

不規則波の解析方法とその応用

石 田 昭

1. 緒 言

海洋開発の進展に伴って、種々の目的に応じた海洋構造物が構築されるので、構造物の機構、寸法および設置場所などが多様化してくる。このような状況の下では単に海洋現象を正確に把握するという研究目的からだけではなく、設計上の必要性からも不規則波の知識が増々重要になってくる。

不規則波の解析方法は別して二通りあり、一つは統計的特性を調べる方法で、他の一つはスペクトル特性を調べる方法である。そのどちらも今までに詳しく論じられてきた感があり、ここではこれからスペクトル解析を手掛けようとする人のためにスペクトル解析の概念、スペクトルを利用する際の問題点およびスペクトルを応用した例などについて最近の研究から抽出して紹介することにする。

2. 不規則波の分類

一般に不規則波と呼んでいるのは、ランダムプロセス（確率過程）と考えられる現地波浪のような波と、それをシミュレートするために実験室内で成分波を合成して作った実験波の両者を含んでいる。前者は位相がランダムな成分波を合成したものと考え、後者は位相が規定された成分波を合成したものとするのが普通であるが、さらに詳しく波を分類して不規則性に基づいたランク付けをしてみると表一1のようになる。尚シミュレートした波でも風洞水槽内で発生させた風波とか、白色雑音（White Noise）を基にして作った波などはランダムプロセスと考えられる。ランク0と1は孤立波のような単独波およびその分散性のものであり、ランク2から13が連続波（Wave Train）である。非ランダムな波を時間波形の周期性、進行に伴う定形波性、空間波形の対称性および線型か非線型かによって分類すると2から8までに分かれる。このうちの2と3および1が規則波であるが、この中に各種の波動理論があって、その分類¹⁾だけでも非常に複雑になる。ランク4はフーリエ級数を利用した Stream Function Theory²⁾などが対象としている波であるが、非対称定形波（擬似規則波と呼ぶのが適当である）というのは現実には存在しない波である。しかしこの理論は不規則波と規則波の理論とを結びつける手法として意義がある。5から8が合成波法によってシミュレートしたもので擬似不規則波と呼ぶことにする。この中で5と6は周期性を持ったものであり、合成した成分波の周期の比がすべて有理数である場合に相当するが、不規則性ランクという点からは周期の比がすべて簡単な整数である場合にしたいほうがよいかもしれない。7と8は成分波の周期の比が一つでも無理数となる場合であり、周期性が存在しない。5から8の中で合成波の振幅が小さいときは、線型自由波の集合と考えられるが、振幅が大きくなると非線型自由波および拘束波などの集合となる。ランク6には二次波峯現象³⁾が含まれ、これは連続波の Soliton 分裂⁴⁾⁵⁾と考えられる*。一方完全不規則波であるランダム波のほうは定常確率過程であるかどうか、場所的均一性があるかどうか、および線型かどうかによって分類すると9から13に分類される。ランク9と10は定常（Stationary）、かつ均一（Homogeneous）の場合であるが、線型自由波の集合と考えられる9だけが Gaussian Process となって周波数スペクトルだけで（ただし波向を考えないものとして）プロセスを完全に表示することができる。非線型性が強くなると Non Gaussian Process となり、周波数スペクトルだけでは不十分であり、波数周波数スペクトルとかバイスペクトルなどの高次スペクトルが必要になってくる。ラン

*単独波の場合だけをSolitonであるとする意見と、連続波も含める意見、例えば再帰現象などをSolitonの特性とする意見とがある。

表一 1 不規則性に基づく波の分類

分類項目	波列性	ランダム性	時間波の周期性	波形の定形性	空間波の対称性	線型性・非線型性	摘	要	不規則性 ランク	呼称	スペクトル表示 (二次元波として)
波	単独波	非ランダム	非ランダム	非定形波	非対称	非線型	段波の変形, Soliton 分裂		0		
							孤立波		1	規則波	
							微小振幅波理論		2	"	$A \begin{pmatrix} \sigma \\ k \end{pmatrix}$ or $A \begin{pmatrix} k \end{pmatrix}$
							線型自由波 非線型自由波 (拘束波の集合とも考えられる)		3	"	"
							拘束波の集合 (非線型自由波とも考えられる)		4	擬規則波	"
							Stream Function Theory Potential Function Theory		5	擬不規則波	"
	連続波	ランダム	非ランダム	非定形波	非対称	非線型	合成波の各振幅が小さく, かつそれぞれの周期の比がすべて有理数		6	"	$A \begin{pmatrix} \sigma, k \end{pmatrix}$
							合成波の振幅が大きく, 周期の比がすべて有理数 or 二次波発生現象 (連続波の Soliton 分裂)		7	"	$A \begin{pmatrix} \sigma \\ k \end{pmatrix}$ or $A \begin{pmatrix} k \end{pmatrix}$
							合成波の各振幅が小さく, かつ周期の比が一つでも無理数の場合		8	"	$A \begin{pmatrix} \sigma, k \end{pmatrix}$
							合成波の振幅が大きく, かつ周期の比が一つでも無理数の場合		9	完全不規則波	$E \begin{pmatrix} \sigma, \theta \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} k \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} \sigma, k \end{pmatrix}$
							Fully Aroused Sea 周波数スペクトルが有効		10	"	$E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} \sigma, k \end{pmatrix}$
							Fully Aroused Sea 高次スペクトルも必要となる		11	"	$E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} \sigma, k \end{pmatrix}$
							水深の変化する浅水領域の波 or Fetch limited (定常状態)		12	"	$E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} \sigma, k \end{pmatrix}$
ランダム	ランダム	非定常	非エルゴード的	非線型	Duration Limited (過渡状態)		13	"	$E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta, t \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta \end{pmatrix}$		
					現実の海面状態		14	"	$E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta, t \end{pmatrix}$ or $E \begin{pmatrix} \sigma, k, \theta \end{pmatrix}$		

A: 振幅線スペクトル, E: パワースペクトル密度

ク11は定常不均一の場合で波浪推算法において Fetch Limited という概念の波とか水深の変化する浅水領域での波に相当し、12は非定常不均一の場合で推算法において Duration Limited という概念の波に相当する。現実の海面状態は非定常不均一のランク13に属するので、時間と場所を限定して近似的にエルゴート仮説を採用するのである。また波のエネルギーあるいは波高をスペクトル表示する場合には一般に非ランダム波の場合には線スペクトル表示が可能であり、ランダム波の場合には連続スペクトルとなる。ただし非ランダムの場合でもランク7, 8に属する実験波の記録からスペクトルを算出しようとするときと周期性がないので完全な線スペクトル表示にすることはできない。Aを振幅線スペクトル、Eを連続エネルギースペクトルとし、非ランダムの場合は二次元波を、ランダムの場合は三次元波を対象としてスペクトル表示法を示した。いずれの場合も自由波と拘束波の集合である波は波数 k と角周波数 σ の間の分散関係式が一義的に決まらないので、波数周波数スペクトル表示によらなければならない。ランク9の場合には σ と k が一義的に決まるので $E(k)$, $E(k, \theta)$, $E(\sigma, \theta)$ の間の変換が自由であり、ランク10では $E(\sigma, k, \theta)$ と $E(\sigma, k)$ の間の変換が自由である。変数に波向 θ を含んだスペクトルを方向スペクトルという。

3. スペクトル解析の方法

スペクトル解析に使う器械はディジタル方式、アナログ方式その中間的なハイブリッド方式とがある。ディジタル方式とはディジタルコンピューターのことで最も一般的に使用される方式である。アナログ方式⁶⁾は最近あまり使われないように思うが、その中間的なハイブリッド方式のもので便利なものがある。これは入出力がアナログ量で、計算はディジタル量でなうというもので、計算精度をそれほど必要としない(スペクトルの両端を問題にしない)ならば大量のデータを短時間に処理することができる。最も一般的方法であるディジタル方式を使う場合の算出方法にはBlackman-Tukey⁷⁾の相関関数から求める方法、FFT⁸⁾による方法、MEM⁹⁾による方法などがあるが、これらはすでにいろいろな場^{10)~22)}で述べられているので概説するにとどめ、フーリエ解析の概念、多変数スペクトル(多次元スペクトルとも呼ばれる)の解析法などを述べる。

(1) フーリエ解析の概念

変動 $\eta(t)$ が T_0 時間ごとに繰り返されるような周期的記録とすれば、 $\eta(t)$ はフーリエ級数によってつぎのように表示することができる。

$$\eta(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2\pi}{T_0} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T_0} nt \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

フーリエ解析は三角関数の直交性を利用して変動 $\eta(t)$ に含まれる調和波(周波数 $f_n = n/T_0$)の振幅のcos成分 a_n とsin成分 b_n を次式から求めようとするものである。

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) \cos \frac{2\pi}{T_0} mt dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$b_m = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) \sin \frac{2\pi}{T_0} mt dt \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots\dots\dots)$$

直交性とは上式の $\eta(t)$ に式(1)を代入して考えるとき、 $n \neq m$ となる組合せのものあるいはsinとcosの組合せのものは項別積分の値が0になって全積分値に増分を与えないということであるが、何

となくわかりにくいのが大方の本音であろう。

Barber²³⁾は指数関数や回転ベクトルを使って幾何学的、物理的観点からフーリエ解析の原理を説明している。まず指数関数を使う²⁴⁾と、

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{T_0} nt &= \frac{1}{2} \left(e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} + e^{-i \frac{2\pi}{T_0} nt} \right) \\ \sin \frac{2\pi}{T_0} nt &= \frac{1}{2i} \left(e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} - e^{-i \frac{2\pi}{T_0} nt} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

と書けるのでこれを式(1)に代入すると

$$\eta(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-i \frac{2\pi}{T_0} nt} \dots\dots\dots (5)$$

となる。式を簡単にするために負の周波数も考えることにし、 n はマイナスの値も許すことにすると、式(2)、(3)から次式が成立するのは明らかである。

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \dots\dots\dots (6)$$

したがって式(5)の右辺第3項は

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) e^{-i \frac{2\pi}{T_0} nt} = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} (a_n - i b_n) e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} \dots\dots\dots (7)$$

となり、式(5)はひとまとめにしてつぎのような簡単な式となる。

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - i b_n) e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i \theta_n} \cdot e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} \dots\dots\dots (8)$$

ただし $A_n = \frac{1}{2} |a_n - i b_n| = A_{-n} \dots\dots\dots (9)$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) = -\theta_{-n} \dots\dots\dots (10)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots\dots)$$

である。式(8)の意味することは、 $\eta(t)$ の解釈として平面上で種々の回転速度と回転方向（反時計回りを正の周波数と対応させる）を持った無数の回転ベクトルの加算されたものであると解釈することができるということである。式(5)の右辺の第2項と第3項は常に共役複素数の関係にあるから $\eta(t)$ は実数となり、時間の経過とともに実軸上を移動するだけであることがわかる。

さて、任意の回転ベクトルの動径 A_m と初期偏角 θ_m を求めるためにはベクトル全体を原点を中心として、求めたい回転ベクトルと同じ角速度 $2\pi m/T_0$ で逆方向に回転させてやればよい。なぜならベクトルの加算順序は自由であるから、図-1のようなベクトルの加算の際に第1番目に（原点の位置に）当該ベクトルを置いて考えれば、逆回転させたときにそのベクトルは時間が経過しても静止しており、他のベクトルはそれぞれ $2\pi(n-m)/T_0$ で回転する。したがって静止ベクトル以外はすべて T_0 間に正方向か負方向に必ず整数回の回転をし、平均操作で消えてしまう。これが三角関数の直交性の意味である。すなわち x 軸（実軸）座標を T_0 間平均すれば $A_m \cos \theta_m$ が得られ、 y 軸（虚軸）座標

を T_0 間平均すれば $A_m \sin \theta_m$ が得られる。ベクトル全体を $2\pi m/T_0$ の角速度で逆回転させるということは $\eta(t)$ に単位回転ベクトル $\exp(-i2\pi mt/T_0)$ を掛けることであり、数式で表わすと次式のようなになる。

$$A_m e^{i\theta_m} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) e^{-i\frac{2\pi}{T_0} mt} dt \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(8)と(11)の振幅スペクトル A は式を簡単にするためにマイナスの周波数にまで拡張したいわゆる両側スペクトルの場合であり、式(1)から(3)の a_n, b_n などは片側スペクトルである。また片側スペクトル A'_n はつぎのように表示することもできる。

$$A'_n = 2A_n = |a_n - ib_n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (A'_n e^{i\theta_n} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0} nt}) \right] \\ A'_m e^{i\theta_m} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) e^{-i\frac{2\pi}{T_0} mt} dt \quad m=1, 2, 3, \dots\dots\dots \\ A'_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) dt = A_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$A_m e^{i\theta_m}, A'_m e^{i\theta_m}$ は複素振幅スペクトル、 θ_m は位相スペクトルと呼ばれる。図-1(a)には上述した内容を説明するために簡単な例として4成分波を合成した場合を示してある。ただし式(5)の第3項に相当する複素共役成分は省略してあるから、実際の変動 $\eta(t)$ x 座標(実軸)を2倍したものである。また積分範囲は0から T_0 までとしてある。図-1(b)はベクトルを逆回転させて A_1, θ_1 を求めようとする例である。4成分とはすなわち、 $A_1=4, A_2=3, A_3=2, A_4=1, \theta_1=2\pi/3, \theta_2=\pi/6, \theta_3=\pi/2, \theta_4=\pi/3$ で、成分波周期がそれぞれ3 sec, 2 sec, 1 sec, 0.5 sec の場合である。したがって、周期 T_0 は6秒であり、 n の集合は $\{n\} = \{2, 3, 6, 12\}$ である。

スペクトル解析の原理がわかれば、多変数スペクトルの解析も非常にわかり易い。たとえば3変数で表示される変数

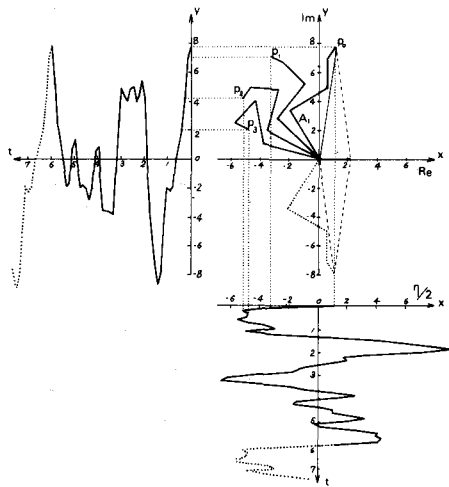


図-1(a) 回転ベクトルによる $\eta(t)$ の表示方法

$$\eta(x, y, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l,m,n} e^{i\theta_{l,m,n}} e^{i\left(\frac{2\pi}{X_0} lx + \frac{2\pi}{Y_0} my - \frac{2\pi}{T_0} nt\right)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

の場合、そのスペクトルは波数周波数スペクトル $A_{l,m,n}$ となり、次式によって表示できる。

$$\begin{aligned} A_{l,m,n} e^{i\theta_{l,m,n}} &= \frac{1}{X_0 Y_0 T_0} \int_{-X_0/2}^{X_0/2} \int_{-Y_0/2}^{Y_0/2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(x, y, t) \\ &\quad \times e^{i\left(-\frac{2\pi}{X_0} lx - \frac{2\pi}{Y_0} my + \frac{2\pi}{T_0} nt\right)} dx dy dt \dots\dots (15) \end{aligned}$$

これは $\eta(x, y, t)$ に 3 種類の逆回転 $\exp i(-2\pi l x/X_0)$, $\exp i(-2\pi m y/Y_0)$, $\exp i(2\pi n t/T_0)$ を順番に与えたものと解釈すればよい。

(2) 相関関数とスペクトルの関係

相関関数をフーリエ変換してスペクトルを算出するのが Blackman - Tukey の方法であるが、ここでは相関関数とスペクトルの関係を考えてみる。ここでは $\eta(t)$ は T_0 の周期を持っていると考えているので、相関関数 $\rho(\tau)$ もやはり周期性がある。

自己相関関数は次式で算出されるようなものである。

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) \eta(t+\tau) dt \tag{16}$$

式 (8) と式 (11) を使って $\rho(\tau)$ をつぎのように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\theta_n} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0} n(t+\tau)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\theta_n} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0} n\tau} \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) e^{i\frac{2\pi}{T_0} n\tau} dt \end{aligned} \tag{17}$$

上式の後半の積分値の平均はマイナス周波数を持つスペクトル $A_{-n} \exp(i\theta_{-n})$ であるから、式(10)の関係より $A_n \exp(-i\theta_{-n})$ となるので、次式のように簡単になる。

$$\rho(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^2 e^{i\frac{2\pi}{T_0} n\tau} \tag{18}$$

$\rho(\tau)$ のフーリエ解析をするとパワー線スペクトル S_n は次式となる。

$$S_n = A_n^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \rho(\tau) e^{-i\frac{2\pi}{T_0} n\tau} d\tau \tag{19}$$

式 (18) からわかることは自己相関関数 $\rho(\tau)$ は振幅の 2 乗を動径とする回転ベクトルを加算したものであるが、 $\eta(t)$ を表示する回転ベクトルに含まれていたような初期偏角 θ_n が存在しないということである。式 (19) からはこの自己相関関数 $\rho(\tau)$ をフーリエ変換するとパワースペクトル S_n が得られ、位相スペクトルが姿を消すことがわかる。したがって $\cos$ 変換した値 (x 座標の平均値) だけが残る、 $\sin$ 変換した値は存在しない。前述した 4 つの回転ベクトルを合成したものについて幾何学的説明をしたのが図-2 (a), (b) である。片側スペクトルを $S'_n = 2 S_n$ ($n=1, 2, 3 \dots$) とすれば、 $A_0 = 0$ (平均操作を施しておけばよい) として、

$$\rho(\tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 e^{i\frac{2\pi}{T_0} n\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A'_n)^2}{2} e^{i\frac{2\pi}{T_0} n\tau} \tag{20}$$

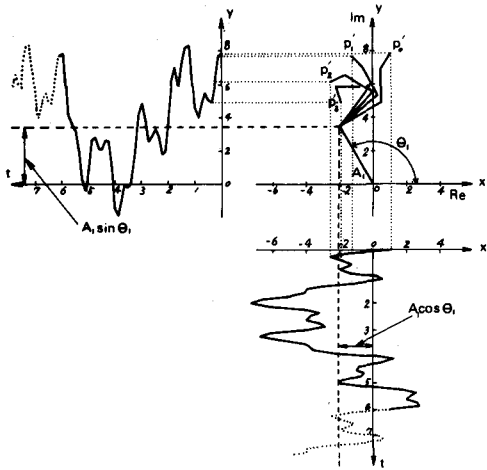


図-1 (b) $\eta(t)/2$ に逆回転ベクトルを掛けたもの

$$S_n' = \frac{(A_n')^2}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 2\rho(\tau) e^{-i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} d\tau$$

$$= \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} \rho(\tau) e^{-i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} d\tau \dots\dots\dots (21)$$

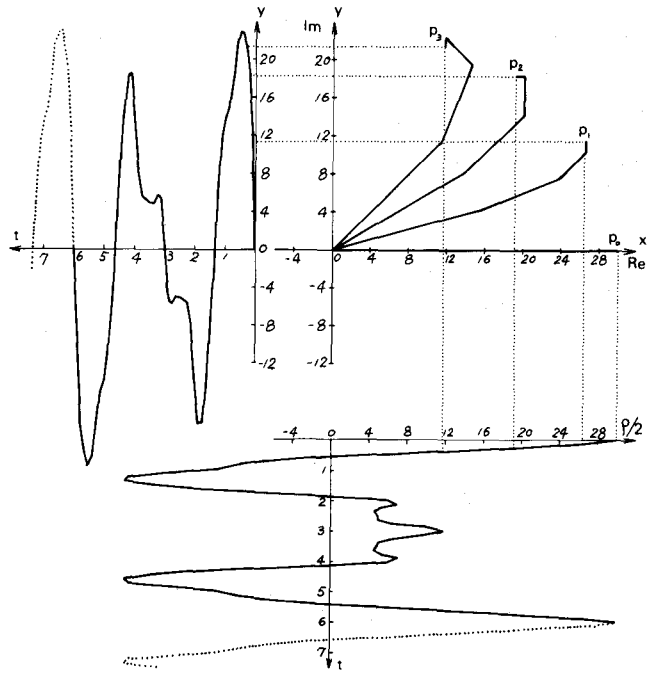


図-2(a) 回転ベクトルによる自己相関関数 $\rho(\tau)$ の表示方法

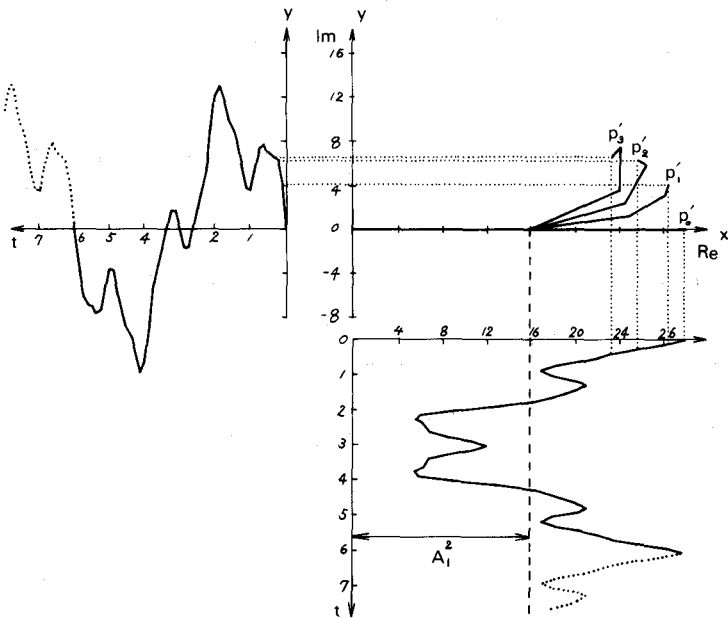


図-2(b) $\rho(\tau)/2$ に逆回転ベクトルを掛けたもの

となる。平均操作が施こしてあるから $\rho(0)$ は変動 $\eta(t)$ の分散値であり、式(18)、(20)から明らかなようにパワースペクトルの総和は分散値になる。

つぎに相互相関関数について調べる。相互相関関数は Δx だけ離れた 2 点での同時記録などを用いて相関をとるもので、いま図-3 のように設置した波高計を考える。 $\eta_2(t)$ に含まれる成分波は $\eta_1(t)$ のそれより $\Delta\theta_n$ だけ位相が遅れているとすると次式のようにかける。

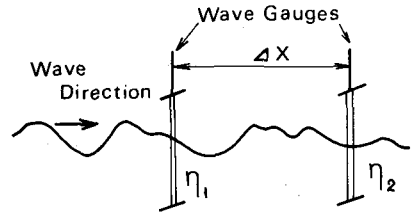


図-3 波高計の置きかた

$$\eta_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\theta_n} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0}nt} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\eta_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\theta_n - \Delta\theta_n)} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0}nt} \quad \dots\dots\dots (23)$$

相互相関関数 $\rho_{12}(\tau)$ は次式によって得られる。

$$\begin{aligned} \rho_{12}(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta_1(t) \eta_2(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta_1(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\theta_n - \Delta\theta_n)} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0}(t+\tau)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{i(\theta_n - \Delta\theta_n)} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} \cdot \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta_1(t) e^{i\frac{2\pi}{T_0}\lambda t} dt \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

上式の後半はマイナス周波数を持つ複素スペクトル $A_{-n} e^{i\theta_{-n}}$ と同じであり、式(17)から(18)への変形とまったく同様に、

$$\rho_{12}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_n e^{i(-\Delta\theta_n)} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} \quad \dots\dots\dots (25)$$

が得られる。 $\rho_{12}(\tau)$ のフーリエ変換をすると次式となる。

$$A_n B_n e^{i(-\Delta\theta_n)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \rho_{12}(\tau) e^{-i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (26)$$

相関の取りかたを逆にして

$$\rho_{21}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta_2(t) \eta_1(t+\tau) dt \quad \dots\dots\dots (27)$$

とすれば位相差 θ_n の符号が逆になる。

$$\rho_{21}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_n e^{i(\Delta\theta_n)} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$A_n B_n e^{i(\Delta\theta_n)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \rho_{21}(\tau) e^{-i\frac{2\pi}{T_0}n\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (29)$$

上式によってクロススペクトルは複素数表示となつて、2点間の位相差を偏角とするベクトル表示もできることがわかる。クロススペクトルの利用方法の一つとして成分波の波長 L_n とか波速 C_n をしらべることができる。

$$L_n = 2\pi \frac{\Delta x}{\Delta\theta_n}, \quad C_n = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta\theta_n} \cdot n \quad \dots\dots\dots (30)$$

以上は周期性のある変動 $\eta(t)$ についてのものであり、線スペクトル表示であつたが、周期性のない場合あるいはランダム波の場合にはスペクトル密度に拡張しなければならない。

(3) スペクトル密度の概念

まったくランダムで周期性がない $\eta(t)$ の一部分 $-T_0/2$ から $T_0/2$ までは繰り返されていると仮に想定すれば、これまでと同じ線スペクトル解析が行なえる。そこでこの区間を順々に増加して考えてみる。いま $-pT_0/2$ から $pT_0/2$ までは繰り返されていると想定する。 $p=2$ の場合 $\Delta f = 1/(2T_0)$ となり、一定の周波数帯にプロットされる線スペクトルの個数は2倍になる。しかるに区間が倍になつても分散値 $\rho(0)$ が増加するわけではないからスペクトルの総和は一定でなければならない。ということは各スペクトル値 A_n は半減する。 p を大きくするほど A_n の値は小さくなってしまふから線スペクトル表示の意味がなくなってしまう。そこでこのような場合は個々の振幅ではなく、周波数 f から $f+df$ 間にプロットされる微小な振幅の和と同じ効果を果す役割を持ったものを考える。この概念がスペクトル密度である。周期が pT_0 であれば線スペクトルの間隔は $\Delta f = 1/(pT_0)$ であるから、 df 間には $df/\Delta f = df \cdot pT_0$ 個の微小ではほぼ同じような値を持った線スペクトル値がプロットされる。個々のスペクトル値は振幅ならば式(11)、パワーならば式(19)となるから、いまパワー スペクトル密度 $E(f)$ を誘導することにとすると

$$S_n = A_n^2 = \frac{1}{pT_0} \int_{-pT_0/2}^{pT_0/2} \rho(\tau) e^{-i\frac{2\pi}{pT_0}n\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (31)$$

となるので、この式で $n=f/\Delta f = fpT_0$, $pT_0 \rightarrow \infty$ と置き、 $S_n \cdot df \cdot pT_0$ が $E(f) df$ に等しいと置けば

$$E(f) = S_n pT_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。 $\rho(\tau)$ は当然次式のようになる。

$$\rho(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) \eta(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad \dots\dots\dots (33)$$

$\rho(\tau)$, $E(f)$ は偶関数であるから、片側変換だけでもよい。また片側スペクトルを $E'(f) = 2E(f)$ と定義すれば、式(32), (33) から次式が得られる。

$$E'(f) = 4 \int_0^\infty \rho(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\rho(\tau) = \int_0^\infty E'(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad \dots\dots\dots (35)$$

数式の上からは両側スペクトル (A_n , S_n , $E(f)$ など) のほうが簡潔であるが実用上は片側スペクトル (A'_n , S'_n , $E'(f)$) を使うことが多い。ただし注意を要するのは両側スペクトル S_n および $E(f)$ の場合でも周波数がプラスの部分しか示していない場合が多いことである。その場合スペクトルの総和は分散値 $\overline{\eta^2}$ の半分である。すなわち、

$$\int_0^\infty E(f) df = \frac{\overline{\eta^2}}{2} \quad \dots\dots\dots (36)$$

となる。後述する Blackman-Tukey⁷⁾ の方法は両側スペクトルで正の周波数範囲だけを算出したものであり、なかには S_n の値で紹介されているもの^{11), 17), 21)} などもある。

(4) 一変数スペクトルの解析

相関関数をフーリエ変換してスペクトルを求める方法は Blackman-Tukey⁷⁾ によって与えられたもので、FFT 法⁸⁾ が開発されるまではデジタル方式のスペクトル解析はほとんどこの方法で行なわれていた。ここではスペクトルの算出方法だけを簡単に述べる。

Δt ごとにサンプリング化された 2 点での変動を $\eta_1(n)$, $\eta_2(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots, N$ とし、平均操作をして $\overline{\eta_1(n)} = 0$, $\overline{\eta_2(n)} = 0$ となっているものとする。自己相関関数 $\rho_{11}(m)$, $\rho_{22}(m)$, 相互相関関数 $\rho_{12}(m), \rho_{21}(m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) として次式によって求める。ただし $\rho_{22}(m)$ は省略する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11}(m) &= \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} \left\{ \eta_1(k) \cdot \eta_1(k+m) \right\} - \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} \eta_1(k) \cdot \frac{1}{N-m} \sum_{k=m+1}^N \eta_1(k) \\ \rho_{12}(m) &= \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} \left\{ \eta_1(k) \cdot \eta_2(k+m) \right\} - \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} \eta_1(k) \cdot \frac{1}{N-m} \sum_{k=m+1}^N \eta_2(k) \\ \rho_{21}(m) &= \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} \left\{ \eta_2(k) \cdot \eta_1(k+m) \right\} - \frac{1}{N-m} \sum_{k=1}^{N-m} \eta_2(k) \cdot \frac{1}{N-m} \sum_{k=m+1}^N \eta_1(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M$$

相互相関 ρ_{12} , ρ_{21} は対称性を持たないので直接フーリエ解析すると、二組の $\cos$ 変換, $\sin$ 変換を求めなければならない。そこで in phase correlation ρ_c と out of phase correlation ρ_q をつぎのように定義する。

$$\rho_c = \frac{1}{2} (\rho_{21} + \rho_{12}), \quad \rho_q = \frac{1}{2} (\rho_{21} - \rho_{12}) \quad \dots\dots\dots (38)$$

ρ_c は偶関数, ρ_q は奇関数となるから $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_c$ は $\cos$ 変換だけでよく, ρ_q は $\sin$ 変換だけを行えばよい。式を簡潔にするために Hanning のラグウィンドウ $H(k) = (1 + \cos \pi k/M)/2$ を使い式(34)を和の表示に直して次式を得る。積分を台形の面積として求めている。

$$\left. \begin{aligned} E'_{11} \left(\frac{n}{2M\Delta t} \right) &= 4 \left\{ \frac{1}{2} \rho_{11}(0) + \sum_{k=1}^{M-1} \rho_{11}(k) \left(1 + \cos \frac{\pi}{M} k \right) \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{M} kn \right) \right\} \Delta t \\ &= 2 \left\{ \rho_{11}(0) + \sum_{k=1}^{M-1} \rho_{11}(k) \left(1 + \cos \frac{\pi}{M} k \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{M} kn \right) \right\} \Delta t \\ C'_{21} \left(\frac{n}{2M\Delta t} \right) &= 2 \left\{ \rho_c(0) + \sum_{k=1}^{M-1} \rho_c(k) \left(1 + \cos \frac{\pi}{M} k \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{M} kn \right) \right\} \Delta t \\ Q'_{21} \left(\frac{n}{2M\Delta t} \right) &= 2 \left\{ \rho_q(0) + \sum_{k=1}^{M-1} \rho_q(k) \left(1 + \cos \frac{\pi}{M} k \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{M} kn \right) \right\} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

上式のパワースペクトル密度は片側スペクトルである。 C'_{21} は C_0 スペクトル Q'_{21} は Quadrature スペクトルである, 両者をつぎのように複素数表示したものを一般にクロススペクトルと呼んでいる。

$$E'_{21} = C'_{21} + i Q'_{21}$$

また位相スペクトル θ_{21} と Coherency R_{21} は次式で求められる。

$$\theta_{21} \left(\frac{n}{2M\Delta t} \right) = \tan^{-1} \frac{Q'_{21}}{C'_{21}} \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$R_{21} \left(\frac{n}{2M\Delta t} \right) = \sqrt{\frac{(C'_{21})^2 + (Q'_{21})^2}{E'_{11} \cdot E'_{22}}} \quad \dots\dots\dots (42)$$

(5) 二変数スペクトルの解析

ここまでのスペクトルは変数が一つであったが, つぎに二変数スペクトルの解析を述べる。二変数とはいろんな形式が考えられるが, たとえば a) SWOP²⁵⁾ のスペクトルでは波数 (k_x, k_y) , b) バイスペクトル^{26)~32)} では二組の角周波数 (σ_1, σ_2) , c) 水槽内でシミュレートした風波のような場合なら波数周波数 (k, f) ³³⁾ である。いずれの場合も二変数自己相関関数が得られれば, その後の解析方法は類似している。それぞれの場合の定義式を書くにつぎのようである。

a) 波数スペクトルの場合

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau_x, \tau_y) &= \lim_{X_0, Y_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{X_0 Y_0} \int_{-X_0/2}^{X_0/2} \int_{-Y_0/2}^{Y_0/2} \eta(x, y) \cdot \eta(x + \tau_x, y + \tau_y) dy dx \\ E(k_x, k_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau_x, \tau_y) e^{-i(k_x \tau_x + k_y \tau_y)} d\tau_x d\tau_y \\ \rho(\tau_x, \tau_y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(k_x, k_y) e^{i(k_x \tau_x + k_y \tau_y)} dk_x dk_y \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

b) バイスpekトルの場合

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau_1, \tau_2) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t) \cdot \eta(t + \tau_1) \cdot \eta(t + \tau_2) dt \\ D(\sigma_1, \sigma_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\sigma_1 \tau_1 + \sigma_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ \rho(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(\sigma_1, \sigma_2) e^{i(\sigma_1 \tau_1 + \sigma_2 \tau_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

c) 波数角周波数spekトルの場合

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau_t, \tau_x) &= \lim_{T_0, X_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0 X_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \eta(t, x) \cdot \eta(t + \tau_t, x + \tau_x) dx dy \\ E(\sigma, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau_t, \tau_x) e^{-i(k\tau_x - \sigma\tau_t)} d\tau_t d\tau_x \\ \rho(\tau_t, \tau_x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\sigma, k) e^{i(k\tau_x - \sigma\tau_t)} d\sigma dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

ここで、c) の場合について具体的に片側spekトル $E'(\sigma, k)$ を算出する方法を述べる。式(45)より

$$\left. \begin{aligned} E'(\sigma, k) &= 2E(\sigma, k) = 4 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau_t, \tau_x) e^{-i(k\tau_x - \sigma\tau_t)} d\tau_t d\tau_x \\ \rho(\tau_t, \tau_x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E'(\sigma, k) e^{i(k\tau_x - \sigma\tau_t)} d\sigma dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

となり、 t については Δt ごとに、 x については Δx ごとに離散化されたものとして上式の二重積分を切口が平面である四角柱の体積と考えて加算表示に置きかえる。また式を簡潔にするために Hanning のラグウィンドウを二次元に拡張した次式

$$H(l, k) = \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi l}{M_t} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi k}{M_x} \right) \dots\dots\dots (47)$$

を使用するとつぎのような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E' \left(\frac{\pi n}{M_t \Delta t}, \frac{\pi m}{M_x \Delta x} \right) &= 4 \left\{ \sum_{l=1-M_t}^{M_t-1} \left\{ \frac{1}{2} \rho(l, 0) \left(1 + \cos \frac{\pi l}{M_t} \right) \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi l n}{M_t} \right) \right. \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{M_x-1} \rho(l, k) \left(1 + \cos \frac{\pi l}{M_t} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi k}{M_x} \right) \frac{1}{4} \cos \left(\frac{\pi k m}{M_x} - \frac{\pi l n}{M_t} \right) \right\} \Delta t \Delta x \\ &= \sum_{l=1-M_t}^{M_t-1} \left\{ \rho(l, 0) \left(1 + \cos \frac{\pi l}{M_t} \right) \cos \left(\frac{\pi l n}{M_t} \right) + \sum_{k=1}^{M_x-1} \rho(l, k) \left(1 + \cos \frac{\pi l}{M_t} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

$$\times (1 + \cos \frac{\pi k}{M_x}) \cos (\frac{\pi k m}{M_x} - \frac{\pi l n}{M_t}) \} \Delta t \Delta x$$

$$n = -M_t, -(M_t + 1), \dots, 0, 1, 2, \dots, M_t, m = 0, 1, 2, \dots, M_x$$

上式は二変数片側スペクトルを与えるもので、a), b) の場合にも使用できる。ただしバイスペクトル $D(\sigma_1, \sigma_2)$ の場合には

$$\begin{aligned} D(\sigma_1, \sigma_2) &= D(\sigma_2, \sigma_1) = D(\sigma_1, -\sigma_1 - \sigma_2) = D(-\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1) \\ &= D(\sigma_2, -\sigma_1 - \sigma_2) = D(-\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2) \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

のような対称関係があるから、 (σ_1, σ_2) 平面の第1象限の半分だけを算出するだけでよい。

不規則波の分類でランク6に相当する二次波峯現象³⁾でも二変数スペクトルが算出されているが、図-4のように主峯と一緒に進行するような移動座標系からながめると斜線部分の $\eta(t', x)$ に周期性があるので、この場合のスペクトルは振幅線スペクトルとして求められる。ただし移動座標系からみた波形をとるということは、ある場所 x での時刻 t' の取り方を、主峯が到達した時から取るということすなわち

$$t' = t - \frac{x}{C_m} \dots \dots \dots (50)$$

と置換することであるから、

$$e^{i(kx - \sigma t)} = e^{i\{kx - \sigma(t' + \frac{x}{C_m})\}} = e^{i\{(k - \frac{\sigma}{C_m})x - \sigma t'\}} \dots \dots \dots (51)$$

から明らかなように、移動軸からみた波数 k' と移動しない軸からみた波数 k との間につきの関係が存在する。

$$k' = k - \frac{\sigma}{C_m} \dots \dots \dots (52)$$

ここで C_m は主峯の平均速度である。

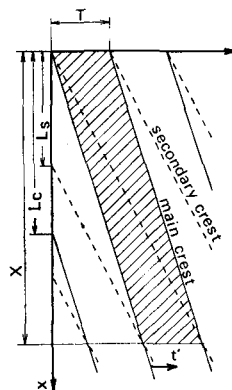


図-4 移動座標系 (t', x) の説明 (文献 3) より

(6) FFTによる解析

FFT⁸⁾ (Fast Fourier Transform) は式(22), (23)の複素振幅スペクトル $A_n \exp i\theta_n$, $B_n \exp i(\theta_n - \Delta\theta_n)$ を巧妙な方法で迅速に算出する方法である。一変数のパワースペクトルならば算出した複素振幅スペクトルと共役のものを掛け合わせれば、Auto でも Cross でもパワー線スペクトルとして求めることができる。あとはスペクトル密度に直して適宜移動平均を取って滑らかにすればよい。また多変数スペクトルであっても一変数スペクトルとまったく同じ方法で求められる。すなわち、

$$\begin{aligned} A(\frac{\pi n}{N_t \Delta t}, \frac{\pi m}{N_x \Delta x}) &= \sum_{l=-N_t}^{N_t-1} \sum_{k=0}^{N_x} \eta_{l,k} \exp i(\frac{\pi m k}{N_x} - \frac{\pi n l}{N_t}) \\ &= \sum_{l=-N_t}^{N_t-1} (\underbrace{\sum_{k=0}^{N_x} \eta_{l,k} \exp^{-i\frac{\pi m k}{N_x}}}_{A_{l,m}}) \cdot \exp i\frac{\pi n l}{N_t} = \sum_{l=-N_t}^{N_t-1} A_{l,m} \exp i\frac{\pi n l}{N_t} \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

となるから一変数のFFTを $N_x + 2N_t$ 回繰り返せば二変数振幅スペクトルが直ちに得られる。変動 $\eta_1(t, x)$ と $\eta_2(t, x)$ について別々に解析を行なうと、 η_1 の線スペクトルに η_2 の共役線スペクトルを掛ければ二変数クロススペクトルも容易に求められる。一方 K.S. Lii³⁰⁾ らはバイスペクトル解析に応用して次式によって $D(n, m)$ を求めている。

$$D(n, m) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N} A_n \cdot A_m \cdot A_{-n-m} \dots\dots\dots (54)$$

なお FFTは一変数および二変数の場合ともに大型計算センターのSSLに組込まれているので、自由に使用できるようになっている。

4. スペクトルを利用する際の問題点

スペクトルを海岸工学に利用する際に問題になってくるのは波浪の非線型効果の影響と構造物が大型化した場合の影響について配慮しなければならないことである。線型の問題ならば調和解析の手法によって統一的に問題を処理することができるが、非線型性に関する問題を解析するための統一的手法は現在までのところ存在しない。たとえばよく使用される摂動法は弱非線型の場合にのみ有効であり、波の分類でいえば定形波に属するものだけに適用することができる。また定形波であっても浅水領域に進入して非線型性が強くなった場合には次数の高い摂動解が必ずしも精度が良くなるとは限らないことが Dean³⁴⁾ によって報告され、Dean's Error として知られるようになっている³⁵⁾。Dean は運動学的表面条件の誤差 $\epsilon_1(x)$ と動力学的表面条件の誤差 $\epsilon_2(x)$ を次式で定義し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} - \frac{w(x)}{u(x)-C} &= \epsilon_1(x) \\ \eta(x) + \frac{1}{2g} \left[(u(x)-C)^2 + w(x) \right] - \bar{Q} &= \epsilon_2(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

ϵ_1 と ϵ_2 の一波長間の rms (root mean square) 値を各種波動理論と Stream Function Theory (S. F. T.) について計算した。上式で $\bar{Q}$ はベルヌーイの定数であるが、 ϵ_2 の一波長間の平均が 0 となるように決めている。その結果によると、浅水領域では Solitary 波と S. F. T. が正確に $\epsilon_1(x) \equiv 0$ となること、 $h/T^2 < 0.2$ ではストークス波、クノイド波より Airy 波のほうが ϵ_1 と ϵ_2 の rms 値が小さくなること、クノイド波の第 2 近似解は第 1 近似解より誤差が大きくなることなどを見出し、砕波波形に近い場合には孤立波理論が最適であると述べている。

さらに強い非線型性を示すようになると、成分波間の非線型共鳴干渉という現象が生じ、振幅がもはや一定ではなく進行と共に変化してしまう。図-5はPhillips³⁶⁾の示したもので3つの波の間でのエネルギーの授受の様子を模式的に示したものである。このように振幅が周期性をもって時間的に変化することは周波数の類似した2つの成分波が存在すると考えれば説明できるし、場所的に変化することは波数の類似した2つの波を考えれば説明できる。このように波のエネルギーが波数周波数平面上に分布していると考えことにすれば共鳴干渉の生じているような非線型性の強い波でも処理することができるという考えかたが著者ら³³⁾によって波数周波数スペクトル解析が行なわれる理由である。

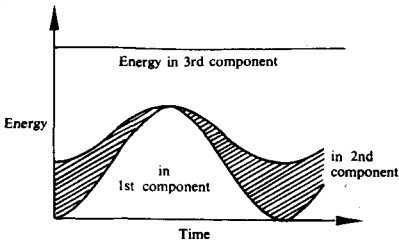


図-5 非線型共鳴干渉によるエネルギー授受の模式図 (phillips³⁹⁾より)

不規則波の分類でランク 6 に相当する二次波峯現象³⁾はまさしくこの例であり、二次波峯発生間隔 X (または Soliton の再帰間隔で、波長の数倍になる) ごとに調和波の振幅が周期的に変化する現象である。この現象を重調和解析して求めた波数周波数振幅線スペクトルの一例が図-6 であるが、ストークス波を構成するような成分波群と、2 倍周波数を持つ自由波 (これを Fontanet Wave とも呼んでいる³⁷⁾ ³⁸⁾) およびこの自由波と基本波との二次干渉によって生ずる和と差の波 (波数と周波数の和と差をとってできるような波) が有意的成分波であることがわかる。この Fontanet Wave の発生する理由は Phillips³⁹⁾ の非線型共鳴干渉理論から説明することができる。このようにエネルギーが波数周波数平面上で分布しているということは、とくに大型構造物に作用する外力などを考えるときに重要になってくる。図-7

は風洞水槽内での風波の時空間記録 $\eta(t, x)$ から波数周波数スペクトルを求めてスペクトルの等値線で示した著者らの研究によるもので、かなり広くエネルギーが分布していることがわかる。図-8 の白丸は f を一定としておいて最大エネルギー密度を示す波数をプロットしたもので、黒丸

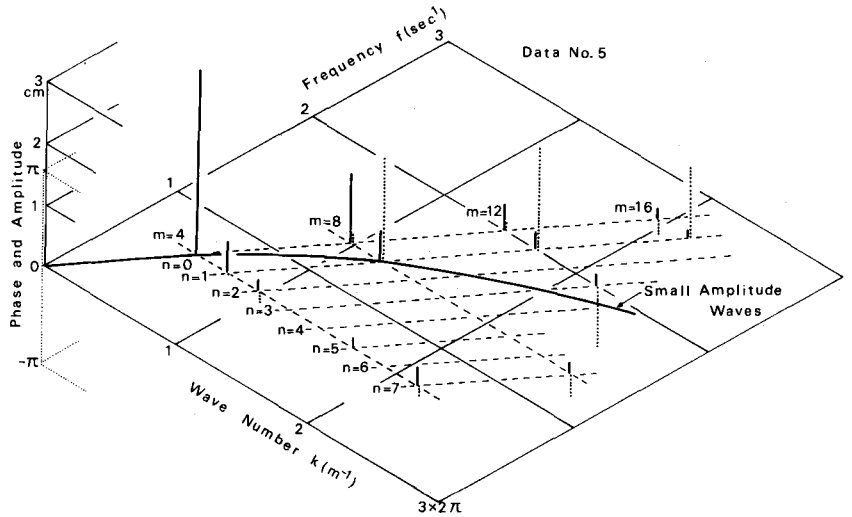


図-6 二次波峯現象の波数周波数線スペクトル表示 (文献 3) より)

は逆に波数を一定としておいて最大エネルギー密度を示す周波数を示したものである。細い折れ線は周波数クロススペクトルから 2 点間の位相差を求めて波長を算出し、波数に換算したものを示してある。折線と白丸はほぼ一致していることがわかる。この図をみると例えば周期 1 秒の波は平均的には $k = 0.013 \times 2\pi$ (約波長 77 cm) の波数であるが、77 cm の波長の波は平均的に $f = 1.5$ cps (周期約 0.66 秒) であって、1 秒よりも早く繰り返される。したがって大型構造物 (船舶も含めて) に最も過酷な応力を与える波長の繰り返し周期を求めるときに周波数クロススペクトルあるいは定形波理論 (ランク 2, 3) などから求めた周期を使って計算すると危険になることもあるわけである。

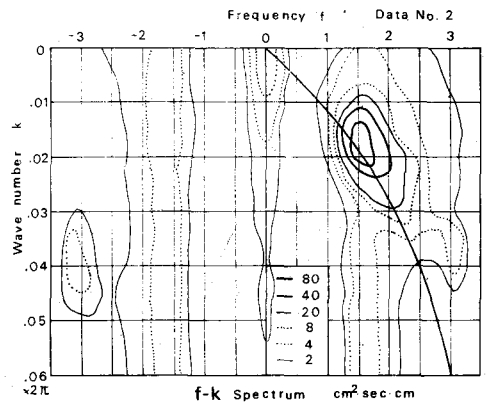


図-7 風波の波数周波数エネルギースペクトル (文献 33) より)

構造物が大型化する時の問題点としては、その他に大口径円柱に作用する力を回折波理論を適用して算出する研究⁴⁰⁾ ⁴¹⁾とか、取水口の天蓋板のような平板に作用する波力を求める研究などがある。前者の場合は非線型効果も考慮されているが、後者では現在のところ線型理論としてだけ研究されている。

W. W. Durgin ら⁴²⁾ は板の長さが大きくなるにつれて圧力係数が小さくなることを報告している。図-9 は波長と板長との比に対する圧力係数 C_m' の関係を示したもので、 d' は水深と板長との比、 s' は板の設置水深と波長との比である。

5. スペクトルの応用例

スペクトルを利用して解析されるテーマとしては、成分波の波速を求める問題、方向スペクトルの問題、構造物と波との動的応答の問題、反射現象を取扱った問題、波の越波遡上現象に適用したもの、あるいは波波推算法など非常に多岐にわたっておりそれぞれ多数の研究がなされている。ここではこれらの問題の中からスペクトルの応用範囲を広げるための示唆に富んだ研究例を紹介してみよう。

(1) スペクトルの場所的分布

E. Waddell⁴³⁾は自然海滨における打上げ波の特性についてスペクトルを利用して研究している。図-10の横軸は汀線に直角方向の距離が示している。S₀は入射波高を検出するための波高計設置位置を示し、S₁からS₄は打上げ波の厚さを調べるために間隔1m毎に設置した4台の容量式水位計の設置場所を示している。入力波のスペクトルには3つのピークがあり、A₁は風波および沿岸砂州上での砕波によって作られる二次擾乱、A₂は入力波のうねり、A₃はビート型的水位変動である。一方斜面基部（S₁）ではB₁、B₂、B₃のピークがあり、この図からみると入力波と打上げ波との基本的関係はA₂→B₂であり、低周波側へエネルギーが非線型的に移行している。A₃、B₃のようなビート型変動についてはS₀とS₁での記録のクロススペクトル解析を行なった結果図-11に示すようにこの周波数領域ではCoherenceが高く、位相差が存在しないことがわかる。したがって海岸に腹をおく定常波が存在し、サーフビートとは違う性質のものであらうと述べている。一般に遡上波と引き波間の相互干渉は斜面基部だけに影響を与え、上部へは伝わらないことがわかる。

(2) スペクトルの時間的分布

W. H. Munk⁴⁴⁾はカリフォルニア沿岸のサンクレメンテ島沖合に3台の水圧式波高計を設置してうねりの観測を行ない、そのうねりがいつ、どこで発生したものかをスペクトルを利用して算出している。図-12は横軸に日付をとり、縦軸に周波数をとって、スペクトルを示したものである。斜めの実線は各時刻のスペクトルピークを結んだものであるが、低周波数成分ほど早く到着し、高周波成分が遅れて次々に到着する様子がわかる。この一連の波を発生させたStormの風域と吹送時間は進行する距離と時間に較べて小さいものとし、発生点までの距離を x 、発生時刻を t_0 とする。或る周波数成分のエネルギーが伝播される群速度 C_g は線型深海波として次式を得る。

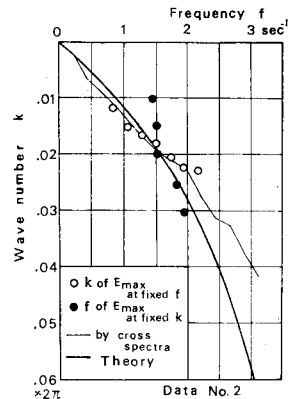


図-8 波数軸および周波数軸に沿ったエネルギーピーク値の表示 (文献 33) より)

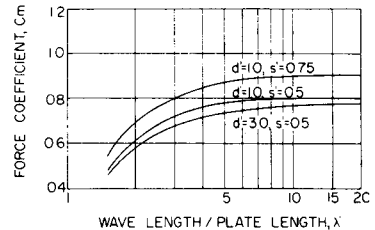


図-9 大型構造物に作用する波の圧力係数 (Durgin らより)

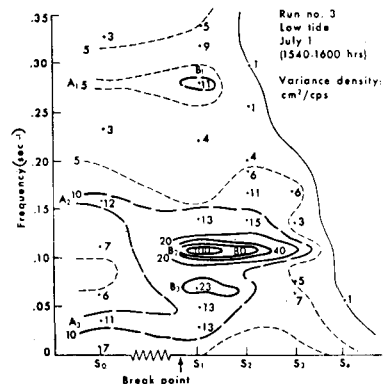


図-10 スペクトルの空間分布 (Waddell より)

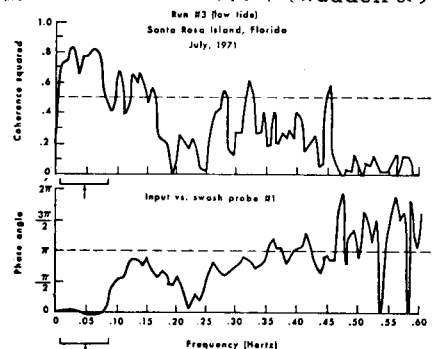


図-11 入力波と斜面基部での水位記録とのクロススペクトル解析による結果 (Waddell より)

$$C_g(f) = \frac{x}{t-t_0} = \frac{1}{2} C = \frac{g}{4\pi f} \quad \dots\dots\dots (56)$$

これより f を求めて微分すると次式を得る。

$$\frac{df}{dt} = \frac{g}{4\pi x} \quad \dots\dots\dots (57)$$

すなわち図中の斜線の勾配 df/dt は $g/(4\pi x)$ を示しているの、勾配の値から発生点までの距離 x を知ることができる。この斜線が横軸と交差する点は、式56で $f=0$ とすると、Stormの発生時刻 t_0 を示すことがわかる。これは周波数0の波は無限大の群速度を持つので瞬間に到着すると考えても推測されよう。図中の Δ は距離 x を地球の中心点に対する角度で示したもので、 θ はクロススペクトル解析から求めた波向を示している。これによって南極近くの暴風圏からはるばる地球円周の1/3以上も旅したうねりを検出している。

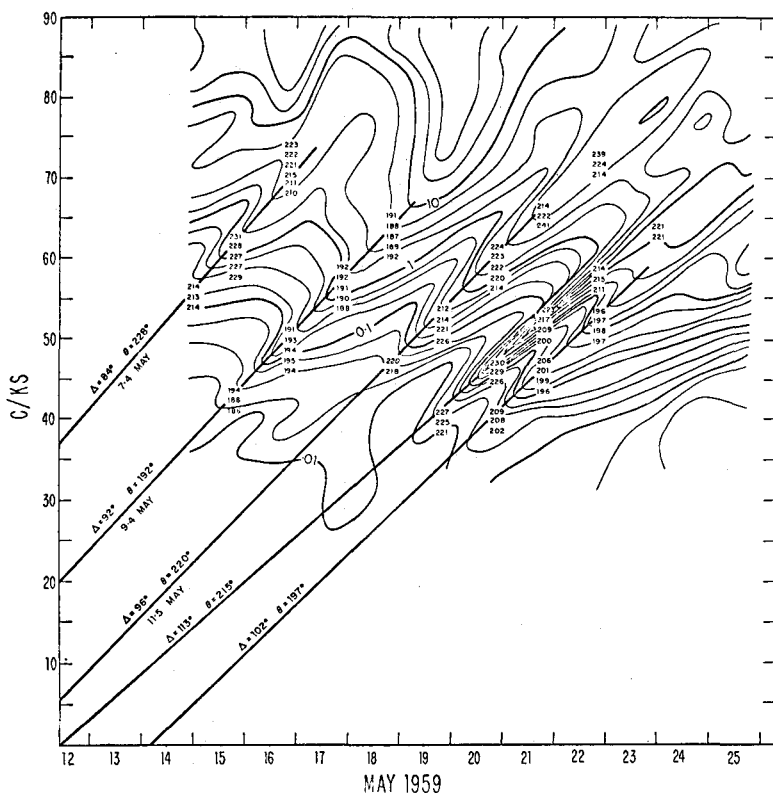


図-12 スペクトルの時間分布 (Munk ら⁴⁴⁾ より)

(3) 反射現象への応用

O. S. Madsen ら⁴⁵⁾ は粗い斜面上でのエネルギー消散の研究を行なっているが、その中で反射率を測定するのに Healy の方法を修正した方法を使っている。Healy の方法は水路に沿って波高の分布を調べ、最大値 H_{max} と最小値 H_{min} から反射率を求める方法であるが、図-13の白丸で示すように波高分布に散らばりができて正確な反射率が得られない。この原因として二次波が発生するために、とくに節の位置での波高測定に矛盾が生じるためだとしている。したがって一旦各場所での波形を調和解析して基本波の振幅だけをプロットすると黒丸で示すように散らば

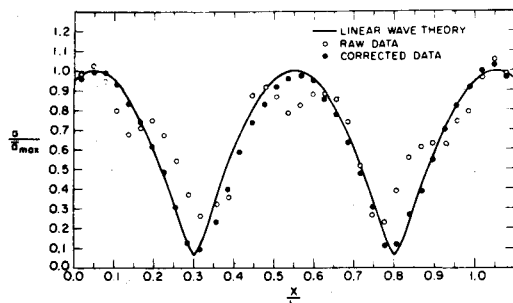


図-13 Healy の方法による反射率測定と調和波振幅による方法との比較 (Madsen ら⁴⁵⁾ より)

りがなくなって正確な反射率が得られる。これはスペクトルの応用というほどのものではないが、つぎに風波の反射現象について、著者ら^{46) 47)}の研究を述べる。風波のような連続スペクトル構造を持つランダム波の反射現象ではスペクトルの上に図-14のような規則性のある ripple が出現する。図-14では点線が入射波のスペクトル $E_i'(f)$ であり、実線が入射波と反射波が混在する場合のスペクトル $E_z'(f)$ を示している。両者の比は

$$\frac{E_z'(f)}{E_i'(f)} = 1 + r^2(f) + 2r(f) \cos\left(2\pi f \frac{2d}{C(f)}\right) \dots\dots (58)$$

となることが線型理論として得られる。 d は反射壁と波高計までの距離であるから、反射壁に近い所ではゆったりとした ripple であり、離れるほど短周期の ripple となる。図-15はこの関係を示したもので、 f_p 、 L_p は最大エネルギーを持つ周波数と線型理論によるその波長を示す。 n は低周波数側から番号を付けた ripple の峰を示す番号である。この現象は距離 x が成分波の腹に当たるとき $\cos$ の位相が $2n\pi$ になり、節に当たるときには $(2n+1)\pi$ になるということである。したがって波長の長い $f=0$ 付近では、式58の値はかならず 1.0 より大きくなっている筈である。Waddell⁴³⁾の現地観測結果で述べられている長周期のビート性水面変動もこうした反射現象であった。スペクトルの上に見られる ripple だけを取り出してその振幅を計ると反射率 $r(f)$ を得ることができる。B. P. Bogert ら⁴⁸⁾は地震波の反射率を求めるための研究において $r(f)$ を取り出すのに スペクトル $E_z'(f)$ をさらにスペクトル解析したものを cepstrum と名付けて算出している。水の波では分散性があること、反射率が周波数に強く依存することなどから、直接 cepstrum を利用することはできないようである⁴⁹⁾。また合田ら⁵⁰⁾は FFT を使って反射波と入射波を分離する方法を提案している。もちろん反射率も非線型性が強くなると波数と周波数の関数と考えられるので、図-7のような波数周波数スペクトルを算出し、マイナス周波数成分(反射波)をプラス周波数成分で除したものを $r(f, k)$ とする必要がある。

6. あとがき

この小論はこれからスペクトル解析を手掛けようとする人の理解を少しでも早める役に立てればという願いと、スペクトルの応用面を広げるための研究のきっかけとなればとの願いから著者の能力の限度内でまとめたものであり、各所にも不足なさを感ずる人も多いと思う。その時は他の成書を繙いて頂くことにして、著者の独断、思い違いなどを指摘して頂ければ望外の喜びである。

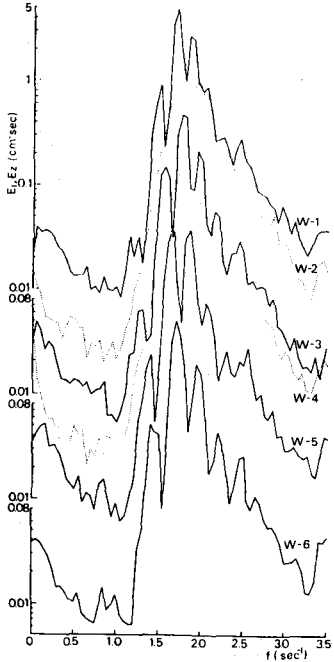


図-14 反射がある場合のスペクトルに現われる ripple (文献 46) より)

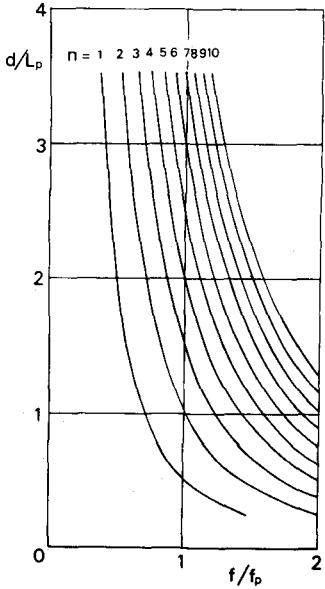


図-15 ripple の間隔の場所による変化 (文献 47) より)

参 考 文 献

- 1) Le Méhauté : An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves, Springer - Verlag, 1976, p.315
- 2) Dean, R. G. : Stream Function Representation of Nonlinear Ocean Waves, J. G. R., Vol. 70, No. 18, 1965, pp. 4561 ~ 4572.
- 3) 細井正延・石田昭 : 二次波峯現象における非線型性の解析, 第17回海講論文集, 1970, pp. 47 ~ 52.
- 4) 石田昭・石田和生 : 浅水領域における波形の分裂現象—二次波峯現象と Soliton について—第 20回海講論文集, 1973, pp. 403 ~ 409.
- 5) 石田昭 : 浅水領域での分裂波 Soliton の特性について, 第22回海講論文集, 1975, pp. 41 ~ 46.
- 6) 岩垣雄一・樋口明生・柿沼忠男・宮井 宏 : 海岸波浪の周波数分析器による解析, 京大防災研年報第9号, 昭和41, pp. 703 ~ 713.
- 7) Blackman, R. B. and J. W. Tukey : The Measurement of Power Spectra, Dover, 1958, p.190.
- 8) Cooley, J. W., J. W. Tukey : An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Mathematics of Computation, Vol. 19, 1965, pp. 297 ~ 301.
- 9) Ulrych, T. J. : Maximum Entropy Power Spectrum of Truncated Sinusoids, J. G. R. Vol. 77, 1972, pp. 1396 ~ 1400.
- 10) 柿沼忠男 : 海面の不規則性について, 土木学会関西支部昭和47年度講習会テキスト、水工学におけるランダム事象と最適化に関する諸問題, pp. 29 ~ 47.
- 11) 土屋義人 : 波浪観測とその解析, 1971年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, B, 8, p. 32.
- 12) 小森修蔵 : スペクトル解析の海洋工学への応用, 土木学会誌 Vol. 54, No 5, 1969, pp. 65 ~ 74.
- 13) 日野幹雄 : MEM・最大エントロピー法による新しいスペクトルの計算法, 土木学会誌 Vol. 61, No 7, 1976, pp. 50 ~ 54.
- 14) 日野幹雄 : データ処理の手法, 応用水理学下Ⅱ, 数値解析・水文観測, 丸善昭和46年, pp. 81 ~ 137.
- 15) 磯部孝編 : 相関関数およびスペクトル, 東京大学出版会, 1968, p. 455.
- 16) 富永政英 : 海洋波動, 基礎理論と観測成果, 共立出版, 1976, p. 591.
- 17) Kinsman, B : Wind Waves, Prentice-Hall, 1965, p. 676.
- 18) 光易恒 : 構造物に作用する不規則な波の解析, 第19回海講, 波と構造物に関するシンポジウムテキスト, 土木学会海洋工学委員会 pp. 1 ~ 14.
- 19) 吉澤正 : 高速フーリエ変換とその応用, 計測と制御 Vol. 8, No 12, 昭和44年, pp. 43 ~ 52.
- 20) 岩垣雄一 : 波浪の計測と解析, 土木工学における動的現象の計測とデータ処理, 土木学会関西支部昭和42, pp. 68 ~ 85.
- 21) 土岐憲三 : 動的現象の計測とスペクトル解析, 同上, pp. 41 ~ 53.
- 22) 高橋智晴・鈴木禧実・中井徹也 : 波高計による観測データの処理方法, 港湾技研資料 No 39, 昭和42年, pp. 7 ~ 33.
- 23) Barber, N. F. : Experimental Correlograms and Fourier Transforms, Pergamon Press, 1961, p. 136
- 24) 堀川明 : ランダム変動の解析, 共立出版, 昭和40年, p. 220.
- 25) Cote, L. J. et al : The Directional Spectrum of a Wind Sea as Determined from Data Obtained by the Stereo Wave Observation Project, Papers, N. Y. U., Coll. Eng. Vol. 2, No 6, 1960, p. 88.
- 26) Hasselmann, K., Munk, W. and MacDonald, G. : Bispectra of Ocean Waves, Proceeding of the Symposium on Time Series Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1963, pp. 125 ~ 139.

- 27) 柿沼忠男・石田昭・門司剛至 : 記録にもとづく海岸波浪の非線型性の解析, 第15回海講講演集, 1968, pp. 73 ~ 79.
- 28) Chang, M. S. : Mass Transport in Deep-Water Long-Gusted Random Gravity Waves., J. G. R. Vol. 74, No 6, 1969, pp. 1515~1536.
- 29) Houmb, O. G. : Spectra and Bispectra of Ocean Waves, Proc. 14th Conf. on Coastal Eng. 1974, pp. 301 ~ 320.
- 30) Lii, K. S., M. Rosenblatt and C. Van Atta : Bispectral measurement in turbulence, J. F. M. Vol. 77, 1976, pp. 45 ~ 62.
- 31) Imasato, N : The Mechanism of the Development of Wind-Wave Spectra, J. of the Oceanographical Soc. of Japan, Vol. 32, 1976, pp. 253 ~ 266.
- 32) 樺木亨・田端竹千穂 : 減衰減における不規則波の変形について, 第19回海講論文集 1972, pp. 143 ~ 148.
- 33) 石田昭・金泰順 : 風波の波数周波数スペクトルに関する実験的研究, 第23回海岸工学講演会論文集, 1976, pp. 317 ~ 322.
- 34) Dean, R. G. : Relative Validities of Water Wave Theories, Proc. ASCE, J. WW. Div. Vol. 96, No WW 1, 1970, pp. 105 ~ 119.
- 35) Galvin, C. J. : Wave Breaking in Shallow Water, Waves on Beaches, Edited by R. E. Meyer, Academic Press, 1972, pp. 413 ~ 456.
- 36) Phillips, O. W. : Wave Interactions, Nonlinear Waves, Edited by S. Leibovich and A. R. Seebass, Cornell Univ. Press. 1974, pp. 186 ~ 211.
- 37) Hansen, J. B., and I. A. Svendsen : Laboratory Generation of Waves of Permanent Form, Proc. 14th Conf. on Coastal Eng., 1974, pp. 321 ~ 339.
- 38) Hulsbergen, C. H. : Origin, Effect and Suppression Secondary Waves, Proc. 14th. Conf. on Coastal Eng., 1974, pp. 392 ~ 411.
- 39) Phillips, O. M. : On the Dynamics of Unsteady Gravity Waves of Finite Amplitude, Part 1., The Elementary Interactions, J. F. M. Vol. 9, No 2, 1960, pp. 193 ~ 217.
- 40) 山口正隆 : 柱状海洋構造物に作用する波力, 1975年度水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理委員会, B. 6, p. 26.
- 41) Raman, H., and P. Venkatanarasaiah : Forces due to Nonlinear Waves on Vertical Cylinders, Proc. ASCE, J. WW. Div. Vol. 102, No WW 3, 1976, pp. 301 ~ 316.
- 42) Durgin, W. W. and J. C. Shiau : Wave Induced Pressures on Submerged Plates, Proc. ASCE, J. WW Div. Vol. 101, No WW 1, 1975, pp. 59 ~ 71.
- 43) Waddell, E. : 自然海浜における打上げ波の特性に関する現地観測, 第20回海講論文集, 1973, pp. 545 ~ 551.
- 44) Munk, W. H. et al : Directional Recording of Swell from Distant Storms, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London 255 A, 1963, pp. 505 ~ 584.
- 45) Madsen, O. S. et al : Energy Dissipation on a Rough Slope, Proc. ASCE, J. WW Div. Vol. 102, No WW 1, 1976, pp. 31 ~ 48.
- 46) 石田昭・伊藤親直 : 風波の反射によって起こるスペクトル構造の規則的变化について, 第18回海講論文集, 1971, pp. 43 ~ 47.

- 47) 石田昭： 造波装置による発生波の特性とその変形に関する研究，京大学位論文昭和49年，p. 244.
- 48) Bogert, B. P. et al : The Quefrency Alanysis of Time Series for Echos : Cepstrum, Pseudo - Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking, Time Series Analysis, Edited by Rosenblatt, Wiley, 1963, pp. 209~243.
- 49) 石田昭： 不規則波の反射に関する実験的研究，名古屋工業大学学報 Vol. 22, 1970, pp. 279 ~ 288.
- 50) 合田良実・鈴木康正・岸良安治・菊地治： 不規則波実験における入・反射波の分離推定法，港湾技研資料 No 248, 1976, p.24.