

地下水流出のモデル化について

高 木 不 折

1. 流出過程

地下水流出として河川を涵養する水は、雨水として地上に達してから河川に現われるまでに、流域内部で主としてつぎの3つの異なった力学過程を経る。

- 1) 地上より地下水帯までの鉛直浸透過程
- 2) 地下水帯内部での流動過程
- 3) 地表面、河川に流出したのちの流下過程。

このような分類は、流れの物理的性格を基準としたものであるが、また流域を構成する鉛直的な要素によって分類したものとも考えられる。これらの過程での特性はそれぞれ地下水流出として河川に現われる水の性質に反映するのである。

第1の過程は、いうまでもなく、地下水流出の母体、地下水への水供給過程であって、物理的には不飽和な鉛直浸透過程である。周知のとおり、地中への雨水の浸透には透水係数と関連した上限があり、したがって、地下水帯への水供給強度にも上限がある。この性質がハイドログラフにみられる地下水の流出流量の上限を定める要因ともなっている。

第2の過程は、地下水としての飽和浸透・流動過程である。地下水帯は一般に鉛直・水平方向に大きな3次元の広がりを持っているので、水は地表に流出するまでに、きわめて長時間をこの過程で費すことになる。その間に、土中の浸透現象を通じて、雨水は大きな力学的変換を受けるが、上記3つの過程のうちで、この変換が地下水流出のもつ最も重要な性質を左右すると言ってよい¹⁾。その1つの現れが、いわゆる貯留効果あるいは遅延効果である。

以上の2つの過程を経た水は、地下水帯と地表との交わりを通じて地上に流れ出し、第3の地表水・河川水の流れとして流域の末端に達する。地下水帯内での流れに比べると、地表での流れは速く、この第3の過程で費される時間は短い。したがって、この過程は単に流出水を上流より下流へと伝播させているにすぎないと言ってよい。ただし、低平地あるいは非常に大きな流域などでは、地下水と河水の相互干渉や河道内の流下過程によって、この過程でもかなりの力学的変換が起こっていることがある。

他方、流域を水平な平面的に見ると、流域上流部より流出した雨水は、途中の流域からの流出水を集めながら順次下流へと流下し、流域の最下流端に達する。このような流出・流下システムは Fig. -1 に示すような力学系の一方方向的連鎖からなっている²⁾。一般的には、それぞれの力学系内では、河川水・地下水といった流域水は互の干渉を通じて、流域水全体としての挙動をなし、その結果として河川への流出、あるいはより下段の力学系へと流れ出していると考えることができる。それぞれの力学系が実際の流域ではどのような領域

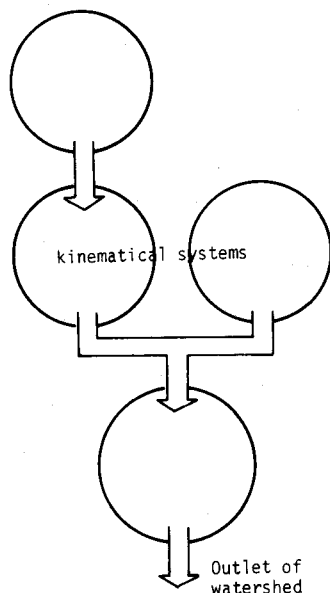


Fig. 1 Watershed as links of kinematical systems

に対応するかについては未だ固まったものはない。それは、地表面で起こる表面流出（この場合には、山腹斜面と河道との組み合わせを基礎として定義されている）の場合とは異なり、地下水流出が3次元の広がりを持った場で起こるからである。しかし、石原は地下水流出を対象として、この力学的連鎖を概念的に、Fig.-2 のように示した³⁾。

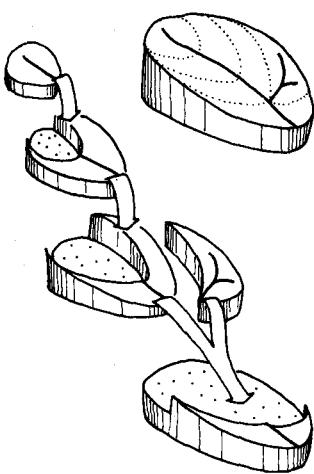


Fig. 2 Watershed structures for ground water runoff

2. 雨水の浸透

2-1 土壤水分の消長

地下水帯への水供給は、雨水の鉛直浸透現象を通じて起こり、土壤の水分の消長過程と密接な関係にある。通常の流域における土壤水分の鉛直的な分布状態についてはすでに多くの報告があるが^{4), 5), 6)}、Fig.-3 に示すように降雨の有無によって含水比が大きく変動するのは地表面下のごく薄い水文活性層（zone of hydrologic activity）であって、それより下部に位置する中間包気帯（intermediate zone）では、降雨の有無による含水比の変動幅は小さい^{6), 7)}。このことは、土湿不足を補う水は主として水文活性層で費されること、ならびに中間包気帯は上方より浸透した水をより下方へ伝達する役割を果たしていることを意味している。

不飽和状態での浸透現象は、Fig.-4 のように地表面に x 軸、これと垂直に z 軸をとり、水頭を ϕ 、体積比で表わした含水比を m 、透水係数を k とすれば、

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } \phi) \tag{1}$$

$$\phi = \varphi + p - z \cos \theta - x \sin \theta \tag{2}$$

と書かれる⁹⁾。ここで、 φ は毛管ポテンシャル、 p は圧力ポテンシャルをそれぞれ水頭で表わしたものであり、 θ は x 軸が水平となす角度である。地表面が水平の場合には、上の2式より基礎式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \tag{3}$$

上式を解くことによって、土壤水分の時間的変化、浸透現象を解明しようとした研究は数多いが、とくに Philip, J. R.⁴⁾ は逐次積分の方法によって、浸透の諸性質を論じた。

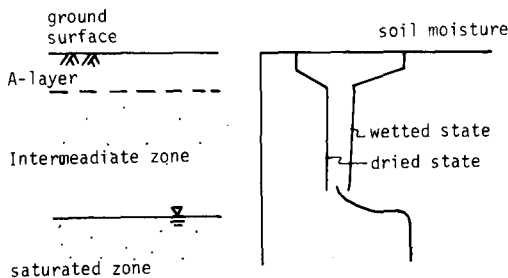


Fig. 3 Vertical distribution of soil moisture

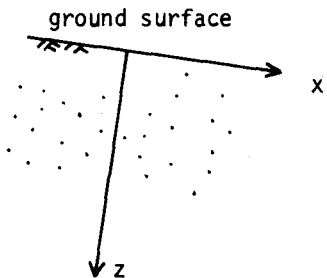


Fig. 4 Coordinate system

2-2 浸透現象

Philip の研究が土中水の挙動に着目したのに対し、石原⁸⁾らは流出現象との関連において式(3)を扱い、いわゆる浸透能の時間的変化を理論的に説明した。

降雨が始まってから、初期損失が終了し、さらに若干の時間が経過した後を対象とすると、透水係数といわゆる拡散係数に相当する量 $D (= k \frac{\partial \varphi}{\partial m})$ は z 方向ではば一定であると見做される。一方、浸透過程において間隙空氣が閉塞・圧縮される場合にはその効果をも考慮せねばならないが^{9), 10)}、浸透に際して水と空氣とが容易に交換され、土砂中における p の場所的变化が小さいときは、式(3)の右辺第2項は無視される。このような場合については、式(3)は

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \quad (4)$$

となる。

i) 有限砂中への浸透

z 方向に一樣かつ厚さ ℓ の土砂層の地表面に水の供給があつて、地表が毛管飽和状態に保たれるときは、式(4)を扱う場合の条件として、つぎのものを考えればよい。

$$\left\{ \begin{array}{ll} t = 0 \text{ で} & m = m_0 \quad (\text{初期含水比}) \\ z = 0 \text{ で} & m = m_c \quad (\text{毛管飽和含水比}) \\ z = \ell \text{ で} & \frac{\partial m}{\partial z} = 0 \quad (\text{毛管上昇部へ接続}) \end{array} \right. \quad (5)$$

この場合の式(4)の解は、

$$m = m_c - (m_c - m_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \exp\left(-\frac{D(2n-1)^2 \pi^2}{4\ell^2} t\right) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} z \quad (6)$$

となる。この式を用いて、地表面 $z = 0$ での浸透強度を求めると、近似的に

$$i = \frac{2D(m_c - m_0)}{\ell} \exp\left(-\frac{D\pi^2}{4\ell^2} t\right) + k \quad (7)$$

となる。この i は、いわゆる浸透能に対応するものである。

ii) 無限砂中への浸透

土砂層が無限に下方まで続いている場合には、

$$\left\{ \begin{array}{ll} t = 0 \text{ で} & m = m_0 \quad (\text{初期含水比}) \\ z = 0 \text{ で} & m = m_c \quad (\text{毛管飽和含水比}) \\ z = \infty \text{ で} & m = m_0 \end{array} \right. \quad (8)$$

の条件によって、式(4)を解き、地表での浸透強度 i を求めると、

$$i = (m_c - m_0) \sqrt{\frac{D}{\pi}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} + k \quad (9)$$

となることが示される。

一方、Gardner¹¹⁾ や Horton^{12~15)} は流域内部の平均浸透能として、多くの観測を基礎に、つぎの浸透能方程式を提案した。

$$i = (i_0 - i_c) \exp(-\alpha_i t) + i_c \quad (10)$$

ここに、 i_0 は初期浸透能、 i_c は最終浸透能で、1つの流域については一定値、 α_i は流域固有の定

数である。また、農学の分野などでは浸透能を表現する式として、Kostiakov¹⁶⁾によって最初に提案されたつぎの形式がよく用いられる。

$$i = At^{-\frac{1}{2}} + i_c \quad (11)$$

前に触れた Philip の研究⁴⁾によれば、地表の浸透能としてこの式が導かれる。石原が示した式(7)と式(9)は、それぞれ Horton と Kostiakov が提案した式(10)、式(11)と全く同じ構造をしており、これらの式を理論的に説明したものである。式(7)、式(9)と式(10)、式(11)とを比較すると、最終浸透能 i_c が透水係数 k に対応することが予想される⁸⁾。

iii) 初期浸透能の回復

降雨が終了して晴天が続くと、土壤水の浸透降下あるいは蒸発によって土壤水分は減少する。それに応じて流域の浸透能は回復上昇する。したがって、つぎに降雨があれば回復した浸透能を新たな初期浸透能 i_0 として浸透現象が起こることになる。

厚さ ℓ の一様な土砂層の土壤水分の移動は式(4)で与えられるが、地表面 $z=0$ の含水量が気乾状態 m_d に保たれるときは

$$\left\{ \begin{array}{ll} t=0 \text{ で} & m=m_c \quad (\text{毛管飽和含水比}) \\ z=0 \text{ で} & m=m_d \quad (\text{気乾状態}) \\ z=\ell \text{ で} & \frac{\partial m}{\partial z}=0 \quad (\text{毛管上昇部への接続}) \end{array} \right. \quad (12)$$

の条件を用いればよい。この条件に対する式(4)の解より、初期浸透能の回復曲線として、

$$i_0 = (i_c - i_d) \exp(-\beta_i t) + i_d \quad (13)$$

が導かれる。上式中 i_c 、 i_d 、 i_0 はそれぞれ m_c 、 m_d および m_0 の状態に対する浸透強度である。この式はまた、経験的に Horton によって示された浸透能回復曲線と同じものである。

上での取扱いでは、対象とする現象についていわゆる拡散係数 D を一定としている。実際には毛管ポテンシャル ϕ は含水比 m の函数であるが、土壤が湿潤に向う場合と脱水状態にある場合とでは同じ含水比 m に対しても異なり履歴性を持っている。さらに浸透係数自身も含水比 m の函数であって、計算機技術の進歩と相俟って、不飽和浸透のより詳細について多くの研究がされるようになってきた。^{5), 17), 18)} しかし、流域といった巨視的な立場に立つとき、基本的な事柄は上に掲げた考え方に集約されていると考えられる。

2-3 地下水帯への水供給

浸透降下した水のうちどれだけが、地下水帯への水供給となるかが、本項での主要課題である。しかし、この水供給の強度やその時間的变化状態については未知の事柄が多く、通常は上記のような単純な現象を基礎としてえられる定性的性格と、実際の流出解析からえられる知見を考慮したうえで検討されている段階にある。

地表面に原点をとり、鉛直下方に z 軸をえらべば、 $z=z$ の位置の断面での鉛直浸透強度 i_z は

$$i_z = -D \frac{\partial m}{\partial z} + k \quad (14)$$

となり、地下水面の少し上方（正しくは毛管飽和帯の上方）でのこの値を求めれば、地下水帯への水供給強度が求められるはずである。

ところで、式(14)の第1項は、上方に十分な水供給があり、土砂層が上方より順次湿ってゆく状態に

対しては（地下水面すぐ上部の毛管帯を除く）， $D \frac{\partial m}{\partial z} < 0$ であり，逆に，地表面が乾燥状態であって，上方から乾燥に向う場合には $D \frac{\partial m}{\partial z} > 0$ となる。言い換えれば，それぞれの場合での水の鉛直下方への浸透強度 i_z は，透水係数の与える強度より大きく，あるいは小さくなることになる。この $D \frac{\partial m}{\partial z}$ という量は，含水比の場所的な違いに基づいて毛管力によって起こされる流れである。浸透の初期や，降雨終了後地表面がかなり急激に乾燥されるときに水文活性層で起こる現象などを除けば，通常は式(4)の右辺第1項は重力による流れを示す第2項に比して十分小さい。したがって，鉛直方向の浸透強度 i_z は透水係数の与える強度に近い一定値ということになる。

$$i_z = k \quad (15)$$

この値が，実はHortonのいう最終浸透能に対応するわけである。このように，地下水帯への水供給強度を考えるに際しては，最終浸透能が重要な指標となる。

土壌中の含水比が毛管飽和含水比以下になれば，もはや重力によって土中を移動する水分はなくなり，水分の移動は毛管力のみによって起こることになる。流出といった点では，このような状態は降雨終了後の乾燥に向う蒸発損失を評価するうえで考慮せねばならない。

また，降雨が始まった後いつごろから地下への水供給が始まり，あるいは降雨終了後どれほどの遅れで地下水帯への水供給が終了するかは，その土壌内の水分が重力水として挙動するか否かが基準となる。Hortonの式(10)を基礎として考えると，浸透能がほぼ最終浸透能に等しくなった状態，時刻 t_g 以降では，土砂層内が上方から下方まで十分に湿らされ，外見上ほぼ定常状態に近い落ちついた状態で浸透が起きていることになる。したがって，この状態に達するまでの経過時間 t_g は，地下水帯への水供給の始まるまでの時間的遅れを示す1つの指標とされることが多い^{19), 20)}。本邦では，この遅れは数時間乃至1日程度である。^{20), 21)}

3. 地下水流

3-1 地下水帯の分布

地下水帯には，大別して自由水面を持った不被圧地下水帯（unconfined aquifer）と上下を不透水性地盤で境された被圧地下水帯（confined aquifer）とがある。不被圧地下水帯を含む地層の分布面積は，陸地全面積のほとんどを占めており，その地層は地下最も浅い不透水性地層の上部に位置しているが，わが国ではその深さは浅く，地層の厚さは，数m～数10mの程度である。他方，本邦の被圧地下水帯は火山岩地域に多く分布しているが，沖積層や洪積層内部では帯水層が比較的近距离で切れているのに対して，第三紀層では連続性も大きく，その包含する地下水も莫大な量に達する。ただ，これらの被圧地下水の多くは，いわゆる深層地下水であって，ここで考えている河川への流出に直接関与しているのは，比較的浅い位置にあって，地表面との交わりをもつ層に限定される。

実際の地下水は地質・地層構造といった地下の状態によって，局所的にはかなり複雑な運動をしているので，地下水の涵養源が雨水であるといっても，地下水の集水域は地表水のそれとは必ずしも一致しないので注意を要する。しかし，両者の差違がはなはだしいといわれる石灰質地帯で Macdonald²²⁾ が調べたところによると，地下水の集水面積は地表水のその0.8～1.3倍程度であって，かなりの面積的広がりを対象とする限り，両者はほぼ等しいと考えてよい。とくに，わが国の通常の流域では，地表面と浅層地下水面とはほぼ平行しており²³⁾，これらの事柄が地下水の集水面積として地表面のそれを代用することの根拠とされることが多い。

3-2 地下水の流れ

i) 基礎方程式

地下水は、地下の土砂間隙や空洞などを通じて流動している。巨大な地下の空洞などでは水はパイプ内の流れ、あるいは開水路の流れと同様な機構にしたがって流れてはいるが、このような特殊な地域を除けば、通常の地下水は透水性土砂間隙内を流動しており、したがって、地下水の流れは一般にダルシー則にしたがっていると見做してよい。地下岩盤のさけ目などを通しての流れも、巨視的な観点に立てば、非常に多くのさけ目の流れ全体としての性質が対象となるわけで、これを平均的には、ダルシー則が成立するものとして取り扱うことが多い。

ダルシー則はダルシー流体（仮想流体）の流速ベクトルを $\mathbf{v}$ 、流れの全水頭（全ポテンシャル）を ϕ 、透水係数を k として、

$$\mathbf{v} = -k \operatorname{grad} \phi \quad (16)$$

と書かれる。2-1節では、不飽和状態を対象に、この式が成立するものとして扱ったわけである。地下水の流れは飽和帯内の流れであるから、毛管ポテンシャルはなく、通常全ポテンシャルとしては、重力のポテンシャルおよび圧力ポテンシャルのみが重要となる。

このダルシー則は、流れを生むポテンシャル場の勾配（ $-\operatorname{grad} \phi$ ）とダルシー流速の関係を線型的に表現しているのだから、地下水の流れは、こうした点で線型的な特性を強く持っている。

一方、地下水帯内のある微小体積を対象とすると、連続方程式は一般に次のようになる。

$$-\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = \theta \rho \left(\beta + \frac{\alpha}{\theta} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (17)$$

上式中 x, y, z は位置を与える直角座標、 V_x, V_y, V_z はダルシー流速の x, y, z 成分、 ρ は水の密度、 β は水の圧縮率、 α は圧力増加による砂層厚の増加率、 θ は砂の間隙率である。前記のダルシー則とあわせることによって、地下水の基礎方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \theta \rho \left(\beta + \frac{\alpha}{\theta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (18)$$

と書かれる。

流れの曲がりの効果が小さく、流速の小さい流れでは静水圧分布を仮定することができ、 ϕ は一般に、水頭 h で与えられ

$$\phi = h \quad (19)$$

となる。

ii) 被圧地下水

上記の基礎方程式は地下水の流れの微小体積に関するものであって、被圧・不被圧地下水のいずれについても成立する。すなわち、この両者の流れに本質的な意味で大きな差があるわけではない。

しかしながら、前者では流れの場が限定されているのに対して（もちろん、圧力増加にともなった層厚の微小変化はあるが）、後者すなわち不被圧地下水帯は、いわゆる自由な境界、自由水面を通じて大気圧に開放されているために、この両者での地下水の挙動にはかなりの差異が現われる。

さて、被圧地下水の取り扱いにあっては、前述の式(18)を被圧地下水帯について積分すればよい。たとえば、Fig. 5のような流れでは、被圧地下水帯の領域はたとえば

$$z = f(x, y), \quad z = g(x, y) \quad (20)$$

といった独立変数の関数として与えられ、かつ圧力増加による層厚の変化もさほど大きくないので、

取扱う方程式はせいぜい擬似線型方程式となる。とくに、一様層厚 b の水平な地下水帯では、式(18)は

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (21)$$

$$S = \theta r_0 b \left(\beta + \frac{\alpha}{\theta} \right) : \text{貯留係数}$$

$$T = Kb : \text{transmissibility}$$

と全くの線型方程式となる。

この式が示すように、被圧地下水では、地下水帯のあるコントロールボリューム内部の水質量の時間変化は、主として空隙率および流体密度の変化に起因している。云いかえれば、地下水帯内部での圧力の伝播という形式で流れの擾乱が伝達されるのである。いま厚さ b が一定で長さが L_c 、($0 \leq x \leq L_c$) の被圧地下水帯で、空隙率、水の密度が変化しないとすると、式(21)はラプラスの方程式に帰し、水頭分布 $h(x, t)$ は

$$h(x, t) = -\frac{h(0, t) - h(L_c, t)}{L_c} x + h(0, t)$$

となる。この式は水頭分布が場所的に直線的であって、地下水帯の両端での圧力変化が、そのまま瞬時に（実際は空隙や水密度についての弾性波の速度で）地下水帯の内部に伝わっていることを示している。

なお、巨視的に見た場合には、被圧地下水の水頭も地下水帯内部に貯えられている水量と略比例の関係にあり、これらの間には線型関係が成立するものと考えてよい。

iii) 不被圧地下水

不被圧地下水帯では、自由表面が大気圧に開放されているので、圧力の増加による地層構造の変化は考えなくてもよいが、自由水面の昇降による運動の場の変化を考慮せねばならない。いま、Fig. 6 に示す不被圧地下水流について基礎方程式を書けば、

$$r_u \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_u h \frac{\partial (h \cos \theta + z)}{\partial x} \right) + r_e$$

もし、勾配 θ が小さい場合には

$$\begin{aligned} r_u \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_u h \frac{\partial (h + z)}{\partial x} \right) + r_e \\ &= k_u h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_u \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_u \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + r_e \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

上式中、第1項はいわゆる拡散による流れ、第2項は輸送項に相当する。もし、地下水位の場所的变化 $\frac{\partial h}{\partial x}$ が十分に小さいような場合には、拡散項が卓越した流れが起こることがわかる。

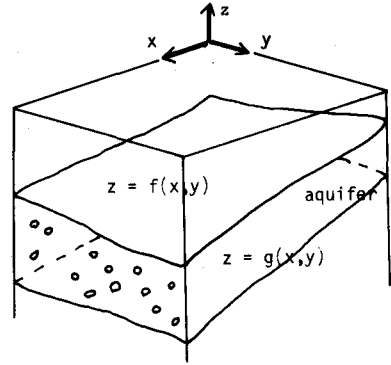


Fig. 5 Confined aquifer

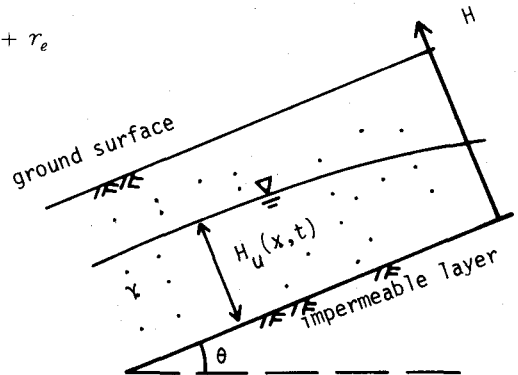


Fig. 6 Unconfined aquifer

また、上式は未知の水頭 $h(x, t)$ について非線型の構造をしており、かつこの非線型性は、不被圧地下水の運動の場の変化に起因しているのである。逆にいえば、地下水の運動の場の変化が微小な場合には線型に近い性質を持つことになる。

4 モデル化の基礎

4-1 被圧地下水の流出

前節までは、地下水の流出過程に関与する主要な要素について考えたわけである。ところで、流出のモデルを形造るためには、降雨あるいは地下水帯への水供給から流出に到るプロセスを問題にしなければならない。

被圧地下水のもつ圧力伝播的な性格に主眼をおくと、被圧地下水の流れは Fig. -7 のような、一端にタンクを持った水平地下水帯内の流れの特性に集約される^{1), 21), 24)}。このタンクは貯留水量と地下水帯内の圧力状態を表するものである。

諸記号は、 L_c : 被圧地下水帯の長さ、 $B_c f$ 、 $B_c F$: 被圧地下水帯およびタンクの、流れに垂直な断面積、 $H_c(t)$: タンク内の水深、 Q_c : 被圧地下水帯からの流出流量、 R_c : タンク単位幅あたりの水供給強度、 k_c : 被圧地下水帯の透水係数である。

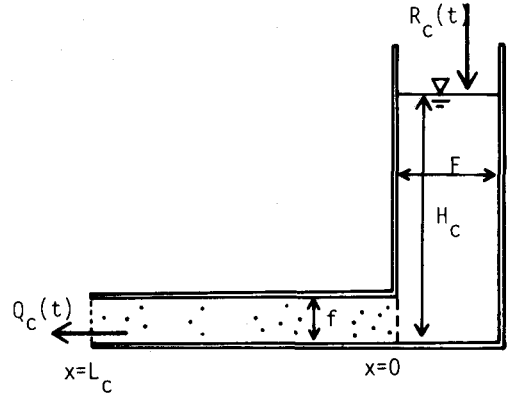


Fig. 7 Runoff model of confined component

このモデルについての連続の式、ダルシー則はつぎのようになる。

$$B_c F \frac{dH_c}{dt} = B_c R_c - Q_c(t) \quad (23)$$

$$Q_c(t) = k_c B_c f \frac{H_c(t)}{L_c} \quad (24)$$

このモデルに何ら水供給のない場合には、 $R_c = 0$ であるから、

$H(0) = H_{c0}$, $Q_c(0) = Q_{c0}$ とすると、解は

$$Q_c(t) = Q_{c0} \exp(-\alpha_c t) \quad (25)$$

$$\alpha_c = \frac{f k_c}{F L_c} \quad (26)$$

となる。 α_c はモデルの形状および透水係数 k_c 、云いかえると、流域内部の被圧地下水帯の地形・地質学的要素で定まる時間不変の定数となる。すなわち、水供給のない場合には、被圧地下水帯よりの流出流量は指数関数的な減少過程を経ることになる。

つぎに、地下水帯への水供給 $R_c(t)$ が存在する場合には²⁴⁾、連続式は

$$B_c F \frac{dH_c}{dt} = R_c B_c - Q_c \quad (27)$$

であって、ダルシー則とあわせて解けば、解は

$$Q_c = Q'_{c0} \exp(-\alpha_c \cdot t) + \int_0^t R_c(\tau) \cdot U'(t-\tau) d\tau \quad (28)$$

$$U'(t) = B_c \alpha_c \cdot \exp \{-\alpha_c t\} \quad (29)$$

となり、もし R_c が一定値であれば、式(28)は

$$Q_c = Q'_{c0} \exp(-\alpha_c t) + R_c B_c [1 - \exp(-\alpha_c t)] \quad (30)$$

となる。上式中、 t は水供給開始以降の経過時間であり、 Q'_{c0} は $t=0$ における流出流量である。また、すぐに判るように、式(28)、式(30)の第1項は水供給がなかった場合の流出流量を、第2項は水供給による流量の増加を意味している。さらに、被圧地下水の流出は線型的性格がつよく、式(24)、式(28)が示すように流出流量は貯留量に比例するとともに、水供給 $R_c(t)$ の convolution integral で与えられることがわかる。

4-2 不被圧地下水の流出

実際の地下水帯の形状などはかなり複雑ではあるが、不被圧地下水のもつ特徴、すなわち拡散的な性質に焦点を絞れば、この成分の基本的な性質はFig-8の一次元的なモデルに集約される^{1), 2D, 24)}。

このモデルの $x=0$ の一端は流域界に対応し、 x 方向の水の出入はなく、他端 $x=L_u$ (L_u : モデルの砂層の長さ) は水みちや河道に接していて、これを通して流出が起こるものとしている。砂層が水平ならば、基礎方程式は、近似的に

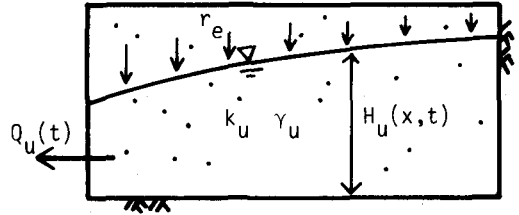


Fig. 8 Runoff model of unconfined component

$$\frac{\partial H_u}{\partial t} = \beta H_u \frac{\partial^2 H_u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma_u} \cdot r_e, \quad \beta = \frac{k_u}{\gamma_u} \quad (31)$$

となる。この式は非線型方程式であって、これまでにもいろいろな人によって取扱われてきた。

1) 非線型としての扱い

いま流量の低減状態を対象とし、 $r_e = 0$ とする。上式を非線型のまま扱うに際して

$$\left. \begin{aligned} H_u(0, 0) &= H_{u0} \\ H_u(L_u, 0) &= h_{u0} \\ \frac{\partial H_u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

とし、固有値問題として解くと

$$H_u(x, t) = \frac{1}{at+1} \left\{ -\frac{a}{2\beta} x^2 + \frac{h_{u0} - H_{u0}}{L_u} x + \frac{a}{2\beta} L_u x + H_{u0} \right\} \quad (33)$$

となる。 a は固有値であって、

$$a = \frac{2\beta}{L_u^2} (H_{u0} - h_{u0}), \quad \beta = \frac{k_u}{\gamma_u} \quad (34)$$

である。地表への出口 $x=L_u$ で、流出する流量 $Q_u(t)$ は初期値を $Q_{u0} (= Q_u(0))$ として

$$Q_u(t) = \frac{Q_{u0}}{(at+1)^2} \quad (35)$$

と求められる。この a の値は初期時における流域内部の水の分布状態によって定まるが、標準の低減

曲線が存在する河川では、 K を流域固有の定数として初期流量 Q_{u0} と

$$a = K \sqrt{Q_{u0}} \quad (36)$$

の関係にあることが示される。すなわち、 K を低減特性値として、不被圧地下水の流出流量の低減過程は

$$Q_u(t) = \frac{Q_{u0}}{(K \cdot \sqrt{Q_{u0}} t + 1)^2} \quad (37)$$

と分数関数的となる。^{21), 25)}

ii) 線型としての取り扱い

すでに述べたとおり、不被圧地下水はその運動の場の変化が小さい場合には線型的な性格を持つ。たとえば、扇状地や盆地のように地下水が多量に貯留され、降雨による地下水位の上昇量が比較的小さく、また無降雨期間が大きな水位降下を伴うほどには長くないような場合には、巨視的な（あるいは平均的な）水位 $\bar{H}_u$ に比し、その変動量 h_u は1次の微小量であると考えてよい。

こうした状態を想定すると、地下水位 H_u は定常項 $\bar{H}_u$ と非定常項 h_u に分けられ、

$$H_u(x, t) = \bar{H}_u + h_u(x, t) \quad (38)$$

$$|\bar{H}_u| \gg |h_u(x, t)| \quad (39)$$

と考えられる。そして方程式(31)は、

$$\frac{\partial h_u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 h_u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma_u} r_e(t) \quad (40)$$

$$\kappa^2 = \frac{k_u}{\gamma_u} \cdot \bar{H}_u$$

と線型化される。

初期および境界条件を

$$\left. \begin{aligned} h_u(x, 0) &= F(x) - \bar{H}_u = f(x), \quad (H_u(x, 0) = F(x)) \\ h_u(L_u, t) &= \text{const} \\ \left. \frac{\partial h_u}{\partial x} \right|_{x=L_u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

とすれば、上式の解は

$$\begin{aligned} H_u(x, t) &= \bar{H}_u \\ &+ \frac{2}{L_u} \sum_{s=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 (2s+1)^2 \pi^2}{4 L_u^2} t \right\} \cdot \cos \frac{(2s+1) \pi x}{2 L_u} \\ &\times \left\{ \int_0^{L_u} f(\lambda) \cos \frac{(2s+1) \pi \lambda}{2 L_u} d\lambda - (-1)^s \cdot \frac{2 L_u (h_u(L_u, t) - \bar{H}_u)}{(2s+1) \cdot \pi} \right\} \\ &+ \frac{2}{L_u} \sum_{s=0}^{\infty} \cos \frac{(2s+1) \pi x}{2 L_u} \\ &\times \left\{ \int_0^t \int_0^{L_u} \frac{1}{\gamma} r_e(\tau) \cos \frac{(2s+1) \pi \lambda}{2 L_u} d\lambda \cdot \exp \left(-\frac{\kappa^2 (2s+1)^2 \pi^2}{4 L_u^2} (t-\tau) \right) d\tau \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

となり、この砂層よりの流出流量は、

$$\begin{aligned}
 Q_u(t) &= -k_u \bar{H}_u \left. \frac{\partial h_u}{\partial x} \right|_{x=L_u} \\
 &= \frac{2k}{L_u} \bar{H}_u \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 (2s+1)^2 \pi^2}{4 L_u^2} t \right\} \cdot (-1)^s \cdot \frac{(2s+1) \pi}{2 L_u} \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^{L_u} f(\lambda) \cos \frac{(2s+1) \pi \lambda}{2 L_u} d\lambda - (-1)^s \cdot \frac{2 L_u (h_u(L_u, t) - \bar{H}_u)}{(2s+1) \pi} \right\} \\
 &\quad + \frac{2k}{L_u} \bar{H}_u \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{L_u} (-1)^s \cdot \frac{(2s+1) \pi}{2 L_u} \cdot \cos \frac{(2s+1) \pi \lambda}{2 L_u} d\lambda \cdot \frac{1}{\gamma} r_e(\tau) \exp \left\{ -\frac{\kappa^2 (2s+1)^2 \pi^2}{4 L_u^2} (t-\tau) \right\} d\tau \quad (43)
 \end{aligned}$$

で与えられる^{21), 24), 25)} この式の右辺第 1 項は、降雨が無い場合の流出流量の低減状態を表現し、第 2 項は水供給 $R(t)$ による流量の増分、増加過程を示している。

まず低減状態のみを考えると、式(43)の右辺第 2 項は無く、流出流量の低減はまとめて

$$Q_u(t) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_{uos} \exp(-\alpha_s t) \quad (44)$$

$$\alpha_s = \frac{\kappa^2 (2s+1)^2 \pi^2}{4 L_u^2} \quad (45)$$

の形式に書かれる。また、式(45)からわかるとおり、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ は α_0 の 9 倍、25 倍、49 倍……であって、低減開始後ある程度の時間を経ると、級数(44)の第 2 項以下は、第 1 項に比し速かに減衰することになる²⁴⁾。式(43)の $s=0, 1, 2, \dots$ に対応する水面変動成分の場所的スケール（あるいは波長）は $4 L_u / (2s+1)$ であって、波長の小さい成分の減衰過程はきわめて速かであり、大きなうねりとも言うべき波長の大きな成分は緩慢な減衰をすることがわかる。

以上のように考えると、不被圧地下水流出の低減特性は、また近似的に

$$Q_u(t) = Q_{u0} \exp \{-\alpha_0 t\} \quad (46)$$

とも表現される。この低減を指数低減性と呼ぶ。

つぎに、水供給による増水過程を考えよう。すなわち、式(43)の第 2 項であるが、これは線型方程式(40)の解であって、流量の増加プロセスは水供給 $R(t) = \frac{1}{\gamma} r_e(t)$ の convolution integral で与えられることがわかる。現象がここで述べたようなモデル化が十分の精度で許される場合には、地下水の流出に対しても、いわゆる単位図法を用いてもよいことになる。^{19), 26)}

もし、地下水帯へ、時間的に一定の水供給 r_e が続くときは、時刻 t における流出流量の増分 ΔQ は

$$\Delta Q_u(t) = r_e L_u B_u [1 - \exp(-\varepsilon t)] \quad (47)$$

$$\varepsilon = \frac{k_u}{\gamma_u} \cdot \frac{\pi^2 \bar{H}_u}{4 L_u^2} \quad (48)$$

と書かれる。^{24), 25)}

これまでは、Fig. - 8 に示した水平モデルについて論議したが、地下水帯が傾斜している場合であっても、式(38)、式(39)のような仮定を認める場合には、やはり流出流量の低減曲線としては、式(44)の型式の解がえられる。一方、3-1 節で述べたように、地表面と浅層地下水面とがほぼ平行し、水面勾配 I が時間的にあまり変化しないという観測結果を基礎として、式(22)を書き直したのち、地下水帯

全域に積分すると、貯留量 S に関する線型方程式

$$\frac{dS}{dt} = k_u \cdot I \cdot S + r_e L_u B_u \quad (49)$$

をうる。この方程式も低減状態に対しては、式(46)、一定の水供給については式(47)と同じ型式の解に帰結する。このような考えに基づいたモデルの例としては、角屋らの研究がある。^{20), 27)}

4-3 貯留・流出・低減特性

1章で述べたように、地下水帯の内部に注目するといっても、前節までで触れた流れの力学的特性を基礎とするものや、全流域での地下の貯留量 S と流出流量 Q の間の関係を基礎として、入力（水供給）から流出流量への応答特性・変換特性を調べようとするものがある。ここでは、この後者の基礎的事項に触れるが、このような考えの萌芽は前世紀後半、Dausse,²⁸⁾ Maillet^{29), 30)} などの研究にみられ、その後 Boussinesq,^{31), 32)} Zoch,³³⁾ Horton,³⁴⁾ Barnes^{35)~37)} らに継がれ、^{38), 39)} さらに多くの研究者によって扱われた。^{40), 41)}

式(46)で与えられる指数低減性をもった現象は自然界にはかなり多い。それらの現象では、多くは流出や放射（放出）の強度がその母体の残留量に比例するという構造をもっている。地下水流出の場合にも、同様な構造をもっているとすると、低減状態では

$$Q = \alpha S \quad (50)$$

$$-\frac{dS}{dt} = Q \quad (51)$$

の2式が成立し、初期流量を Q_0 とすると、その解がちょうど式(46)となり、 α_0 が式(50)の α と一致する。実際の河川での流量低減についての観測が、式(46)で比較的良好に表現され、かつ α が各流域で time-invariant な固有の値として評価できることが多いことを基に、式(50)で与えられる貯留・流量関係が地下水流出のモデル化の基礎としてよく用いられてきた。地下水帯へ水供給のある場合には、

$$\frac{dQ}{dt} + \alpha Q = \alpha r_e(t) \quad (52)$$

で、解は式(28) (29) と同形式の

$$Q(t) = Q_0 \exp(-\alpha t) + \int_0^t r_e(\tau) U(t-\tau) d\tau \quad (53)$$

$$U(t) = \alpha \exp(-\alpha t) \quad (54)$$

となる。

つぎに、級数形の低減、式(44)は上記のような構造をもったいくつかの流出成分が合成されて地下水流出を形成していると考えたものである。実際、Fig. -9 のモデルについての解、式(44)の $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ に対応する個々の水面変動成分（式(42)の $S=0, 1, 2, \dots$ の成分）については、上記の式(50)と同じ構造をしていることが示される。

なお、Horton は指数低減性を生かしつつも、低減部をより精度高く表現しようとして

$$Q = Q_0 \exp(-\alpha t^n) \quad (55)$$

の式を提唱した。^{12), 34)} これを Horton double exponential 型低減という。

式(50)で与えられる貯留・流量関係を非線型の

$$Q = K S^n \quad (n \neq 1) \quad (56)$$

とすると、低減曲線は

$$Q = Q_0 (1 + \mu t)^{n/(1-n)}$$

の形式となる。これは Maillet 型低減と呼ばれるが、^{29), 30)} 前記の不被圧地下水の低減、式(35)は上式で $n = 2$ としたものに相当することがわかる。

以上のように、地下水の流出流量 Q は貯留量 S と密接な関係にあり、しかも、その関係が流量の低減特性としてわれわれの眼に比較的純粋な形で触れているのである。実際の流出解析にあっては、このような低減特性、あるいは貯留量と流出量の関係に基礎を置いたものが多い。

4-4 要素とモデル

流出のシステムは降雨から流出に到るまで、多くの部分システムから成っていて、そのうち地下水流出に関与するシステムも又いくつかあり、全体として多段構造をしている。主要なそれぞれのシステム要素の性質については前節までで触れたが、これらの要素のもつ特性を、合理的にモデルに組み込む必要がある。その場合、モデルの目的如何によって、どの部分システムに焦点を合わせるか、またそのシステムのどのような性質に着目するかが問題となり、それに応じて自らモデルも違ったものになるであろう。場合によっては、ある部分システムについては応答系として扱い、他の部分システムについては物理モデルを考えるとといった扱いもされることになる。さらに、関与するシステムの数が多いばかりでなく、流域内部の諸状態のもつ確率統計的な性格ゆえに、統計的な議論をする必要も生まれてくる。¹⁹⁾

現在、モデルについて用いられている数学的手法などは多岐多様にわたっているとはいえ、それらのモデル構成の基礎は、とくに現象論的または物理的な観点に立てば、前節までで述べた事柄に集約されるといってもよい。¹⁹⁾

これまでに提案された地下水流出のモデルの詳細については、それぞれの論文に委ねるが、たとえば、筆者のモデルでは、^{1), 21), 24), 25)} 被圧・不被圧両地下水帯での流動機構の違いが、流出流量の性質の違いに反映するものとして組み立てられている。角屋らは、^{20), 27)} 地下水帯内部での現象には式(49)の線型関係を置く一方、入力降雨条件で流出を左右するのは、土壌水分の消長と地下水帯への水供給過程であるという立場からモデルを組んでいる。彼らは、さらに進んで、式(3)の毛管ポテンシャル ϕ 、透水係数 k を土壌水分の関数として評価したのち、同式を直接数値計算によって解き、その結果をモデル構成の要素として生かそうと試みている。^{42), 43)}

線型モデルが地下水流出に対して考えられたのは前世紀に逆上るが、地下水流出では比較的線型的な性格が強いといわれる根拠は、ダルシー則、流れの場の時間的変化が小さいこと、それらの帰結としての指数低減性にあるといってもよい。長期間を対象として地下水流出のシミュレーションに単位図法を用いたのは、わが国では磯野⁴⁴⁾、石原²⁶⁾の研究が古い。線型応答システムや単位図についてはすでに多く論じられ、応答関数を統計的に定めようという研究などが^{19), 45), 46)} 現在さかんに行なわれている。そうした多くは、線型性を基礎とし、非線型性などは数学的にカバーしようとしているように見える⁴⁶⁾。すなわち、現象の問題というより、えられた資料からどのように構造パラメーターを決定判断するかという事柄として論じられているものが多い⁴⁷⁾。なお線型・非線型システム解析などについては参考文献に委ねることにする。^{48), 49)}

5. 流域水の挙動に関する変分原理^{2), 50)}

5-1 基礎的概念

一般に、流出現象は、「流域内部におけるすべての流域水の挙動の一面」としてわれわれの眼に触れている。⁵⁰⁾ 言い換えれば、流域水全体としての動きの枠内で、河川水・地下水・湖沼水・土壌水な

ど、それぞれの成分水が相互に干渉し合いながら、それぞれの機構にしたがって運動し、その結果として流出現象が観察されるわけである。このように考えると、われわれは新しい課題、すなわち、「全流域水の挙動を支配する法則性は何か」という問題に直面する⁵⁰⁾。

ところで、流域（ここでは地下水流出についての）は、いくつかの力学系の直列および並列の連鎖から成っていることは1章において述べた。上のような観点に立てば、それぞれの力学系では、全流域水は全体として挙動したのち、つぎの力学系へと流下していると考えることができる。巨視的には、一方向的と見える流出現象（とくに地下水流出）も、このような過程を繰り返しているのであって、1つの力学系からつぎの力学系への流下は一方向的となっている（Fig. - 1 参照）。

一方、自然は、1つの力学系内では、最も安定した、あるいは最も自然な状態を追求しつつ変化し、一様化してゆくと言われている。また、平衡状態へと向うこの過程もまた何らかの力学的バランスに支配されている。すなわち、流域水も、1つの力学系では全体として同様なバランスにしたがって運動しており、その一側面として流出現象が起こっているわけである。

5-2 変分原理

河川水と地下水から成る力学系を考える。

Fig. - 9 はその力学系を示しており、系は地下水の運動領域 G と河川水の領域 S から成っていて、地下水・河川水は相互に干渉し合いながら、系全体としての挙動をしているのである。河川水については一次元的に扱うものとし、地下水帯は一様かつ等方性であって、Dupuit - Forchheimer^{51), 52)} の仮定が成立するものとする、この系全体としての挙動は、変分形式

$$\delta \int J dt = \delta \left\{ \iint_G L_g dx_i dt + \int_S L_s ds dt \right\} = 0 \quad (57)$$

または

$$\delta J = \delta \left\{ \int_G L_g dx_i + \int_S L_s ds \right\} = 0 \quad (58)$$

と表現される。ここで、上式および Fig. - 9 の記号は以下のとおりである。

$$L_g = \gamma (H_g + Z_0) \frac{\partial H_g^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_i k H_g^* \left(\frac{\partial (H_g + Z_0)}{\partial x_i} \right)^2 - r (H_g + Z_0) \quad (59)$$

$$L_s = B_s (H_s + \varepsilon + Z_0) \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(- \frac{\partial (H_s + \varepsilon + Z_0)}{\partial s} \right)^{3/2} \quad (60)$$

であって、それぞれ地下水、河川水の local potential と呼ばれる。

x_i : 地下水の運動の場に対してとった直角座標, $i = 1, 2$

S : 河川の流れ方向, および地下水領域 G の周辺にそった距離, 反時計方向を正とする。

Z_0 : 基準水平面より, 不透水層あるいは河床までの鉛直高。

θ_i : 不透水層の x_i 方向, S 方向と水平とのなす角度。

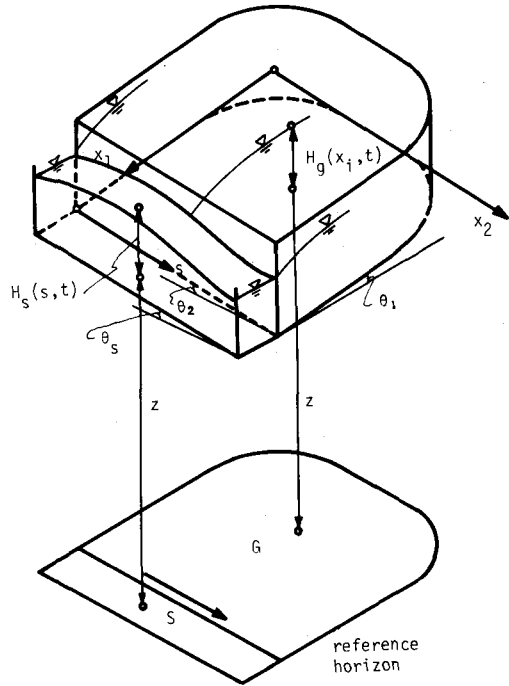


Fig. 9 Kinematical system

$$\sin \theta_i = -\frac{\partial Z_0}{\partial x_i}, \quad \sin \theta_s = -\frac{\partial Z_0}{\partial s}, \quad \text{また } k \sin \theta_i = f_i \quad \text{と記す。}$$

$H_g(x_i, t)$: 地下水深 $H_g(x_1, x_2, t)$ の略記。

$H_s(s, t)$: 河川水深

k, r : 地下水帯の透水係数と間隙率 (それぞれ一定)

n : マニングの粗度係数

B_s : 河川幅

ε : 河水のもつ速度水頭

r : 地下水帯単位面積あたりの水供給強度

$\int_G dx_i$: 面積積分 $\int_G dx_1 dx_2$ の略記

$\int_S ds$: 河川にそっての線積分

さて、式57, 58の変分計算に際しては、 $H_g^*(x_i, t)$, $H_s^*(s, t)$ を一旦固定したうえで、 $H_g(x_i, t)$, $H_s(s, t)$ のみについて変分を考え、その結果を補助条件式

$$\left. \begin{aligned} H_g(x_i, t) &\equiv H_g^*(x_i, t) \\ H_s(s, t) &\equiv H_s^*(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

とともに用いなければならない。この $H_g^*(x_i, t)$, $H_s^*(s, t)$ は現実にかかる水深分布であって式57, 58の変分は、この H_g^* , H_s^* のまわりの微小変位あるいは仮想変位 δH_g , δH_s について考慮されたものである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} H_g(x_i, t) &= H_g^*(x_i, t) + \delta H_g(x_i, t) \\ H_s(s, t) &= H_s^*(s, t) + \delta H_s(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} |H_g^*(x_i, t)| &\gg |\delta H_g(x_i, t)| \\ |H_s^*(s, t)| &\gg |\delta H_s(s, t)| \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

と考えている。

さて、式57, 58の満たすべき Euler - Lagrange の方程式を導き、さらに式(61)の条件を用いると、

$$r \frac{\partial H_g^*}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k H_g^* \frac{\partial (H_g^* + Z_0)}{\partial x_i} \right\} - r = 0 \quad (64)$$

を得る。また、河川と地下水の接する境界 S について、変分原理、式57, 58を満たす自然境界条件は、補助条件(61)の助けによって、

$$\begin{aligned} B_s \frac{\partial H_s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{B_s}{n} H_s^{*5/3} \left(-\frac{\partial (H_s^* + \varepsilon + Z_0)}{\partial s} \right)^{1/2} \right] \\ + \left(k H_g^* \frac{\partial H_g^*}{\partial x_1} - f_1 \cdot H_g^* \right) \frac{dx_2}{ds} - \left(k H_g^* \frac{\partial H_g^*}{\partial x_2} - f_2 H_g^* \right) \frac{dx_1}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

となる。

上の式(64)が地下水の流れに関する基礎方程式であり、式(65)は地下水帯よりの横流入あるいは地下水帯への横流出を考慮した河川水の基礎方程式であることは周知のとおりである。すなわち、式57

ないし58)は、この2つの式(64)と(65)とを合わせ表現しているわけである。

上の変分演算では、1つの水理量、たとえば、地下水深について、 H_g と H_g^* という2つの量を用いた。これは局所平衡の原理に基づくものであって、それを補助条件式(61)が補なっている。その場合、*印を付した H_g^* 、 H_s^* などは、実は流水断面の幾何学的状態を表わし、 H_g 、 H_s などは、流れを起こす駆動力あるいはエネルギーといった、流れの力学的条件に対応している。したがって、ここでいう変分原理は、流れの幾何学的状態を局所的に固定するという条件のもとで、力学的状態を仮想変位させた場合の汎函数 J の停留性を問題にしていることに相当する。なお、 J のもつ物理的意義については、参考文献に委ねるが、 J がこの力学系についてのエネルギー損失と深い関係にあることが示され、かつ、地下水と河川水はその流れの構造・機構の違いを通じて、系全体としての挙動における役割の重みを異にすることなどが示される。

6. 流域とそのスケール⁵³⁾

6-1 低減特性と流域面積

長期間の無降雨期間では、不被圧地下水流出成分が大きな役割を果たしている。この成分の流量の低減は、式37)の分数関数で表現されるが、この場合の低減係数 K は、実は流域面積と反比例の関係にあることが示される。²¹⁾すなわち、

$$K = m \cdot A^{-1} \quad (66)$$

Fig. — 10 は流域面積 数10 km² から10万 km² に到る、本邦17流域、西ドイツ26流域で求めた低減係数 K (各流域についての平均値)を、それぞれの流域面積 A に対してプロットしたものである。この図全体のプロットについては、 K と A との間に式(66)のような一定した関係は見出されない。しかし、

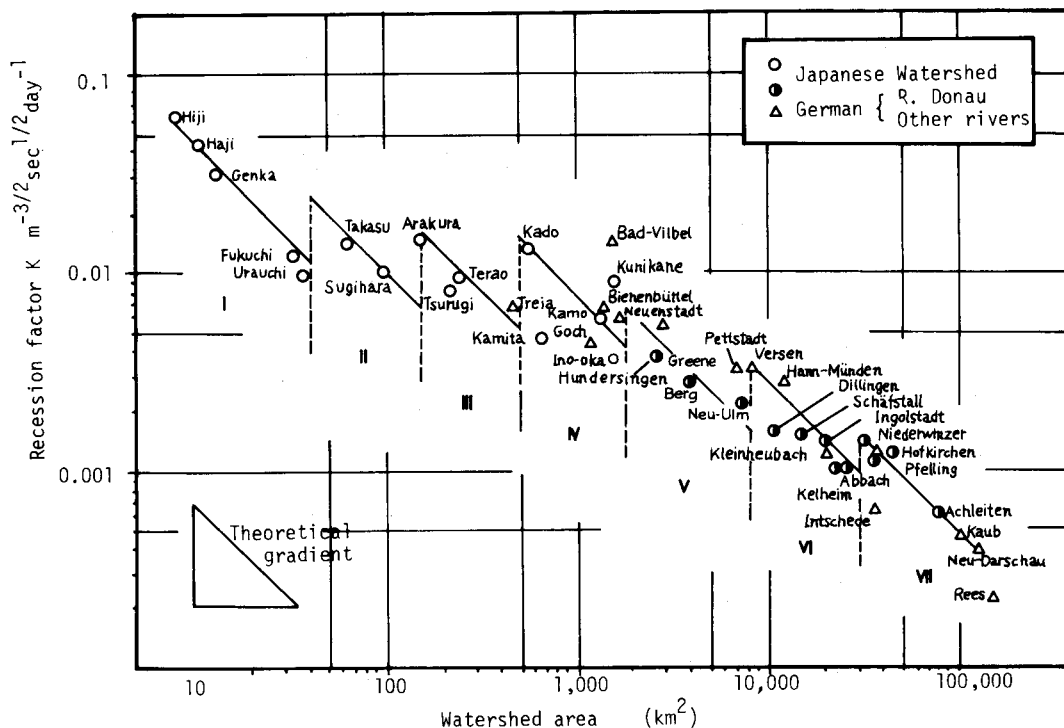


Fig. 10 Relationship between Recession factor K and catchment areas

図示するように、流域面積によっていくつかのグループに分けると、それぞれのグループのなかでは、すなわち、流域面積のある範囲内では、ちょうど式(66)と同様な関係が K と A との間に成立して、 m が一定となっていることがわかる。

m の値は、云うまでもなく、それぞれのグループについて異なるが、流域面積をいくつかのグループに分割すれば、その範囲内では低減特性値が流域面積の増加に応じて一定の法則性にしたがって変化しているのである。これは、地下水の流出現象の場所的スケールの現われであるといつてよい。

以上のような構造は、流域自体のもつ構造と深い関係にある。すなわち、河川に沿って上流から下流へと進めば、ある範囲では、集水面積は徐々に連続的に増加するが、河川がかなり大きな支川を含むと、集水面積は合流点の上下で大きく不連続的に変化する。事実 Fig. — 10 で K の値が面積 A の増加に対して不連続的に変化した直後の流量観測点は、大きな支川との合流点のすぐ下流に位置していることがみられた。

こうした事実は、本川の集水域と支川のそれにおける流域特性、あるいは水の分布状態の差違によるものと考えてよい。いずれにしても、流域特性値 K のもつ性質が流域面積と上に述べた関係にあることは、流域のスケールを考える上で非常に暗示的である。Table — 1 に、Fig. — 10 にみられたそれぞれのグループの流域面積の範囲をまとめる。

6-2 地下水流出と流域オーダー

Table — 1 に示した各グループの流域面積の限界値を、グループ番号（何番目のグループ）に対してプロットすると Fig. — 11 がえられる。一目でわかるように、 i 番目グループの流域面積の限界について、つぎの関係が成立する。

$$A_i / A_{i+1} = 0.27 \text{ (一定)}, \quad i = \text{I, II, } \dots \quad (67)$$

この式は、いわゆる流域面積則^{54), 55)}と同じ構造をしている。流域面積則は、オーダー u の流域の平均面積 $\bar{A}_u$ は R_a を一定値として

$$\bar{A}_u = \bar{A}_1 \cdot R_a^{u-1} \quad (68)$$

と書かれ、 R_a の値は大略3~4程度だと言われている。式(68)を式(67)の $\bar{A}_u / \bar{A}_{u+1}$ の形式に書き換えると、その比は略0.33~0.25であって、上のグループ分けは、実は流域のオーダーと深い関係にあることを想わせる。

元来、流域のオーダー（地形則）は、流域の地表近辺で起こる直接流出の現象との関連で考究されてきたが、ここで観察された事実は、地下水流出の現象も、流域の河道網の様子と深く係わっていることを示している。すなわち、地下水流出の特性自体は、地下の層での流動状況によって定まるが、それが、低減特性値といった形式でわれわれの目に触れる際には、流域の地表近辺での地形状態によって大きく左右されていることがわかる。

6-3 低減特性のばらつき

前節まででは、それぞれの流域での低減特性 K の平均値（それぞれの流域でかなりの低減部の解析を行っている）について議論した。実際には、 K の値は流域面積ばかりではなく、低減開始時の流域

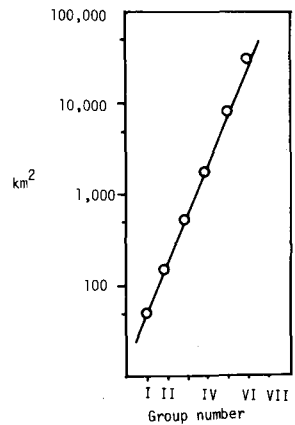


Fig. 11 Group number and catchment area

Table 1 Grouping of watersheds

group number	catchment area km ²
I	- 50
II	50 - 150 (or 200)
III	150 - 500 (or 700)
IV	500 - 1600
V	1600 - 8000
VI	8000 - 30000
VII	30000 -

の状態、水の場所的な分布状態の関数であることが理論的に導びかれる。すなわち、1つの流域であっても内部の水の分布状態が大きく変化すると、 K の値は必ずしも固有の値とはならずに変化する。

Fig. —12 は、Fig. —10 と同様な図に、各流域での K の値のばらつきの範囲を重ねて示したものである。

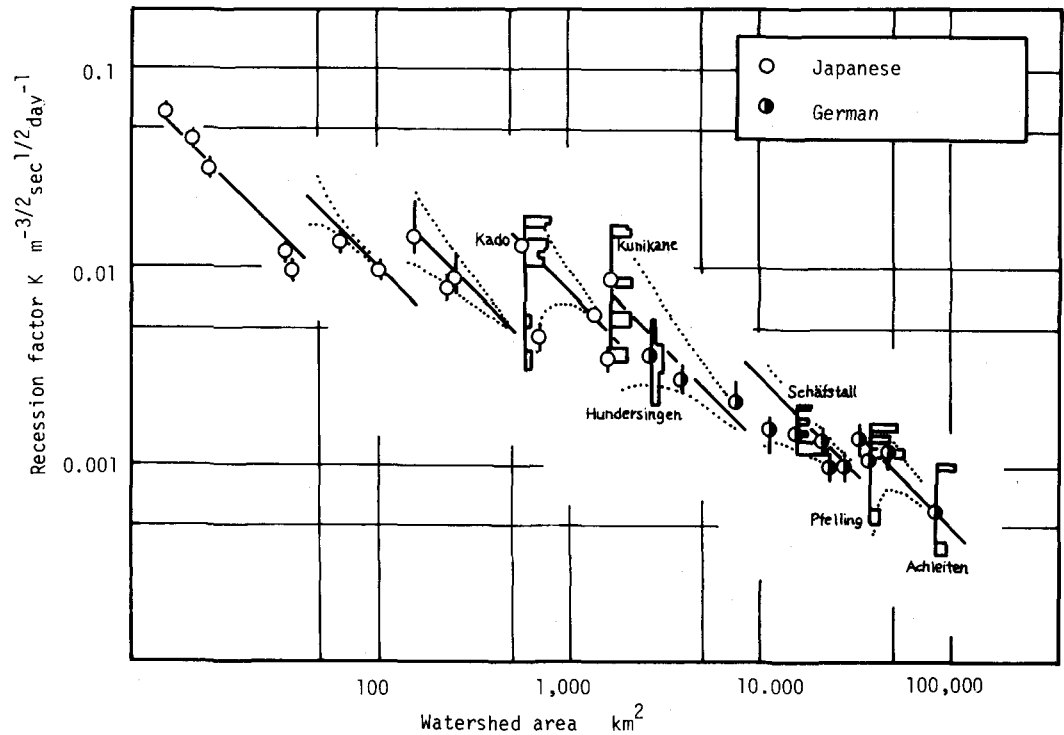


Fig. 12 On the scattering of recession factor K

図中、主要な観測点については、 K の値の分布状態も示した。この図から、前述のそれぞれのグループの範囲内では、流域面積の増加とともに、 K の値のばらつきが徐々に小さくなっていることがわかる。逆に、 K の値が不連続に変化した直後（合流点の下流の位置など）では、 K の値は大きく変化し、その前のグループの値に近い数値をとっている例が多い。このことは、合流点の下流では、ある場合は本川の集水域の性質が表に現われ、またあるときは、支川のそれが現われるといった、流域内部の水の分布状態に左右されているためであろう。

6-4 流域における低減特性の平均化過程

流域の上流部より下流へと流下するにともなって、低減特性は徐々に変化し、かつ平均化される。この過程をより詳しく考えるためには、分布系として考えねばならない。そのために、ここでは6章で述べた変分原理を応用した。

Fig. —13 は、地下水帯と河川から成る1つの力学的システムであるが、地下水帯は性質の異なった n 個の領域から成り、河川も n 個の範囲からできている。地下水も河川水もそれぞれ一次元的な流れで表わされるものとしよう。すなわち、個々の地下水領域については、地下水の低減性は、不被圧地下水流出の式(33)で与えられ、その低減特性は河水との干渉がなければ、 a_j あるいは、式(37)の K_j (j は j 番目領域の意)で与えられるものとする。また、河川の上流端からは、低減係数 K_s をもった式(37)型の流入水があるものとする。このように考え、式(58)の local potential L_g に含まれる H_g 、 H_g^* とし

ては、式(33)の型のもを用い、 L_s の H_s 、 H_s^* としては、 n ヶの河川領域で水深は線型的に変化するものとした。ただし、 H_g についてのパラメーターは a_j を、 H_g^* については系全体としての a^* を用いた。河川についても同様である。

さて、変分原理(58)は、地下水帯領域および河川についての積分であるから、 j 番目領域での local potential を L_{gj} 、 L_{sj} とすると、

$$\delta \left\{ \sum_j \int L_{gj}(x, \dots, a_j, a^*) dx + \sum_j \int L_{sj}(s, \dots, a_s, a^*) ds \right\} = 0 \quad (69)$$

と書き直される。

式(69)も近似的な扱いではあるが、これを解くと、系全体の挙動としての a^* の値が求められ、これを低減係数に書き直すと

$$K^* = \frac{\sum_j^n p_j \cdot q_j^{\frac{3}{2}} - \frac{B\ell}{C} q_s^{\frac{3}{2}} \cdot K_s}{\sum_j^n p_j q_j} \quad (70)$$

となる。^{21), 50)} K^* の値は、この力学系の最下端での値であり、 p_j は j 番目地下水領域の地形地質条件で定まる定数、 B は河川幅、 ℓ は河川長、 C は流量 Q を $Q = CH_s^2$ と近似した場合の定数、 q_j 、 q_s は、低減初期の河川流入流量を Q_s 、 j 番目地下水領域よりの流出量を Q_{uoj} 、下流端での流量を Q_{uo} としたとき、

$$q_j = Q_{uoj} / Q_{uo}, \quad q_s = Q_s / Q_{uo} \quad (71)$$

である。

式(70)は、1つの力学系に K_s の特性で河川から流入した水は、この系内で各地下水領域からの流出水と干渉し、系全体としての挙動をしたのち、最下流端からは低減特性 K^* の値を持って流出することを意味している。さらに、式(70)が示しているように、系全体としての性質（最下流端での性質） K^* は、上流よりの流入水の K_s と、各地下水帯領域での K_j の一次結合で与えられるのである。

この関係式(70)は、また、 K^* が K_s と K_j の加重平均で与えられることを意味している。いいかえれば、低減特性値は1つの力学系でこのような平均化が行なわれていることになる。しかも、その場合の重みは、流域の特性 p_j や B 、 C 、 ℓ といった一定値ばかりではなく、流域内部の水の分布状態 q_s 、 q_j によって定まるのである。

実際の観測点について求められる低減特性値 K は、実は、式(70)の K^* の値に対応している。この K^* の値が、流域によっては流域固有の値となり、また場合によっては、かなりのばらつきを示すことはすでに述べた。

さて、1つの特定の流域で、 K^* が一定となり、あるいはばらつくのはどういう場合に相当するか考えよう。式(70)からわかるように、 K^* が一定となる場合は、

- i) 流域内部の水の分布状態がいつもほぼ一定していて、 q_s 、 q_j の値がつねに一定と考えてよい場合、
- ii) 水の分布が変わり、たとえ q_s や q_j が変化しても、系の内部に非常に多くの性質を異とする

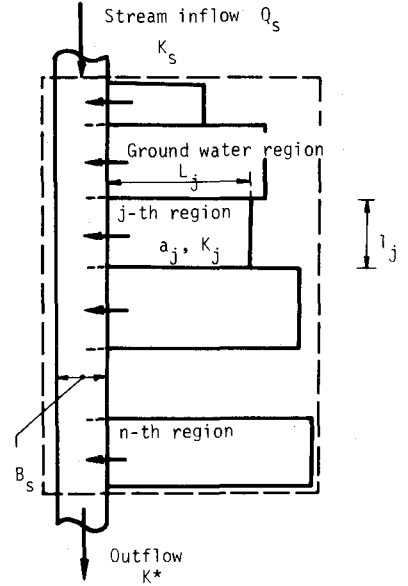


Fig. 13 Kinematical system

領域があって、すなわち n が非常に大で、いわゆる平均化過程が卓越するために、その結果として K^* の値が外見上ほぼ一定となる場合

の2つであろう。

流域が小さく、その性質も、降雨の場所的分布状態も流域内部ではほぼ一樣な場合には、上記のⅠ)に示したことがいえるだろう。**Fig. — 12**で流域面積が $100 \sim 150 \text{ km}^2$ より小さい流域で、 K の値のばらつきが小さいのは、ちょうど、このような場合に対応しているといつてよい。

一方、流域面積が大きくなると、当然その内部状態も複雑となり、 n の値は大となろう。すなわち、上記のⅡ)で述べたように平均化過程が卓越することになる。**Fig. — 12**の各グループの範囲内で、流域面積の増加とともに、 K の値のばらつきが減り、やがて流域固有の値と考えてよいようになる事実は、このことを示している。

なお、これらの論議は1つの力学系内部での K の平均化についてのものであるが、実際の流域はいくつもの力学系の連鎖になっているわけで、上に述べた平均化が繰り返されているのである。このようなプロセスを経て、地下水流出の特性は、上流から下流へと順次変化している。

6-5 地下水流出と流域構造

前節で述べた事柄を、本邦・欧州合わせて11の流域力学系で解析した。その詳細は割愛するが、その結果によると、低減特性を定める上で、河川水の果す役割は小さいことが判明した。すなわち、河川水として上流より流入する初期流量8に対して、力学系内部より流出する流量が2の割合($q_s=0.8$, $\Delta q_j=0.2$)であっても、式(70)の加重平均化過程にあって、多い目に見積っても、河水の特性 K_s の重みは、地下水帯のその1.6倍程度にすぎない。また、流入河川水と流出地下水が1対1($q_s=0.5$, $\Delta q_j=0.5$)の際は、平均化の重みの比は $0.03 \sim 0.1:1$ 程度となる。このことは、1つの観測点での低減特性 K の値は、その点のすぐ上流に位置する力学系の性質で定まることを意味している。

低減特性について本章で述べた事柄、面積によっていくつかのグループ分けが可能であり、それが流域のオーダーと深く係わりあっていること、流域内部での低減特性の平均化過程などを考え合わせると、地下水流出についての流域の構造は、石原が概念的に示した**Fig. — 2**で矛盾なく説明されることがわかる。5章で述べた力学系を直ちに**Fig. — 2**の部分領域と対応することには、なお問題があるが、このような流域構造の概念、あるいは力学系の概念は地下水流出を考えるうえの基礎として重要であろう。

ところで、**Fig. — 12**を振り返ると、流域の低減特性が固有の値として特定されうる流域は、1つのlumped system modelとして扱われうることになる。一方、特性が一定せぬ流域では、流域内部の水の分布状態をも考慮に入れる必要があり、より小さいlumped system modelの組み合わせにするとか、distributed modelにするとかいった工夫をせねばならない。本章では、低減特性のみを取りあげたのであるが、低減特性が地下水流出の基本的な性質の1つであるという認識に立てば、**Table — 1**、**Fig. — 12**は地下水流出のモデルを考えるうえで、1つの重要な指針を与えるものと思われる。

7. あとがき

最近の流出に関する研究の動向をみると、一方では現象に焦点を合わせたモデルが、他方では、時系列としてや統計的な扱いが強調されている。この両者は言うまでもなく、流出現象の正しい、合理的な予測といった共通の最終目標を持っているが、今日のところ、両者を結ぶ唯一の橋渡しは線型性のみにあるといった段階にある。5章、6章で述べた事柄は、この橋渡しを1つの目標として行なった研究の成果の一部であるが、これからは、上記の2つの立場が別々の道を進むというよりは、将来互に合体されうる可能性を考慮しつつモデルの構成に心を配らねばならないであろう。

流域内部の開発による流出変化など、近年問題になっている事柄は black box としてではなく、流域内部での現象に眼を向けた研究を求めているように思われる。そのためには、実際の試験地などでの詳細な観測など、^{56), 57)} いま一度現象自体にもどった検討が必要なる時期にあると言ってよいであろう。

参 考 文 献

1. 高木不折：低水流出の低減特性に関する研究，土木学会論文集，第128号，pp. 1～11，1966.
2. 高木不折：流域水の挙動に関する変分原理の物理的意義，土木学会論文報告集，第227号，pp. 23～28，1974.
3. 石原安雄：水文サイクルと数理モデル，水工水理学，第8章，p. 311，丸善，1972.
4. Philip, J.R. : The theory of infiltration, Part 1-7, Soil Science, Vol. 83-85, 1957.
5. 金子 良：農業水文学，水文学講座12，共立出版，1973.
6. Schiff, L. and Dreibelbis, F.R. : Infiltration, soil moisture, and land-use relationships with reference to surface runoff, Trans. Amer. Geophysical Union, Vol. 30, No 1, pp. 75-88, Feb. 1949.
7. Dreibelbis, F.R. : Some aspects of watershed hydrology as determined from soil moisture data, Journ. Geophysical Research, Vol. 67, No 9, pp. 3425-3435, Aug. 1962.
8. 石原藤次郎，石原安雄：出水解析に関する最近の進歩，京大防災研年報，第5号B，pp. 35-58，1962.
9. 高木不折，馬場洋二：砂中における鉛直浸透の機構に関する研究，土木学会論文集，第144号，pp. 11～19，1967.
10. Youngs, E.G. and Peck, A.J. : Moisture profile development and air compression during water up-take by bounded porous bodies, 1, Soil Science, Vol. 98, pp. 290-294, 1965. 2, Soil Science, Vol. 99, pp. 327-334, 1965, 3, Soil Science, Vol. 100, pp. 44-51, 1965, および Wilson, L.G. and Luthin, J. N. : Effect of air flow ahead of the wetting front on infiltration, Soil Science, Vol. 96, 1963.
11. Gardner, W. and Widstoe, J.A. : Movement of soil moisture, Soil Science, Vol. 11, pp. 215-232, 1921.
12. Horton, R.E. : The role of infiltration in the hydrologic cycle, Trans. Am. Geophysical Union, Vol. 14, pp. 446-460, 1933.
13. Horton, R.E. : An approach toward a physical interpretation of infiltration capacity, Soil Science Society Amer., Proc. 5, pp. 399-417, 1940.
14. Horton, R.E. : Determination of infiltration capacity for large drainage basins, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 18, pp. 371-385, 1973.
15. Horton, R.E. and Vliet, R. Van. : Determination of areal average infiltration capacity from rainfall and runoff data, U.S. Department of Agriculture, Soil-Conservation Service, 1940.
16. Kostikov, A.N. : On the dynamics of the coefficient of water percolation in soils and on the necessity for studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration, Trans. 6th Conference, Intern. Soc. Soil Science., Russian part A, 17-21, 1932.
17. 岡 太郎，角屋 睦：裸地斜面域における雨水の浸入と地下水流出(2)，京大防災研年報，第17号B，pp. 523-533，1974.
18. Freeze, R.A. : The mechanism of natural ground-water recharge and discharge 1. One-dimensional, vertical, unsteady, unsaturated flow above a recharging or discharging ground-water flow system, Water Resources Research, Vol. 5, No 1, pp. 153-171, 1969.
19. 高棹琢馬，池淵周一：長期間流出機構の情報論的研究，京大防災研年報，第12号B，pp. 273-293，1969.
20. 角屋 睦：山地小河川の低水解析(1)，京大防災研年報，第9号，pp. 593-599，1966.
21. Takagi, F. : A study on the dynamic process of the long-term runoff, Dissertation of Kyoto University, Dec. 1970.

22. Macdonald, A.T. and Kenyon, W.J. : Runoff of chalk streams, Proc. of the Institution of Civil Engineers, Vol.21, pp. 23-38, 1962.
23. 蔵田延男：水理地質学，朝倉書店，1955.
24. Ishihara, T. and Takagi, F. : A study on the variation of low flow, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University, Vol. 15, Part 2, No.95, pp.75-98, Nov. 1965.
25. Takagi, F. : A study on the dynamic process of the ground water runoff, Memoires of the Faculty of Engineering, Nagoya University, Vol.23, No.2, pp. 221-284, March, 1972.
26. 防災研究協会：雨水による流出量の推定に関する調査研究，第2編，1960.
27. 角屋 睦，豊国永次，犬達俊夫：山地小流域河川の低水解析(2)，京大防災研年報，第10号B，pp. 147-154，1967.
28. Dausse, M. : De la pluie et de l'influence des forets sur la cours d'eau, Ann. Ponts Chaussees, Mars - Avril, 184-209, 1842.
29. Maillet, Edmond : Sur la prevision des debits minima des cources de la Vanne, Compt. Rend. Acad. Sci., Vol.134, pp. 1103-1105, 1902.
30. Maillet, Edmond : Essai d'hydraulique souterraine et fluviale, Libraire Sci, A. Herman, Paris, 1905.
31. Boussinesq, J. : Essai sur la theories des eaux courantes, Memoires presentes par divers savants a l'Academic des Sciences de l'Institut National de France, Tome XXIII, No.1, 1877.
32. Boussinesq, J. : Recherches theoretique sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le debit des cources, J. Math. Pure Appl., Vol. 10 (5th series), 5-78, pp. 363-394, 1904.
33. Zoch, R.T. : On the relation between rainfall and streamflow, Monthly Weather Review, 62, 1932.
34. Horton, R.E. : Surface Runoff phenomena, Part 1, Analysis of the hydrograph, publ. 101, Horton Hydrological Laboratory, Voorheesville, New York, 1935.
35. Barnes, B.S. : The structure of discharge recession curves, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 20, pp. 721-725, 1939.
36. Barnes, B.S. : Discussion on analysis of runoff characteristics, Trans. ASCE. 105, pp. 104-106, 1940.
37. Barnes, B.S. : Subsurface-flow, Trans. Am. Geophys. Union, Vol. 25, pp. 746, 1944.
38. Hall, F.R. : Baseflow-recession--a review, Water Resources Research, Vol. 4, No.5, pp. 973-983, Oct. 1968.
39. Appleby, F.V. : Recession and the baseflow problems, Water Resources Research, Vol. 6, No.5, pp. 1398-1403, Oct. 1970.
40. Mayboom, P. : Estimating ground water recharge from stream hydrographs, Journ. Geophys. Research, Vol. 66, No.4, pp. 1203, April. 1961.
41. Denisov, V.M. : A method of computing recession curves (in Russian), Meteorol. Gedrol., Vol. 3, pp. 18-24, 1961.
42. 岡 太郎，角屋 睦：裸地斜面域における雨水の浸入と地下水流出(1)，京大防災研年報，第17号B，pp. 511-533，1975.
43. 岡 太郎，角屋 睦：裸地斜面域における雨水の浸入・流出過程，京大防災研年報，第18号B，pp. 469-482，1975.

44. 磯野良徳：山岳地域の地下水流成分の一決定法について，電力気象連絡会彙報，第2輯，第8巻，第4号，pp. 204-216，1958.
45. 日野幹夫：情報理論的水文学への序説，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，東工大土木研究報告，No 4，6，1968.
46. 日野幹夫：水文時系列予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，pp.
47. 高棹琢馬：流出機構，1967年度水工学に関する夏期研修会講義集A，67-03，土木学会水理委，1967.
48. 日野幹雄：非線型流出解析および適応流出予測，1975年水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委，A-8，1975.
49. 藤田睦博：線型性の解析，1975年水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会水理委，A-7，1975.
50. Takagi, F. : A study on the behaviors of Basin Water by means of the Variational Technique, Proc. JSCE, Vol. 185, pp. 71-81, 1971.
51. Dupuit, J. : Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, 1863.
52. Forchheimer, Hydraulik, 3rd ed. 1930.
53. 高木不折，ローデ：地下水流出の場所的スケールについて(仮題)，土木学会論文報告集投稿準備中，
54. Strahler, A.N. : Quantitative analysis of watershed geomorphology, Trans. Am. Geophys. Union, Vol. 38, pp. 913-920, 1957.
55. Chow, V.T. : Handbook of Applied Hydrology, Mc Graw Hill Book Co. Ltd, New York, 1962.
56. 石原安雄・小葉竹重機：荒川流出試験地における一連の研究，京大防災研年報，など多くの試験地での観測
57. The hydrological characteristics of river basins, IAHS-AISH, Proc. of the Tokyo Symposium, IASH Publ. No 117, Dec. 1975.