho_0 = \rho_0 e^{-\alpha \tanh y/h}$ (ρ_0 ：躍層中心 $y = 0$ での密度， h ：躍層の特性厚さ) に対する内部波の分散関係と垂直流速分布である。

3. 界面の安定・不安定問題

Holmboe の密度分布で $h \rightarrow 0$ とすると， $y > 0$ での密度は $\rho_0 e^{-\alpha}$ ， $y < 0$ では $\rho_0 e^{\alpha}$ となって，密度の異なる 2 流体が $y = 0$ で不連続界面を有する系となる。このような界面が相対速度差をもつときの界面の不安定問題は Helmholtz (1868)，Kelvin (1871) の報告に始まり，Taylor (1931) や Goldstein (1931) などの報告が本格的研究の端緒となった。Benjamin²⁾ (1963) は不安定機構には粘性とシヤによる不安定および K-H 不安定があるとし，界面不安定は非粘性として取扱ってよいことを示唆した。

3.1 Kelvin-Helmholtz 不安定

非圧縮・非粘性の密度の異なる 2 流体が不連続界面をなして独立に運動するとき，界面付近に生ずる波動がどのような性質をもつかを論ずるのが K-H 不安定である。

図 3.1 のようなモデルに対する界面波の速度 c は

$$c = U^* \pm (c^{*2} - \Delta^2)^{1/2} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } U^* &= (\rho_1 U_1 H_1 + \rho_2 U_2 H_2) / (\rho_1 H_2 + \rho_2 H_1) \\ c^{*2} &= (g/k) (\rho_2 - \rho_1) H_1 H_2 / (\rho_1 H_2 + \rho_2 H_1) \\ \Delta^2 &= \{ \rho_1 \rho_2 H_1 H_2 / (\rho_1 H_2 + \rho_2 H_1)^2 \} (U_1 - U_2)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

である。ここに $H_i = \tanh kh_j$ ($j = 1, 2$) とおいた。 $c^{*2} < \Delta^2$ で界面は不安定となる。K-H 不安定では界面に生じた重力界面波 (gravity interfacial wave) の振幅が限りなく増大して，ついには崩れて渦動になりうるのである。 $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_1$ が小さい場合の完全流体としての判定条件は

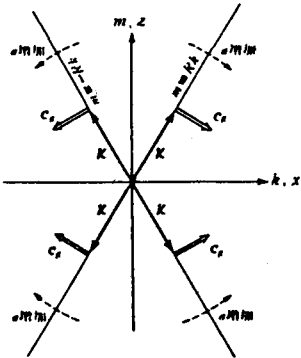


図 2.1 分散面 $m = \pm Rk$ 上の波数ベクトル ($\mathbf{k}$) と群速度 ($\mathbf{c}_g$) との関係 (寺本, 1976)

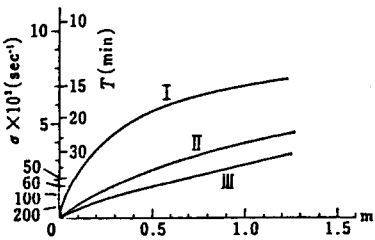


図 2.2 Holmboe の密度分布をなす海の内部波の分散関係 I, II, III は基本, 第 2, 第 3 モード (富永, 1976)

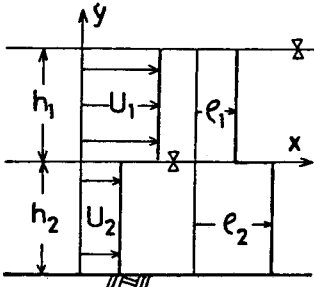


図 3.1 Kelvin-Helmholtz のモデル

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{安定:} \\ \text{中立: } F_{i2}^2 \\ \text{不安定:} \end{array} \right\} = \frac{\tanh k h_2 + \tanh k h_1}{k h_2} \approx \left\{ \begin{array}{l} 2/k', (h_j \gg \lambda) \\ \frac{h_1 + h_2}{h_2} (h_j \ll \lambda) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{..... (3.3 a)} \\ \text{..... (3.3 b)} \end{array}$$

である。ここに $F_{i2} = |U_1 - U_2| / \sqrt{\epsilon g h_2}$, h_j ($j = 1, 2$): 水深, $k' = k h_2$: 無次元波数, λ : 波長である。

式(3.3 a)がいわゆる Helmholtz のモデルであり最も簡単な K-H 不安定である。 $F_{i2}^2 < 1$ ならば式(3.3)の等号が成立するような k の値が1つ存在し、それより大きい k の界面波は不安定である。 $F_{i2}^2 > 1$ のときは波長の長い界面波の安定度は上下両層の水深比によって異なるが、 $\lambda = \pi h_2$ より短い波長の界面波は全て不安定である。いずれにせよ F_{i2} がいくら小さくても不安定な最小波長が存在することになる。

いま上下両層を通じて $N^2 = \text{一定}$, 界面 $y = 0$ で $\rho_1 = \rho_2$ とし, 上層流速 U_1 , 下層流速 $U_2 = -U_1$ で各々一定と考えると空間的に定常な解 $c_r = 0$ を考えることになる。界面の安定不安定を調べる基本式は, 式(2.3), (2.6 a)で $D/Dt = \partial/\partial t + U\partial/\partial x$ とし, 界面の平均位置からの垂直変位を $\eta = F(y) e^{ik(x-ct)}$ とすると

$$\frac{d}{dy} \{ \rho_0 (U - c)^2 dF/dy \} + \rho_0 [N^2 - k^2 (U - c)^2] F = 0 \quad \text{..... (3.4)}$$

である (Yih, 1965)。

$c_i \neq 0$ の場合の解を上層で $F_1 \sim e^{-n_1 y}$, 下層で $F_2 \sim e^{-n_2 y}$ とおき, 不連続面での境界条件を用いると, 式(3.4)から, $c_i^2 = U_1^2 - N^2 / 2k^2$, $k^2 > N^2 / 2U_1^2$, $n_1^2 = -k^2 (U_1 + i c_i)^2 / (U_1 - i c_i)^2$ をうる。最後の関係式から $|n_1|^2 = k^2$ である。Helmholtz のモデルでは $N = 0$ とおいて, $c_i^2 = U_1^2$, $k^2 > 0$, $n_1^2 = +k^2$ であるから, 成層 $N^2 \neq 0$ は $k^2 < N^2 / 2U_1^2$ の範囲の不安定を解消するはたらきをしている。 $c_i = 0$ と考えると解の性質は $N^2 / (k U_1)^2 \geq 1$ で変化し, $N^2 / (k U_1)^2 < 1$ では波動はないが, $N^2 / (k U_1)^2 > 1$ の場合には $(0, N^2 / U_1^2)$ の k^2 に対し波動が存在する。すなわち, 中立定常波が $k^2 < N^2 / U_1^2$ に存在し, また Helmholtz の不安定波は $k^2 < N^2 / 2U_1^2$ で消滅する。 $N^2 / 2U_1^2 < k^2 < N^2 / U_1^2$ では中立定常波と不安定波がともに可能である。

3.2 Taylor - Goldstein のモデル^{2), 3)}

Taylor (1931) と Goldstein (1931) は中間層を有するような現実的な密度分布や流速分布に K-H モデルを拡張した。

図 3.2 は Goldstein が同図左のようなモデルに対して与えた安定図である。ここに $\alpha = k h / 2$, $J = (\Delta \rho / \rho) g h / \Delta U^2$, ΔU : 相対速度差である。さらに図 3.3 の

ようなモデルに対する解析がその後 Miles と Howard (1964) によってなされた。図 3.2(b) の点線がその結果であって, $R_1 > 1/4$ になると不安定波は存在しなくなり, また最も不安定な界面波は $k h = 0.83$ で与えられ, その波長は $7.5 h$ であることが示された。彼らの結果は $h_1 = h_2 = \infty$ に対するものであったが, 上下層水深 h_1, h_2

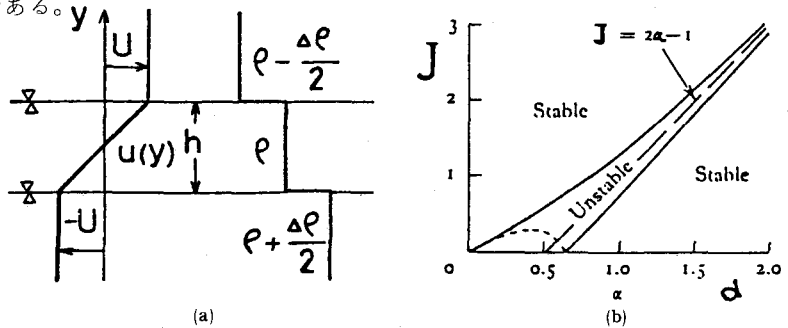


図 3.2 Goldstein's Case 1 (Taylor's Case 2) のモデルと安定図

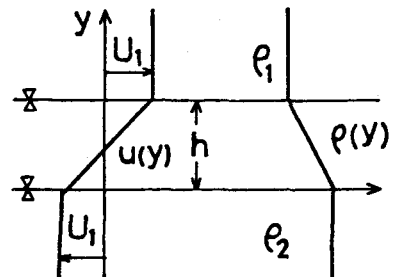


図 3.3 Miles と Howard のモデル
(Goldstein's Case 4)

の有限厚さの場合に中間層 h に生ずる $c_i = 0$ なる中立波動の条件式

$$f(k', m) = \left\{ 1 + 2m + k' / \tanh k' (h_1/h) \right\} \operatorname{Im} (k'/2) + k' \operatorname{Im}_{+1} (k'/2) = 0 \cdots \cdots (3.5)$$

$$k' = kh, \quad m^2 = 1/4 - J, \quad J = N^2 / (dU(y)/dy)^2$$

から示された安定図が図 3. 4 である(富永, 1976)。 $h_1 = h_2$ の場合 $h_1/h < 0.5$ では全域で安定する。 $h_1 \neq h_2$ の場合は $h_1 = h_2$ の場合と大差なく、 $h_1 + h_2 < h$ になると全域で安定となる。

Taylor - Goldstein のモデルは Synge(1933) によって一般化されており、Yih (1957)も別個に同様な理論を展開している。連続成層流中に生ずる内部波の安定限界に対する必要条件について Howard (1961)は統一的記述を試みており、また Miles (1961, 1963)の解説及び Drazin と Howard (1966)の review に詳しい。

わが国においても浜田 (1968他)や岩崎・日下¹⁾(1971), の研究があり、界面波の発達には流れ方向流速の曲率や界面流速、界面付近の流速分布が重要な影響を与えるが、实在現象との対応において問題が残された。

3. 3 粘性を考慮した安定限界を示す指標^{1), 2)}

Keulegan (1949) は上層流の実験によって界面波の発生や混合現象について調べ、界面波は主流エネルギーの下層移行により生ずるが、そのエネルギーは下層流体の粘性によって定常的に消費されてしまうと想着て、界面波の安定限界に対し、理論的に

$$\theta = (\nu_2 g \Delta \rho / \rho_1)^{1/3} / U_{1c} \cdots \cdots (3.6)$$

なる指標(クーリガン数)を示した。ここに U_{1c} : 混入開始時の上層の水平流速である。実験結果から得られた安定条件は、 $R_e' = U_{1c} R_1 / \nu_1$ (R_1 : 上層径深)とするとき

$$\theta \geq 0.127, R_e' < 450 \text{ (層流)}; \theta \geq 0.178, R_e' > 450 \text{ (乱流)} \cdots \cdots (3.7)$$

である。Ippen と Harleman¹⁾(1951) は下層流の実験から $\theta = (\nu_2 g \Delta \rho / \rho_1) / U_2^2 = (F_{i2}^2 R_{e2})^{-1/3}$ とし、 $F_{i2} = 1$ が安定限界と想着て、次の安定条件を示した。

$$\theta \geq R_{e2}^{-1/3}, R_e' < 450 \cdots \cdots (3.8)$$

したがって、 $R_{e2} = 450$ とおけば θ の限界値は 0.130 となる。これより安定限界は流れが層流のときには相対速度差が長波の伝播速度 $\sqrt{egh}$ に等しくなるときで、乱流のときは R_e 数と F_i 数の両者に関連し、 R_e 数が小さい場合の F_i 数は大きいが、 R_e 数が大きくなるほど F_i 数は小さいという結果になる。

Turner (1973) は 2 流体接触開始点から x の距離での境界層厚 $\delta = (\nu x / U)^{1/2}$ を用い

$$\theta = \left\{ (U^2 / \varepsilon g \delta) (Ux / \nu) \right\}^{-1/3} \cdots \cdots (3.9)$$

と表わした。このとき Keulegan の安定限界 $\theta_c = 0.178$, $R_e = Uh / \nu$ (U : 相対速度差, h : 水深) > 1800 に対する R_i 数は、 $J_c = (U^2 / \varepsilon g \delta)^{-1} = \theta_c^2 (Ux / \nu)^{1/2} \approx 0.24$ となり、Taylor - Goldsteinらのいわゆる安定限界の解に近づく。すなわち粘性は界面波の発生段階では付加的に安定限界に関与するといえる。

図 3. 5 は、 $R_e = U_1 h_1 / \nu_1$, $F_i^2 = U^2 / \varepsilon g h_1$ を用いて $\Psi = R_e F_i^2$ ($= \theta^{-3}$)とおき、 R_e と Ψ 値の関係を表 1. 1 に示した流況に対応させて示したものである。“界面波が碎ける限界”が $R_e > 1800$ では Ψ

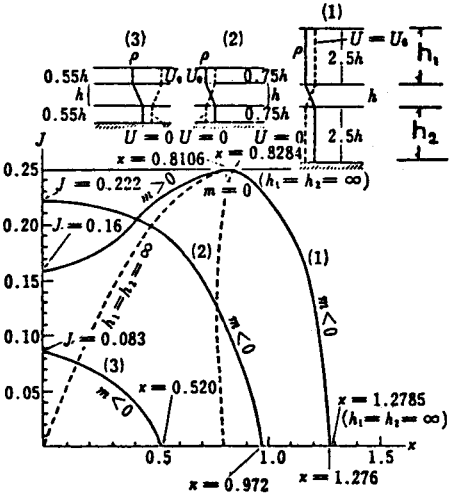


図 3. 4 3 層のうち上, 下 2 層が同一の厚さのとき、転移層に生ずる波の安定限界曲線

$= 488$ であり、Keulegan の与えた θ_c は平均的 R_i 数で $J_c = 10$ (乱流), $J_c = 3.7$ (層流) となり、いわゆる“界面波の発生条件”に関連した安定限界に比べて著しく大きい。嶋・椎貝 (1961) の $J = 6.25$ や岩崎・日下 (1971) の $J = 9.2$ の実験例は前者、和田・片野 (1968) の $J = 1.56$, 日野・谷 (1969) の $J = 1.23 \sim 2.78$ の結果は後者の例である。

吉田 (1977, 78) は定常二層流の界面に生ずる界面波の碎波機構には Keulegan のいう上述の cusped breaking と, Thorpe (1971) のモデルと同種のスパイラル渦に成長する type ($\theta_c = 0.065$, $\epsilon = 0.058$ [Thorpe, 1968]) があると考えた。しかし、安定理論に

基づく浜田や岩崎・日下の界面波の発達に関する研究結果を用いても現実の碎波現象がうまく説明つかないことや、Keulegan の碎波限界についても同様であることなどから、Keulegan のいう碎波現象が平行剪断流の不安定現象としては不自然なものであることに注目し、界面波の碎波の実態を詳細に調べた結果、界面波とは位相速度の異なる別種の波動を見出しサイクロイド波 (C 波) と称した。

この、重力内波の伝播速度より相当遅くかつ消滅し易い C 波の発生因は界面張力によるものではなく、漸変密度構造を有する連行層のシヤ不安定に基づいて発生する 3 次元構造の集中渦による界面変形であるとした。これによって、 $\theta < 0.13$ の界面でみられる重力内波の碎波は、内波自体の攪乱がトリガーとなって発生する集中渦の作り出す界面変形 (C 波) と重力内波との非線形重畳に基づくと推論した。

吉田 (1979) は様々な規模の成層流の界面現象を θ 数を用いて、 θ_1 : 界面波の発生限界, θ_2 : C 波の発生限界, θ_3 : 界面波の碎壊の限界として表 3.1 を示し、巨視的の量である θ 数で局所的な界面現象を規定することはむずかしく、簡単に使える指標を望むにしても C 波と界面波の発生条件の相違を表現しうる量を採用する必要があると述べている。さらに、C 波の存在が逆に界面波を生みだす例として、表 3.1 の中間密度層 II の界面波の発生をあげている。

Turner は境界の影響を受ける現象で Grashof 数, $G_r = (\Delta\rho/\rho)gh^3/\nu = (Re/F_i)^2$ は重要な指標

であると述べている。図 3.6 は Tritton²⁾ (1963) の測定値で、最初に界面波の生ずる場合と十分発達した乱流が起こる場合とで G_r 数はかなり異なることが示されている。

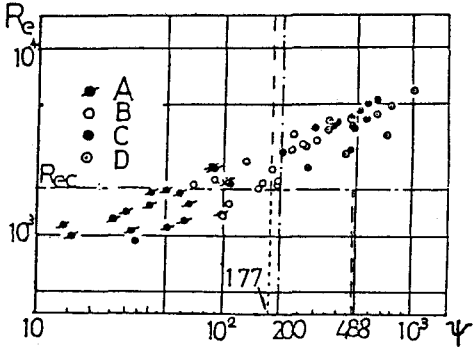


図 3.5 流況分類図

表 3.1 波動の発生と破壊条件

界面の種類	中間密度層 I	中間密度層 II	中間密度層 III	塩水楔	Keulegan
全水深×水路幅 (流動層厚さ)	27cm×30cm (20cm)	38cm×8cm (30cm)	10cm×8cm (8cm)	10cm×8cm (—)	2cm×4cm~ 11.3cm×28.5cm
θ_1	270/ R_h	0.177	0.13	0.13	
θ_2	0.215	0.249	0.13×0.17	0.13~0.17	
θ_3	0.215	0.177	0.13	0.13	0.13~0.178

4. 界面抵抗及び界面抵抗係数

水理学において密度 2 成層の界面の性質として問題となるのは界面が全体の流れに対していかなる作用を及ぼすかという見地より、界面に作用する流体抵抗はどの程度の大きさで、それはどのような水理量によって支配されるのかという問題と、2 流体がこのような接触して流れる際に 2 流体が混合して行く現象があるなら、それはどのような機構で混合し、その程度はどの程度であるかという問題である。その場合に界面状態の種類によって流体抵抗も混合現象も法則とか機構とかが異なることが

考えられ、従来の研究もこのような見地で示すことができる。

層流モードにおける流体抵抗は界面での粘性抵抗であって、Lock¹⁾(1951)やBata¹⁾(1959)の研究結果からも知れるように、界面流速 u_i と界面 R_e 数 $u_i x/\nu$ または Ux/ν とによって表わされ、従って u_i と、平均流速または最大流速との比がわかれば問題は解決する。流れが層流であって各々の層内で密度が一定である限り、各々の層内での内部機構は従来層流理論によって明らかにされているからである。また、 $u_i x/\nu$ は流体抵抗の影響によりもとの流速 U が減少させられる範囲の拡大を指示する指標とも考えられる。だから、この範囲が水面まで到達すれば、それ以後は界面 R_e 数の影響はなくなる。

遷移から乱流モードにおいては界面は乱れており、一種の界面波となっている。このような波面をもった境界面を二層流界面としてどうとるのが問題であるし、同時に u_i の意味も曖昧さが加わってくる。従って、波面を含んだ層内で失なわれるエネルギーが剪断応力 τ_i のなす仕事と通常考える訳である。

4.1 界面波の粘性損失からのアプローチ¹⁾

Keulegan (1949) は波面をもった境界面内のエネルギー消散割合を波面の中で失なわれる粘性損失を計算することによって与えた。この界面波の粘性損失から f_i を評価する方法が理論的取扱いの1つの流れとなった。

さて、Keulegan は界面に波が生じている場合の界面上方にて作用する摩擦応力を τ_{i+} とし、

$$\tau_{i+} U = dE_n / dt \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

と考えた。ここに、 E_n : 界面の単位面積あたりのエネルギーである。いま界面波が波長 λ 、周期が一定で、 $y = a \sin k(x-ct)$ で表わされると仮定し、粘性損失は深海表面波と同じく、 $\epsilon = 2\mu k^3 c^2 a^2$ (Lamb p 624) で表わされるものとする、

$$\frac{dE_n}{dt} = \epsilon = 16\pi^3 \mu c^2 a^2 / \lambda^3 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに、 a : 半波高、 c : 伝播速度である。界面に作用する流体抵抗を $\tau_i = f_i \rho U^2 / 2$ と定義し、式(4.1)、(4.2)を用いて整理し、界面抵抗係数 f_i を

$$f_i = 32\pi^3 \left(\frac{\nu}{\lambda U}\right) \left(\frac{c}{U}\right)^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

とした。また、Keulegan は界面波の波速は式(3.1)で表わされ、さらに $h \ll \lambda$ 、 $\rho_1 \sim \rho_2$ 、 $U_2 = 0$ の安定条件は式(3.3 a)であり、そのときの最小波長の波の伝播速度を $U = U_1$ とおいて、 $c = U/2$ と近似することにより、 $c/U = 0.5$ として実験値を式(4.3)に入れて f_i を求めた。

椎貝(1965)はKeulegan の非粘性解に基づく手法を淡塩二層流の流れの場合に適用し、式(3.3 a)から存在可能な最小波長として $\lambda_{\min}/\pi h_1 = U^2/\epsilon g h_1$ を得、式(4.3)を変形して、

$$f_i = 8\pi^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \Psi^{-1} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

とした。さらに実験から $f_i = 12/\Psi$ を得て、従って界面波の波形勾配として次式を得ている。

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{\min} = 0.389 \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

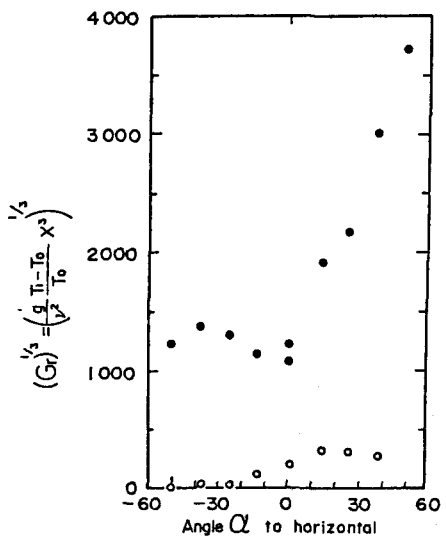


図3.6 グラシヨウ数の角度 α による変化
○ 最初に界面波が生じる場合
● 十分発達した乱流が起こる場合

Keulegan, 椎貝らの理論では次の仮定に基づいている。イ) 界面に作用する摩擦力は式 (4.1), ロ) 界面波の粘性損失は式 (4.2), ハ) 界面波の伝播速度は式 (3.1) あるいは $c = U/2$, ニ) 不安定限界は式 (3.3a), ホ) 界面波の波形勾配は式 (4.5)。

仮定ニ) は K-H 不安定であって、既に述べたように速度差がいかに小さくとも不安定な最小波長が存在することになり不合理である。また上下両層の間に中間層があり、密度が直線的に接触する場の解析は K-H 不安定が界面での速度と密度の急な不連続がなくとも存在しうるかどうかを解く上で重要な意味をもつが、Taylor や Goldstein らの解析結果によれば、不安定な波数の範囲が R_i 数によって定まることが示されている。しかし、実際はこのような K-H 不安定ではなく、内部粘性のために主流の中に縦方向の流速分布を生じた流れがあって、この流れから界面波にエネルギーを供給する機構が考えられる。Synge, Miles, Howard, Drazin-Howard による研究はこの方向に沿ったものであり、わが国でも浜田 (1968, 69) が同様に解析を進め、その結果界面波の発達には主に主流速度成分の縦方向曲率 U''_c に左右されるとのべている。このような解析によって仮定ハ) について、従って仮定ロ) の粘性損失の評価についても問題が残された。

浜田 (1966) は Rayleigh-Taylor 型の不安定理論の粘性解を応用し、 $f_i \sim \Psi^{-0.5}$ という結果を示しているが、上述の疑問に加えてさらに仮定イ) についても疑問を表明し、 τ_{i+}, τ_{i-} を界面の上側、下側に作用する応力とすると、 $dE_n/dt = \tau_{i+}U_1 - \tau_{i-}U_2$ として界面波の下側に作用する応力を評価すべきであり、これが界面波エネルギーの増幅率と一致するものであると述べている (浜田, 1967)。

玉井・浅枝 (1978) は、安定な界面波が生じている不連続密度界面付近の流れの場を非粘性の主流と、界面波成分及び粘性成分から成る摂動流との和で表わし、粘性境界層内でのエネルギー逸散量を求め、これより

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}} R_e^{-1/2} \left| \frac{c}{U_1} - 1 \right|^{5/2} a^2 k^2 (k h_1)^{1/2} \coth^2 k h_1 \dots\dots\dots (4.6)$$

を導いた。ここに $R_e = U_1 h_1 / \nu$ である。 F_i 数は界面波の波速を通して求めることになり、 f_i の係数値は一義的に定らない。近似的には非粘性解の波速を用いる。

上述のように界面波が発生しているときの界面抵抗については、その波形勾配、伝播速度、波数不安定限界に関する詳細な知識を必要とし、とくに界面波のより現実的な性質が解明されないかぎり、界面波の粘性損失の評価からのアプローチはむずかしい状況にある。

4.2 流速分布からのアプローチ

界面抵抗あるいは抵抗係数を推算する理論的取扱いの他の 1 つは、層流抵抗においては周知の流速分布を決定し、これより直ちに界面抵抗を導く手法である。

日野 (1979) は成層密度流が層流である下層流と乱流である上層流から成り立ち、さらに上層流が遷移層、安定成層乱流層、上部乱流層 (中立乱流層) から成ると考え、安定成層の長さの尺度として Monin-Obukhov 長さ $L' = \rho U_*^2 / k \Delta \rho g$ を導入し、これに関して流速分布を $u(y)/U_*$ の形で求めた。これより界面抵抗に関与する平均流速 $\bar{U}$ を区界積分することによって求め、界面抵抗係数は、

$$f_i = 2 \left(\frac{U_*}{\bar{U}} \right)^2 = f_n \left(\Psi, R_i; \frac{R_{e2}}{R_{e1}}, \frac{h_2}{h_1} \right) \dots\dots\dots (4.7)$$

とした。主流の乱流機構を考慮して求めた f_i は Ψ 値、 R_i 、 R_{e2}/R_{e1} 、 h_1/h_2 の関数関係にあるが、 f_i とそれらの関係は普遍定数によって一義的に計算でき、図 4.1 がその具体的一例として示されている。

4.3 実用的立場からの界面抵抗係数

岩崎¹⁾ (1962) は Jeffereys の与えた平均流速 U の主流が速波 c の界面波に与える垂直応力 $P_{yy} = S_j \rho_2 (U-c)^2 k a \sin k(x-ct)$ が、粘性流体の表面圧力に等しいとして得られる界面粘性波の波数 k_0

$= S_f (U - c)^2 / 4 \nu_2 c$ と、界面非粘性波の波数 $k_{inv} = 2 (\Delta \rho / \rho) g U^{-2}$ との比として Ψ 値を定義し、 $\Psi = (16 / S_f) k_v|_{c=U/2} / k_{inv} = R_{e2} F_{i2}^2$ とした。

この Ψ 値は粘性波と非粘性波に対するエネルギーの比率に関連するものと考えられるので f_i と Ψ 値とは関数関係を保存するというのである。この考え方によれば f_i と Ψ 値との関係は実験的に求めることになり、以来、

$$f_i = a \Psi^{-n} \quad (4.8)$$

の形でまとめられ、 a と n に関し多くの値が提案されている。観測資料を最もよく説明する半経験則として $a = 2$ 、 $n = 0.5$ (金子¹⁾, 1966) があるが、研究者相互で相異している。その原因についても種々検討されているが、柏村・吉田 (1976) は実河川の観測結果から非定常的取扱いの必要性を指摘しているが、その理論的取扱ひも含め将来の問題である。玉井ら (1978) は f_i の理論式 (4.6) の

実用的な形式として、 $f_i = A (R_e F_d^5)^{-0.5}$ を提案し、既往の観測資料 (f_i と水理量の一覧表あり) を詳細に検討することによって、 $A = 0.0896$ を得ている (図 4.2)。図中の中抜きの白い記号は界面波のない安定な状態 ($R_e^{0.196} F_d^{0.667} < 2.43$) の資料であり、 f_i は界面波による粘性損失がないため、相対的に小さくなっている。

5. 界面付近の混合特性

5.1 混合量係数・連行係数¹⁾

界面波はいったん発生しても乱れにならず安定な界面波でありうるし、他方乱れが生じているときは混合拡散が必ず伴っているためこれに伴う乱れの減衰がある。

Keulegan (1949) は界面波が碎波して拡散混合が生じている場合の付加摩擦力を $\tau_a = \rho U_m U = f_{ia} \rho U^2 / 2$ とおき、

$$f_{ia} = 2 U_m / U, \quad (U_m: \text{下層よりの平均混入速度}) \quad (5.1)$$

とした。Keulegan は U_m を Arrested saline wedges に対し

$$\frac{U_m}{U} = K \left(1 - 1.15 \frac{U_c}{U} \right), \quad (U_c: \text{混入開始速度}) \quad (5.2)$$

で与え、定数 $K = 3.5 \times 10^{-4}$ (1949), 2.14×10^{-4} (Ippen, p 558) とした。その後大坪ら (1959 a, b¹⁾) は実際の河口内でも式 (5.2) が成立すると仮定して、淡水層の塩分濃度の変化を表わす式

$$\frac{S_{2x} - S_{1x}}{S_{20} - S_{10}} = \text{EXP} \left\{ - \int_{x_0}^x \left(\frac{K}{h_1} \right) dx \right\} \quad (5.3)$$

を提案した。 S_{1x} , S_{2x} : 河口からの距離 x (km) での淡、塩水濃度分布, h_1 : 淡水深である。石狩川の

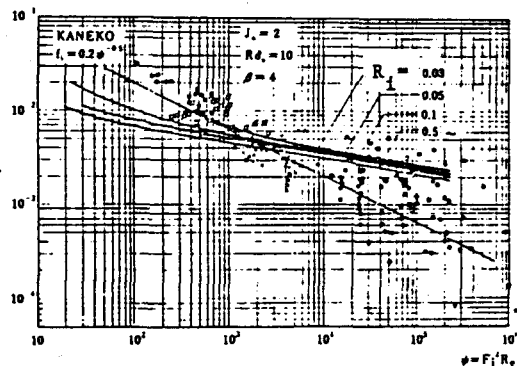


図 4.1 f_i と Ψ 値との関係

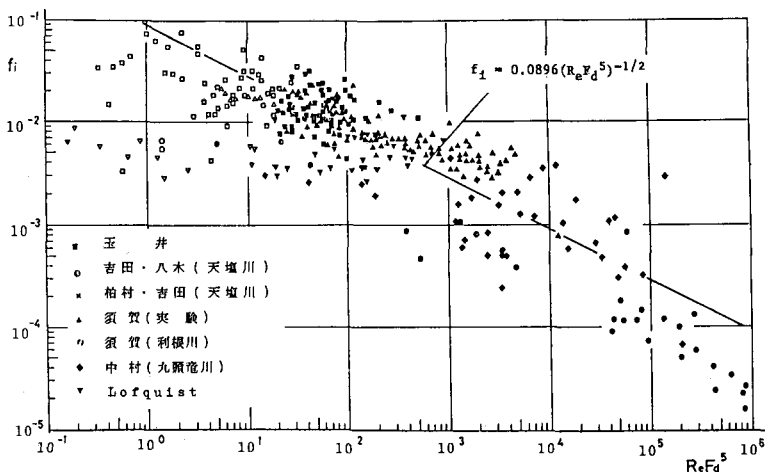


図 4.2 f_i と $Re F_d^5$ との関係

実測結果ではKは河川流量や距離によって異なり、 $U_m/U_1 = K(U_1: \text{上層平均流速})$ とするとき、 $K \times 10^5 = 11.8e^{-x}$ ($q = 250 \text{ m}^3/\text{sec}$), $5.12e^{-x}$ ($q = 300$), $2.80e^{-x}$ ($q = 350$) のように選ぶと塩分濃度の分布がよく説明できるとした。ここに、 $X = 0.22x$ とおいた。中村・稲松¹⁾(1966)は神通川における塩分濃度の実測結果と式(5.3)を比較することによりKを求めた。図5.1がその結果であり Ψ の値によりKは変化する。

岸・加藤²⁾(1967)は風によって表層流を誘起させておいて混入速度を測定し、次元解析より式(5.2)の代わりに

$$\frac{U_m}{U} = 3.5 \times 10^{-3} R_i^{-1} \left(\frac{U_r}{U} - \frac{U_{rc}}{U} \right) \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

を得た。 U_r は境界層付近の流速を述べており、界面流速 U_i に相当すると考えられる。 U_{rc} はその限界流速であり、Kは一定でなく R_i 数あるいは F_i 数の関数であることが知れる。また、式(5.1)の U_m として $U_m = (V/A_i)(\Delta S/S_2)/\Delta t$ が用いられている。 V :上層の全体積、 A_i :界面の全面積、 ΔS : Δt 時間における上層濃度増加量、 S_2 :下層塩分濃度である。

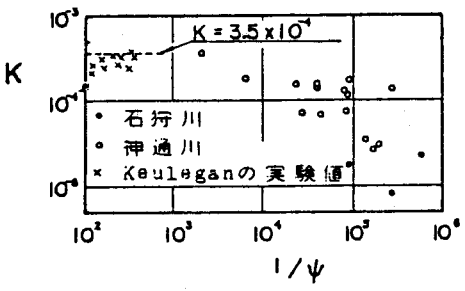


図5.1 混合量係数と Ψ との関係

EllisonとTurner(1959)は図5.2に示すような静止しているか、非常に低いレベルの乱れをもつ周囲流体に乱れた薄い水の層がプリュームとして流れる場合を考え、 U_a を周囲流体の流速、 u を U_a に相対的な流速とすれば、プリュームは周囲流体に相対的に $U = h^{-1} \int u dy$ なる平均流速をもつ。従って、

$$\frac{d}{dx} \left\{ h(U+U_a) \right\} = E|U| \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

で定義されるEは、KeuleganのKとは若干異なり周囲流体が剪断応力により主流に連行されていく量についての係数、いわゆる連行係数であって、(流量の増加率)/(断面平均相対速度差)である。

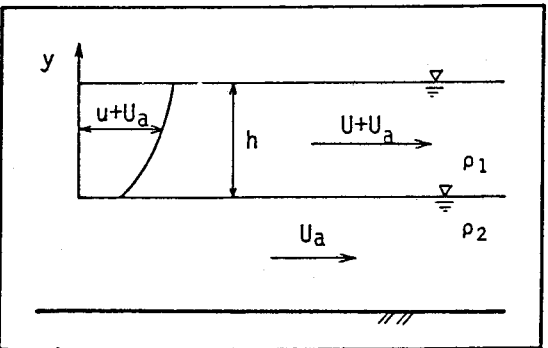


図5.2 EllisonとTurnerのモデル

従って、 $E = U_m/U$ と考えることができ、このとき f_i は式(5.1)から $f_i = 2E$ となる。これはPederson³⁾(1972)が得た結果でもある。しかし、Keuleganの U_m は界面全面積にわたる混入速度で、局所的な差異の影響を全て包含する。他方式(5.5)は一応局所的効果を表わしていると考えられ、平均混入速度は $u_m = A_i^{-1} \int E|U|B dx$ (B :水路幅)である。しかし、この u_m は岸らが定義した U_m とも異なっていて濃度変化が考慮されていない。

そこで、EllisonらはEが“over-all”リチャードソン数 $J (= (\Delta\rho/\rho)gh \cos\theta/U^2 = F_i^{-2}, \theta$:水路の傾斜角)の関数であると考えた。図5.3はその結果で周知のように一応Jが増えるほどEは小さくなるが、必ずしも一義的關係になく、また、和田・片野⁴⁾(1968)は界面勾配の大きさによってもEが変化することを指摘した。須賀・高橋(1976)は塩水楔を含む広範な実験結果より

$$E = \frac{U_m}{U} = 2 \times 10^{-3} F_i^3 \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

を実用的見地から提案し、最上川等の観測例で検証している。

さて、Ellison らは E と J に関して満足すべき関係が得られなかったため、断面平均的な値ではなく局所的な値に注目すべきであると述べている。彼らはその第 3 論文 (1960) において結局周知の渦動粘性係数 K_M と渦動拡散係数 K_s との關係に着目せざるを得なくなったようであり、次の關係

$$\frac{K_s}{K_M} = b \frac{(1-R_f/R_{fc})}{(1-R_f)^2} \dots\dots\dots (5.7)$$

を提案している。ここに、Flux Ri 数 $R_f = R_i (K_s/K_M) = g \overline{\rho'v'}/\overline{\rho} \overline{wv'} (d\bar{u}/dy) = K_M/k\bar{U}_* L$ であり、浮力によるエネルギー損失率と乱れ生成率との比を示す。 R_{fc} は 1 よりかなり小さい値で乱れ混合の起こりうるための最大値である。 R_{fc} は実験によってやや異なり彼等の場合には 0.15 または 0.10 となった (Ellison, 1957)。 図 5.4 は $b = 1.4$ とし R_{fc} をパラメータとして描いてある。また、Sjöberg (1967) は Lofquist ¹⁾(1960) の実験結果から K_s/K_M の値を求めているが Ellison らのものに比べて非常に小さな値となっている。

椿・小松 (1978) は成層密度噴流の拡散過程に関する一連の研究において、浮力による乱流構造の変化を考慮した連行係数として次式を導いた。

$$E = \frac{U_m}{U_1} = \frac{1}{U_1} \frac{d}{dx} (\alpha_v U_1 \delta) = \frac{2}{3} \frac{\alpha_v}{\alpha_{3v}} \chi_* \frac{1-2rJ}{(1+rJ)^2} \frac{\chi_2(J)}{\chi_1(J)} \dots\dots\dots (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(J) &= \frac{1+J(4r-4r_1-2r_2)+2rJ^2}{(1+rJ)^2} (\tau_1-\tau_2) \\ \chi_2(J) &= \frac{(1-\lambda_1\kappa_BJ)^{1/2}}{(1+\lambda_2\kappa_CJ)^2}, \chi_* = 0.0332 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.9)$$

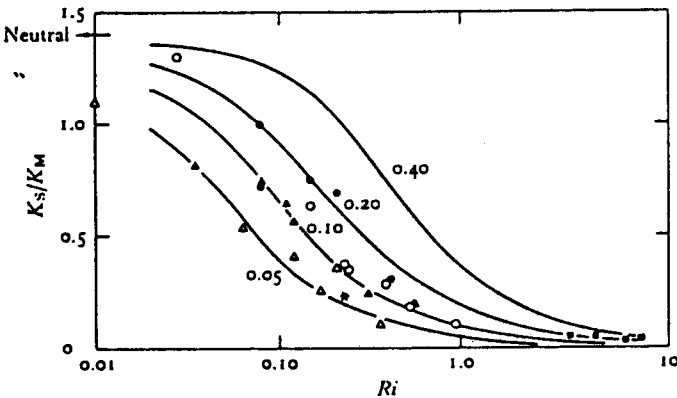


図 5.4 K_s/K_M と Ri との關係

ここに、 $J = N_0/U_1^3$ 、 U_1 : 水表面流速、 N_0 : 浮力 flux、 δ : 噴流幅 ($U = U_1/2$)、 U_m : 連行速度、 α 、 r 、 λ : 流速、 浮力、 乱れの分布に関する断面係数値で、 実験的に $\alpha_v = 1.064$ 、 $\alpha_{3v} = 0.615$ 、 $r = 1.475$ 、 $r_1 = 0.837$ 、 $r_2 = 1.391$ 、 $\lambda_1 = 1.889$ 、 $\lambda_2 = 2.089$ である。 χ_1 は表面流速に、 χ_2 は渦動粘性係数に關係する量で、 $J \rightarrow 0$ のとき $\chi_1 = \chi_2 = 1$ である。 χ_2 に含まれる κ_B 、 κ_C は乱流についての係数であり、 $\kappa_B = K_s/K_M$ はその実験結果 図 5.5 の主流部の平均値として $\kappa_B = 1.2$ とし、 κ_C は乱れの加速度平衡式における浮力項の係数であり、 混合距離と Reynolds 応力との理論式と実験値から $\kappa_C = 2.8$ と決められた。

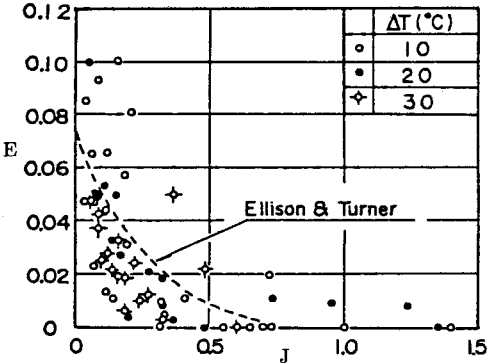


図 5.3 連行係数とリチャードソン数との關係

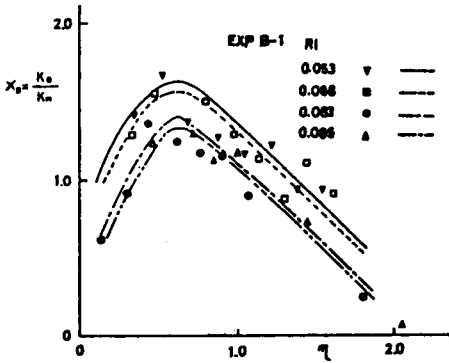


図 5.5 K_s/K_M の鉛直分布

図 5.6 が断面流速の測定値から求めた E と J との関係で, Chu(1976)の実験結果とともに示されている。彼らは浮力効果による乱流構造の変化を無視した場合 ($\chi_2=1$) の J の増加に伴う E の減少は密度差によって生ずる圧力勾配の影響によるためと考えた。このときの E の値は $E^* = 0.0383$ ($J \rightarrow 0$) からほぼ直線的に減じ $J=1/2r=0.339$ で $E=0$ となる。他方, χ_2 を考慮すると乱れが減衰するため E は J が増すと急激に減少し, $J \approx 0.2$ 付近ではほぼ連行現象は終了して密度噴流は二層流的な流れに移行すると述べている。

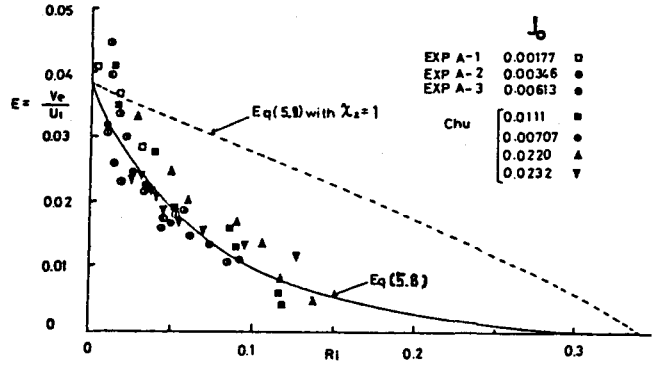


図 5.6 連行係数 E と J の関係

5.2 変動諸量の特性と混合エネルギー

界面付近の変動諸量の特性を知ることとは乱流への遷移や混合現象を考える上で大切である。

乱流理論で周知の乱れエネルギーの保存式と, 乱れの個々のフーリエ成分のもつエネルギー収支の式を対応させて示せば

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{q'^2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ v \left(\frac{p'}{\rho_0} + \frac{\overline{q'^2}}{2} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{q'^2}}{2} - \overline{v'^2} \right) \right\} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \frac{\overline{\rho'v'g}}{\rho_0} - \epsilon \quad (5.10a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} = \Gamma \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon}{\partial k} + G - 2\nu k^2 P \quad (5.10b)$$

である。いま平衡状態の浮力領域に着目すると, 式 (5.10 b) は

$$G(k) - \frac{\partial \epsilon(k)}{\partial k} = 0, \quad (G: \text{浮力の流れのスペクトル}) \quad (5.11)$$

となる。Lumley²⁾ (1964) は次元解析から $G(k) = f(\epsilon(k), N^2, k) = -CN^2 \{ \epsilon(k) \}^{1/3} k^{-7/3}$ を求めた。正の数 $C \sim 1.5$ で, 負号は $N^2 > 0$ (安定成層) の場合 G は乱れからエネルギーを奪うことを示す。この G を式 (5.11) に代入し, $k \rightarrow \infty$ で $\epsilon(k) \rightarrow \epsilon_0$ として

$$\epsilon(k) = \epsilon_0 \left\{ 1 + \left(\frac{k_B}{k} \right)^{4/3} \right\}^{3/2}, \quad k_B \equiv C^{3/4} N^{3/2} \epsilon_0^{-1/2} \quad (5.12 a, b)$$

を得て, 慣性・浮力領域でのエネルギー移行量 $\epsilon(k)$ は波数によって変化すると仮定し,

$$P(k) = A \{ \epsilon(k) \}^{2/3} k^{-5/3} \quad (A = 1.44 \pm 0.07) \quad (5.13)$$

とした。浮力中間領域 ($k_2 \ll k \ll k_B$) では -3 乗則が成立する。また式 (5.12 a) から $k_B \gg k$ の領域では $\epsilon(k) \gg \epsilon_0$, 従って浮力領域でのエネルギーの流れは粘性による逸散量に比べて非常に大きく, その大部分は安定な成層のために局所的に乱れから密度場のポテンシャルエネルギーに移っていく。浮力領域の渦は成層の影響を受けて一般に等方性ではないと考えねばならない。

椿・小松 (1977) は乱流特性量の波数空間における連続条件のモデル化を行ない, エネルギー移行の機構が対象とする物理量によって異なることを取り入れてスペクトルの関数形を求めた。先づ均一噴流の慣性領域で $-5/3$ 乗則, 粘性領域で $-13/3$ 乗則を示し (浅野・岩佐, 1979), ついで密度勾配が存在する場合の速度変動のスペクトルとして,

$$F(k) = A_{5/3} \left\{ \epsilon_0^{1/2} + A_1 (\overline{\rho' v' / u'^2})^{1/2} \left| \frac{d\bar{\rho}}{dy} \right|^{1/2} \frac{g}{\rho_0} k^{-1} \right\}^{4/3} k^{-5/3} \dots\dots\dots (5.14)$$

を導いた。\$A_{5/3} \approx 0.48\$, \$A_1 \approx 2.5\$である。浮力域ではやはり-3乗則となるが、Lumleyのとは支配量が異なり、濃度変動の発生割合と乱れ強度との比で決定されることになる。

玉井・西村¹⁾(1973)は次元考察より非混合型二層流に対し-3乗則、混合型に対し-5乗則を与え、阿部¹⁾(1974)は二層流における形成領域の界面で-5乗則、界面近傍で-3乗則に従うことを実験的に求め、界面波の影響の強いことを示した。

界面波のスペクトルは混合型と非混合型で異なり、混合型の場合には-3乗則が成立し(椿ら¹⁾1969; 日野・谷¹⁾1969; Phillip, 1969), 非混合型に対しては平衡領域で-5乗則, エネルギー含有域で-11/5乗などが示されている(井上, 1967; 日野・谷 1969¹⁾)。

界面付近の塩分濃度や温度躍層付近の温度変動などは界面波と密接に関係しているため、そのスペクトルは界面波とはほぼ同様の結果が得られていて、密度効果の度合いに応じて周波数の-5/3乗、-3乗に比例することが示されている(井上; 椿ら¹⁾; 岩崎・阿部, 1970; 和田・片野, 1971)。椿・小松(1977)は拡散物質の濃度や密度のスペクトルが慣性領域においては乱れ速度のスペクトルに比例することを示し、また密度FluxやReynolds 応力のスペクトルはいずれも慣性領域で-2乗則、粘性領域で-4乗則に従うとした。

乱流理論と成層流体の安定論との関連を付け、混合特性のエネルギーを論じたものに玉井・西村¹⁾(1973)の研究がある。DraginとHoward²⁾(1961)が無領域を対象に求めた噴流型の流速分布を有する成層流の安定限界を半無限域の流れで近似し、\$\Delta\rho \ll \rho_0\$ (水表面の密度)と考えて、安定な波数の最大値 \$k_m\$ を

$$k_m = \frac{J}{H} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} g \frac{H}{U^2} \right) / H \dots\dots\dots (5.15)$$

で与えた \$H\$: 速度分布を有する層厚, \$U\$: 代表流速である。\$J\$の不安定限界を1/4とすれば、CGS単位系で \$k_m \sim 0.025\$ のオーダーとなる。浮力の影響のきく領域の上限の目安となる \$k_b\$ のオーダーは岩崎・阿部(1969)の測定結果から \$k_b \sim 1\$ として、混合に関与するエネルギーを

$$E_U = \int_{k_m}^{\infty} AC N^2 k^{-3} dk \approx \frac{1}{2} AC N^2 k_m^{-2} = \left(\frac{AC}{2} \right) \left(\frac{1}{J} \right) U^2 \dots\dots\dots (5.16)$$

を得て、密度変化急激な二層流の場合には \$J^{-1}\$ に比例するとした。阿部¹⁾(1974)は玉井が求めた安定な最大波数 \$J/H\$ を用いて、界面波スペクトルの密度混合に関与する波数部分に着目し、混合に関与するエネルギー \$E_\eta\$ を

$$\frac{E_\eta}{H} = \frac{\beta_1}{4} J^{-2} \text{ (形成領域)}, \quad \frac{\beta_2}{2} J^{-1} \text{ (確立領域)} \dots\dots\dots (5.17)$$

と求めた。玉井の所論との関係では \$\beta_1 = 2 ACJ\$, \$\beta_2 = AC\$ となる。確立領域ではスペクトルの強さは一定となるが、形成領域では界面の状態によって変化することになり、界面での濃度変動の測定結果と一致をみるが、\$E_u \approx E_\eta\$ と仮定したこととの帰結にはかならず検討の要がある。

5.3 界面付近の混合機構

界面近傍の混合機構に立ち入った研究が吉田(1977, 78, 79), 室田・平田(1978), 瀧岡・日野・萩原(1978)らによって始められている。吉田は混合機構の1つはサイクロイド波直下の集中渦の存在によって生ずる界面波の砕波に伴う下層流塊の上層への輸送であり、他の1つは淡水の下層塩水内への連行であって、これにはさらに集中渦による連行作用に基づくものと、Langmuir 循環と類似の縦渦の対による連行作用に基づく機構があることを指摘している。しかし、\$\theta \approx \theta_c\$ 程度の場合、浮力効果が卓越し、下層の密度構造を大きく変化させるまでには至らないと述べている。

引用文献

- 浅野・岩佐・西原(1979): 河川における乱れの時間構造について, 第23回水講, PP. 99-105.
- Ellison, T.H.(1957): Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane, Jour. Fluid Mech., Vol. 2, PP. 456-466.
- Ellison, T. H. and J.S. Turner(1959): Turbulent entrainment in stratified flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, PP. 423-448.
- Ellison, T.H. and J.S. Turner (1960): Mixing of dens fluid in a turbulent pipe flow, Jour. Fluid Mech., Vol. 8, PP. 529-544.
- 浜田(1966, 67, 68, 69): 密度流の問題(1),(2),(3),(4), 第13回海講, PP. 259-262; 第14回海講, PP. 214-221; 第15回海講, PP. 180-184; 第16回講, PP. 153-156.
- Hinwood, J.B. (1967): The stability of stratified fluid, Jour. fluid Mech., Vol. 29, part 2, PP. 233-240
- 日野(1979): 密度流の流速分布および界面抵抗について, 第23回水講, PP. 347-353.
- 井上(1967): 二層流における混合に関する実験的研究, 第22回年講, II-188.
- Ippen, A. T.(1966): Estuary and Coastline Hydrodynamics, McGraw-Hill, P. 558.
- 岩崎・阿部(1969): 淡塩境界面付近の乱れ測定, 第16回海講, PP. 163-169.
- 岩崎・阿部(1970): 淡塩二層流における乱れ拡散に関する研究(1), 第17回海講, PP. 343-347.
- 柏村・吉田(1976): 天塩川の河口密度流, 第23回海講, PP. 477-481.
- Keulegam, G. H. (1949): Interfacial instability and mixing in stratified flow, Jour. Res. Nat. Bur. Standards, Vol. 43, PP 487-500
- Macagno, E. O. and Hunter Rouse(1961): Interfacial mixing in stratified flow, Jour. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE, Oct., PP. 55-81.
- 室田・平田(1978): 成層密度流における内部波特性と混合機構について, 第22回水講, PP. 107-112.
- 灘岡・日野・萩原(1978): 塩水楔における塩淡混合に関する実験, 第33回年講, PP. 427-428.
- 大坪・岸(1959a): 石狩川河口の密度流一定常塩水楔と河水層の塩分濃度, 第4回水講, PP. 25-26.
- Phillips, O.M.(1969): The Dynamics of The Upper Ocean, Cambridge Univ. Press, PP. 185-189.
- Shi-igai, H.(1965): On the resistance coefficient at the interface between salt and fresh water, Trans. JSCE, No. 123, PP. 27-31.
- 嶋・椎貝(1961): 躍層の安定に関する研究, 第16回年講, PP. 21-22.
- 1) 水理委員会密度流研究小委員会(1975): 成層密度流の界面現象(1), 土木学会論文集, No. 242, PP. 73-90.
- 須賀・高橋(1976): 淡塩二層流の連行係数, 第31回年講, II-209, PP. 383-384.
- Sjöberg, A.(1967): Diffusive properties of interfacial layers, Proc. 12th IAHR Congress, Vol. 4, P. 78.
- 玉井・浅枝(1978): 淡塩二層流境界面における抵抗係数について, 土木学会論文集, No. 271, PP. 67-81.
- Taylor, G. I.(1927): An experiment on the stability of superposed streams of fluid, Proc., Cambridge Phil. Soc., Vol. 23, PP. 730-731.
- 寺本編(1976): 海洋物理学Ⅱ, 東京大学出版会
- Thorpe, S.A.(1968): A method of producing a shear flow in a stratified fluid, Jour. Fluid Mech. Vol. 32, PP. 693-704.

富永(1976): 海洋波動, 共立出版

椿・小松(1977): 成層密度噴流における乱れおよび密度変動のスペクトル特性, 土木学会論文集, No. 268, PP. 63-74.

椿・小松(1978): 2次元表面密度噴流における流れの特性と連行現象, 土木学会論文集, No. 273, PP. 69-81.

2) Turner, J. S. (1973): Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press.

和田・片野(1971): 風波の作用下における水温成層の挙動に関する一実験, 第18回海講, PP. 287-292.

3) Yih, C. S. (1965): Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, Macmillan Company.

Yih, C. S. (1957): On stratified flows in a gravitational field, Tellus, 9, PP. 220-227.

吉田・段城(1977): 二層流界面に発生する波動の実態, 第21回水講, PP. 69-74.

吉田(1978): 密度界面における混合機構の研究, 土木学会論文集, No. 273, PP. 59-68.

吉田(1979): 密度界面における波動の発生と破壊条件, 第23回水講, PP. 363-368.