

波と流れとの相互干渉

加 藤 始

1. まえがき

1960年以前の波の理論では、波と流れとの相互干渉 (interaction) はないものと考えられていた。したがって Unna¹⁾, Johnson²⁾, Yu³⁾, Evans⁴⁾ 等の場合、流れの変化に伴う波高の変化は、波のエネルギーフラックスが一定、あるいはそれと同等な条件から計算されていた。相互干渉の存在をはじめて見出したのは Longuet-Higgins & Stewart (1960⁵⁾, 1961⁶⁾) である。彼等は、従来は気づかれなかった radiation stress の概念を使って、流れが場所的に変化すると、波と流れとの間でエネルギーの授受が生じることを明らかにした。

すなわち、流速が変化する流れの中では波のエネルギー E は保存されないが、エネルギーを周波数 σ で割った E/σ なる量は波向線 (wave ray) に沿って保存されることが Bretherton ら (1968)⁷⁾ によって明らかにされている。この E/σ なる量は wave action と呼ばれ、その保存則を使うと、流れの変化に伴った波高の変化を容易に計算できることが多い。ただし radiation stress も wave action なる量も、流れの鉛直分布が一樣でないと定義できず、従来から研究されている波と流れとの相互干渉の問題は、ほとんど鉛直方向に一樣な流速分布をもつ流れに限られている。鉛直方向にも流速が変化する流れの中での波のエネルギーの変化に関しては浜田⁸⁾, 佐藤⁹⁾ などの研究がある。

本稿では、主として既存の流れによる波の変化、あるいは流れの場における波の性質について述べ、波によって生じる流れの問題は対象としない。

以下においては、まず 2. で空間的に一樣な流れの上の波の基本的性質を述べ、3. では流れが波の伝播方向に変化する場合および水平せん断流によって波が屈折する場合の波長や波高の変化について述べる。4. では深さによって流速が変化する鉛直せん断流の上の波の性質、特に波速の表現について述べる。最後に 5. では風波の発達におよぼす流れの効果、ならびに著者ら^{10), 11)} が提案した流れの中での風波の推算式に関する等価吹送距離の概念について簡単に述べる。

2. 一樣な流れの上の波の性質

水面に x, y 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる。 (x, y) 平面および時間について周期的な水面の波の性質は、次のような位相関数 χ の関数として表わせる。

$$\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ただし $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{k}$ は波数ベクトルで、 ω は空間に固定した座標系からみた波の角周波数である。波の位相速度 c は次式で定義される。

$$c = \omega/k, \quad k = |\mathbf{k}| = 2\pi/L \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

ただし L は波長である。

一樣な流速 $\mathbf{U}$ をもった流れがある場合、 $\mathbf{x}$ を固定座標による位置のベクトルとすると、水と共に移動する座標系からみた位置のベクトル $\mathbf{x}'$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{U}t \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

流れの上の波の性質が

$$f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

によって記述されるとすると、式 (2.3) により

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) t \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

であるから、それは

$$f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \sigma t) \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

によっても同様に記述される。ここに

$$\sigma = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

は流れに相対的な座標系からみた角周波数である。したがって、一様な流れの上の波の諸性質は、流れがない場合の波数 $\mathbf{k}$ 、角周波数 σ の波についての表現に式 (2.7) を代入することにより直ちにえられる。すなわち一様流 $\mathbf{U}$ の上の微小振幅波の表現は、静止水面上の波形を

$$\eta = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

とすると、波の運動に対する速度ポテンシャルは

$$\phi = \frac{a(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}) \cosh k(z+d)}{k \sinh kd} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

分散関係式は

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2 = \sigma^2 = gk \tanh kd \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

で表わされる。ただし d は水深である。なお式 (2.10) で表面張力を含ませるときは、 g の代りに

$$g_r = g + T_1 k^2 / \rho \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

を用いればよい。ここに T_1 は表面張力係数、 ρ は水の密度である。

流れの方向も波の方向も x 軸に平行な場合、流れに相対的な波の位相速度を c' とすると

$$c' = \sigma / k \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

固定座標からみた位相速度 c は、 $|\mathbf{U}| = U$ とすると

$$c = c' + U \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

と簡単に表わされる。また流れに相対的な波の群速度を c'_g とすると、波のエネルギーは $(U + c'_g)$ で伝播するが、流れのないときと同様に c'_g は次のようになる。

$$c'_g = \frac{dc'}{dk} = \frac{1}{2} c' \left(1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

ところで微小振幅波理論による解は

$$ak, \quad a/d, \quad \text{および} \quad a/k^2 d^3 \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

の3つのパラメータすべてが1よりはるかに小さいときにより近似値を与える¹²⁾。これが満足されないときの波の表現は有限振幅波の解によらねばならないが、その場合にはいろいろな近似解がある。 ak の級数の形にせつ動展開したものがよく知られるストークス波近似で、これは水深が中程度以上に深く、 $a/k^2 d^3$ が小さいときにより近似値を与える。水深が小さい場合の波については、 ak に対して a/d の効果をバランスさせるために展開のパラメータに工夫がなされ、クノイド波の解がえられる (たとえば、冨永 (1976)¹³⁾ 参照)。

流れも波も x 軸に平行な場合のストークス波の第2次近似までの解は Whitham (1962)¹⁴⁾ によって示されているが、(波の運動による質量輸送が生じるため) 静水面または圧力の表現に定数項が必要になる。また波があるときの波の質量輸送速度 U_m は、鉛直断面を横切る質量のフラックスの平均値を $\overline{Q_0}$ としたとき $\overline{Q_0}/\rho d$ で定義され、流れがないときの平均流速を U とすると、次のように表わされる¹⁴⁾。

$$U_m = U + (E/\rho d c') \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

ここに E は波のエネルギーで、 $\frac{1}{2} \rho g a^2$ に等しい。式 (2.16) の第2項は $O(a^2)$ であるから、微小振幅

波理論においては $U_m = U$ と考えてよい。

ふたたび x, y 平面上で一様な流れ U の上の波を考える。その分散関係式 (2.10) は次のようにも書ける。

$$\omega = \pm \sigma(k) + k \cdot U \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

ここに

$$\sigma(k) = + (gk \tanh kd)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

通常分散関係式を使って ω に対する k (またはその逆) を求めるわけであるが、流れがある場合には式 (2.17) の解は一義的には決定されず、場合によっていろいろな解が存在しうる。

ω と U と d を与えて k を求めるとき解は、 (k, m) 空間における平面

$$m = \omega - k \cdot U \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

と回転面

$$m = \pm \sigma(k) \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

との交点としてえられるが、Peregrine (1976)¹²⁾ はこれを図-1 のように表わし、それぞれの波の性質を説明している。図-1 は、単位ベクトル e で表わされる任意の方向の k に対し、回転面 (2.20) の直径断面が表わす曲線、およびその断面内における代表的な平面 (2.19) の跡 (trace) を表わし、その断面内の解に相当する4つの交点がA, B, C, Dと表わされている。実際の解の軌跡はこの4点を連ねたものになる。

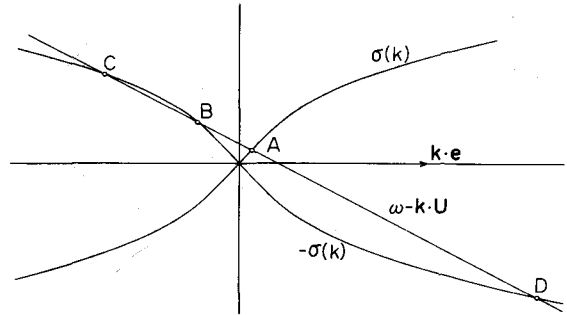


図-1 分散関係式の解を示す模式図 (Peregrine¹²⁾ による)

点Aの解は流れの方向に k の成分をもった波に対応しており、流れに乗るため固定座標からみた角周波数 ω は水に相対的な角周波数 σ より大きい。点Bの解は流れと逆の向きに成分をもつ波を表わしており、固定点から見るとよりおそく伝播するので $\omega < \sigma$ となっている。これらの2つの解は流れのドップラー効果をよく表わしている。

C点で表わされた解は流れのある場合の分散波にのみ生じる。この場合の波の峯は流れに逆らって進行するがその波のエネルギーは下流側へ流される。これは、 k と U とのなす角度を θ とすると

$$-c'_g < U \cos \theta < -c'_g \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

となる場合で、このような波は流れの上で何等かの外力が作用したときにのみ発生する。この種の波は、流れの中でプランジャーを上下させると簡単に生じる。また流速分布に多少の違いはあるが、強い流れの上にそれと逆向きの風が吹いた場合の発生波はこれと似た性質を示す場合がある。

点Dで表わされる解は $+e$ 方向に比較的強い成分をもつ流れの上に乗る、水に対して $-e$ 方向の位相速度をもつ波であるが、実際に検出するのはむづかしい。

十分強い流れに対しては、 θ のある値に対してBとCの解は一致する場合があり、それは

$$c'_g + U \cos \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

のときに起こる。この場合、波のエネルギーは静止しているかあるいは流れに直角に移動するかである。これはまさに hydraulic breakwater で入射波を停止させるために要求される条件に相当し、したがってこのような流速は stopping velocity と呼ばれる⁴⁾。重力波の位相速度はその群速度より常に大き

いから、この場合波の峯は流れをさかのぼって伝播するが、波のエネルギーは伝播されない。また、もし、

$$c_g' + U \cos \theta < 0 \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

であれば、BとCのタイプの解は存在しない。

3 ゆるやかに変化する流れの上の波の変化

3.1 各種の保存式

流れがゆるやかに変化する時、その上を伝播する波の波数 k 、周波数 ω 、位相関数 χ 、振幅 a などもゆるやかに変化する。この場合、まず運動学的な保存式として次のような関係が成立つ。

$$k = \nabla \chi, \quad \omega = -\partial \chi / \partial t \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

$k = (k_1, k_2)$ とすると、上式から次の2式が出てくる。

$$\nabla \times k \equiv \frac{\partial k_1}{\partial y} - \frac{\partial k_2}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \omega = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

波の分散関係式は前章と同様に次式で表わされる。

$$\omega = k \cdot U + \sigma(k, d) \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

ただし $\sigma(k, d)$ は式 (2.10) によって与えられる。

流れの変化に伴う波の振幅 a の変化を求めるには、Longuet-Higgins & Stewart (1960⁵⁾, 1961⁶⁾) によって示されたように波と流れとの相互干渉を考慮に入れなければならない。この相互干渉は波の radiation stress の働きによって生じる。

radiation stress: よく知られているように、表面波は a^2 に比例し波の伝播方向と平行して伝達される運動量をもつ (Lamb, 1932¹⁵⁾, p. 419)。ところで、もし一連の波がある障害物におつかつて反射するとすると、その運動量も反転する。この場合、運動量の法則から考えて、このときの運動量の変化の割合に等しい力がその障害物に作用するはずである。この力は radiation stress の1つの表われであると説明される¹⁶⁾。stress は定義により運動量流束と同等であるから、radiation stress は (波がないときに比べて) 波が存在することによって生ずる過剰運動量流束 (excess momentum flux) として定義され、その x 方向成分 S_{xx} は、波が x 軸に平行に伝播する場合、次式で表わされる^{5), 16)}。

$$S_{xx} = \int_{-d}^{\eta} (\bar{p} + \rho \bar{u}^2) dz - \int_{-d}^0 p_0 dz \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

波が x 軸と θ の方向に伝播する場合の radiation stress の各成分の計算結果は次のようになる (井島¹⁷⁾, p. 94)。

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} &= \frac{1}{2} E \left(\frac{2 c_g'}{c'} - 1 \right) + E \frac{c_g'}{c'} \cos^2 \theta \\ S_{xy} &= S_{yx} = 0 \\ S_{yy} &= \frac{1}{2} E \left(\frac{2 c_g'}{c'} - 1 \right) + E \frac{c_g'}{c'} \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

弾性理論などにおいて、stress は単位面積当りの力で表わされるが、この場合 stress と歪み率 (rate of strain) の積は単位体積当りの仕事率 (power) になることがよく知られている。これと同様に、単位長さ当りの力で表わされる radiation stress と流体の歪み率との積は単位面積当りの仕事率になる。これからわかるように、水面に波が存在し、水中に他の流れに基づいて歪み (= 流速変化) が生じていると、その歪みを生ずる流れは radiation stress に対して仕事をする事になり、流れからエネルギーが失われ、多くの場合それは波へと伝達される。もし歪みか stress の働く方向が逆になると上と逆の

ことが起こり、波から流れへとエネルギーが移されることになる。たとえば波と流れの方向がどちらも x 軸と平行で、流速変化 $\partial U/\partial x$ は下方からの水の補給（たとえば水深変化により）で生じ、横方向の流速変化はない場合、radiation stress の成分で流れと相互作用を生じるのは S_{xx} だけである。すなわち radiation stress は単位面積当たり $S_{xx} \cdot (\partial U/\partial x)$ の割合で仕事をし、この割合で波から流れへとエネルギーが伝達されることになる。前章でも述べたように波のエネルギーは $(U + c_g')$ で伝播されるから、この場合の波のエネルギー収支を表わす式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E (U + c_g') \right] + S_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

この関係のもっと厳密な証明は Whitham¹⁴⁾ によってなされている。

y 方向にも平均流 V があり、波も任意の方向に伝播する一般の場合のエネルギー収支は次のように表わされる（井島¹⁷⁾, p. 93）。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ E (U + c_{gx}') \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ E (V + c_{gy}') \right\} \\ + S_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} + S_{xy} \frac{\partial V}{\partial x} + S_{yx} \frac{\partial U}{\partial y} + S_{yy} \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.8) \end{aligned}$$

式 (3.2), (3.3), (3.4) を考慮することにより、式 (3.8) から振幅 a の変化は計算できる。

以上は運動の方程式を直接鉛直方向に積分してその平均をとり、運動量やエネルギーの変化を計算する方法で求められたもので、Longuet-Higgins & Stewart^{5), 6), 16)}, Whitham¹⁴⁾, Phillips¹⁸⁾ などによって発展させられてきた結果である。一方、1965年ごろから Whitham^{19), 20)}, Luke²¹⁾, Bretherton & Garrett⁷⁾ などによって研究されてきた変分原理に基づく波の解析法（Whitham(1974)²²⁾, 富永¹³⁾ などを参照のこと）によると、鉛直方向には一様な流れが変化するときの波の振幅変化をより簡単に計算することができる。すなわち、式 (3.8) に代る関係として次式が成立つ。^{7), 12)}

$$(\partial A/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

ここに

$$A = E/\sigma \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

$$\mathbf{B} = (U + c_g') A = (U + c_g') E/\sigma \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

c_g' と σ は流れに相対的な波の群速度と角周波数である。式 (3.10) で定義される A は wave action density と呼ばれ、式 (3.11) の $\mathbf{B}$ は wave action flux である。式 (3.9) は流れが変化しても wave action は保存され、したがって

$$(d\mathbf{x}/dt) = \mathbf{U} + \mathbf{c}_g' \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

で与えられる波向線 (wave rays) にそって wave action flux $\mathbf{B}$ は一定に保たれることを表わしている。定常な波に対して式 (3.9) を x, y 成分を使って書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} (U + c_{gx}') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sigma} \right) + (V + c_{gy}') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E}{\sigma} \right) \\ + \left[\frac{\partial}{\partial x} (U + c_{gx}') + \frac{\partial}{\partial y} (V + c_{gy}') \right] \left(\frac{E}{\sigma} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.13) \end{aligned}$$

3.2 波の伝播方向に変化する流れによる波の変化

流速分布が

$$\mathbf{U} = (U(x), 0, 0) \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

で表わされる流れの上を x 方向に伝播する定常状態にある波の変化を考える。

式 (3.3) から角周波数 ω は一定である。流れのない場所での角周波数を σ_0 とすると、式 (3.4) から

次の関係がえられる。

$$\omega = kU + \sigma = \text{const.} = \sigma_0 \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

静水中での波速と波数を c_0 , k_0 , 流れに相対的な波速を c' とすると, $\sigma_0 = k_0 c_0$, $\sigma = kc'$ であるから

$$\omega = k(U + c') = k_0 c_0 \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

と書ける。深海波の場合を考えると

$$c' = (g/k)^{\frac{1}{2}}, \quad c_0 = (g/k_0)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (3.17 \text{ a, b})$$

であるから,

$$\frac{c'^2}{c_0^2} = \frac{k_0}{k} = \frac{c'}{c_0} + \frac{U}{c_0} \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

これを c' について解くと次のようになる。

$$\frac{c'}{c_0} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4U}{c_0}} \right] \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

ただし, $U=0$ のとき $c'=c_0$ であるから, 上式では $\sqrt{\quad}$ の前が+の根だけとってある。

式 (3.19) をみると, 流れが逆流 ($U<0$) で $-U > \frac{1}{4}c_0$ のとき解が存在しないことがわかる。その限界においては $c' = \frac{1}{2}c_0$ となり, $U/c' = -\frac{1}{2}$ となる。 $c'_g = \frac{1}{2}c'$ であるから, この限界は $U + c'_g = 0$ の場合に対応しているが, この点の近くにおける波のふるまいについては後で述べる。

流れによる波長の変化は式 (3.17), (3.19) から次のように表わされる。

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{c'}{c_0} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4U}{c_0}} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

次に波の振幅の変化は式 (3.8) から計算できる。いまの場合は式 (3.7) を積分すると次の関係がえられる (井島¹⁷⁾, p.100 参照)。

$$E \left(U + \frac{1}{2}c' \right) c' = \text{const.} = \frac{1}{2}E_0 c_0^2 \quad \dots\dots\dots (3.21)$$

したがって振幅の変化 a/a_0 は次のようになる。

$$\frac{a}{a_0} = \frac{c_0}{\{c'(c'+2U)\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{4U}{c_0}\right)^{\frac{1}{4}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4U}{c_0}}\right]} \quad \dots\dots\dots (3.22)$$

ところで, 前節で述べた wave action 保存の式を使うと, 振幅の変化はもっと簡単にえられる。今の場合, 式 (3.9) から次の関係が成立つ。

$$B = (U + c'_g) E / \sigma = \text{const.} = B_1 \quad \dots\dots\dots (3.23)$$

ただし $E = \rho g a^2 / 2$ で, B_1 は波が発生した点での B の値である。上式から, 深海波の振幅の式は次のようになる。

$$a^2 = 2B_1 / \rho c' \left(U + \frac{1}{2}c' \right) \quad \dots\dots\dots (3.24)$$

式 (3.22) は式 (3.24) から直ちにえられる。

式 (3.23) または (3.24) は, σ が非常に大きくなるか, または $(U + c'_g)$ が 0 に近づくと振幅 a は非常に大きくなることを意味している。この2つの場合の実際の現象について少しくわしく考えてみる。

まず前者の場合は, 静止した水の上に生じた波については起こらないが, 最初から流れの上に生じた波については起こりうることである。 σ が大きいときは波長が非常に短いから深海波の関係が成立ち,

$$c' = \sigma/k = g/\sigma \quad \dots\dots\dots (3.25)$$

である。したがって σ が大きくなるということは $c' \rightarrow 0$ に対応する。式 (3.16) と (3.25) から

$$U = (\omega/g) c'^2 - c' \quad \dots\dots\dots (3.26)$$

となるから、 $\omega = \text{const.}$ のときの式 (3.26) の変化を (c', U) 平面で考えると、 $c' \rightarrow 0$ となるのは $U \rightarrow 0$ となる場合だけであることがわかる。 $c' \rightarrow +0$ のときには $U \rightarrow -0$ 、すなわち流れが逆流で流速の絶対値が 0 に近づくときであるから、 $\omega > 0$ である波についてしかこの現象はあてはまらない。 $c' \rightarrow +0$ のときには

$$U + c'_g < 0 \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

が成立つから、波の位相は流れをさかのぼって進むが、波のエネルギーは流れに押し戻され (図-1 の C 点の解に相当)、波はしだいに減衰する。最初 $U + c'_g > 0$ であった波の c' が減少する場合には、 $c' \rightarrow +0$ となる前に $(U + c'_g) \rightarrow 0$ となるから、 $c' \rightarrow +0$ となる場合は実際には起こりえないといえる。

振幅が異常に大きくなる第 2 の場合、すなわち

$$U + c'_g = 0 \quad \dots\dots\dots (3.28)$$

のときの値に 1 をつけて表わすと、前述のように

$$U_1 = -\frac{1}{2} c'_1 = -\frac{1}{4} c_0, \quad L_1 = \frac{1}{4} L_0 \quad \dots\dots\dots (3.29)$$

であり、 U_1 は stopping velocity と呼ばれる。

式 (3.22) や (3.24) では $U \rightarrow U_1$ のとき $a \rightarrow \infty$ となるが、この場合の波の変化については、従来、 $U \rightarrow U_1$ となる点より以前に波は砕波すると説明されている (たとえば Phillips, 1966¹⁸⁾)。実際に Yu (1952)³⁾ が行った $U \rightarrow U_1$ のときの実験結果でも、 a/a_0 は高々 1.85 程度までしか大きくなっていない。

Peregrine (1976)¹²⁾ は流速 $U(x)$ の与え方を工夫して $U = U_1$ の近傍での波の解をせつ動法によって求め、静水中での波形勾配が極端に小さければ、 $U = U_1$ の点で波の反射が起こりうることを示しているが、実際にこの理論の適用できる場合はあまりないであろう。

いずれにせよ $U \rightarrow U_1$ の近傍の波については微小振幅波理論が適用できなくなるが、Holliday (1973)²³⁾ は有限振幅の表面張力-重力波の流れの上での解を計算し、流れの変化による波形勾配と波数の変化を微小振幅波の場合と比較している。

3.3 水平せん断流による波の変化

波が流れに対して斜めに伝播するとき、流れが変化すると波の屈折が生じ、波長や波高が変化する。ここでは単純な例として、流速成分が

$$U = [U(y), 0, 0] \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

で表わされる水平せん断流によって波が屈折する場合の変化¹²⁾ について述べる。まず直観的な理解を助けるために、 $U = 0$ (流れなし) と $U = U$ (一様流) の不連続面での深海波の屈折²⁾ を考える。図-2 のように x 軸の下側では流れがなく、上側では x 方向の一様流速 U がある場合、波長と波速が L_0, c_0 の波が $\overrightarrow{AQ}$ の向きに伝播し、 Q' 点で $\overrightarrow{Q'B}$ の向きに屈折し、波長と波速が L, c' になるとする。PQR と P'Q'R' はそれぞれ波峰線である。図-2 の場合、Johnson²⁾ は次の関係を示している。

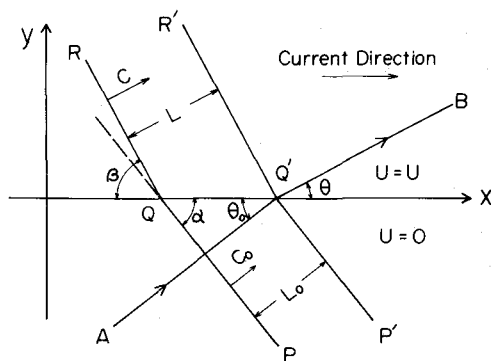


図-2 流れの不連続面での波の屈折

$$c_0 / \sin \alpha = U + (c' / \sin \beta) \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

$$L / \sin \beta = L_0 / \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

$$\sin \beta = \sin \alpha / (1 - m \sin \alpha)^2, \quad m = U / c_0 \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

式 (3.30) で表わされる流れの上の深海波について、波の進行方向と流れ（すなわち x 軸）とのなす角を θ とすると、まず

$$\omega = \sigma + kU \cos \theta \quad \dots\dots\dots (3.34)$$

は式 (3.15) と同様に一定である。また式 (3.2) から

$$k \cos \theta = \text{const.} = \ell \quad \dots\dots\dots (3.35)$$

となるが、これは式 (3.32) の関係に対応している。さらに波向線にそって wave action フラックスは一定であるから、それを B_y で表わすと

$$\rho g a^2 c'_g \sin \theta / 2 \sigma = B_y \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

式 (3.34)～(3.36) および波の分散関係式

$$k = \sigma^2 / g \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

の4つの関係によって、流れの中の各点における k , σ , θ , a の変化が求められる。まず式 (3.34) と (3.35) から

$$\sigma = \omega - \ell U \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

k と c' は式 (3.37) から求められ、 k を式 (3.35) に代入することにより次式がえられる。

$$\cos \theta = g \ell / (\omega - \ell U)^2 \quad \dots\dots\dots (3.39)$$

式 (3.39) をみるとわかるように、 U の値によっては右辺が1より大きな値になるが、そのような流速の場所では ω と ℓ に対応する波は存在しないわけである。この波が存在しない領域の境界に対応する限界流速は、

$$U = \frac{\omega}{\ell} \pm \left(\frac{g}{|\ell|} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (3.40)$$

この限界流速においては $\theta = 0$ または π となり、波は流れと平行に進むことになる。このような点では、波向線が密集し、いわゆる焦線 (caustic line) の接線となる。

各点における波の振幅の変化については、式 (3.36) から次式がえられる。

$$a^2 = 8 \ell B_y / \rho g \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots (3.41)$$

この式からわかるように θ が 0 , $\pi/2$, π に近づくとき、振幅は異常に大きくなる。前述のように θ の 0 と π の値は焦線に対応しており、それは平面波の近似が成立たないようになる場所である。一方 $\theta \rightarrow \pi/2$ の場合は、波が大幅に屈折したため波長が非常に短くなり、波形勾配が急になりすぎてもはや微小振幅波近似が成立たない

場合である。波形勾配の式は

$$a^2 k^2 = 4 \ell^3 B_y / \rho g \sin \theta \cos^3 \theta \quad \dots\dots\dots (3.42)$$

となるから、 $\theta \rightarrow \pi/2$ のときの ak の増加の割合は特に急であることがわかる。

式 (3.30) の流れによる波の屈折角 θ の表現としては、式 (3.39) を変形すると次式がえられる。

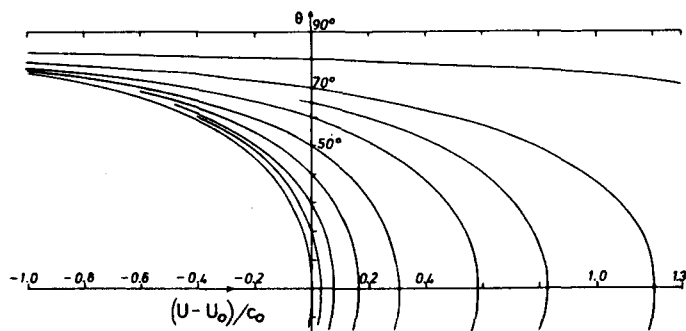


図-3 水平せん断流の上の波の屈折に伴う θ の変化 (Peregrine¹²⁾ による)

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_0 / (1 - U^* \cos \theta_0)^2 \\ U^* &= (U - U_0) / c_0' \end{aligned} \right\} \cdots (3.43)$$

この式は、最初流れに相対的な波速 c_0' で流速 U_0 の場所を θ_0 の角度で進行していた波の、流速 U の場所での方向 θ を表わしている。図-3 は式 (3.43) による U^* と θ との関係を示しており、それぞれの曲線はたて軸との交点で与えられる $\theta = \theta_0$ から出発したときの θ の変化を表わしている。図-4 は θ の変化に伴う振幅 a 、波数 k 、および ak の変化を対数目盛で示しているが、各曲線とも ak が最小となる $\theta = \pi/6$ のときの値によって正規化されている。この図から $\theta \rightarrow 0$ および $\theta \rightarrow \pi/2$ のときの特異性がよくわかる。なお、 $\theta = \theta_0$ のときの振幅と波長を a_0 、 L_0 とすると次の関係が成立つ。

$$a/a_0 = (\sin 2\theta_0 / \sin 2\theta)^{\frac{1}{2}} \cdots (3.44)$$

$$L/L_0 = k_0/k = \cos \theta / \cos \theta_0 \cdots (3.45)$$

4. 深さによって変化する流れの上の波の性質

次に流速が深さだけの関数で、平均流速が

$$U = (U(z), 0, 0) \cdots (4.1)$$

与えられる定常な流れの上を、流れと平行（すなわち x 方向）に伝播する表面波の性質について述べる。鉛直方向に流速変化を生じる主な原因は、水面に働く風の応力による吹送流と底面の境界層による流速変化とである。

この場合の波の分散関係式を明らかにするためには、流れに相対的な波速は定義しにくいので、固定座標からみた波速 c を求めねばならない。まず、微小振幅波としての波速を計算するための基本式について述べる。運動は2次元としてよく、静水面から上向きに z 軸をとる。波の運動にもとづく流速の x, z 成分をそれぞれ u, w とし、乱れの数値成分は無視しうるものとする。表面波形を

$$\eta = a e^{ik(x-ct)} \cdots (4.2)$$

とすると、 u, w は次のような流関数 $\Psi(x, z)$ で表わすことができる。

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdots (4.3)$$

$$\Psi = \phi(z) e^{ik(x-ct)} \cdots (4.4)$$

式 (4.3)、(4.4) を通常の線型化された運動方程式に代入して圧力 p を消去すると、 ϕ が満足すべき関係として次のような非粘性の Orr-Sommerfeld 方程式がえられる。

$$(U-c)(\phi'' - k^2 \phi) - U'' \phi = 0 \cdots (4.5)$$

ただし $(\quad)'$ は z についての微分を表わす。表面条件は、 T_1 を表面張力係数とすると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = w \quad (z = \eta) \cdots (4.6)$$

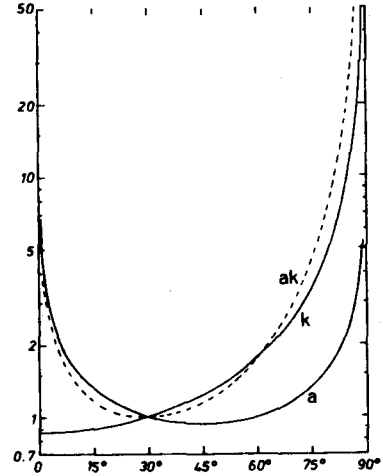


図-4 θ の変化に伴う振幅、波数、
波形勾配の変化 (Peregrine¹²⁾ による)

$$p + T_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (z = \eta) \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

の2つで、これと運動方程式からえられる p の表現

$$p = \rho [(U-c)\phi' - \phi U'] e^{ik(x-ct)} - \rho g z \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

とから、 ϕ についての表面条件は次のように表わされる。

$$a(U-c) = \phi \quad (y=0) \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

$$(U-c)[(U-c)\phi' - \phi U'] = g_r \phi \quad (y=0) \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

上式の g_r は式 (2.11) で定義されている。また底面条件 $w=0$ ($z=-d$) は次のようになる。

$$\phi = 0 \quad (z=-d) \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

流速分布が $U(z)$ の流れに対する波速 c は、(4.11) の条件を満足する微分方程式 (4.5) の解を求めることができれば、表面条件 (4.10) から決定される。

もっとも簡単な例として、流速が水面で U_0 、底面で U_b の直線 (台形) 分布の流れを考えると、流速分布は次式で表わされる。

$$U(z) = U_0 + \beta_1 z, \quad \beta_1 = (U_0 - U_b)/d \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

この分布の場合 $U''(z)=0$ であるから、式 (4.5) は

$$\phi'' - k^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

と簡単になる。(4.11) を満足する上式の解は

$$\phi(z) = A \sinh k(z+d) \quad (A: \text{定数}) \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

であるから、これを (4.10) に代入することにより、波速 c は次のように求まる。

$$c = U_0 - \frac{\beta_1}{2k} \tanh kd \pm \sqrt{\frac{g_r}{k} \tanh kd + \frac{\beta_1^2}{4k^2} \tanh^2 kd} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

また式 (4.14) の係数 A は式 (4.9) から決定され、流関数 Ψ は次のように表わされる。

$$\Psi = a(U_0 - c) \frac{\sinh k(z+d)}{\sinh kd} e^{ik(x-ct)} \quad \dots\dots\dots (4.16)$$

一方、 $U(z) \neq 0$ である一般の流速分布に対して波速 c を波数 k (または波長 L) の explicit な関数の形に求めるのは簡単ではない。ただ、従来から開水路の流れの流速分布としてよく使われている

$$U(z) = U_0 [1 + (z/d)]^{1/7} \quad \dots\dots\dots (4.17)$$

のような $1/7$ 乗流速分布の流れについては Hunt (1955)²⁴⁾ による計算がある。

水面上を吹く風によって生ずる吹送流は、水面付近で大きな速度勾配をもつ流れで、実験室での風波の波速には大きな影響をおよぼす。吹送流に対する波速の計算のためには、実際の流れによく合った分布形を使うことが必要であるが、加藤 (1975)²⁵⁾ は実測分布をよく近似する対数分布に対して波速を計算している。

前述のように $U''=0$ の直線分布に対しては式 (4.5) の解が容易に求まることから、Thompson (1949)²⁶⁾ は任意の流速分布を近似するためにいくつかの直線をつないだ折線分布に対する波速の計算法を示し

ている。これにならって、加藤・佐野 (1970)²⁷⁾ は図-5のように水面付近にだけ存在する直線分布の表層流に対する波速 c を

$$\alpha_1 c^3 + \alpha_2 c^2 + \alpha_3 c + \alpha_4 = 0 \quad \dots\dots (4.18)$$

の形に表わし、これを数値的に解いて波速を求めた (上式の係数 α_n は原論文を参照のこと)。図-5の下層も直線分布をする場合については Dalrymple (1974)²⁸⁾ の計算がある。

もともとのこの種の問題は、空気防波堤の消波効果の計算のため Taylor (1955)²⁹⁾ によって、少し違った形で取扱われていた。すなわち Taylor は水深が無限大の場合について図-5と同じ表層流 (ただし $U_0 < 0$) の上の波の分散関係式を求め、それを3つの無次元量で表わし、解が存在する限界値に対応する stopping velocity U_0 を図式に求めている。また最近、岩垣・浅野 (1978)³⁰⁾ は水深が有限な図-5の場合について、Taylor の方法で stopping velocity を計算している。

ここで、図-5のような鉛直せん断流の場合の stopping velocity の条件について考えてみる。この場合の波速 c は3次方程式 (4.18) の3つの実根のうちの1つとしてえられる²⁷⁾ ので、根の公式を使えば

$$c = c(L; U_0, d_1) \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

の形の explicit な表現がえられる。静水中で波長と波速が L_0, c_0 の波が、図-5のような流れの上に伝播して来たとすると、そのときの波長 L は次の関係から決定される。

$$c(L; U_0, d_1)/L = c_0/L_0 \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

表面張力を無視すると、上式の左辺は $U_0 < 0$ の場合には L のある値で最大値をとり、その最大値は $|U_0|$ の増加とともに減少する。したがって最大値を与える U_0 と L の組は、静水中である波長 L_0 をもつ波に対する stopping velocity と限界波長を与えることになる。式 (4.20) の左辺を L で微分して0とおき、 $k = 2\pi/L$ の関係を考慮すると次式がえられる。

$$\frac{d}{dk} (kc) = 0 \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

式 (4.21) の左辺は固定座標からみた波の群速度 c_g にはかならない。すなわち図-5のような鉛直せん断流の場合でも、stopping velocity の条件は一様分布の流れと同様に $c_g = 0$ であることがわかる。

ところで浜田⁸⁾ は鉛直せん断流についての波のエネルギー輸送速度 c_E は群速度 c_g とは等しくないことを、式 (4.12) の台形分布の場合を例にとって示している (ただしその場合でも $L < 2d$ の範囲では $c_E \approx c_g$ の近似はよく成立つ¹⁰⁾)。鉛直せん断流では一般に $c_E \neq c_g$ であるならば、上に述べたことから stopping velocity を決定するのは c_E ではなく c_g であることになり、群速度が波数の伝達速度の意味をもつこと (Whitham, 1974²²⁾) からすれば当然かも知れないが興味のあることである。

5. 風波の発達におよぼす流れの効果

潮流などの流れがある海では、風と逆向きの流れがあると流れがない場合より波高が大きくなり、海は極度に荒れやすいことが昔から知られている。この発生波の違いは Lord Rayleigh (1911)³¹⁾ も言及しているように、風と水との相対速度の違いによって説明できるような単純なものではないことは、Francis ら (1967)³²⁾ や著者ら (1976,¹⁰⁾ 1978¹¹⁾) の実験結果から明らかである。

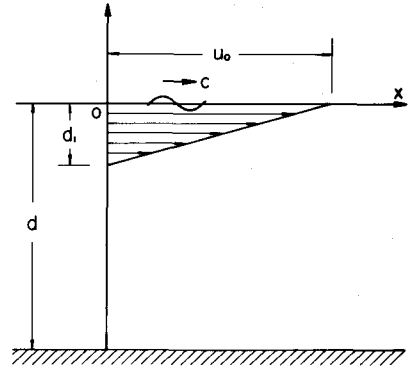


図-5 直線分布表層流

図-6 は後者の例で、これは幅 1.5m の風洞水路において、断面平均流速が +29.9 ~ -20.3 cm/sec の順流と逆流（水深 50cm）の上に断面平均風速 $\bar{U} = 8.2$ m/sec の風を吹かせたときの各フェッチにおける発生波のパワー (η^2) を $H\frac{1}{3}$ の形で示したものである。この図からわかるように、風速の 2~3% の流れでも発生波には大きな影響をおよぼし、同じ風速の下では逆流のときほど波高は大きく、順流のときほど小さい。発生波の波長も、波高と同様に逆流では大きく順流では小さい。

流れのあるときの風波の実験においては、波高計の記録から直接計算されるスペクトルは、流れの効果により周波数がドップラシフトを受けたいわゆる見かけのスペクトルである。このため、各成分波の発達率やスペクトル構造の変化などを調べるには波数スペクトルを求めねばならない。加藤ほか^{27), 10), 11)} は、波数スペクトルに代るものとして、流れがない場合に換算した真の周波数 f_0 についての真のスペクトルを求めて解析を行っている。

等価吹送距離： 図-7 は吹送距離 $F = 5.25$ m の点で、風速は 8.2 m/sec で等しく、流れの条件だけが $\bar{U} = +29.9 \sim -14.4$ cm/sec と変化した 5 ケースについての真のスペクトルを示している。これを見ると、ピークより高周波数側ですべてのスペクトルがほぼ一つにまとまっており、流れの変化に対するスペクトルの変化は、流れなしの条件でフェッチが増加したときのスペクトルの発達の仕方と非常によく似ている。このことは、風波の発達に対して順流は実質的な吹送距離を短くし、逆に逆流は長くする効果をもつことを示唆している。

Phillips & Katz³³⁾ によると風波の成分波の発達に関して

$$t_1 = F_1 / c_g \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

で関係づけられる吹送距離 F_1 と吹送時間 t_1 とは力学的に等価であるが、この t_1 はその成分波のエネルギーが距離 F_1 を伝播するのに要する時間を表わしている。加藤ほか¹⁰⁾ は式 (5.1) と同様の意味で、ある流れの条件の下での吹送距離 F の点の波の全パワー（または $H\frac{1}{3}$ ）を支配する吹送時間は、卓越波のエネルギーが（途中各点の卓越波で引継がれて）その点まで到達するのに要する時間 $\hat{t}$ に比例するものと仮定した。 $\hat{t}$ は次式で計算される。

$$\hat{t} = \int_0^F \frac{1}{c_{gm}(x)} dx \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

ここに $c_{gm}(x)$ は各点での卓越波の群速度で、これが近似的にエネルギー伝達速度を表わすものと考えている。この $\hat{t}$ を使うと、いろいろな流れの上に発生する風波の発達に関して、流れがない場合の吹送距離 F に等価な吹送距離 F' を

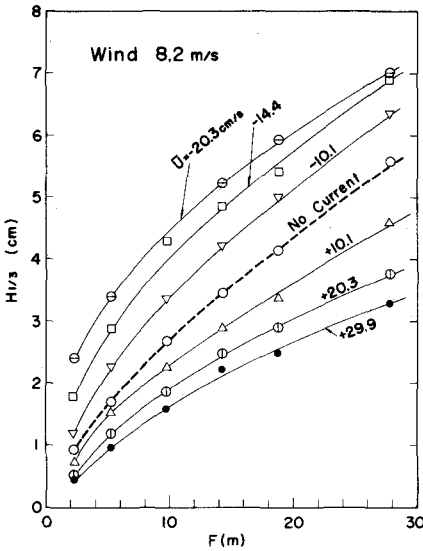


図-6 流れの中の風波の波高変化の例

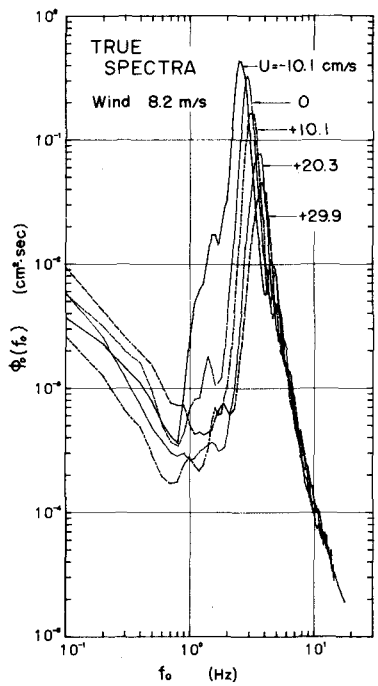


図-7 流れによる真のスペクトルの変化

$$F' = F \cdot (\hat{t} / \hat{t}_0) \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

によって定義することができる。この式の $\hat{t}_0$ は流れがない場合について計算した $\hat{t}$ の値である。

風波の推算式：流れがない場合、風波の全パワー $E(=\overline{\eta^2})$ とスペクトルのピーク周波数 f_m は、無次元吹送距離 gF/u_*^2 に対するフェッチグラフの形でうまく無次元表示できることが光易ほか^{34), 35), 36)}によって見い出されている。

ただし u_* は風の摩擦速度である。これにならって、通常の吹送距離 F の代りに式 (5.3) による等価吹送距離 F' を使うと、流れの中の風波についての $H_{\frac{1}{2}}$ と真のスペクトルのピーク周波数 f_{0m} の測定結果もうまく無次元表示できることが加藤ほか^{10), 11)}によって見い出されている。図-8 は $H_{\frac{1}{2}}$ の無次元プロットの結果を示している。この図で、風速が

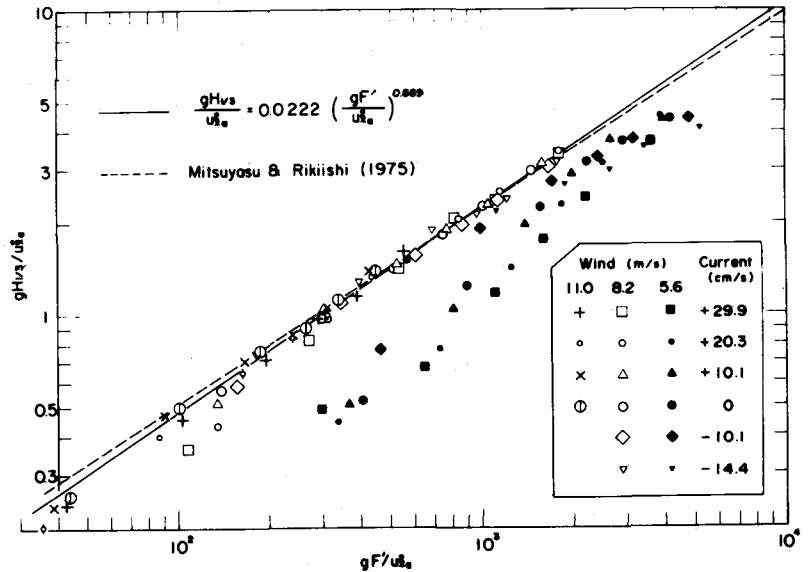


図-8 等価吹送距離による $H_{\frac{1}{2}}$ の無次元プロット

5.6m/sec の場合だけは点がはずれるが、これと同様のことは流れがない場合の光易・本多³⁵⁾の実験結果にも現われており、波が十分発達しきっていない場合の特異現象と考えられている。風速が 8.2 および 11.0m/sec と大きいときには、図-6 のように流れによって異なる値をもつ $H_{\frac{1}{2}}$ が、図-8 のようにプロットすると各ケースの点が流れなしのケースの点と一致して 1 つの直線上に非常によく並び、等価吹送距離 F' を使った無次元表示が有効であることを示している。風速 8.2 および 11.0m/sec における実験結果から、次のような $H_{\frac{1}{2}}$ と f_{0m} についての実験式がえられている¹¹⁾。

$$gH_{\frac{1}{2}}/u_*^2 = 0.0222 (gF'/u_*^2)^{0.669} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

$$u_* f_{0m}/g = 0.939 (gF'/u_*^2)^{-0.354} \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

式 (5.4) は光易・力石³⁶⁾によってえられた実験室での流れのないときの風波の全パワーについての関係 (図-8 の中の破線) とほとんど等しい。一方 f_{0m} についての式 (5.5) は光易・力石³⁶⁾の結果と少しずれがあるが、前者は吹送流の効果も補正した真の周波数で表わしているのに対し、後者は吹送流を補正していないために差がついたものと考えられる。一般には吹送流による波の周波数のずれは考慮されていないので、式 (5.5) の結果を現地のスケールにまで延長しようとする場合にはこの点に注意が必要である。

上に述べた等価吹送距離の概念は、現地の波の推算で流れの効果を考慮に入れようとする場合の 1 つの有力な手がかりとなるものと期待されるが、それを確認するためには、現地のスケールにおける波と流れと風の実測データが必要になるであろう。

6. あとがき

波と流れの共存系の問題は非常に範囲が広く、本文ではその主要と思われる一部を述べたにすぎない。従来、この種の問題に関してはくわしい教科書がなかったが、最近 Peregrine (1976)¹²⁾ がややレビュー的ではあるが広範囲にわたり解説しており、本文を書く上でもかなり参考にした。

なお最近の本シリーズ講義集で、流れの中の波に関連した問題が酒井 (1976)³⁷⁾ や岩垣 (1977)³⁸⁾ によっても述べられていることに本文執筆後に気がついた。前者では流れによる波の屈折の数値計算、後者では空気防波堤の問題が今回のテーマと関係が深いことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Unna, P. J. (1942) : Waves and tidal streams. *Nature, Lond.*, **148**, 226-227.
- 2) Johnson, J. W. (1947) : The refraction of surface waves by currents. *Trans. A. G. U.*, **28**, 867-874.
- 3) Yu, Y. Y. (1952) : Breaking of waves by an opposing current. *Trans. A. G. U.*, **33**, 39-41.
- 4) Evans, J. T. (1955) : Pneumatic and similar breakwaters. *Proc. Roy. Soc. A*, **231**, 457-466.
- 5) Longuet-Higgins, M. S. & R. W. Stewart (1960) : Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *J. Fluid Mech.*, **8**, 565-583.
- 6) Longuet-Higgins, M. S. & R. W. Stewart (1961) : The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.*, **10**, 529-549.
- 7) Bretherton, F. P. & C. J. R. Garrett (1968) : Wavetrains in inhomogeneous moving media. *Proc. Roy. Soc. A*, **302**, 529-554.
- 8) 浜田徳一 (1971) : せん断流の中の表面波の性質について. 第18回海岸工学講演会論文集, 111-114.
- 9) 佐藤道郎 (1975) : 不等流を遡る波の波高変化に関する基礎的研究. 土木学会論文報告集, 第242号, 15-29.
- 10) 加藤 始・鶴谷広一・土肥俊満・宮崎 豊 (1976) : 流れの中の風波についての実験的研究 (第2報). 港湾技術研究所報告, 第15巻, 第4号, 3-48.
- 11) 加藤 始・鶴谷広一 (1978) : 流れの中の風波に関する実験的研究. 土木学会論文報告集, 第270号, 73-83.
- 12) Peregrine, D. H. (1976) : Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.*, **16**, 9-117.
- 13) 富永政英 (1976) : 海洋波動, 共立出版.
- 14) Whitham, G. B. (1962) : Mass, momentum, and energy flux in water waves. *J. Fluid Mech.*, **12**, 135-147.
- 15) Lamb, H. (1932) : *Hydrodynamics*. Cambridge Univ. Press, London and New York.
- 16) Longuet-Higgins, M. S. & R. W. Stewart (1964) : Radiation stress in water waves, a physical discussion with application. *Deep Sea Res.*, **11**, 529-562.
- 17) 井島武士 (1970) : 海岸工学. 朝倉書店.
- 18) Phillips, O. M. (1966) : *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge Univ. Press, London and New York.
- 19) Whitham, G. B. (1965) : A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian. *J. Fluid Mech.*, **22**, 273-283.
- 20) Whitham, G. B. (1967) : Non-linear dispersion of water waves. *J. Fluid Mech.*, **27**, 399-412.
- 21) Luke, J. C. (1967) : A variational principle for fluid with a free surface. *J. Fluid Mech.*, **27**, 395-397.
- 22) Whitham, G. B. (1974) : *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, New York.

- 23) Holliday, D. (1973) : Nonlinear gravity-capillary surface waves in a slowly varying current. *J. Fluid Mech.*, **57**, 797-802.
- 24) Hunt, N. J. (1955) : Gravity waves in flowing water. *Proc. Roy. Soc. A*, **231**, 496-504.
- 25) 加藤 始 (1975) : 対数分布の吹送流に対する波速の計算. 土木学会論文報告集, No. 239, 37-46.
- 26) Thompson, P. D. (1949) : The propagation of small surface disturbances through rotational flow. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **51**, 463-474.
- 27) 加藤 始・佐野喜久雄 (1970) : 流れの中の風波についての研究 (1), 第17回海岸工学講演会論文集, 19-24.
- 28) Dalrymple, R. A. (1974) : Water waves on a bilinear shear current. *Proc. 14th Coast. Eng., Denmark*, 626-641.
- 29) Taylor, G. I. (1955) : The action of a surface current used as a breakwater. *Proc. Roy. Soc. A*, **231**, 466-478.
- 30) 岩垣雄一・浅野敏之 (1978) : 空気防波堤に関する研究 (第4報) - 空気防波堤の消波理論 -. 第24回海岸工学講演会論文集, 295-299.
- 31) Lord Rayleigh, O. M. (1911) : Hydrodynamical Notes. *Phil. Mag.*, **21**, 177-195.
- 32) Francis, J. R. D. & C. R. Dudgeon (1967) : An experimental study of wind-generated waves on a water current. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **93**, 247-253.
- 33) Phillips, O. M. & E. J. Katz (1961) : The low frequency components of the spectrum of wind-generated waves. *J. Mar. Res.*, **19**, 57-69.
- 34) Mitsuyasu, H. (1968) : On the growth of the spectrum of wind-generated wave (I). *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.*, Vol. 16, No. 55, 459-482.
- 35) Mitsuyasu, H. & T. Honda (1975) : The high frequency spectrum of wind-generated waves. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.*, Vol. 22, No. 71, 327-355.
- 36) Mitsuyasu, H. & K. Rikiishi (1975) : On the growth of duration-limited wave spectra. *Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ.*, Vol. 23, No. 72, 31-60.
- 37) 酒井哲郎 (1976) 沿岸の波の変形, 1976年度水工学に関する夏期研修会講義集, Bコース.
- 38) 岩垣雄一 (1977) 海岸波浪の制御, 1977年度水工学に関する夏期研修会講義集, Bコース.