

剪 断 乱 流 の 構 造

小 林 陵 二

1 はじめに

液体または気体の流れは一般に乱流状態にある。その流体の流れは、層流状態から乱流に遷移したものとして、あるいはまた最初から乱流の状態でわれわれに認識される。乱流の形態は実に多様であるが、流体力学の対象となる流れは次の基本的タイプか、その組合せとみなすことができる。

風洞乱流, 後流, 噴流, 管内乱流, 乱流境界層

乱流とは何か、これをひとくちで定義することは決して容易ではないが、特徴的性質を挙げると、乱流の微細構造は、非定常な3次元流れであって、その速度は時間的空間的に不規則に変動している。乱流を大小さまざまなスケールの流体塊ないし渦からなると考えることもある。また乱流においては流体塊が互いに活潑に混合する。このような乱流の性質は、層流状態に比較して、たとえば次の効果をもたらす。すなわち、管内乱流においては摩擦損失が増大し、物体まわりの外部流れでは剥離点が後退し、その結果として形状抵抗が減少する。また、固体表面からの熱伝達を増加させ、空気中の煙など混合物質の拡散を促進し、高速気流においては圧力変動が無視できない大きさになる。

乱流現象は人類にとって相当古くから認識されていたが、これを研究の対象として取り上げたのは O. Reynolds (1883)⁽¹⁾ の頃からであろう。乱流の時間平均的速度場に対する運動方程式には、速度変動成分 (u_i , $i = 1, 2, 3$) の積の時間平均値で表されるレイノルズ応力の項 ($-\rho \overline{u_i u_j}$ など, ρ は流体の密度) が含まれており、この速度変動成分の2重相関を求めるための新たな方程式はさらに高次の3重相関を含むことになり、同様にして方程式の次数を増しても常に方程式の数より未知数の数が多く、閉じた方程式系を作ることができない。このことは純理論的に乱流の場を求めることができないことを意味する。したがって、ある次数の多重相関において物理的に意味のある何らかの仮定を設けるか、あるいは実験値を導入することが必要になる。乱流に関する研究において、最初に乱流剪断応力 τ ($-\rho \overline{u_1 u_2}$) を層流との類推から渦動粘度の概念を用いて速度勾配と結びつけることが提案され、また気体分子運動論の平均自由行路から類推された混合距離の概念が導入され、これらの乱流モデルに基づく半実験的理論によって時間平均的速度場の実際の現象をかなり良く表わすことができる。このため、上記の乱流モデルの概念は、乱流の構造を本質的に説明するものではないが、工学的見地から現在でも評価されている。

乱流の速度変動の場を統計理論により取り扱ったのは G. I. Taylor (1921)⁽²⁾ の頃からである。乱流統計理論において、乱流運動を支配する方程式系を簡単化することにより余分な数学的複雑さにわずらわされることなく乱流構造の特性を把握するため、理想化した乱流を考える。いま、流れの場において乱れの性質が空間的にいたるところ同一である状態を考える。これを、一様な乱れ (homogeneous turbulence) と称する。しかしこの状態でもなお理論的考察は複雑であるため、次の理想化として、各点において座標系を回転しても変動速度成分によって作られた任意の関数の時間平均値は変わらない状態を考える。このとき、乱れの強さは方向によらず一定 ($\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2}$, ここに $\overline{u_i^2}$ は u_i の二乗平均) となり、変動成分の間に相関が存在しない乱流 ($\overline{u_1 u_2} = \overline{u_2 u_3} = \overline{u_3 u_1} = 0$) となる。このような乱流を等方性乱流 (isotropic turbulence) という。等方性乱流においては、相関テンソルやスペクトルテンソルが特に簡単になり、詳しい数学的取り扱いが可能で、乱流の微細構造や乱れエネルギーの交換・散逸などについて得られた結果は、広く一般の乱流にも適用でき、等方性乱流の理論は乱流

一般の解明につながる出発点にもなるということができる。そこで本講では、最初に等方性乱流の概要から述べることにする。

なお、等方性乱流に限らず一般の乱流において、乱れは連続体の中の運動であるから、隣り合う点の運動は統計的にみて互いに独立ではない。その相互の関係を記述する方法として相関関数が用いられる。いま空間の2点 $(x, \hat{x})$ における異なる時刻 $(t, \hat{t})$ に対する変動速度の各軸方向成分 $u_i(x, t)$ および $u_j(\hat{x}, \hat{t})$ の間の相関関数を次のように書き表わす。

$$R_{ij}(x, t, r, \tau) = \overline{u_i(x, t) u_j(\hat{x}, \hat{t})} \tag{1}$$

ここに、 $r = \hat{x} - x$ 、 $\tau = \hat{t} - t$ 、 $\overline{\hspace{1cm}}$ は十分長い時間にわたる平均値を意味する。同一時刻 ($\tau = 0$) の相関関数から次の式

$$L_{ij}(x, t) = \frac{1}{2 \overline{u_i(x, t)} \overline{u_j(x, t)}} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(x, t, r, 0) dr \tag{2}$$

により積分特性距離 (integral scale) L_{ij} が定義される。積分特性距離は瞬間的に一体として動く流体塊ないし渦の大きさに相当する量である。乱れが2点を結ぶ方向に一樣な場合には、空間的自己相関関数 $R_{11}(r) = \overline{u_1(x) u_1(\hat{x})}$ に対して積分特性距離 L_{11} は、

$$L_{11} = \frac{1}{\overline{u_1^2}} \int_0^{\infty} R_{11}(r) dr \tag{3}$$

と表わされる。このほか、速度微係数の相関に関連するもう一つの乱れのスケールとして微分特性距離 (dissipation scale) λ :

$$\lambda = \left\{ \frac{-\overline{u_1^2}}{\partial^2 R_{11} / \partial r^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

が用いられる。これらの特性距離の幾何学的意味は図-1に示すとおりである。 λ は、 $r = 0$ において $R_{11}(r)$ と同じ曲率をもつ放物線が横軸と交わる点 ($r = \sqrt{2} \lambda$) に関わる量である。

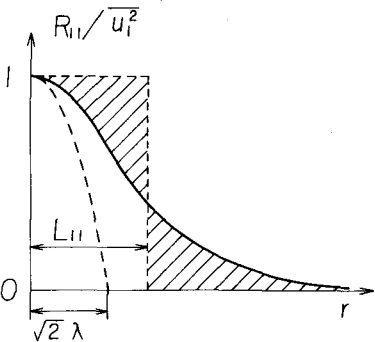


図-1 R_{11} と特性距離 L_{11} および λ との関係

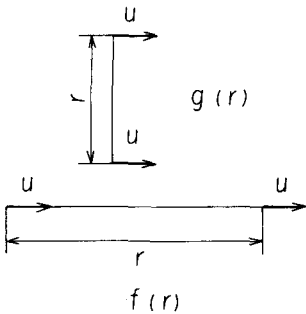


図-2 縦相関関数 $f(r)$ および横相関関数 $g(r)$

2 等方性乱流

厳密に一樣で等方性の乱流の場を作り出すことは実際には不可能であるが、流速一定の均一な流れが網目状の格子を通過した下流ではこれに近い状態が実現される。そのため、等方性乱流の理論結果の実験的検証に風洞における格子乱流が用いられる。

等方性乱流における速度相関関数 $R_{ij}(\vec{r})$ は、図-2に示す互いに平行な速度成分に関する2つの

基本的相関関数，すなわち縦相関関数 $f(r)$ および横相関関数 $g(r)$ を用いて次の式によって表わされる。

$$R_{ij}(\vec{r}) = \overline{u^2} \left[\left\{ f(r) - g(r) \right\} \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r) \delta_{ij} \right] \quad (5)$$

ここに， $\overline{u^2}$ は速度変動の 2 乗平均， δ_{ij} は Kronecker のデルタで， $i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$ ， $i \neq j$ のとき $\delta_{ij}=0$ 。 $f(r)$ と $g(r)$ との間には， $g(r) = f + (r/2)(\partial f / \partial r)$ の関係があるので，結局，等方性乱流の速度相関は実質的にただ一つのスカラー関数 $f(r)$ または $g(r)$ で記述されることになる。このとき，縦相関および横相関の積分特性距離 L_f ， L_g および微分特性距離 λ は，

$$L_f = \int_0^\infty f(r) dr, \quad L_g = \frac{L_f}{2}, \quad \frac{1}{\lambda^2} = -f''(0) \quad (6)$$

で与えられる。格子乱流における縦相関関数 $f(r)$ を測定した一例を図-3 に示した。乱れのレイノルズ数として次の式が用いられることがある。

$$Re = \frac{\sqrt{\overline{u^2}} L_f}{\nu}, \quad Re_\lambda = \frac{\sqrt{\overline{u^2}} \lambda}{\nu} \quad (7)$$

流体の単位質量当りの乱れの運動エネルギーについて，波数 k を用いて，

$$\frac{3}{2} \overline{u^2} = \int_0^\infty E(k) dk \quad (8)$$

と表わされるエネルギースペクトル $E(k)$ は，等方性乱流において縦相関関数 $f(r)$ と次の関係にある。

$$E(k) = \frac{\overline{u^2}}{\pi} \int_0^\infty kr (\sin kr - kr \cos kr) f(r) dr \quad (9)$$

乱れエネルギーの輸送過程は次のように解釈することができる。すなわち，乱流運動を波数 k の異なる多くの成分の集まりと考えると，最初に粘性力がほとんど作用しない大きいスケールの成分に集中している乱れエネルギーは，直接熱エネルギーに変換されるのではなく，スケールの次に小さい (k の大きい) 成分に伝達され，この成分がさらに小さい成分に転送されるという経過を繰返し，乱れエネルギーは次第にスケールの小さい，波数の大きい成分に輸送される。同時に，粘性力による乱れエネルギーの散逸は，波数の大きい領域において著しく行われ，熱エネルギーに変換される。

格子の下流に形成される乱流の場の減衰過程は，減衰初期 ($x_1 = (100 \sim 150)M$ 以下)，移行期，および減衰終期 ($x_1 = 500M$ 以上) に分けられる。

図-4 は，格子の下流減衰初期の 3 か所における

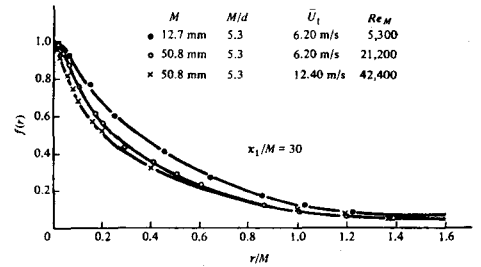


図-3 縦相関関数 (3)

M : 格子のメッシュ, d : 格子棒の直径, $Re_M = \bar{U}_1 M / \nu$

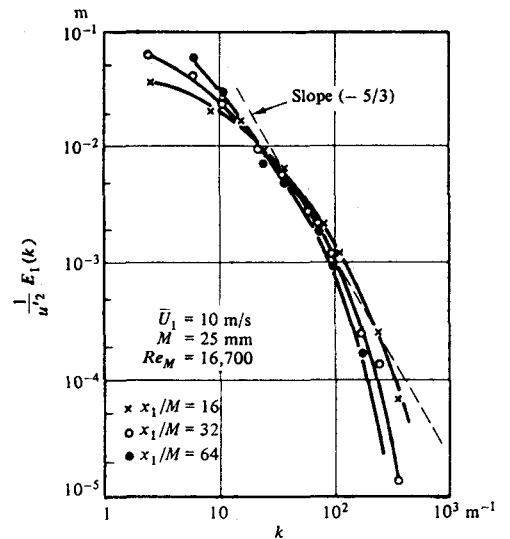


図-4 格子下流における乱れ u_1 のエネルギースペクトル (4)

る乱れ u_1 のエネルギー・スペクトルを示している。局所等方性乱流の理論から得られる $(-5/3)$ 勾配のスペクトル部分が存在する。この $(-5/3)$ 勾配の範囲は、レイノルズ数 Re_M が大きくなると広がる。波数 k が非常に大きい領域においては (-7) 勾配となる。

図-5 は、乱れエネルギーの下流方向への減衰を測定した結果であり、縦軸に乱れエネルギーの逆数 $(\bar{U}_1/u_1')^2$ (ただし、 $u_1' = \sqrt{u_1'^2}$) をとっている。このため、 $u_1'^2 \sim x_1^{-n}$ の関係で減衰する。 n の値は、乱流理論では $n = 1$ であるが、諸家による実験の平均値は $n \approx 1.25$ となる。

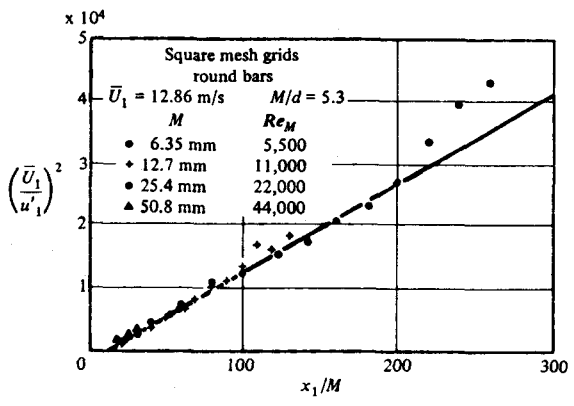


図-5 減衰初期における乱れエネルギーの下流への変化⁽⁵⁾

減衰終期においては、図-6 に示すように、乱れエネルギーは $u_1'^2 \sim x_1^{-5/2}$ の関係で x_1 方向に時間とともに減衰し、縦相関関数はガウスの誤差関数 $f(r, t) = \exp(-r^2/8\nu t)$ となり、レイノルズ数 $Re_\lambda (= u_1' \lambda / \nu) \sim x_1^{-3/4}$ の関係に従って、 x_1 とともに減少し、このときエネルギー・スペクトルの減衰は、時刻 $t = t_0$ (すなわち、凍結の仮説に従って $x_1 = \bar{U}_1 t_0$, $\bar{U}_1$ は主流の流速) でのスペクトルを $E(k, t_0)$ とすると、 $t \geq t_0$ に対して、

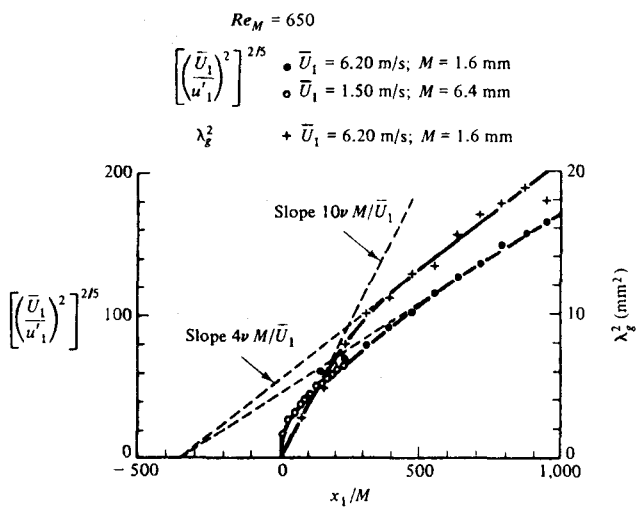
$$E(k, t) = E(k, t_0) \exp\{-2\nu k^2(t - t_0)\} \quad (10)$$


図-6 減衰終期における乱れエネルギーの下流への変化⁽⁵⁾

λ_g : 横相関の微分特性距離

と表わされる。すなわち、各波数ごとに乱れエネルギーは時間と共に指数関数的に減衰し、波数 k の大きいものほど急速に減衰することがわかる。この関係は、等方性乱流に限らず一様な乱れに対して一般的に当てはまる。

3 後 流

流れの中に物体が置かれているとき、その下流側に生ずる流動現象を後流 (wake) という。物体まわりの流れが剥離を伴わない場合には、その物体の後縁から流れ出た境界層は速やかに乱流状態の後流となり、下流に進むに伴い後流の幅を広げ速度が平均化される。鈍頭物体のまわりの流れのように一般に剥離を伴う場合には、物体下流側にはほぼ周期的に渦が発生する。レイノルズ数 $Re(U_0 d / \nu, U_0$ は主流の流速、 d は物体の代表長さ) が $Re = 60 \sim 5000$ のとき、この渦列が明瞭に観察され、カルマン渦列と呼ばれている。これらの渦は、下流に進むに伴い次第に拡散減衰し不規則変動を主体とする乱流状態へ移行する。

3.1 渦の発生頻度

渦の発生頻度 (N) は、無次元パラメータとしてストラハル数 $S (= Nd / U_0)$ を用いて表わされる。

ストラハル数 S はレイノルズ数 Re により多少変化する。図-7 は、円柱後流の渦発生頻度について従来諸家により測定された結果を、 S と Re との関係で示している。図の C_D は、円柱の抗力係数 ($D = C_D (1/2) \rho U_0^2 d$, D は抗力, d は円柱の直径) である。渦の周期的発生によって円柱には主流に直角の方向に周期的力が作用するが、その力による円柱の変位振動を許す場合には、ストラハル数 S の値は円柱を固定した場合に比較して小となる。

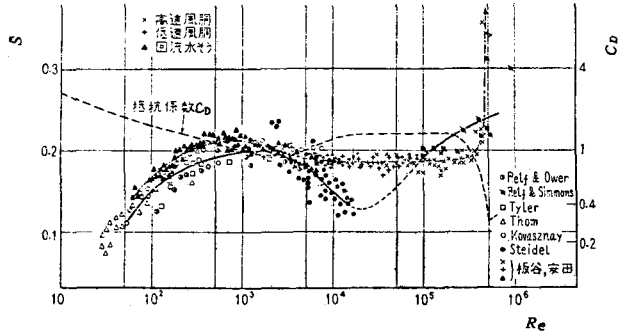


図-7 ストラハル数 S のレイノルズ数 Re による変化 (円柱) ⁽⁶⁾

円柱以外の形状の物体から発生する渦列についてみると、平板や翼形が一樣流れ (U_0) に対し迎角 30° 以上に置かれているとき、その弦長の主流方向への射影長さ (b) を代表長さとしてストラハル数 $S (= Nb/U_0)$ を定義すれば、迎角の大きさに関係なく、ストラハル数の大きさは $S = 0.15 \sim 0.21$ となる。⁽⁷⁾

3.2 二次元後流の速度分布と幅

物体から約 $80d$ 以上離れた領域では、渦列の規則性を失って不規則な速度変動を示す乱流状態となる。レイノルズ数 Re が 800 以上では、この領域における巨視的構造はレイノルズ数の大きさによらない相似な構造となる。(微視的乱れの構造が相似となるのは $(500 \sim 1000)d$ 以下においてである。) 図-8 は、円柱後流の半値幅 ($\bar{U}_1 = \bar{U}_{1, \max}/2$ となる幅) $b_{1/2}$ が下流方向 (x_1) へ変化する関係を示しており、図に①で示す実験式は $b_{1/2} = \sqrt{C_D d x_1}/4$ となる。ただし、 $\bar{U}_1 = U_0 - \bar{U}$, $\bar{U}$ は後流内の時間平均速度。

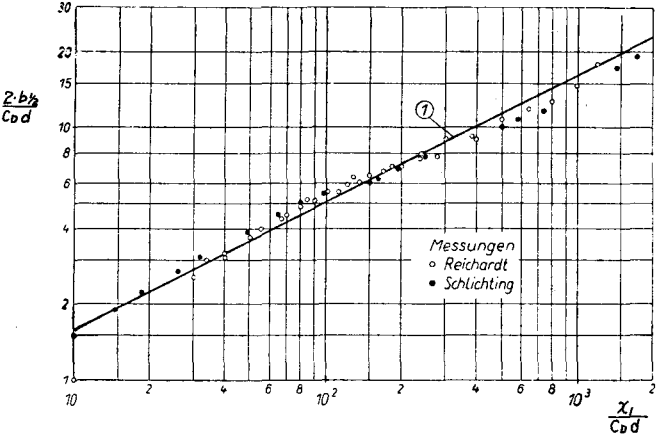


図-8 後流の半値幅 (円柱) ⁽⁸⁾

図-9 には、後流の4か所における速度分布を示している。図において曲線①はPrandtlの運動量輸送理論による結果である。また、曲線②は、レイノルズ応力 τ を渦動粘度 ε を用いて $\tau = \varepsilon (\partial \bar{U}_1 / \partial x_2)$ と置き、 $\varepsilon = C b \bar{U}_{1, \max}$ (C は実験により定める定数, b は後流の幅の $1/2$) と表わした場合の理論結果:(ただし、 $\eta = x_2 \sqrt{U_0 / \varepsilon x_1}$)

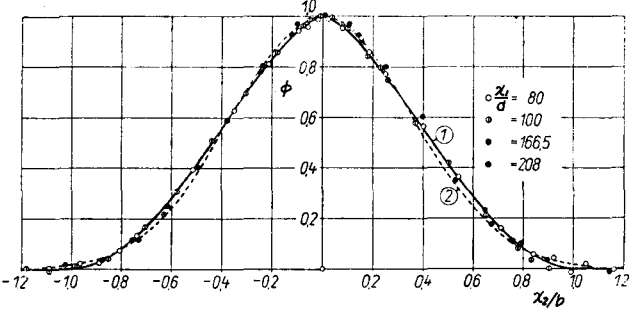


図-9 後流の速度分布 (円柱) ⁽⁸⁾

$$\phi = \bar{U}_1 / \bar{U}_{1, \max}$$

$$\frac{\bar{U}_1}{U_0} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_0 C_D d}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{C_D d}{x_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \eta^2 \right\} \quad (11)$$

であり、図-8の後流幅 $b_{1/2}$ についての実験値との対比から渦動粘度は $\varepsilon = 0.047 (2 b_{1/2}) \bar{U}_1$ となる。詳細に見れば、曲線①は後流中心附近で、曲線②は $x_2/b \sim 0.5$ 附近において測定値との間に差があるが、全体として測定値と良く一致しているといえる。

3.3 後流の乱れの構造

後流において乱れの構造が相似になるのは、物体から約 $500d$ 以上下流においてである。図-10に乱れ強さの3軸方向成分の分布を示している。 $x_1 = (500 \sim 950)d$ の範囲の4か所における測定結果の平均値である。 $\bar{q}^2 (= \bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2)$ は単位質量当りの乱れエネルギーの2倍を表わす。 x_1 は円柱中心から下流に測った距離、 x_2 は後流中心から主流方向に対し垂直方向に測った距離、 a は後流幅の仮想原点である。図-11には乱流剪断応力および渦動粘度の分布を示している。剪断応力が最大となるのは $\xi_2 \approx 0.18$ においてであることがわかる。渦動粘度 ε は後流中心附近では ξ_2 方向にはほぼ一定の分布になっている。

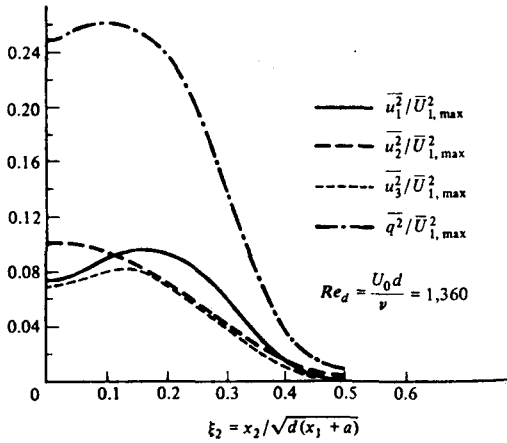


図-10 後流における乱れ強さの分布(円柱)⁽⁹⁾

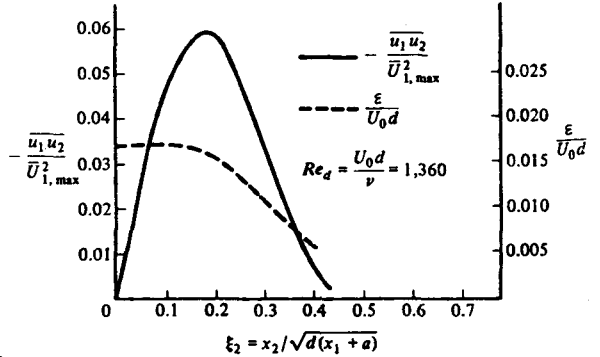


図-11 後流における乱流剪断応力 $(-\overline{u_1 u_2})$ と渦動粘度 ε の分布(円柱)⁽⁹⁾

後流における乱れエネルギーの発生・対流・拡散・散逸の様相を知るためには、後流に対する下記の乱れエネルギー方程式の各項の大きさを定量的に評価すればよい。

$$\underbrace{\frac{d}{2U_0^2} \frac{\partial \bar{q}^2}{\partial x_1}}_{\text{対流}} + \underbrace{\frac{d}{U_0^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\overline{u_2 p}}{\rho} + \frac{\overline{u_2 q^2}}{2} \right\}}_{\text{拡散}} + \underbrace{\frac{\overline{u_1 u_2} d}{U_0^3} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2}}_{\text{発生}} + \underbrace{\frac{15\nu}{U_0^3} \left\{ \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} \right\}^2}_{\text{散逸}} = 0 \quad (12)$$

図-12には、円柱の後流 $\xi_1 (= (x_1 + a)/d) = 160$ における測定結果を用いて乱れエネルギー方程式の各項の大きさを算出し、後流断面内の各点における乱れエネルギーの所得と損失の関係を示したものである。ただし、静圧変動 p の精度よい測定は困難であるため、圧力変動による拡散の項は乱れエネルギーの方程式から他のすべての項の残差として求めている。図からわかるように、後流中心附近における乱れエネルギーの主な所得は上流からの対流によるもの、主な損失は x_2 方向への拡散である。乱れエネルギーの発生が最大となるのは $\xi_2 \approx 0.25$ においてである。その外側では主に乱れエネルギーの発生と散逸が同程度の大きさで釣合った状態にあり、拡散と対流は無視することができる大きさである。後流と主流との境界領域では後流内側からの圧力変動による拡散と下流への対流とが支配的

である。

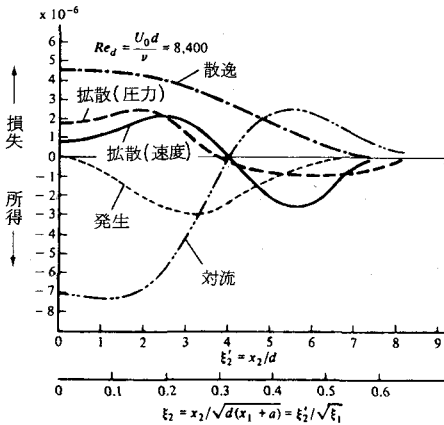


図-12 後流におけるエネルギーバランス (円柱)⁽¹⁰⁾

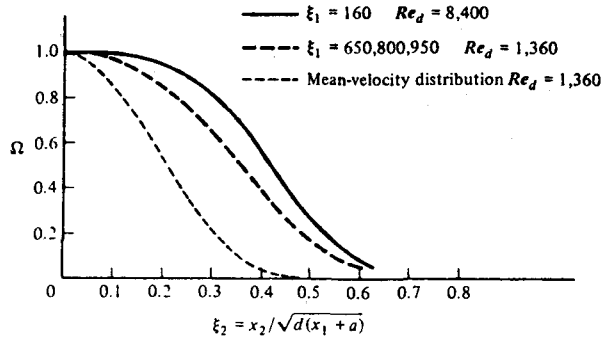


図-13 後流における間欠率の分布 (円柱)⁽¹¹⁾⁽¹³⁾

後流の中心附近には渦動粘度 ε がほぼ一定の分布をしている十分に発達した乱流領域があり、その外側に乱流領域と乱れの少ない主流とが複雑に入り込んだ構造の領域がある。いまその領域のある一点における速度変動を検出したとき、測定時間の間に乱流状態が占める時間の割合を間欠率 Ω と定義する。図-13 は円柱の後流における Ω の分布を示している。 Ω の値が 1 より小さい領域が後流中心附近にまで入り込んでいることがわかる。

4 噴 流

図-14 に示すように、流速 U_∞ の一様な流れの中に直径 d のノズルから流速 U_0 の噴流が噴出する場合を考える。速度比を $M = U_\infty / U_0$ とする。ノズル近くには周囲の流れの影響を未だ受けない長さ Z_c のポテンシャルコアが存在する。ノズルから下流に約 $8d$ 以上の領域において噴流の幅および速度分布の巨視的構造は相似になる。しかし、乱れの構造が相似になるのはさらに下流においてである。

4.1 噴流の速度分布と幅

ポテンシャルコアの長さ Z_c は、静止流体中に噴出する噴流の場合 ($M=0$) には $Z_c = (6 \sim 8)d$ 、また噴流の速度比が $M=0.2 \sim 0.5$ の場合には $Z_c = (4 + 12M)d$ となる。⁽¹³⁾

このポテンシャルコアの長さ Z_c は、ノズル出口にお

ける境界層厚さの大きさによって多少異なるが、レイノルズ数 $Re (= U_0 d / \nu)$ が $10^5 \sim 10^6$ 以上に十分大きくなると、ノズル出口における流れの状態はコアの長さに影響しない。いま相似則に従う流れの場の仮想原点を $Z=a$ とし、仮想原点から Z 方向に測った距離を $(Z+a)=Z'$ と置くと、噴流中心軸に沿う速度の Z 方向への変化は、 $M=0$ の場合、 $\bar{U}_{z,max}/U_0 = A/(Z'/d)$ と表わされる。ここに、定数 A と a は Z' の範囲により多少異なった値をとり、 $Z' = (8 \sim 20)d$ のとき $A=5.9$ 、 $a=-0.5d$ ⁽¹⁴⁾； $Z' = (10 \sim 50)d$ のとき $A=5.9$ 、 $a=-3d$ ； $Z' = (25 \sim 90)d$ のとき $A=5.4$ 、 $a=-7d$ となる。⁽¹⁵⁾ 周囲の流速 U_∞ がある場合 ($M \neq 0$) には、 $\bar{U}_{z,max}/(U_0 - U_\infty) = Z_c/Z$ と表わされる。噴流の速度分布は、渦動粘度 ε を用いた理論によると、次の式：

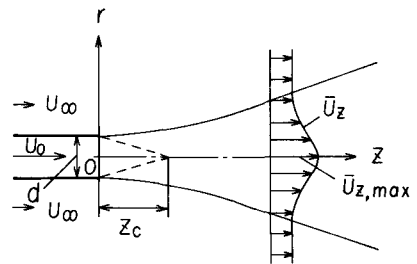


図-14 噴 流

$$\frac{\bar{U}_z}{\bar{U}_{z, \max}} = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{Z' \bar{U}_{z, \max}}{8 \varepsilon} \left(\frac{r}{Z'} \right)^2 \right\}^2} \quad (13)$$

で表わされ、図-15に曲線②で示すように実験と良く一致する。曲線①は運動量輸送理論による結果である。噴流の半値幅 $b_{1/2}$ は次のように表わされる。

$$\frac{2 b_{1/2}}{d} = 0.16 \frac{Z'}{d}, \quad \frac{2 b_{1/2}}{d} = \left(\frac{Z}{Z_c} \right)^{1-M} \quad (14)$$

($M = 0$) ($M = 0.2 \sim 0.5$)

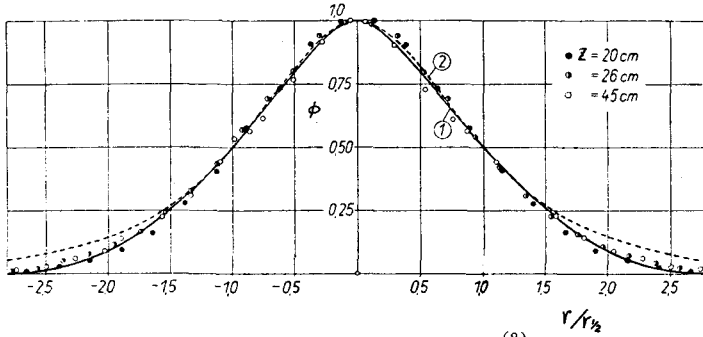


図-15 軸対称噴流の速度分布⁽⁸⁾

実験値: Reichardt⁽¹²⁾, $d = 15 \text{ mm}$, $U_0 = 50 \text{ m/s}$
 $\phi = \bar{U}_z / \bar{U}_{z, \max}$

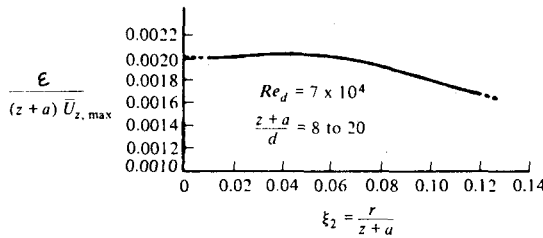


図-16 噴流における渦動粘度 ε の分布⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾

4.2 噴流の乱れの構造

図-16に軸対称噴流における渦動粘度 ε の分布の測定結果を示している。 ε の値は噴流中央付近ではほぼ一定となっており、

$$\varepsilon = 0.00196 \bar{U}_{z, \max} Z' = 0.0116 U_0 d \quad (15)$$

と表わされ、この場合には ε の値は r 方向のみならず下流方向 (Z) にも変化しない。図-17は、軸対称噴流の中心軸に沿う3軸方向乱れ強さ (u'_r , u'_ϕ , u'_z) の分布を示している。図から、 $u'_r \approx u'_\phi$ であるが、 u'_z はこれらより多少大である。また図-18は、 $Z = (50 \sim 97.5) d$ の範囲の4か所の断面における乱れ強さの半径方向の分布である。ほぼ相似な分布を示していることがわかる。図-19には、種々の断面における間欠率 Q の半径方向の分布を示した。いずれの断面の測定値も相似な1本の曲線によって表わされることがわかる。この噴流における間欠率の分布を後流の場合(図-13)と比較すると、噴流の方が中心軸附近の $Q \approx 1$ となる領域が大きい。噴流においては、 $\bar{U}_z / \bar{U}_{z, \max} = 1/2$ と

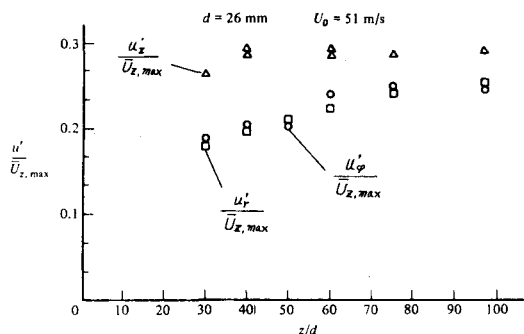


図-17 軸対称噴流の中心軸に沿う乱れ強さの変化⁽¹⁵⁾

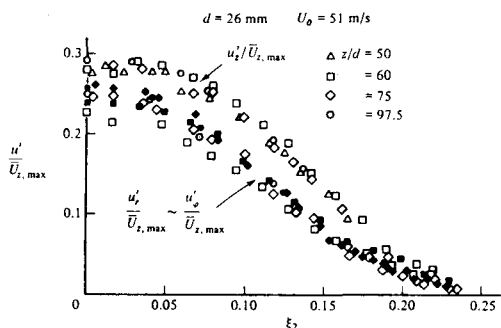


図-18 軸対称噴流の乱れ強さの半径方向分布⁽¹⁵⁾

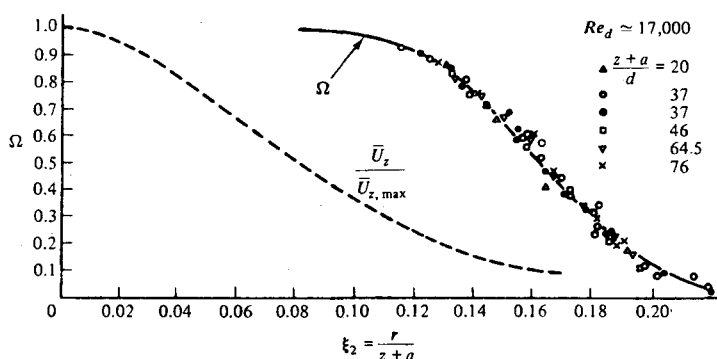


図-19 軸対称噴流における間欠率Ωの分布⁽¹⁶⁾

る半値幅の位置においてもなお $\Omega \approx 1$ であるが、後流では Ω の値が可成小となる。図-20は、後流の場合と同様にして、軸対称噴流内の乱れエネルギーの発生・対流・拡散・散逸の関係を乱れエネルギー方程式から求めたもので、そのエネルギーバランスの関係は後流の場合に類似している。

噴流は剪断乱流としては後流と同様に近くに固体壁面をもたない自由乱流であるため、その巨視的ならびに微視的構造は後流の場合と類似している点が多い。

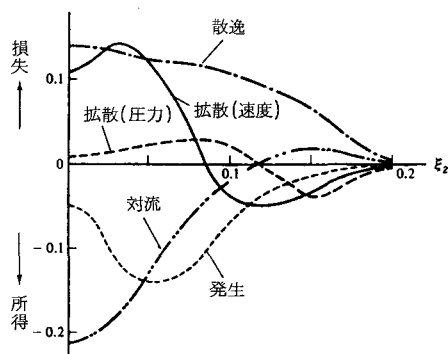


図-20 軸対称噴流におけるエネルギーバランス⁽¹⁵⁾
 $Z=90d$, $Re_d \approx 8 \times 10^4$

5 固体壁面近くの剪断乱流

固体壁面に接する剪断乱流の構造は、当然固体壁面の影響を著しく受けている。したがって、固体壁面の種類および状態により乱流の構造も変化する。ここでは代表的に、内部流れとして十分に長い円形断面の直管内の乱流、ならびに外部流れとして平板に沿う圧力勾配のない乱流境界層を取り上げる。長方形断面の流路や粗面管、曲り管を通る流れ、あるいは任意形状物体まわりの圧力勾配を持つ境界層など、より複雑な流れにおいても上記の代表的乱流の基本的特性は備わっている。

粗さのない十分に滑らかな固体壁面に極く近い領域は、乱れが少なく、粘性応力が支配的であるため、粘性底層といわれる。いま剪断応力 τ を $\tau = \mu (\partial \bar{U}_1 / \partial x_2)$ と置くと (μ は粘性係数)、粘性底層内においては $\tau(x_2) \approx \tau_w$ (τ_w は壁面における剪断応力) であるから、積分して、 $\bar{U}_1 / u^* = u^* x_2 / \nu$ の関係が得られる。ここに、 $u^* (= \sqrt{\tau_w / \rho})$ は速度の次元をもつ量で、摩擦速度と呼ばれる。この粘性底層の厚さ δ_l は、 $u^* \delta_l / \nu \approx 5$ に相当し、乱流境界層の厚さ δ に対し、レイノルズ数に応じ (0.001 0.01) δ の程度の大きさである。

粘性底層の外側には、乱流剪断応力が支配的で粘性応力の無視し得る領域が存在する。この領域でも剪断応力 $\tau(x_2)$ が壁面剪断応力 τ_w にはほぼ等しい分布を示すため、この範囲における速度分布は対数法則に従う。多くの実験から定数を決定すると、図-21 に示すように次の式によって表わされる。

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = 2.44 \ln \frac{u^* x_2}{\nu} + 4.9 \tag{16}$$

粘性底層と対数法則に従う領域との間 ($u^* x_2 / \nu = 5 \sim 60$) には、粘性による剪断応力と乱れによる剪断応力とが同程度に寄与する遷移層が存在する。粘性底層から対数法則の領域までの速度分布を1つの式で表わすため、Van Driest⁽¹⁷⁾ は混合距離 l を $l = \kappa x_2 \{1 - \exp(-x_2^* / A)\}$ と置くことにより次の式を得ている。

$$\frac{\bar{U}_1}{u^*} = 2 \int_0^{x_2^*} \frac{d x_2^*}{1 + \{1 + 4 (l u^* / \nu)^2\}^{1/2}} \tag{17}$$

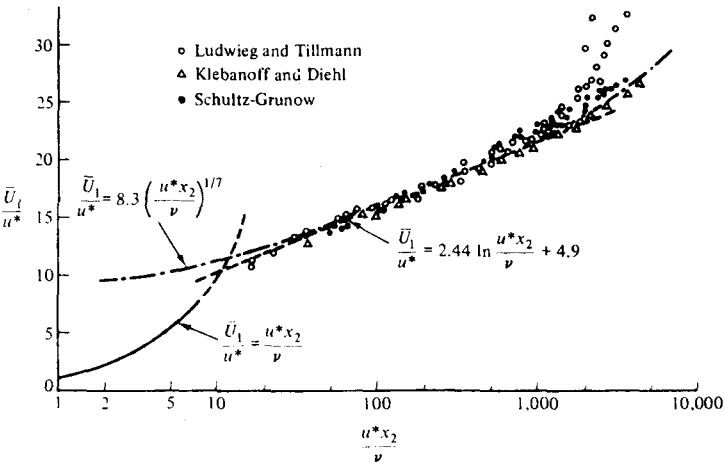


図-21 乱流境界層内の速度分布 (壁法則) (13)

ここに、 $x_2^* = u^* x_2 / \nu$ 、 $\kappa = 0.4$ 、 $A = 2.7$ 。以上述べてきた粘性底層から対数法則の成立つ領域までは速度分布が $\bar{U}_1 / u^* = f(u^* x_2 / \nu)$ の形で表わされるので、壁法則 (law of the wall) と呼ばれている。壁法則は、管内乱流および乱流境界層のいずれについても広範囲のレイノルズ数にわたり適用できるものであり、また圧力勾配がある場合にも成立つ。図-21 には指数法則による速度

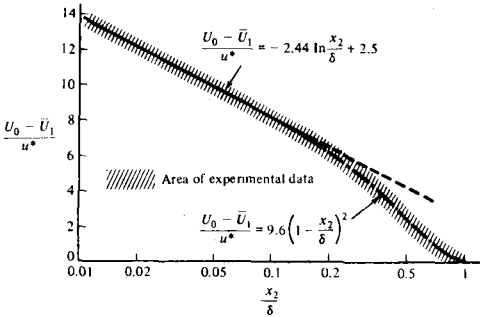


図-22 乱流境界層の外層における速度分布 (速度欠損法則) (18)

分布も示しているが、指数法則も対数法則の成立つ範囲に対して実験値と良く合う結果を与えることがわかる。

図-21に示すように、 $u^* x_2 / \nu \geq 10^3$ ($x_2 \geq 0.15 \delta$ に相当) の領域になると速度分布はもはや対数法則に従わない。平板に沿う乱流境界層に対する従来の多数の測定値をまとめると、図-22に示すように、むしろ次の式によって表わすことができる。⁽¹⁸⁾

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = 9.6 \left(1 - \frac{x_2}{\delta} \right)^2 \quad (18)$$

管内乱流についても同様に、管中心附近の速度分布は次の式：

$$\frac{U_0 - \bar{U}_1}{u^*} = 5.75 \log \frac{R}{x_2} \quad (19)$$

により表わされる。⁽⁸⁾ 18式および19式のように、速度分布が $(U_0 - \bar{U}_1)/u^* = f(x_2/\delta)$ または $f(x_2/R)$ の形で相似に表現できることを速度欠損法則 (law of the wake) という。乱流境界層において、壁法則の成立つ領域を内層という。内層の速度分布は、圧力勾配がある場合にも、圧力勾配の影響は摩擦速度 u^* を通じて関与するのみである。内層の厚さは圧力勾配の大きさによって変化する。速度欠損法則の成立つ領域は外層といわれ、その速度分布は圧力勾配によって著しく変化する。

6 円管内の乱流

6.1 表面粗さおよび圧力損失

固体表面の粗さが大であっても、壁法則は成立つ。ただし、粘性底層の厚さ δ_l は減少する。図-23は、表面粗さとして一様に砂粒を分布した場合の粘性底層の厚さ $u^* \delta_l / \nu$ が砂粒の高さ k により変化する関係を示している。砂粒の高さが $u^* k / \nu < 5$ となる程度に小さい場合、粘性底層は粗さによって変化しないので、流体力学的に滑らかな壁面と考えることができる。 $u^* k / \nu > 55$ において粘性底層は消滅する。対数法則の速度分布を表わす18式は、表面粗さが大になると、定数 2.44 は変化しないが定数 4.9 が減少する。それは図-21において対数法則を表わす直線が下に平行移動することを意味する。この平行移動量 $\Delta \bar{U}_1 / u^*$ を各種形状の粗さおよび粗さ高さについて実験的に求めた結果を図-24に示した。 $u^* k / \nu > 70$ の範囲では速度差 $\Delta \bar{U}_1 / u^*$ と $\log(u^* k / \nu)$ との間に直線的関係があり、このような場合を完全に粗い壁面であるという。

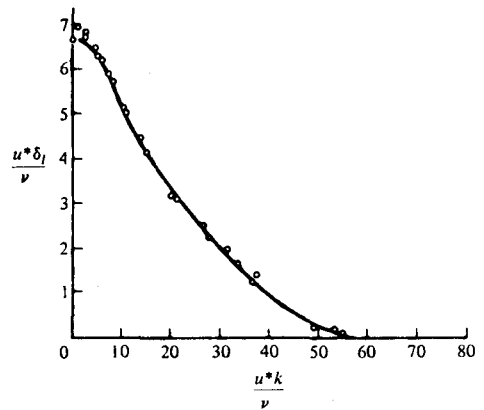


図-23 表面粗さ k による粘性底層の厚さ δ_l の変化 ⁽¹⁹⁾

速度分布に対する対数法則と管摩擦係数 λ の定義 ($\Delta P = \lambda(l/D)(1/2)\rho U_m^2$, ΔP は圧力損失, l は管の長さ, D は円管の直径, U_m は平均流速) から滑らかな円管の管摩擦係数は、レイノルズ数 $Re (= U_m D / \nu)$ の範囲 $10^5 \sim 10^7$ に対し次の式で表わされる。⁽²⁰⁾

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (20)$$

ただし、20式の中の定数は諸家によってなされた数多くの測定結果に合うように決定されている。

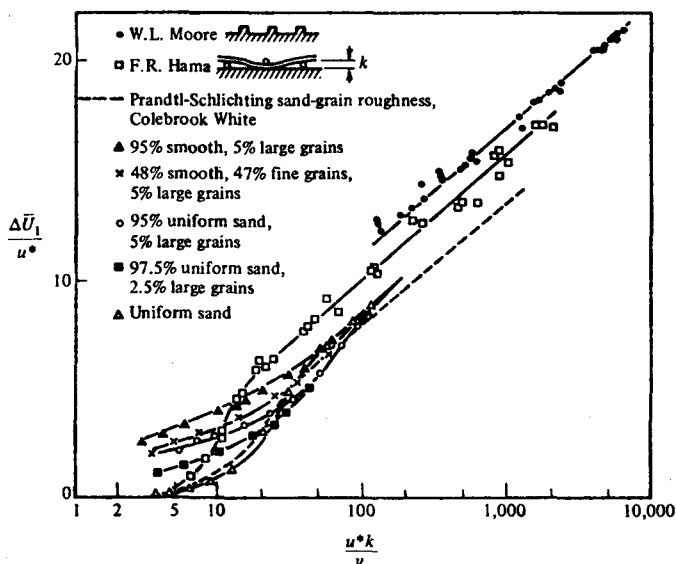


図-24 円管内速度分布の表面粗さによる変化⁽¹⁸⁾

$Re = 2000 \sim 10^5$ に対しては、ブラジウスの式 $\lambda = 0.3164/Re^{1/4}$ がある。同様に、完全粗面円管 ($u^* k_s/\nu > 70$, k_s は平均粒径) に対して次の式が得られている。

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left(\frac{R}{k_s} \right) + 1.74 \quad (21)$$

この式からわかるように、完全粗面の場合には λ の値はレイノルズ数 Re に依存しない。

6.2 管内流れの乱れの構造

十分に長い直線管路の中の十分に発達した乱流においては、時間平均的速度分布や乱れの構造が下流方向に変化しない。そのため、固体壁面に接する剪断乱流としては、乱流境界層と比較すれば単純な構造を持っているといえる。乱流境界層においては、その外縁附近で主流から複雑で断続的な相互作用を受けながら下流へ境界層の厚さを变化させる。

図-25は、円管内乱流の乱れ強さの3軸方向成分の分布を示している。いずれも管軸上の流速 $\bar{U}_{x,max}$ に対する比で示している。乱れ強さは3軸方向について互いに異なっており、その差は壁面に近い程大きい。主流方向成分 $u'_x/\bar{U}_{x,max}$ が最も大きく、壁面に垂直方向の成分 $u'_r/\bar{U}_{x,max}$ は最も小さい。 u'_r は壁面に接近すると壁の影響を受けて減少する。図-26は、図-25に示していない粘性底層と遷移層の乱れ強さの分布である。速度勾配 ($\partial \bar{U}_x/\partial x_2$) の大きい遷移層の $u^* x_2/\nu \approx 15$ において u'_x/u^* が最大となり、その大きさは $u'_x/\bar{U}_{x,max}$ の値にして約10%にも及ぶ。図-27は、乱れエネルギー ($\overline{q^2}$) および乱流剪断応力 ($-\overline{u_x u_r}$) の分布を示している。剪断応力の実験値は、運動方程式から積分して得られる関係 ($-\overline{u_x u_r})/u^{*2} = 1 - 2x_2/D$ に一致している。また、図-28には渦動粘度 ε の分布を示した。円管内のコア領域では ε の値はほぼ一定となっている。

図-29は、円管内乱流の乱れに対するエネルギーバランスを示している。広範囲にわたり発生項と散逸項とが支配的である。中心付近では発生項は小さく、壁面側から中心への拡散項と散逸項とがバランスしている。ここには示していないが、 $2x_2/D < 0.1$ の壁領域においては発生・拡散・散逸の各項は同程度の大きさとなっており、遷移層内 ($u^* x_2/\nu \approx 10$) でいずれも最大となる。図-30は、円管内の3か所の半径位置における主流方向乱れ成分 u_1 のエネルギースペクトルである。壁面に近接した

点のスペクトルは k^{-1} の勾配となるが、コア領域内では広範囲にわたり $k^{-5/3}$ の勾配の範囲が存在することがわかる。これは、図-4 に示した一様等方性乱流におけるエネルギースペクトルに対応するものである。

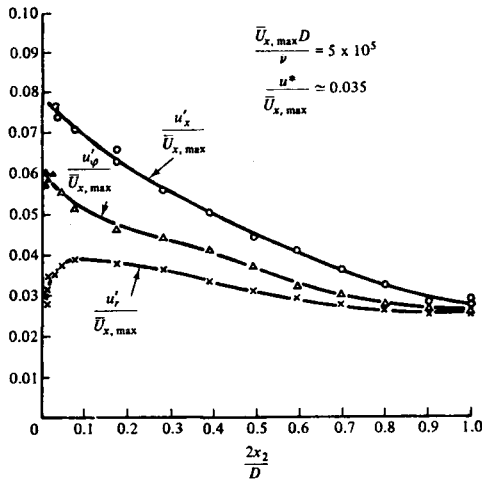


図-25 円管内乱流における乱れ強さの分布 (21)

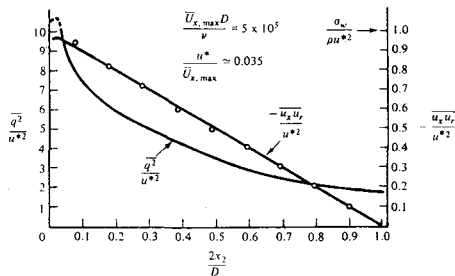


図-27 円管内乱流における乱れエネルギー ($\overline{q^2}$) および乱流剪断応力 ($-\overline{u_x u_y}$) の分布 (21)

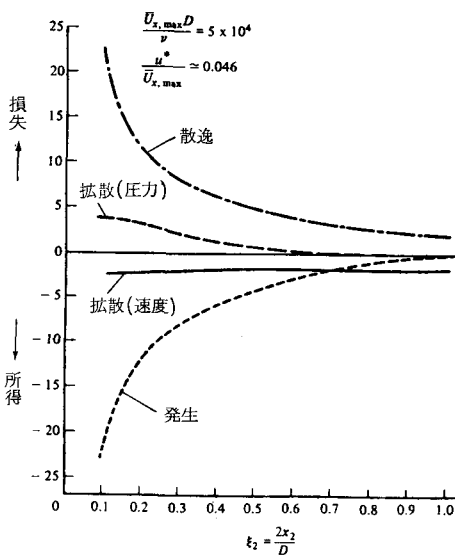


図-29 円管内乱流における乱れのエネルギーバランス (21)

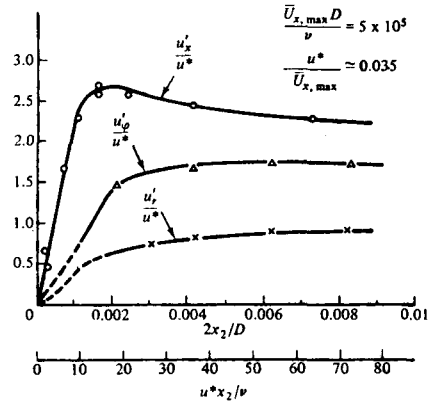


図-26 円管内乱流の壁面近傍における乱れ強さの分布 (21)

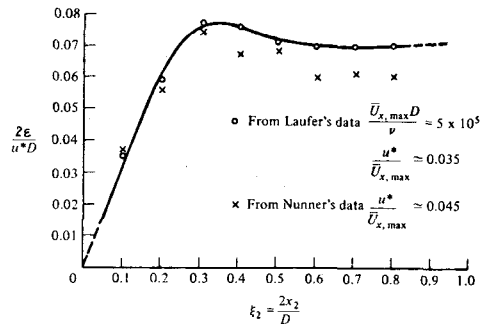


図-28 円管内乱流における渦動粘度 ϵ の分布 (13)

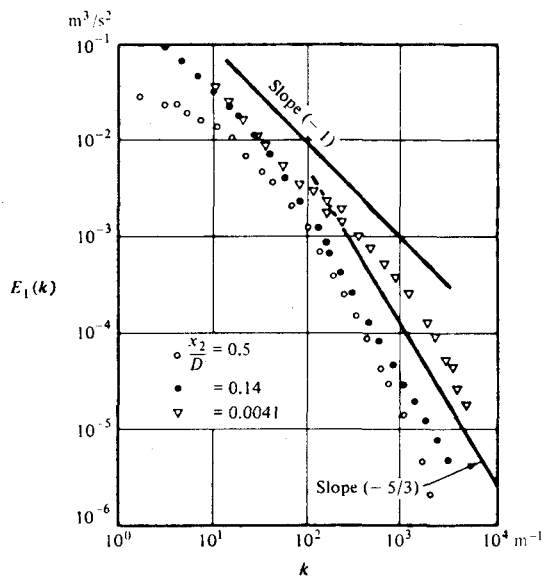


図-30 円管内乱流における主流方向乱れ成分 u_1 のエネルギースペクトル (21)

7 乱流境界層

乱流境界層は多くの点で管内乱流に類似している。特に壁法則の成立つ内層においては、時間平均速度分布および乱れの構造はほぼ同一である。しかし、その内層の厚さが境界層厚さの中で占める割合は、円管内で対数法則の成立つ範囲が管直径に対して占める割合に比較して著しく小さい。また、境界層においては時間平均速度成分が主流方向 $\bar{U}_1$ のみならず壁面に垂直方向の成分があって乱れエネルギーの輸送に関与している。さらに、境界層と主流との間に断続的干渉の領域が存在する。

図-31は、圧力勾配のない滑らかな平板に沿う乱流境界層内の乱れ強さの3軸方向成分の分布を示している。いずれも主流速度 U_0 に対する比をとっている。乱れ強さは3軸方向について互いに異なっており、図-25と比較すればわかるように、円管内乱流の場合と同じ傾向を示している。粗面の場合の乱れ強さの分布は、滑面に対する図-31の分布を粗さによる壁面剪断応力の増加とはほぼ同じ割合で増大したものに相当する。⁽¹⁶⁾ 図-32に乱れエネルギー ($\overline{q^2}$) および乱流剪断応力 ($-\overline{u_1 u_2}$) の分布を示す。 $-\overline{u_1 u_2}$ は $x_2/\delta < 0.1$ においてはほぼ一定となり、壁法則における仮定 $\tau = \tau_w (= \text{一定})$ を満足している。また、乱流剪断応力と乱れエネルギーの比 $(-\overline{u_1 u_2})/\overline{q^2}$ は、壁近く ($x_2/\delta \approx 0$) と $x_2/\delta \approx 1$ の部分を除くと、境界層内の大部分の範囲にわたりほぼ一定値となる。

境界層外縁附近における乱流部分の間欠率 Ω は図-33に示す分布となる。第1近似的取り扱いとして、この間欠率 Ω の程度に乱流部分が中断されると考え、乱れエネルギー、乱流剪断応力および渦動

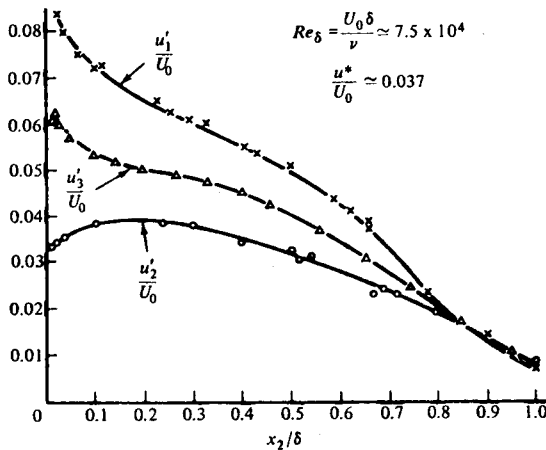


図-31 乱流境界層内の乱れ強さの分布⁽²²⁾

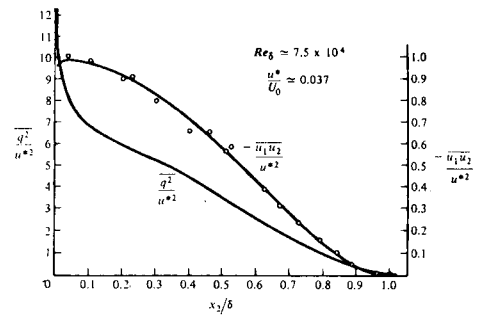


図-32 乱流境界層内の乱れエネルギー ($\overline{q^2}$) および乱流剪断応力 ($-\overline{u_1 u_2}$) の分布⁽²²⁾

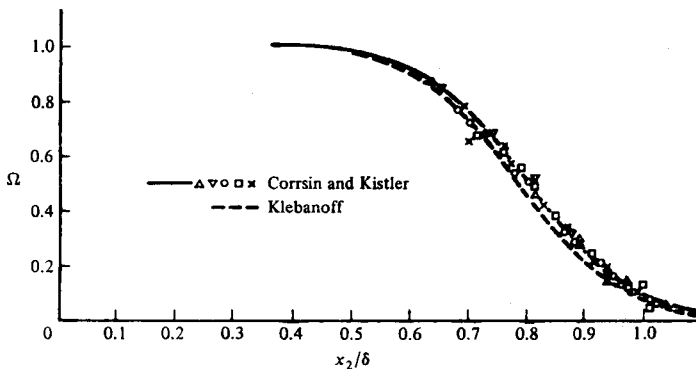


図-33 乱流境界層外縁附近における間欠率 Ω の分布^{(16) (22)}

粘度の分布を Ω によって補正すると、図-34に示すように、乱流剪断応力は x_2/δ に対してほぼ直線的に変化し、渦動粘度 ε は境界層の外層においてはほぼ一定となる。

図-35に、境界層内における乱れのエネルギーバランスを示した。主として、乱れエネルギーの発生と散逸とが支配的であり、それに壁近くから外側の方向に乱れエネルギーの拡散が加わっている。

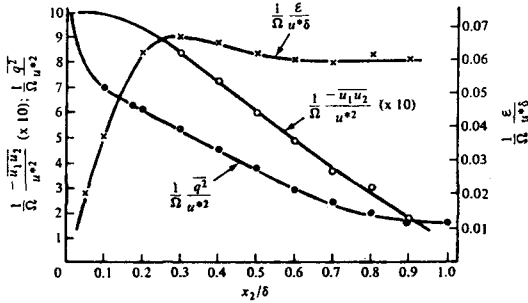


図-34 乱流境界層における諸特性の間欠率 Ω による補正⁽¹³⁾

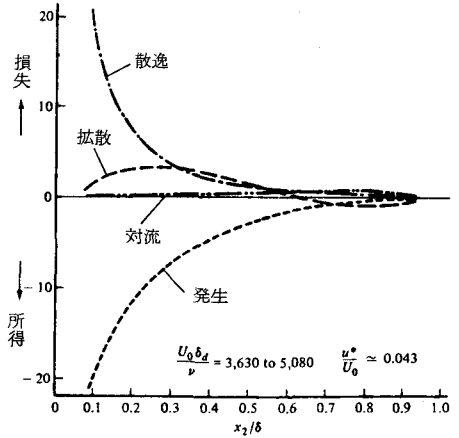


図-35 乱流境界層における乱れのエネルギーバランス⁽¹¹⁾

8 おわりに

乱流に関する研究は、当初においては主として時間平均の特性を明らかにすることにあったが、近年の測定技術およびデータ解析の進歩に助けられて、乱流の微視的構造が究明されている。乱流理論は、数学的取り扱いの複雑さのためかなり理想化した乱流を対象としているが、その目的は、多様な乱流現象の中に共通に存在する普遍的法則を見出すことにあり、一方、実験的研究は乱流理論が示す普遍的法則が確かに成り立つかを検証するとともに、その適用可能な範囲ないし条件を明らかにしようとするものである。工学的立場からみれば、多様な形態の乱流における運動量・熱および物質伝達に関わる重要な特性量の値を事前に正確に予知することが必要であるが、現在でもなお経験的因子に依存する部分が少なくない状況にあり、乱流の微視的構造を解明することはその予知を確立する上に欠くことのできない過程のひとつであると考えられる。

参考文献

- (1) Reynolds, O. : Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. A-174, p. 55, 1883.
- (2) Taylor, G. I. : Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 20, p. 196, 1921.
- (3) Stewart, R.W. : Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 47, p. 146, 1951.
- (4) Sato, H. : J. Phys. Soc. Japan, Vol. 6, p. 387, 1951 ; Vol. 7, p. 392, 1952.
- (5) Batchelor, G.K. and Townsend, A.A. : Proc. Roy. Soc. London, Vol. 193, A, p. 539, 1948.
- (6) 板谷・安田 : 機械学会論文集, 26巻, 1050頁, 1960.
- (7) Goldstein, S. : Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. 2, p. 570, Oxford, 1952.
- (8) Schlichting, H. : Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, p. 552, p. 673, 1965.
- (9) Townsend, A.A. : Australian J. Sci. Research, Vol. 2A, p. 451, 1949.
- (10) Townsend, A.A. : Proc. Roy. Soc. London, Vol. 197, A, p. 138, 1949.

- (11) Townsend, A. A. : The Structure of Turbulent Flow, p. 209, p. 289, Cambridge, 1956.
- (12) Reichardt, H. : VDI-Forschungsheft 414, 1942.
- (13) Hinze, J. O. : Turbulence, 2nd ed., McGraw-Hill, p. 483, p. 586, 1975.
- (14) Van der Hegge Zijnen, B. G. : Appl. Sci. Research, Vol. 7A, p. 293, 1958.
- (15) Wygnanski, I. and Fiedler, H. : J. Fluid Mech., Vol. 38, p. 577, 1969.
- (16) Corrsin, S. and Kistler, A. L. : NACA, Tech. Note No. 3133, 1954.
- (17) Van Driest : J. Aeron. Sci., Vol. 23, p. 1007, 1956.
- (18) Clauser, F. H. : Advances in Appl. Mechanics, Vol. 4, p. 1, 1956.
- (19) Rotta, J. : Ing.-Arch., Bd. 18, S. 277, 1950.
- (20) 技術資料 管路・ダクトの流体抵抗, 日本機械学会, 25頁, 1979.
- (21) Laufer, J. : NACA, Tech. Rep. No. 1174, 1954.
- (22) Klebanoff, P. S. : NACA, Tech. Notes No. 3178, 1954.