

海岸・構造物からの波の反射

首 藤 伸 夫

1. 序

沖から入射してくる波は海岸や構造物に衝突した後、また沖へと反射される。この時、エネルギーを変化させるような何事も生じないとすれば、完全反射となる。普通 反射率 r は、入射波高 H_I に対する反射波高 H_R の比によって $r = H_R/H_I$ とあらわされ、0 と 1 の間の値をとる。完全反射の時、 $r = 1$ である。

$r < 1$ であるためには、入射した波エネルギーの或る部分が沖へ戻って行かない機構を必要とする。次節からの理論的取扱いに便利のように区分すると次の三つになる。

1) 入射波の一部が更に岸側へ伝達され、または岸近くに捕えられて戻って行かない場合。Lamb がおこなった水路急変部からの波の反射、浮防波堤からの波の反射などがあげられる。

2) 砕波により入射波エネルギーの一部が波以外の運動に変化する場合。Miche によるものが有名であるが、砕波の条件は通常用いられるものとは全く異っていることに注意を要する。

3) 摩擦などによりエネルギーの消耗が生ずる場合。透過性構造物、無反射岸壁に代表されるもので、構造物内での形状抵抗などによってエネルギーが減少せしめられる。

勿論、これらの組合せもありうるが、理論的に扱うには可成りの困難を伴う。

2. 透過による反射率の変化

もっとも代表的なものは、急変断面水路内の線形長波の例である。¹⁾ 図-1 にしめすとき

水路の左側から入射する波の波形が $F\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$,
ここで逆行する波の波形を $f\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$ と仮定す

る。正に進む波の波形 η と水粒子流速 u との間には $u = c_1 \eta / h_1$, 逆行波では $u = -c_1 \eta / h_1$ の関係がある。長波であるから波速 $c_1 = \sqrt{g h_1}$ のように水深だけできまる。水路Ⅰでの波形 η_1 , 水平流速 u_1 は、

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + f\left(t + \frac{x}{c_1}\right) , \\ u_1 &= \frac{g}{c_1} F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - \frac{g}{c_1} f\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

である。水路Ⅱでは、正の方向に進む波しか存在しない。よって

$$\eta_2 = \phi\left(t - \frac{x}{c_2}\right) , \quad u_2 = \frac{g}{c_2} \phi\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \dots (2)$$

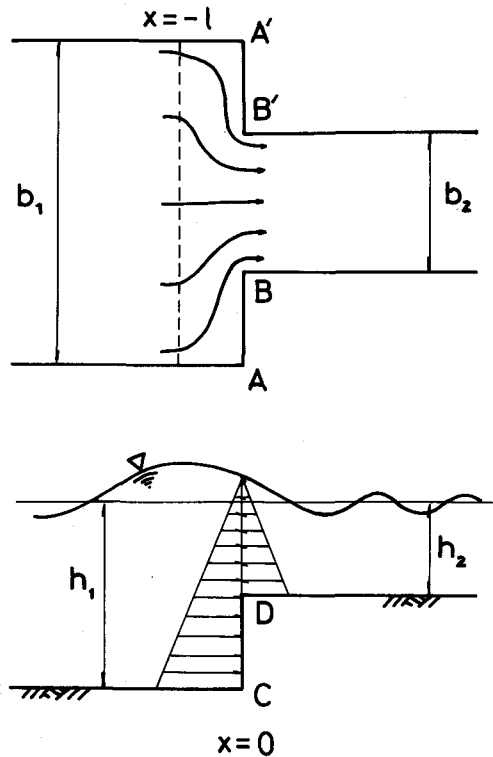


図-1 急変部での連続

である。水路Ⅰ、Ⅱの接合点で流量の連続および圧力の連続を要請する。静水圧分布であるから、後者は水位の連続といっても良い。すなわち、

$$b_1 h_1 u_1 = b_2 h_2 u_2, \quad \eta_1 = \eta_2, \quad \text{at } x = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

である。

これへ(1),(2)を代入すると、反射率 $r=f/F$ 、透過率 ϕ/F として、

$$\frac{f}{F} = \frac{b_1 c_1 - b_2 c_2}{b_1 c_1 + b_2 c_2}, \quad \frac{\phi}{F} = \frac{2 b_1 c_1}{b_1 c_1 + b_2 c_2} \quad \dots\dots\dots(4)$$

をうる。

これが境界条件を厳密には満足しないことは明らかである。図-1中、平面図のAB、A'B',側面図のCDにおいて、 $u=0$ とならねばならないが、(3)の第一式はこれを満したことはならない。したがって、 $x=0$ のごく近辺 $x=-\ell$ の地点の流量と、 $x=0$ における水路Ⅱの流量を連続させたに止まっている。ABなどの上での境界条件を完全に満足させるには、この近辺でのみ存在し遠方に行くにつれ急速に消滅する波を加える必要がある。

たとえば Newman の解がある。²⁾ 幅は一樣、水路Ⅰの水深は無限大とする。CDにあたる場所での条件、 $u=0$ をみたすために、 $\exp[-m x]$ の形の解の級数解をつけ加えるが、これの効果のため、 $x=0$ での両水路の接合条件に影響が及び、反射波に位相のズレとして表われる。波長が十分に長ければ Lamb の解と一致する。ただし、十分長いという事はどの位の事が簡単には云えない。試算によると、長波の波長が水深 h_2 の 157 倍のとき、Newman の r は Lamb のその約半分であるとされる。

水路変化が緩やかに生ずる場合の一例として Kajiura³⁾ のものを紹介する。線形長波で、水路幅は変化しない。流量 Q 、水位 η に対し

$$\left. \begin{aligned} Q_t + g h \eta_x &= 0 \\ \eta_t + Q_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

が基本方程式である。時間に関して正弦的であるとして $Q \propto \exp[i \sigma t]$ となるものとすれば、 $Q_{tt} = -\sigma^2 Q$ で置きかえられるから、(5)式から η を消去すると

$$Q_{xx} + \frac{\sigma^2}{g h} Q = Q_{xx} + k^2(x) Q = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

の形にかける。図-2 の如き水路を考える。水深一定な領域Ⅰ、Ⅲにおいては基本的な解は $\exp[i k x]$, $\exp[-i k x]$ ただし $k = \text{const}$, という形である。領域Ⅱにおいては $h = a x^2$ の形をしているから(5)式は

$$x^2 Q_{xx} + n^2 Q = 0, \quad \text{ただし } n^2 = \frac{\sigma^2}{g a} = \text{定数} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となり、 $Q = x^p$ において指数 p を決定すれば

$$p = \frac{1}{2} \pm i \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm i m \quad \dots\dots\dots(8)$$

であり、表-1 の通りになる。

これらの基本的な解を、 $x = x_1, x_2$ で接続する。流量 Q の連続、および圧力(結局は Q_x)の連続

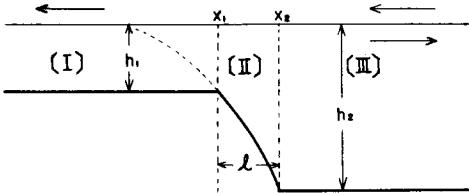


図-2 漸変水路

表-1 領域区分と解

領 域	I $x \leq x_1$	II $x_1 \leq x \leq x_2$	III $x_2 \leq x$
水 深	$h = h_1 = ax_1^2$	$h = ax^2$	$h = h_2 = ax_2^2$
k^2	$k^2 = k_1^2 = \frac{n^2}{x_1^2}$	$k^2 = \frac{n^2}{x^2}$	$k^2 = k_2^2 = \frac{n^2}{x_2^2}$
解	$E e^{ik_1 x}$	$C x^{\frac{1}{2}+im} + D x^{\frac{1}{2}-im}$	$A e^{ik_2 x} + B e^{-ik_2 x}$

のふたつとなる。

表-1において、領域Ⅲの $A \exp[ik_2 x]$ は入射波、 $B \exp[-ik_2 x]$ は反射波を示す。反射波波高 B は一般には位相のズレを含めて複素数となるが、反射率としては絶対値をとれば良く、

$$r = \left| \frac{B}{A} \right| = \sqrt{\frac{\sin^2(m \ell_n \{x_2/x_1\})}{4m^2 + \sin^2(m \ell_n \{x^2/x_1\})}} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となり、図示すると図-3である。ここで面白いことに、斜面の長さ ℓ と入射波波長 λ_2 との比如何では反射波零となる。斜面両端の変化点がお互いに干渉しあった結果である。

中央の領域Ⅱの水深が直線的に変わると、ここでの基本解はベッセル関数、ノイマン関数となり、やや複雑になるが、本質的な特徴は変わらない。⁴⁾

静水面から深さ $-d$ の所まで固定壁が設置されている時の波の透過率、反射率も似たような問題である。水深が無限な場合⁵⁾を除き、実用上重要な有限水深の場合に厳密解を得ることは難かしいので、Wiegelsの近似的な手法を紹介する⁶⁾。今迄の手法とは異なり、エネルギー伝達率が連続するものとして解く。

微小振幅の表面波を考えると、その速度ポテンシャル、波による水圧、水平方向流速は、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \\ \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{a\sigma^2}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \\ u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = a\sigma \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

であたえられ、 $z = z_1$ から z_2 の間を通じて伝達される平均のエネルギーは

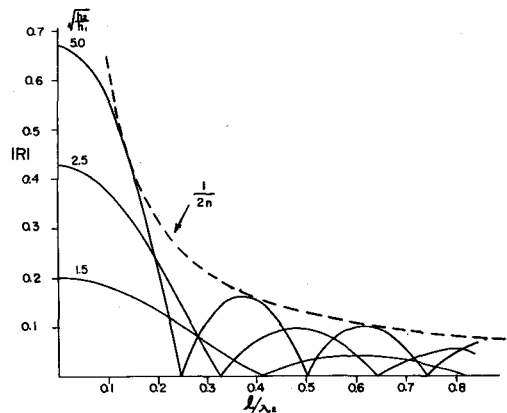


図-3 斜面からの部分反射(堤浦による)

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{z_1}^{z_2} \rho p u dz \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{\sigma}{k} \frac{[2k(z_2 - z_1) + \sinh 2k(h + z_2) - \sinh 2k(h + z_1)]}{\sinh 2kh}\end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

である。

図-4のごとき状況を考えると、板の下方 $z = -d$ と水底との間から右側に伝えられる単位時間あたりの平均のエネルギー量は、入射波振幅を a_i とするとき、

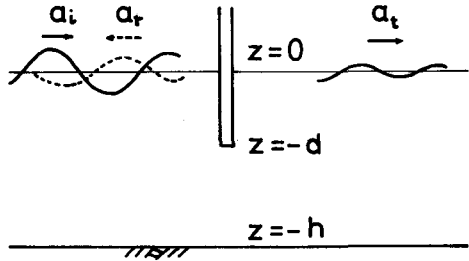


図-4 上部鉛直板よりの反射

$$\dot{E}_t = \frac{1}{2} \rho g a_i^2 \frac{\sigma}{k} \frac{2k(h-d) + \sinh 2k(h-d)}{\sinh 2kh} \quad \dots\dots\dots(12)$$

であり、板から十分に離れた所の透過波の振幅を a_t とすると、 $z_1 = -h$, $z_2 = 0$, $a = a_t$ とおくことにより、

$$\dot{E}_t = \frac{1}{2} \rho g a_t^2 \frac{\sigma}{k} \frac{2kh + \sinh 2kh}{\sinh 2kh} \quad \dots\dots\dots(13)$$

この両者が等しくなければならないとおくと

$$\frac{a_t}{a_i} = \sqrt{\frac{2k(h-d) + \sinh 2k(h-d)}{2kh + \sinh 2kh}} \quad \dots\dots\dots(14)$$

のように透過率が与えられる。

また、 $z = -d$, $z = 0$ の間のエネルギーは全部反射され、板から十分離れた場所での反射波（振幅 a_r ）を形成すると考えて同様の計算を行うと、反射率は

$$\frac{a_r}{a_i} = \sqrt{\frac{2kd + \sinh 2kh - \sinh 2k(h-d)}{2kh + \sinh 2kh}} \quad \dots\dots\dots(15)$$

で求められる。

当然の事ながら、 $\dot{E}_i = \dot{E}_r + \dot{E}_t$ が成立する。

3. 碎波による反射率の変化

斜面上で重複波が碎波するために生ずる反射率の変化について、Miche の扱ったものがある。⁷⁾ それには先ず、斜面上に生ずる重複波を求めなければならないが、境界としての水底が傾斜し、特に初期水深零にあたる汀線部の水粒子が波運動とともに斜面に沿って移動するので、普通の空間座標を使用した方法では解が容易には求められない。Miche は物質座標を使用してこれを得ているので、以下に詳細に引用する。⁸⁾

静水時の水粒子の座標を (x_0, y_0) とするとき、 t 時における座標 (x, y) 、その粒子に働く圧力 P は、小さな量 h （波運動なら振幅といってもよい）により摂動されて

$$\left. \begin{aligned} p/\rho &= g y_0 + h \chi_1 + \dots \\ x &= x_0 + h \phi_1 + \dots \\ y &= y_0 + h \psi_1 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

となる。 y 軸は鉛直下方に正ととり、 χ_1 、 ϕ_1 、 ψ_1 は x_0 、 y_0 、 t の関数である。

運動の式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g \right) \frac{\partial y}{\partial x_0} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial y_0} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g \right) \frac{\partial y}{\partial y_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

連続の式は、ヤコビアンを使って

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (x_0, y_0)} = 1 \dots\dots\dots (18)$$

である。

(16) を使用して (17), (18) から h に着目して式群をうると、 $O(h^0)$ からは式を生ぜず、 $O(h)$ から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} &= 0 \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

この第一式を y_0 で、第二式を x_0 で偏微分して χ_1 を消去したのち、第三式を t で 2 回偏微分する。
また、新たな関数 G を

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \dots\dots\dots (20)$$

と定義して導入して、 G に対する微分方程式を求めれば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

結局

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial G(x_0, y_0; t)}{\partial x_0} + \frac{\partial k(x_0, y_0)}{\partial y_0} t + \frac{\partial k'(x_0, y_0)}{\partial y_0} \\ \psi_1 &= \frac{\partial G(x_0, y_0; t)}{\partial y_0} - \frac{\partial k(x_0, y_0)}{\partial x_0} t - \frac{\partial k'(x_0, y_0)}{\partial x_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

のようにきまる。右辺第二、第三項は、連続の条件を考えて形と符号をきめてある。

第三項は初期位置のみで済まるから、

$$x_0' = x_0 + h \frac{\partial k'}{\partial y_0} \dots\dots\dots(23)$$

のように座標の変換をしさえすれば良い。したがって、いずれにせよ、第一近似としては不要である。

第二項は時間に比例して水粒子が流れて行く項であり、河川内の流れなどでは重要であっても、海の波のような繰返し流の第一近似を扱うときには省略してよい。

以上を考えると、 G が求まりさえすれば

$$\phi_1 = \frac{\partial G}{\partial x_0} \quad , \quad \psi_1 = \frac{\partial G}{\partial y_0} \quad , \quad \chi_1 = g \frac{\partial G}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + f_1(t) \dots\dots\dots(24)$$

として決定される。

斜面上の波を考えるとき、この G は、次のような条件を満たすものでなくてはならない。

1) $G(x_0, y_0; t)$ は

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

の解である。

- 2) 運動は周期性を有する。周期を $2T$ とする。
- 3) 自由表面で圧力一定である。
- 4) 水底にある水粒子は、水底に沿う方向にのみ運動できる。
- 5) 運動は定常波的である。
- 6) 十分沖の無限水深の場所では、振幅 $4h$ 、波長 $2L$ の重複波となる。

座標軸を図-5 のようにとる。 $x_0 \equiv \xi_1$ 軸を静水面に、 $y_0 \equiv \eta_1$ 軸を鉛直下向きにとり、水底は水平面と α の角をなしているとする。静水面より β_n の角度をなす ξ_n 軸、 ξ_1 、 ξ_n と水底に関して対称なものを ξ_1' 、 ξ_n' 軸とする。 η_n 、 η_n' 軸は ξ_n 、 ξ_n' 軸にそれぞれ直交する。

座標間の関係は

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= x_0 \cos \beta_n + y_0 \sin \beta_n \\ \eta_n &= -x_0 \sin \beta_n + y_0 \cos \beta_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

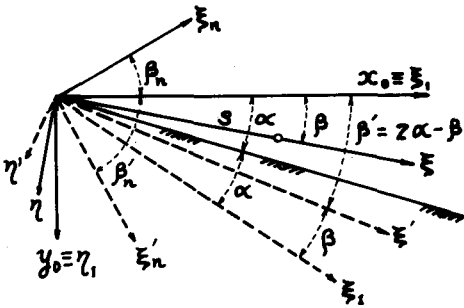


図-5 斜面上の波をうるための座標軸

で、 (ξ_n', η_n') に対しても同種のものが成立する。

準備のために

$$\left. \begin{aligned} j &= e^{-a\eta_n} \sin(a\xi_n + bt + c) \\ j' &= e^{+a\eta_n'} \sin(a\xi_n' + bt + c) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

のような関数の性質をしらべる。ここで、 $a = \pi/L$ 、 $b = \pi/T$ 、 c は定数である。

水平床上の波に対する解として

$$G = \frac{\sinh a(H-y_0)}{a \sinh aH} \cos(bt - ax_0) \quad \dots\dots\dots (28)$$

があるが、この解の $H \rightarrow \infty$ に対する形は、 y_0 に対しては指数関数、 x_0 に対しては三角関数となるのであるから、 j, j' は、水深無限大の場所での ξ_n 、 ξ'_n 軸に沿った波動になっている。勿論、 (ξ_n, η_n) に関して $\Delta j = 0$ を満足しており、この性質は座標軸を回転させても不変であるから、 j, j' を当面の問題の解の一部として採用する。

後の便宜のために x_0 で p 回、 y_0 で q 回偏微分した時の表現を求める。これを j_{pq} とかく。たとえば

$$\begin{aligned} j_{1,0} &= \frac{\partial j}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi_n}{\partial x_0} \frac{\partial j}{\partial \xi_n} + \frac{\partial \eta_n}{\partial x_0} \frac{\partial j}{\partial \eta_n} = \cos \beta_n \left[a e^{-a\eta_n} \cos(a\xi_n + bt + c) \right] \\ &\quad - \sin \beta_n \left[-a e^{-a\eta_n} \sin(a\xi_n + bt + c) \right] \\ &= a e^{-a\eta_n} \left[\cos(a\xi_n + bt + c - \beta_n) \right] \\ &= a e^{-a\eta_n} \sin\left(a\xi_n + bt + c + \frac{\pi}{2} - \beta_n\right) \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

であるが、このような演算を試みたのち

$$\left. \begin{aligned} j_{pq} &= a^{p+q} e^{-a\eta_n} \sin\left\{a\xi_n + bt + c + p\frac{\pi}{2} + q\pi - (p+q)\beta_n\right\} \\ j'_{pq} &= a^{p+q} e^{a\eta'_n} \sin\left\{a\xi'_n + bt + c + p\frac{\pi}{2} + (p+q)\beta'_n\right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

と表現できる。 $\nabla j = j_{2,0} + j_{0,2} = 0$ 、 $\nabla j' = 0$ はこの関係を使用して簡単に示される。

G として、こうした関数の級数和として与えるが、その際各項の係数および β_n のとり方に若干の工夫をこらす。すなわち、

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^m A_n \left\{ e^{-a\eta_n} \sin\left[a\xi_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2}\right] \right. \\ &\quad \left. + e^{a\eta'_n} \sin\left[a\xi'_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2}\right] \right\} \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n \cot n\alpha = A_1 \cot \alpha_1 \cdot \cot \alpha_2 \cdots \cot n\alpha = A_1 \prod_{\ell=1}^n \frac{\cos \ell\alpha}{\sin \ell\alpha}, \\ \beta_n &= -(n-1)2\alpha, \\ \beta'_n &= 2\alpha - \beta_n = 2n\alpha = -\beta_{n+1} \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

とする。ただし、一般の傾斜面ではなく、正の整数 m によって、 $\alpha = \pi/2m$ として与えられるもののみを考える。

提起した6条件を満足するかどうかを検討する。

- 1)の $P'G=0$ は、級数の各成分が満たすことがわかっているので成立している。
- 2)の周期性に関しては、 $2T=2\pi/b$ とおけばよい。

3)の自由表面での条件は、まず $f(t)=0$ とする。 G が $2T$ の周期性を有するから

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = - \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 G = -g \frac{2\pi}{\frac{g}{2\pi}(2T)^2} G = -g \frac{2\pi}{2L} G = -g a G \dots\dots\dots(33)$$

を圧力の表現に入れて

$$\frac{p}{\rho g} = y_0 + h \left[\frac{\partial G}{\partial y_0} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right] = y_0 + h \left[\frac{\partial G}{\partial y_0} + a G \right] \dots\dots\dots(34)$$

である。自由表面は $y_0=0$ に対応するから、括弧内の値が零となればよい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_0} + a G &= \sum A_n \left\{ e^{-a\eta_n} \left(\sin \left[a\xi_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + \pi - \beta_n \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \left[a\xi_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{a\eta'_n} \left(\sin \left[a\xi'_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + \beta'_n \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \left[a\xi'_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} \right] \right) \right\} \\ &= 2 \sum A_n \left\{ e^{-a\eta_n} \cos \left(\frac{\pi - \beta_n}{2} \right) \sin \left[a\xi_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_n}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{a\eta'_n} \cos \frac{\beta'_n}{2} \sin \left[a\xi'_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\beta'_n}{2} \right] \right\} \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

と計算される。

まず、この和の第一の部分の最初の項は、 $\beta_1=0$ 故、 $\cos(\pi-\beta_1)/2=0$ となって消える。

$y_0=0$ とおくと、 $\beta'_n=-\beta_{n+1}$ をつかって、

$$\left. \begin{aligned} \eta_n &= -x_0 \sin \beta_n, \quad \eta'_n = -x_0 \sin \beta'_n = x_0 \sin \beta_{n+1} = -\eta_{n+1} \\ \xi_n &= x_0 \cos \beta_n, \quad \xi'_n = x_0 \cos \beta'_n = x_0 \cos \beta_{n+1} = \xi_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

また、

$$\begin{aligned} &A_n e^{a\eta'_n} \sin \left[a\xi'_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\beta'_n}{2} \right] \cos \frac{\beta'_n}{2} \\ &= A_{n+1} \cdot \tan n\alpha \cdot e^{-a\eta_{n+1}} \sin \left[a\xi_{n+1} + bt + c - n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_{n+1}}{2} \right] \\ &\quad \times \cos n\alpha \end{aligned}$$

$$= -A_{n+1} e^{-a\eta_{n+1}} \cos\left(\frac{\pi - \beta_{n+1}}{2}\right) \sin\left[a\xi_{n+1} + bt + c - n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_{n+1}}{2}\right] \dots\dots\dots(37)$$

ここで(32)の関係を使っている。(35)の級数中のうち、第二の部分の n 番目の項は第一の部分の $(n+1)$ 番目の項と打ち消しあう。残りは、第二の部分の最後の項だけであって

$$\begin{aligned} \left. \frac{p}{\rho g} \right|_{y=0} &= 2h A_m e^{a\eta'_m} \cos \frac{\beta'_n}{2} \cdot \sin\left[a\xi'_{m+1} + bt + c - (m-1)\frac{\pi}{2} + m\alpha\right] \\ &= 2h A_m e^{-a\eta_{m+1}} \cos m\alpha \cdot \sin\left[a\xi_{m+1} + bt + c - (m-1)\frac{\pi}{2} + m\alpha\right] \end{aligned} \dots\dots\dots(38)$$

であるが、水底の傾きとして $\alpha = \pi/2m$ の場合のみを考えているから結局零である。

4) の水底の条件を検討しよう。 G を x_0 について p 回、 y_0 について q 回偏微分すると、

$$\begin{aligned} G_{pq} &= a^{p+q+1} \sum A_n \left\{ e^{-a\eta_n} \sin\left[a\xi_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + p\frac{\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q\pi - (p+q)\beta_n\right] + e^{a\eta'_n} \sin\left[a\xi'_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p\frac{\pi}{2} + (p+q)\beta'_n\right] \right\} \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

極座標 (s, β) を導入して

$$x_0 = s \cos \beta, \quad y_0 = s \sin \beta \dots\dots\dots(40)$$

をつかって表現すると

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= s (\cos \beta \cos \beta_n + \sin \beta \sin \beta_n) = s \cos (\beta - \beta_n), \\ \eta_n &= s \sin (\beta - \beta_n), \\ \xi'_n &= s \cos (\beta - \beta'_n), \quad \eta'_n = s \sin (\beta - \beta'_n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

であり、水底では $\beta = \alpha$ であるので、

$$\left. \begin{aligned} \xi'_n &= s \cos (\alpha - \beta'_n) = s \cos (\alpha - 2\alpha + \beta_n) = \xi_n, \\ \eta'_n &= -\eta_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

となることから

$$\begin{aligned} G_{pq}^F &= 2a^{p+q-1} \cos\left[q\frac{\pi}{2} - (p+q)\alpha\right] \\ &\quad \times \sum_1^m A_n e^{-a\eta_n} \sin\left[a\xi_n + bt + c - (n-1)\frac{\pi}{2} + (p+q)\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta_n\right)\right] \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

これを使うと、 $N = p + q = p' + q'$ のとき

$$G_{pq}^F : G_{p'q'}^F = \cos \left(q \frac{\pi}{2} - N\alpha \right) : \cos \left(q' \frac{\pi}{2} - N\alpha \right) \quad \dots\dots\dots (44)$$

特に

$$G_{1,0}^F / G_{0,1}^F = \cot \alpha \quad \dots\dots\dots (45)$$

となる。

水粒子の水平及び鉛直座標の比は、水底で

$$\left(\frac{x}{y} \right)^F = \left(\frac{x_0 + h G_{1,0}^F}{y_0 + h G_{0,1}^F} \right)^F = \cot \alpha \quad \dots\dots\dots (46)$$

となる。何故なら x_0/y_0 はもともと $\cot \alpha$ だからである。このようにして、水粒子が水底に平行な運動をすることが示された。

5) の定常波的運動であるためには、時間項と場所に関する項とを分離できなければならない。 G の中の $(m-n)$ 番目の項と $(n+1)$ 番目の項の関係を調べる。

まず、 m 番目の項について係数についてみると

$$\begin{aligned} A_m &= A_1 \prod_{n=1}^{m-1} \cot n\alpha = A_1 \frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \dots\dots\dots \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \dots\dots\dots \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \\ &= A_1 \frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \dots\dots\dots \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \dots\dots\dots \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} = A_1 \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

一般的には

$$\begin{aligned} A_{m-n} &= A_1 \frac{\cot \alpha \cdot \cot 2\alpha \dots\dots \cot(m-n-1)\alpha \cdot \cot(m-n)\alpha \dots\dots \cot(m-1)\alpha}{\cot(m-n)\alpha \dots\dots \cot(m-2)\alpha \cdot \cot(m-1)\alpha} \\ &= \frac{A_m}{\tan n\alpha \dots\dots \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha} = A_m \frac{A_{n+1}}{A_1} = A_{n+1} \quad \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

である。

$\beta'_{m-n} = 2(m-n)\alpha = \pi - 2n\alpha = \pi + \beta_{n+1}$ の関係を使うと

$$\eta'_{m-n} = -\eta_{n+1}, \quad \xi'_{m-n} = -\xi_{n+1} \quad \dots\dots\dots (49)$$

のように置き換えうるから、 G の級数表示のうち第二の部分の $(m-n)$ 番目の項と第一の部分の $(n+1)$ 番目の項とをまとめることができる。それ故

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{a} \sin \left[bt + c - (m-1) \frac{\pi}{4} \right] \\ &\times \sum_{n=1}^m A_n e^{-a\eta_n} \cos \left[a\xi_n + (m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{2}{a} \sin bt \cdot g(x_0, y_0) \quad \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

としても良い。ただし、常数 c を $(m-1)\pi/4$ と選び、級数和の項を g と表現している。 x_0, y_0 に関する項と t に依存する項とを分離できた。後のために G_{pq} を求めると、

$$G_{pq} = \frac{2}{a} \sin bt \cdot g_{pq} \quad \dots\dots\dots (51)$$

で

$$g_{pq} = a^{p+q} \sum_{n=1}^m A_n e^{-a\eta_n} \cos \left[a\xi_n + (m-1) \frac{\pi}{4} \right. \\ \left. - (n-1) \frac{\pi}{2} + p \frac{\pi}{2} + q\pi - (p+q) \beta_n \right] \quad \dots\dots\dots (52)$$

である。

6) の条件は次のようにして検証される。 十分沖合で完全な重複波となっている表面波の解となる必要がある。したがって、 $x_0 \rightarrow \infty$ で水表面近くということは、極座標にあっては、 $s \rightarrow \infty$ 、 $\beta \rightarrow 0$ とすればよい。 β_n の値の範囲は、 $n=2$ に対する -2α から、 $n=m$ に対する $-\pi+2\alpha$ の間にあり、 $\beta-\beta_n$ は $\beta+2\alpha$ から $\beta-2\alpha+\pi$ の間、つまり、 $0 \sim \pi$ の間の値をとる。 $\sin(\beta-\beta_n)$ は有限な正の値となるから、 $\eta_n = s \sin(\beta-\beta_n)$ は、 s が無限大になるにつれ同じように大きくなる。第一項以外は、 $s \rightarrow \infty$ のとき $\eta_n \rightarrow \infty$ 、 $\exp[-a\eta_n] \rightarrow 0$ となってしまうから

$$G = \frac{2}{a} \sin bt \cdot g(x_0, y_0) \rightarrow \frac{2A_1}{a} \sin bt \cdot e^{-ay_0} \\ \times \cos \left[ax_0 + (m-1) \frac{\pi}{4} \right] \quad \dots\dots\dots (53)$$

である。無限水深という条件をそのまま使用して得られる重複波は通常

$$G^\infty = \frac{2}{a} \sin bt \cdot e^{-ay_0} \sin ax_0 \quad \dots\dots\dots (54)$$

とかけるから、 $A_1 = 1$ とおき、座標原点の調整さえすれば両者が一致することがわかる。

以上にしめしたように (31) で与えられる G が解となっていることが判明した。反射率をもとめるためには、 $x_0 = 0$ 、 $y_0 = 0$ の所での値が問題となるから、この原点での値を求めることにする。

(44) 式で G_{pq}^F 、 $G_{p'q'}^F$ の関係がきまっていたが、この両者の時間への依存性は同じ形であるので、 g_{pq}^F 、 $g_{p'q'}^F$ についても同じ関係が成立する。また、原点は水底上にもあり静水面上にもある。これを上つきの添字 0 であらわすと、

$$g_{pq}^0 = \frac{\cos \left(q \frac{\pi}{2} - N\alpha \right)}{\cos \left(q' \frac{\pi}{2} - N\alpha \right)} g_{p'q'}^0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

ただし、 $N = p + q = p' + q'$ である。

また自由表面での圧力零の条件から $G_{p,1} = -a G_{p,0}$ である。このふたつから

$$g_{N-1,0}^0 = \frac{\cos[-(N-1)\alpha]}{\cos \left[\frac{\pi}{2} - (N-1)\alpha \right]} g_{N-2,1}^0 = -a \frac{\cos(N-1)\alpha}{\sin(N-1)\alpha} g_{N-2,0}^0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

で、繰返して適用すると、

$$g_{N-1,0}^0 = (-a)^{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} \cot n\alpha \cdot g^0 = (-a)^{N-1} A_N g^0 \quad \dots\dots\dots (57)$$

もっと一般的には

$$\begin{aligned} g_{pq}^0 &= (-a)^N A_N \frac{\cos \left(q \frac{\pi}{2} - N\alpha \right)}{\sin N\alpha} g^0 \\ &= (-a)^N A_{N+1} \frac{\cos \left(q \frac{\pi}{2} - N\alpha \right)}{\cos N\alpha} g^0 \quad \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

こうした関係を使いながら係数 A_N 間の条件を考える。今迄に確定しているのは $A_1 = A_m = 1$, $A_{m-n} = A_{n+1}$ である。 $N\alpha = \pi/2$, つまり $N=m$ のとき $A_{m+1} = A_m \cot m\alpha = 0$ であるから, $\cot N\alpha \rightarrow \infty$ となるまで (すなわち, $m \leq A < 2m$ に対し) $A_N = 0$, 同時に $g_{N,0}^0 = 0$ である。これ以後の項については, $N = 2\ell m + r - 1$ (ℓ は整数) として計算する。 $2\ell m \beta_n$ が 2π の整数倍であることを使用して,

$$\begin{aligned} g_{2\ell m+r-1,0}^0 &= a^{2\ell m+r-1} \sum_1^m A_n \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. + \ell m \pi + (r-1) \frac{\pi}{2} - (2\ell m+r-1) \beta_n \right] \\ &= a^{2\ell m+r-1} (-1)^{\ell m} \sum_1^m A_n \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. - (n-1) \frac{\pi}{2} + (r-1) \frac{\pi}{2} - (r-1) \beta_n \right] \\ &= (-1)^{\ell m} a^{2\ell m} g_{r-1,0}^0 \\ &= (-1)^{\ell m} (-a)^{2\ell m+r-1} A_r \cdot g^0 \quad \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

これらをまとめると

$$\begin{aligned} A_{2\ell m+r} &= (-1)^{\ell m} A_r, \quad \text{ただし,} \quad 0 < r \leq 2m \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

結局,

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \quad A_2 = \cot \alpha, \quad A_3 = \cot \alpha \cot 2\alpha \quad \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots, \quad A_{m-1} &= A_2 = \cot \alpha, \quad A_m = A_1 = 1, \\ A_{m+1} &= A_{m+2} = \dots\dots\dots = A_{2m} = 0 \\ A_{2m+1} &= (-1)^m A_1 = (-1)^m, \quad A_{2m+2} = (-1)^m A_2, \quad \dots\dots\dots, \quad A_{3m} = (-1)^m \\ A_{3m+1} &= A_{3m+2} = \dots\dots\dots = A_{4m} = 0 \\ A_{4m+1} &= (-1)^{2m} A_1 = 1, \quad A_{4m+2} = A_2, \quad \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

のような関係をうる。

さて,

$$\begin{aligned} g^0 &= \sum_{n=1}^m A_n \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{2m} A_n \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (62)$$

および

$$A_n = \frac{\left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} g_{n-1,0}^0}{g^0} \quad \dots\dots\dots (63)$$

なので,

$$\begin{aligned} [g^0]^2 &= \sum_{n=1}^{2m} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} g_{n-1,0}^0 \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m A_{\ell} \sum_{n=1}^{2m} 2 \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\ &\quad \times \cos \left[(m-1) \frac{\pi}{4} - (n-1) \frac{\pi}{2} - (\ell-1) \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{\pi}{2} - 2\alpha(n-1) \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$\cos$ の積を和にかきあらため、 $\alpha = \pi/2m$ を代入すると、 $\ell = 1$ の時以外は $\cos$ の級数和が零となるから

$$[g^0]^2 = \frac{A_1}{2} \sum_{n=1}^{2m} \cos(0) = m \quad \dots\dots\dots (65)$$

したがって、原点での値として

$$g^0 = \sqrt{m} = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \quad \dots\dots\dots (66)$$

である。

水粒子の位置は

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2h}{a} \sin bt \cdot g_{1,0}(x_0, y_0) \\ y &= y_0 + \frac{2h}{a} \sin bt \cdot g_{0,1}(x_0, y_0) \end{aligned} \right\}$$

.....(67)

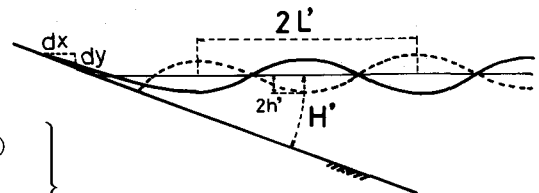


図-6 斜面上の重複波

である。波先端での局所的な波形勾配を計算してみよう。まず、水表面 $y_0 = 0$ における傾きをもとめる。これには y_0 による微分は関係しない。その後 $x_0 = 0$ とおく。

$$\frac{dy}{dx_{x_0=y_0=0}} = \frac{\partial y / \partial x_0}{\partial x / \partial x_0}_{x_0=y_0=0} = \frac{\frac{2h}{a} \sin bt \cdot g_{1,1}^0}{1 + \frac{2h}{a} \sin bt \cdot g_{2,0}^0} \dots\dots\dots (68)$$

この波先端の局部的勾配は、斜面勾配より急になることができないというのが Miche の碎波条件である。限界値は、 $\sin bt = 1$ のとき出現し

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{2h}{a} \left[g_{1,1}^0 - \tan \alpha \cdot g_{2,0}^0 \right] \\ &= \frac{2h}{a} g^0 \left[(-a)^2 A_2 \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{\sin 2\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \tan \alpha \cdot (-e)^2 A_2 \frac{\cos (-2\alpha)}{\sin 2\alpha} \right] \\ &= 2h a g^0 [\cot \alpha - \cot 2\alpha] \\ &= \frac{ha}{\sin \alpha \cos \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \dots\dots\dots (69) \end{aligned}$$

通常 の定義の波形勾配として表現すると、その最大値は

$$\gamma_{max} = h/L = h/(\pi/a) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\sin^2 \alpha}{\pi} \dots\dots\dots (70)$$

である。

これよりも小さな波形勾配の波が入射すると、斜面での条件を満足する重複波が生ずる。反射率は 1 である。波のどの部分をとっても、水粒子は連続している。(70)の条件にいたるまで、この連続性は保持される。これを越えると、波先端部の勾配は斜面の勾配より急になる。波先端は斜面上から離れないから、そのすぐ背後の水粒子が斜面内に入りこまない限り、このような状態を作り出すことはできない。これは不可能である。入射波を分解して、(70)を満たす部分とそれを上回る部分との和によってなりたっているとする。上回る部分が重複波を形成せず、何らかの形の他のものに変化することが予想される。波の形を保ったまま沖へ戻って行くのは、(70)の部分だけである。したがって、反射率として入射波の波高に対する (70)の波高として定義すると、

$$\left. \begin{aligned} r &= 1 & \frac{H}{L} &\leq \gamma_{max} \text{ のとき} \\ &= \gamma_{max}/(H/L) & -\frac{H}{L} &\geq \gamma_{max} \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

としてあたえられる。

以上は、一様傾斜の斜面が無限に続いている場合である。現実の問題としては、一様水深の海にある傾斜を有する構造物を設置した場合の方が多し。構造物のおかれる水深が余り大きくなければ波は長波に近いと考えた第一近似が採用可能であろう。このとき、水平床上の長波と一様傾斜面上の長波の解をつないで解をもとめることができ、さらに Miche と同じ考えを適用すると

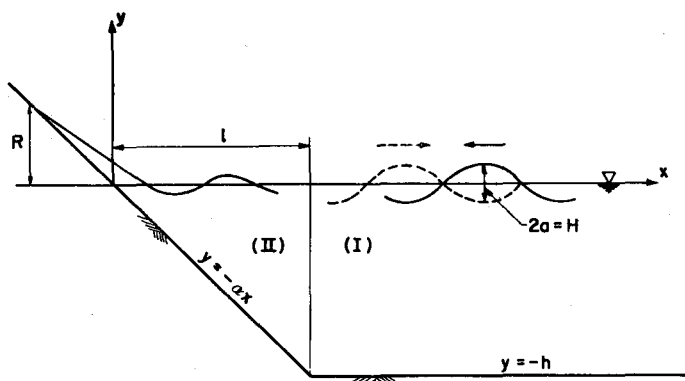


図-7 一様水深中に傾斜面がおかれた場合

$$\left. \begin{aligned} r &= 1 \\ &= 2a_m / H_i, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &H_i \leq 2a_m \text{ のとき} \\ &H_i \geq 2a_m \text{ のとき} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(72)$$

ただし,

$$\frac{2a_m}{L} \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\pi} \left(4\pi \frac{\ell}{L} \right)^{-1} \left[J_0^2 \left(4\pi \frac{\ell}{L} \right) + J_1^2 \left(4\pi \frac{\ell}{L} \right) \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(73)$$

であたえられる。 H_i は入射波の波高, $2a_m$ は重複波が碎波をおこす限界の入射波波高, α : 斜面勾配, ℓ : 斜面の水平長, L : 斜面前面での入射波波長で $\sqrt{gh} T$ として求めてよい(図-7 参照)。 J_0, J_1 はベッセル関数である。

4 その他のエネルギー消費による反射率変化

コンクリート・ブロックなど透過性構造物では, その間隙を水が通過する際の抵抗などが原因となってエネルギーが失われ, 反射率が減少する。これを扱った理論は Le Méhauté¹⁰⁾ のもの以来数多くあるが, 以下にそのいくつかを紹介し, 取扱いの手法や特徴的な現象について述べる。

まず, 簡単のために, 抵抗物体のない水路での長波を考えよう。基本式は,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(74)$$

で, x の正方向に進む解,

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \frac{H}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{L} x \right) \\ u_i &= \frac{H}{2} \frac{g}{\sqrt{gh}} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{L} x \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(75)$$

負方向に進む解

$$\left. \begin{aligned} \eta_r &= \frac{H}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{L} x + \theta \right) \\ u_r &= -\frac{H}{2} \frac{g}{\sqrt{gh}} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{L} x + \theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

の形が考えられる。反射波にふくまれる位相 θ は、反射壁が $x = \ell$ に設置されていると、そこでの条件からきめられる（図-8）。反射壁上で $u = u_i + u_r = 0$ とならねばならないので

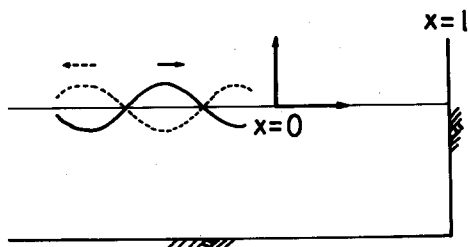


図-8 x 軸の位置によって生ずる位相のズレ

$$\frac{H}{2} \frac{g}{\sqrt{gh}} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{L} \ell \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{L} \ell + \theta \right) \right] = 0 \dots\dots (77)$$

が t の如何にかかわらず成立するには

$$\theta = -\frac{4\pi}{L} \ell = -\frac{2\ell}{\sqrt{gh}} \frac{2\pi}{T} \dots\dots\dots (78)$$

となるから、時間項とともにまとめると

$$\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{L} x + \theta = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{2\ell}{\sqrt{gh}} \right) + \frac{2\pi}{L} x \dots\dots\dots (79)$$

となって、長さ ℓ の区間を折返してくる時間のズレを θ が表わしている。波形と流速とは同じ位相をもっている。

次に透過性構造物中の波動を考える。¹¹⁾ 長波を考え、抵抗は流速に比例するとおけば、基本式は、

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{1}{\lambda g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{k} + \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (80)$$

ここで、 λ は空隙率、 k は透水係数である。(74) との本質的な差は u/k が加わったことである。 x の正方向に進む解は

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \frac{H}{2} e^{-nx} \sin (\sigma t - mx) \\ u_i &= \frac{H}{2} \frac{\lambda \sigma}{h \sqrt{m^2 + n^2}} e^{-nx} \sin (\sigma t - mx + \delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (81)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{2gh} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda g}{k\sigma} \right)^2} + 1 \right]} \\ n &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{2gh} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda g}{k\sigma} \right)^2} - 1 \right]} \\ \delta &= \tan^{-1} \frac{n}{m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (82)$$

である。波形と流速の間には位相のズレが生ずる。これは u/k の項のために生じたものである。したがって、抵抗の存在する場合について考えるとき、この原因による位相差を考えて解かねばならない。

堀口ら¹²⁾の多孔式防波堤に対する計算は次の通りである。図-9のように、外海(領域Ⅰ)、多孔壁面(領域Ⅱ)、内室部(領域Ⅲ)に分ける。領域Ⅰ、Ⅱでは抵抗のない時の波となり、たとえば領域Ⅰの速度ポテンシャルは、

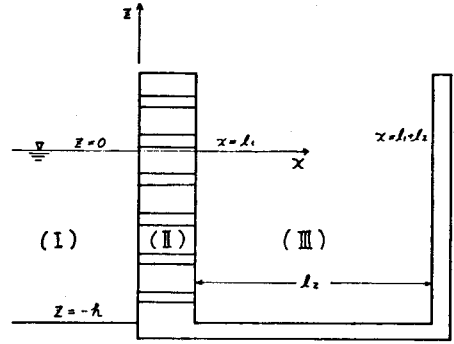


図-9 多孔式防波堤の領域区分

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{g}{\sigma} a \cos(\sigma t - kx) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ & + \frac{g}{\sigma} b \cos(\sigma t + kx + \theta_1) \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \\ & + \sum_n \frac{g}{\sigma} C_n e^{k_n x} \frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h} \cos(\sigma t + \theta_n) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (83)$$

で与えられる。第一項は入射波で振幅 a 、第二項が反射波で振幅 b 、これから反射率が計算される。第三項は防波堤壁面の境界条件をみたすために必要となるが、距離とともに急速に小さくなって行く。 θ_1 、 θ_n などは位相のズレで、時間差以外の要素も含まれることは前述の通りである。領域Ⅲでは定常波が存在するとして、これも級数で与えればよい。

Ⅰ、Ⅲの解の関連をつけるために、まず流量の連続として、

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x} \right)_{x=l_1} \quad \dots\dots\dots (84)$$

とする。つぎに多孔壁によるエネルギー消費を管路に類似させて計算する。 V を管路内の流速とし、 $x=0$ での領域Ⅰの総流量と連続するように空隙の面積を使用してもとめたのち、

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{\rho g} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{V^2}{2g} \right\} + \frac{f|V|V}{2gD} = 0 \quad \dots\dots\dots (85)$$

とおく。孔径 D は一定とすると第三項は無視できるから圧力項は

$$(p)_{x=0} - (p)_{x=l_1} = \rho l_1 \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f}{2D} |V|V \right] \quad \dots\dots\dots (86)$$

で近似される。右辺第一項は加速度運動に伴う力、第二項は抗力に対応する。これを使って圧力の連続から、 ϕ_1 、 ϕ_3 をつなげばよい。所が、抗力項が2乗則のため扱いにくい。

周期的な運動を対象とする時、抵抗の線型化を行うと良い。今、摩擦力が $F|u|u$ のようにあたえられているとき、仮想的な線型力 Mu を想定し、一周期間のエネルギー消費が等しくなるように M の値を決定するのである。すなわち

$$W_2 = \int_0^T F|u|u^2 dt = W_1 = \int_0^T M u^2 dt \quad \dots\dots\dots (87)$$

とする。 $u = u_{max} \sin \sigma t$ であれば

$$M = \frac{8}{3\pi} u_{max} F \quad \dots\dots\dots (88)$$

とする。(86)は

$$(p)_{x=0} - (p)_{x=\ell_1} = \rho \ell_1 \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{4f}{3\pi D} V_{max} V \right] \quad \dots\dots\dots(89)$$

となるのである。

構造物の壁面が直立の場合は上のような扱いをすれば比較的容易に解くことができる。それ以外の場合には、流量などを水深方向に積分した後で連続するか、或いは斜面の勾配が直立に近いとしての摂動を行って連続するかの方法しか、解析的に解く手段はないようである。井島らは、複雑な形状をする構造物に対して速度ポテンシャルを数値計算し、その結果透過率や反射率をもとめている¹³⁾。構造物内の抵抗は線型としている。結果の一例を図-10に示す。傾斜面の結果が大きいことは明らかである。この計算では傾斜面での碎波が含まれていないので、今後こうした結果をとり入れた手法の開発が望まれる。

5. おわりに

理論的にとりあつかえる反射の問題の紹介にとどまった。反射率測定時の有限振幅性の修正、不規則波の反射とその分離、遷移波の反射など面白い問題がまだ数多くある。

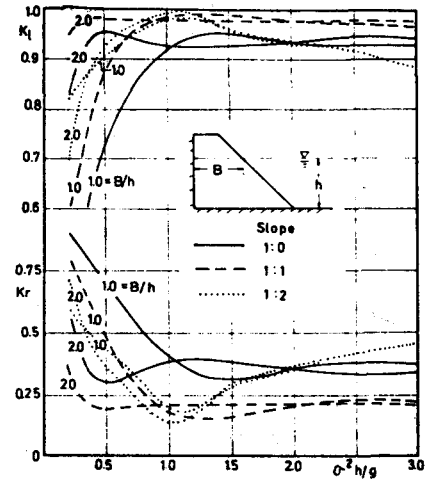


図-10 傾斜面をもつ透過性構造物の反射率と透過率 (井島・周による)

引用文献

- 1) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th ed., Dover, pp.262~263.
- 2) Newman, J. N. : Propagation of water waves over an infinite step, J.F. M., Vol.23, Part 2, pp.399~415, 1965.
- 3) Kajiura, K. : On the partial reflection of water waves passing over a bottom of variable depth, IUGG monograph n° 24, pp.206~230, 1963.
- 4) Dean, R.G. : Long wave modification by linear transitions, Proc. ASCE., WWI, pp.1~29, 1964.
- 5) Ursell, F. : The effect of a vertical barrier on surface waves in deep water, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol.3, Part 3, pp.374~382, 1947.
- 6) Wiegel, R.L. : Transmission of waves past a rigid vertical thin barrier, Proc. ASCE, WW. I, 1960.
- 7) Miche, R. : Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritimes exposés a l'action de la houle, Annales des Ponts et Chaussées, 121e Année, pp.285~319, 1951.
- 8) Miche, R. : Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante, Annales des Ponts et Chaussées, 114e Année, 1944.
- 9) Shuto, N. : Standing waves in front of a sloping dike, Coastal Engng. in Japan, Vol. 15, pp.13~23, 1972.

- 10) Le Mehauté, B. : Perméabilité des digues en enrochments aux ondes de gravité périodiques, La Houille Blanche, No 2, 1958.
- 11) 近藤：透過性防波堤の伝達波，第16回海講，pp. 321～327，1969.
- 12) 堀口，中道：多孔式防波堤の消波機構と波力，第23回海講，pp. 89～94，1976.
- 13) 井島，周：グリーンの公式による2次元水面波の境界値問題の解析，土木学会論文報告集第252号，pp. 57～71，1976.